

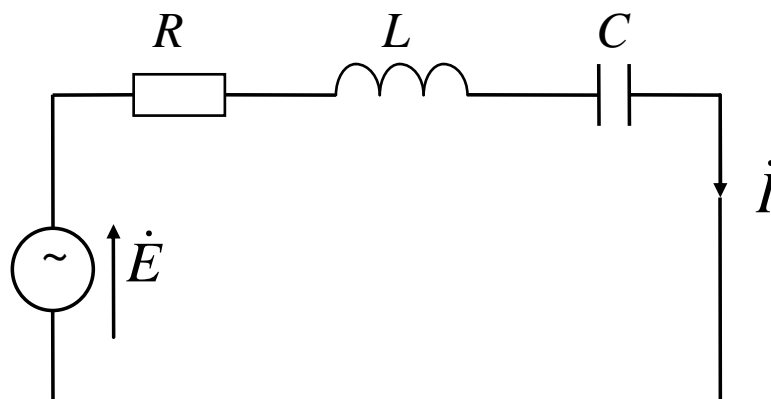
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Б.И. Коновалов

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Часть 1

Учебное пособие



ТОМСК – 2007

Федеральное агентство по образованию

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

**Кафедра промышленной электроники (ПрЭ)**

**Б.И. Коновалов**

# **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

## **Часть 1**

**Учебное пособие  
для студентов по специальности 210106  
«Промышленная электроника»,  
обучающихся в филиалах ТУСУР**

**2007**

Рецензент: доцент кафедры «Теоретические основы электротехники» Томского политехнического университета, кандидат техн. наук Купцов А.М.

**Коновалов Б.И.**

Теоретические основы электротехники: Учебное пособие. — Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2007. — Часть 1. — 151 с.

Рассмотрены основные методы расчета установившихся режимов линейных электрических цепей постоянного, одно- и трехфазного переменного синусоидального тока, особенности линейных цепей при несинусоидальных токах, основы теории пассивных четырехполюсников и фильтров. Теоретический материал проиллюстрирован подробным решением численных примеров.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся в филиалах ТУСУР по специальности «Промышленная электроника».

© Коновалов Б.И., 2007

© ТУСУР, 2007

## СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ.....	5
2 ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА .....	7
2.1 Элементы электрических цепей и схем .....	7
2.2 Закон Ома для цепи с э.д.с.....	10
2.3 Законы Кирхгофа.....	13
2.4 Метод контурных токов.....	19
2.5 Метод узловых потенциалов .....	21
2.6 Метод двух узлов.....	26
2.7 Метод наложения. Преобразование схем .....	28
2.8 Метод эквивалентного генератора .....	34
2.9 Теорема компенсации .....	37
2.10 Передача энергии в нагрузку .....	38
3 ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА .....	41
3.1 Переменный ток и его основные характеристики .....	41
3.2 Изображение синусоидальных функций векторами и комплексными числами.....	42
3.3 Элементы цепей переменного тока .....	46
3.4 Основы символического метода .....	50
3.5 Активная, реактивная и полная мощности.....	59
3.6 Частотные характеристики.....	69
3.7 Явление резонанса.....	71
3.8 Цепи с взаимной индуктивностью .....	81
3.9 Воздушный трансформатор .....	88
3.10 Передача энергии в нагрузку на переменном токе.....	90
4 ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ.....	92
4.1 Основные понятия .....	92
4.2 Расчет трехфазных цепей .....	99
4.3 Активная, реактивная и полная мощности трехфазной системы .....	107
4.4 Указатель последовательности чередования фаз.....	112
4.5 Получение кругового вращающегося магнитного поля ....	113
5 ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ .....	117
5.1 Разложение в ряд Фурье. Частотный спектр.....	117

5.2 Расчет линейных цепей с несинусоидальными токами .....	122
5.3 Резонансные явления при несинусоидальных токах .....	125
5.4 Особенности работы трехфазных систем, вызываемые гармониками, кратными трем .....	129
6 ТЕОРИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА. ФИЛЬТРЫ .....	133
6.1 Основы теории пассивного четырехполюсника .....	133
6.2 Основы теории электрических фильтров .....	142
7 ЛИТЕРАТУРА.....	151

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Назначение дисциплины «Теоретические основы электротехники» — это изучение принципов практического применения электромагнитных явлений, рассмотренных ранее в физике.

Если обратиться к истории практического применения электричества, то мы убедимся, что много открытий и изобретений приходится на долю российских ученых и инженеров, которые совместно с выдающимися иностранными учеными положили начало важнейшим отраслям электротехники.

После изобретения А. Вольта гальванического столба появилась возможность получать электрический ток. Исследуя процессы в электрической цепи, В.В. Петров открыл (1802 г.) электрическую дугу и указал на возможность практического применения ее для освещения, плавки и сварки металлов.

Весьма важную роль в развитии учения об электромагнитных явлениях сыграл английский ученый М. Фарадей, который в 1831 г. открыл явление и закон электромагнитной индукции.

В 1833 г. российский академик Э.Х. Ленц открыл закон, устанавливающий связь между направлениями индукционных токов и их электромагнитными и электродинамическими взаимодействиями. В 1844 г. Э.Х. Ленц независимо от английского исследователя Джоуля установил, что количество тепла, выделяющегося в проводнике при прохождении тока, прямо пропорционально сопротивлению проводника и квадрату тока.

Первый в мире электромагнитный телеграф был построен в 1832 г. в России П.Л. Шиллингом.

В 1845 г. немецким физиком Г. Кирхгофом были сформулированы основные законы разветвленных электрических цепей, которые названы его именем и имеют огромное значение для развития теоретической и практической электротехники.

Изобретенная российским ученым П.Н. Яблочковым электрическая свеча (1876 г.) положила начало электрическому освещению.

За период с 1800 по 1880 г. в тесной связи с развитием прикладной электротехники (телеграфии, гальванопластики, техники

электрического освещения) развивалась теория цепей постоянного тока.

Начало применению переменных токов положил в 1876 г. П.Н. Яблочков. Проблема передачи электрической энергии на значительные расстояния связана с повышением уровня напряжения для снижения потерь в проводах. Для преобразования уровня напряжения переменного тока используются трансформаторы. Трансформатор также изобрел П.Н. Яблочков.

Переменный ток получил всеобщее признание и широчайшее применение в электроэнергетике благодаря изобретениям русского инженера и ученого М.О. Доливо-Добровольского. Им была разработана трехфазная система, получившая повсеместное распространение. В 1889 г. он построил первый трехфазный двигатель, разработал все остальные звенья трехфазной цепи и в 1891 г. осуществил передачу электрической энергии трехфазным током на расстояние 175 км.

Значительнейшим моментом в развитии теории переменных токов было введение американским инженером Ч.П. Штейнметцем метода комплексных величин для расчета цепей.

Завершая на этом краткую историческую справку, следует отметить, что на современном этапе электрический ток используется повсюду: в быту, в промышленности, на транспорте и т.д.

Вся совокупность знаний об электронике связана с передачей и преобразованием электрической энергии, то есть с протеканием электрического тока. Таким образом, «Теоретические основы электротехники» являются для специальностей электронного профиля общетеоретической дисциплиной, без знания которой невозможно освоение специальных профилирующих дисциплин.

## 2 ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 2.1 Элементы электрических цепей и схем

Электрической цепью называется совокупность соединенных между собой источников и приемников электрической энергии. Цепи, в которых получение, передача и преобразование электрической энергии происходят при неизменных во времени токах и напряжениях, называются цепями постоянного тока.

Для изучения процессов в электрической цепи ее заменяют расчетной схемой замещения. При этом каждый реальный элемент цепи заменяется элементами схемы. В цепях постоянного тока используются понятия двух основных элементов схемы: источник энергии с э.д.с.  $E$  и внутренним сопротивлением  $r_{\text{вн}}$  и резистивный элемент — нагрузка с сопротивлением  $R$ .

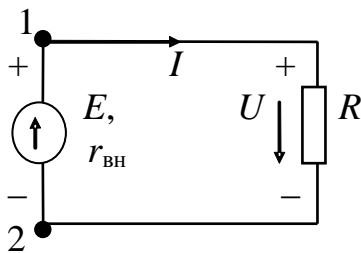


Рис. 1

Во внешней по отношению к источнику цепи ток течет от плюса источника к минусу (направление э.д.с. на схеме указывается стрелкой), а внутри источника — от минуса к плюсу, как показано на рис. 1.

Электродвижущая сила  $E$  численно равна разности потенциалов  $\varphi$  или напряжению  $U$  между положительным и отрицательным выводами 1 и 2 источника энергии при отсутствии в нем тока, т.е., как говорят, в режиме холостого хода (для обозначения этого режима используются индексы «хх» при соответствующих величинах):

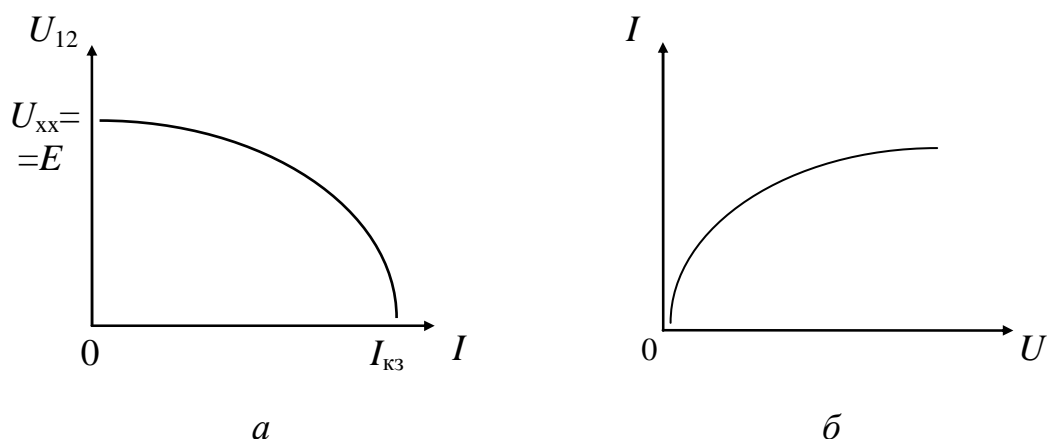
$$E = \varphi_{1\text{хх}} - \varphi_{2\text{хх}} = U_{12\text{хх}}.$$

При наличии тока в цепи из-за падения напряжения на внутреннем сопротивлении источника величиной  $U_{\text{вн}} = I r_{\text{вн}}$  напряжение  $U_{12}$  на выводах источника не будет равно э.д.с.:

$$U_{12} = E - I r_{\text{вн}}. \quad (1)$$

При изменении тока напряжение  $U_{12}$  будет меняться. График зависимости  $U_{12}=f(I)$  называется внешней характеристикой. Типичный вид внешней характеристики реального источника приведен на рис. 2, а.





$I_{кз}$  — ток короткого замыкания.

Рис. 2

Сопротивление нагрузки (приемника)  $R$  характеризует потребление электрической энергии, т.е. превращение электрической энергии в другие виды энергии при мощности

$$P = I^2 R.$$

По закону Ома напряжение (или падение напряжения) на нагрузке

$$U = IR.$$

Положительное направление напряжения на нагрузке принимается одинаковым с протекающим по нему током и на схемах обозначается стрелкой, расположенной рядом с сопротивлением (см. рис. 1).

Зависимость  $U = f(I)$  называется вольтамперной характеристикой. Для реальных нагрузок эта характеристика может быть как линейной, так и нелинейной, что и показано на рис. 2, б.

Если принять э.д.с. источников, их внутренние сопротивления и сопротивления приемников не зависящими от величины тока, то внешние и вольтамперные характеристики будут линейными. Электрические цепи, состоящие только из элементов с линейными характеристиками, называют линейными. Режим работы большого числа реальных электрических цепей позволяет с небольшой долей погрешности отнести их к линейным. Именно линейные цепи и будут рассмотрены в первой части теоретических основ электротехники.

При расчете и анализе цепей источник энергии заменяют расчетным эквивалентом. Первый вариант такого эквивалента

приведен на рис. 3, *a* и состоит из источника э.д.с. и последовательно с ним включенного сопротивления  $r_{\text{вн}}$ , равного внутреннему сопротивлению реального источника энергии.

Под источником э.д.с. условимся понимать такой идеализированный источник питания, э.д.с. которого постоянна, не зависит от величины протекающего через него тока и равна э.д.с. реального источника энергии в режиме холостого хода. Внутреннее сопротивление этого идеализированного источника питания равно нулю.

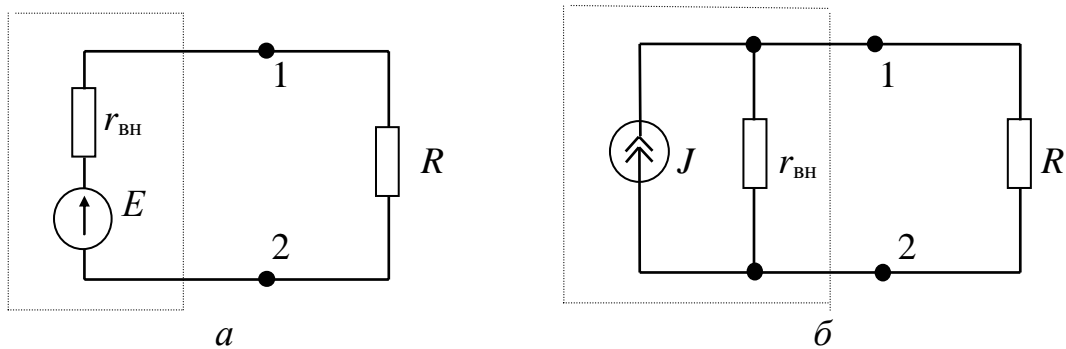


Рис. 3

Для схемы на рис. 3, *a* справедливо уравнение (1). Перепишем это уравнение:

$$E = I r_{\text{вн}} + U_{12}$$

и поделим на  $r_{\text{вн}}$ :

$$\frac{E}{r_{\text{вн}}} = I + \frac{U_{12}}{r_{\text{вн}}}, \text{ или}$$

$$J = I + I_{\text{вн}}, \quad (2)$$

где  $J = E/r_{\text{вн}}$  — ток при коротком замыкании источника энергии,

$I = U_{12}/R$  — ток приемника,

$I_{\text{вн}} = U_{12}/r_{\text{вн}}$  — некоторый ток, равный отношению напряжения на выводах источника к его внутреннему сопротивлению.

Уравнению (2) соответствует схема на рис. 3, *б*, которая является вторым вариантом расчетного эквивалента источника энергии. Эта схема состоит из источника тока и включенного параллельно с ним сопротивления  $r_{\text{вн}}$ , равного внутреннему сопротивлению реального источника энергии.

Под источником тока понимают такой идеализированный источник питания, который дает ток  $J$ , не зависящий от величины нагрузки  $R$  и равный частному от деления э.д.с. реального источника в режиме холостого хода на его внутреннее сопротивление

$$J = E/r_{\text{вн}}. \quad (3)$$

Каким из двух расчетных эквивалентов пользоваться — совершенно безразлично. Но из этого положения есть два исключения, связанные с определенными допущениями.

Во-первых, при использовании первого эквивалента (см. рис. 3, а), если  $r_{\text{вн}} \ll R$ , то  $U_{\text{вн}} = I r_{\text{вн}} \approx 0$ . Источник энергии без внутреннего сопротивления ( $r_{\text{вн}}=0$ ) является идеальным источником э.д.с.

Во-вторых, при использовании второго эквивалента (см. рис. 3, б), если  $r_{\text{вн}} \gg R$ , то  $I_{\text{вн}} \ll I$  или  $I_{\text{вн}} \approx 0$ . Источник с бесконечным внутренним сопротивлением (или с нулевой внутренней проводимостью  $g_{\text{вн}} = 1/r_{\text{вн}}$ ) является идеальным источником тока.

Идеальный источник э.д.с. нельзя заменить эквивалентом с источником тока, а идеальный источник тока нельзя заменить эквивалентом с источником э.д.с.

Идеальный источник, конечно, реально не существует (внешняя характеристика идеального источника э.д.с. — горизонталь, а идеального источника тока — вертикаль). Но в ряде практических случаев в ограниченном диапазоне изменения нагрузки бывает целесообразно использовать для расчетов или объяснения физической сути явления один из идеальных источников.

Источники энергии являются активными элементами электрических схем, а резистивные элементы — пассивными.

## 2.2 Закон Ома для цепи с э.д.с.

Рассмотрим простейшую схему на рис. 4.

Потенциал точки 3 больше потенциала точки 2 на величину э.д.с.:

$$\varphi_3 = \varphi_2 + E. \quad (4)$$

Ток во внешнем участке цепи (по отношению к источнику) направлен от точки с высшим потенциалом к точке с низшим по-

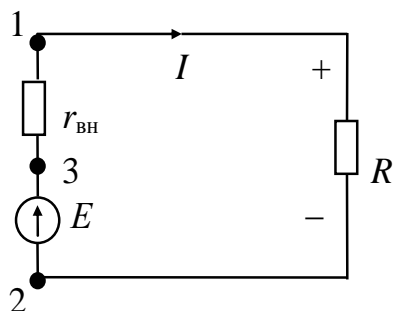


Рис. 4

тенциалом, поэтому  $\varphi_3 > \varphi_1$  на величину падения напряжения на  $r_{\text{вн}}$ :

$$\varphi_3 = \varphi_1 + I r_{\text{вн}}. \quad (5)$$

Приравняем правые части равенств (4) и (5):

$$\varphi_2 + E = \varphi_1 + I r_{\text{вн}}.$$

Из последнего уравнения получим

$$I = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) + E}{r_{\text{вн}}}. \quad (6)$$

Следует заметить, что в формуле (6) величина  $(\varphi_2 - \varphi_1) = U_{21}$  отрицательная, так как  $\varphi_1 > \varphi_2$ .

Аналогично можно определить ток для любого сложного участка цепи, например по схеме на рис. 5.

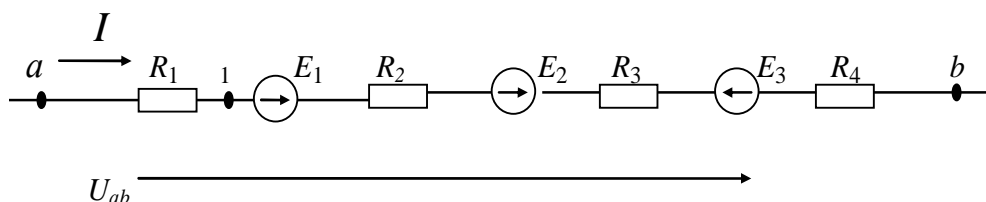


Рис. 5

Пусть заданы все э.д.с., сопротивления и разность потенциалов между точками  $a$  и  $b$ .

Ток может иметь любое направление. Зададим условно направление стрелкой. При таком направлении тока  $\varphi_1$  меньше  $\varphi_a$  на величину  $IR_1$ , и поэтому

$$\varphi_b = \varphi_a - IR_1 + E_1 - IR_2 + E_2 - IR_3 - E_3 - IR_4.$$

Из этого равенства следует

$$I = \frac{(\varphi_a - \varphi_b) + E_1 + E_2 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{U_{ab} + \sum E}{R_{ab}}, \quad (7)$$

где  $R_{ab}$  — суммарное сопротивление участка схемы;

$U_{ab} = (\varphi_a - \varphi_b)$  — **напряжение** между выводами рассматриваемого участка, **взятое по выбранному направлению тока**;

$\sum E$  — алгебраическая сумма э.д.с. (если направление э.д.с. *совпадает* с выбранным направлением тока, то эта э.д.с. берется *со знаком «плюс»*, а в противном случае — со знаком «минус»).

Формула (7) представляет собой закон Ома для участка цепи с э.д.с. (*обобщенный закон Ома*).

Если в результате расчета значение тока получилось со знаком «минус», то это значит, что действительное направление тока противоположно ранее принятому.

На участках схемы с пассивными элементами *направление тока и напряжения* будем всегда выбирать *совпадающими*.

### Пример 1.

Для схемы на рис. 6 задано:  $E_1 = 120$  В;  $E_2 = 40$  В;  $R_1 = 12$  Ом;  $R_2 = 8$  Ом. Определим напряжение между точками  $a$  и  $b$ .

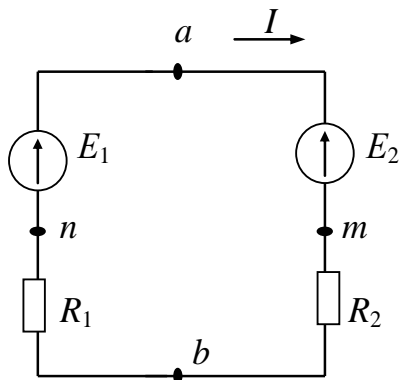


Рис. 6

Задавшись направлением  $I$ , получим для одноконтурной замкнутой цепи

$$I = \frac{\sum E}{\sum R} = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{120 - 40}{12 + 8} = 4 \text{ А.}$$

Искомое напряжение можно определить по обобщенному закону Ома, примененному к участку  $amb$ :

$$I = \frac{U_{ab} - E_2}{R_2},$$

откуда  $U_{ab} = E_2 + I R_2 = 40 + 4 \cdot 8 = 72$  В.

Применим закон Ома к участку  $anb$ :

$$I = \frac{U_{ba} + E_1}{R_1},$$

$$U_{ba} = I R_1 - E_1 = 4 \cdot 12 - 120 = -72 \text{ В.}$$

Но так как  $U_{ab} = -U_{ba}$ , то  $U_{ab} = 72$  В.

Проанализировав этот простейший пример, можно сделать замечание, которое будем использовать в дальнейшем.

**Замечание.** Если на участке цепи, содержащем э.д.с. и сопротивление, ток и э.д.с. совпадают по направлению, то напряжение на зажимах участка меньше э.д.с. на величину падения напряжения на сопротивлении, а если направление тока противоположно направлению э.д.с., то напряжение на

*зажимах участка больше э.д.с. на величину падения напряжения на сопротивлении.*

### Пример 2

К зажимам  $a$  и  $c$  схемы подключен вольтметр, как показано на рис. 7 (здесь и далее внутреннее сопротивление вольтметра будем полагать бесконечно большим, следовательно, подключение или отключение вольтметра на режим работы цепи не влияет).

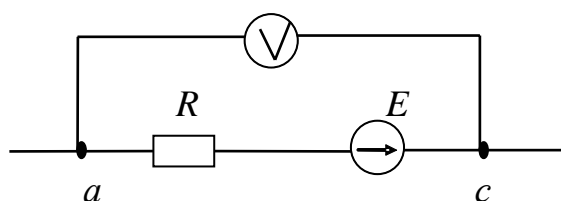


Рис. 7

Если ток  $I=10$  А течет от  $a$  к  $c$ , то показание вольтметра  $U_{ac} = -18$  В, а если тот же по величине ток течет от  $c$  к  $a$ , то показание вольтметра  $U_{ac} = -20$  В.

Определить величину  $R$  и  $E$ .

На основании формулы (7) при первом направлении тока

$$I = \frac{U_{ac} + E}{R}; U_{ac} = IR - E; -18 = 10R - E.$$

При противоположном направлении тока

$$I = \frac{U_{ca} - E}{R}; U_{ca} = -U_{ac} = IR + E; 20 = 10R + E.$$

Решим совместно два уравнения:

$$\begin{cases} 10R - E = -18 \\ 10R + E = 20 \end{cases};$$

$$20R = 2; R = 0,1 \text{ Ом};$$

$$E = 10R + 18 = 10 \cdot 0,1 + 18 = 19 \text{ В}.$$

## 2.3 Законы Кирхгофа

Для сложной разветвленной цепи введем понятия ветви и узла. Ветвью цепи (или схемы) называется ее участок, состоящий только из последовательно соединенных элементов, по которым протекает один и тот же ток. Узлом называется точка соединения трех и более ветвей.

При обходе схемы по соединенным в узлах ветвям можно получить замкнутые контуры.

Законы Кирхгофа формулируются следующим образом.

Первый закон Кирхгофа — сумма подтекающих к любому узлу токов равна сумме утекающих от узла токов (физический смысл закона: заряды в узлах не скапливаются).

Второй закон Кирхгофа — алгебраическая сумма э.д.с. замкнутого контура равна алгебраической сумме падений напряжений в нем:

$$\sum IR = \sum E.$$

В этом уравнении положительные знаки принимаются для тех токов и э.д.с., положительные направления которых совпадают с произвольно выбранным направлением обхода рассматриваемого контура.

Перед составлением уравнений необходимо:

- а) произвольно выбрать положительные направления токов в ветвях (и соответствующие им направления напряжений);
- б) выбрать положительные направления обхода контуров для составления уравнений по второму закону Кирхгофа.

Для примера используем схему на рис. 8, содержащую шесть ветвей ( $N_B=6$ ) и четыре узла ( $N_Y=4$ ).

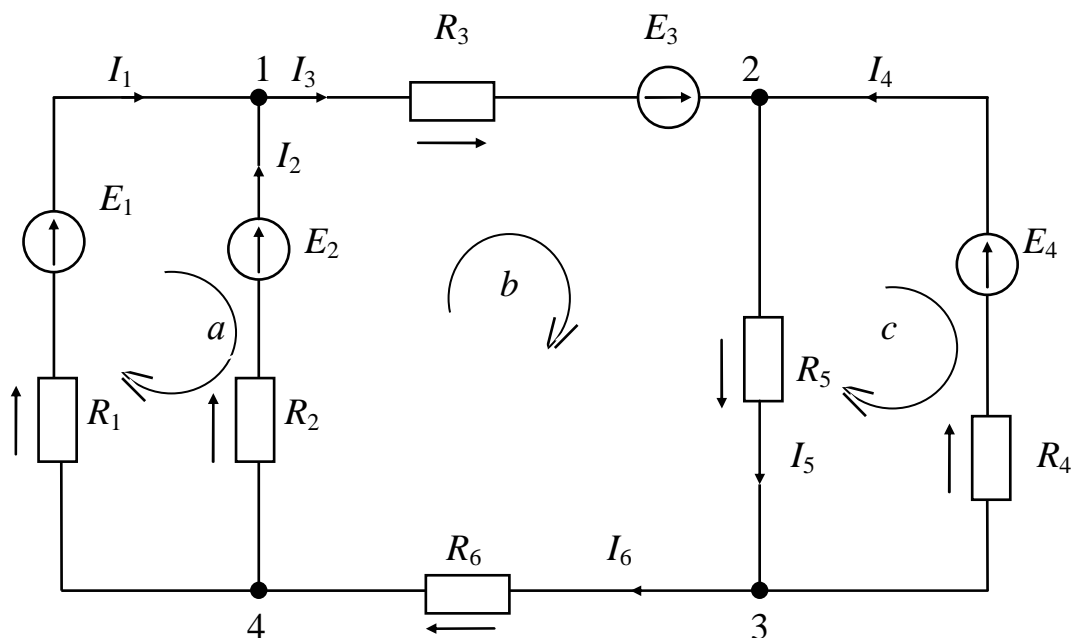


Рис. 8

Уравнения по первому закону Кирхгофа:

$$\text{(для узла 1)} \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0; \quad (8)$$

$$\text{(для узла 2)} \quad I_3 + I_4 - I_5 = 0; \quad (9)$$

$$\text{(для узла 3)} \quad I_5 - I_4 - I_6 = 0; \quad (10)$$

$$\text{(для узла 4)} \quad I_6 - I_1 - I_2 = 0. \quad (11)$$

Из этих уравнений независимы только три, четвертое является их алгебраическим следствием. Так, сложив уравнения (8), (9) и (10), получим уравнение (11).

Таким образом, при составлении уравнений электрического равновесия в цепи по первому закону Кирхгофа необходимо составить  $n$  уравнений:  $n = N_y - 1$ .

Количество неизвестных в схеме (токов в ветвях) равно количеству ветвей. Поэтому по второму закону Кирхгофа следует составить  $m$  уравнений:  $m = N_e - n$ .

Для выбранного примера  $m = 6 - 3 = 3$ .

Для того, чтобы все уравнения, составленные по второму закону, были независимыми, контуры выбираются так, чтобы в каждый из них входила ветвь, не вошедшая во все остальные.

Уравнения по второму закону Кирхгофа (стрелками около сопротивлений на схеме указаны направления падений напряжения):

$$\text{(для контура } a) \quad E_1 - E_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2; \quad (12)$$

$$\text{(для контура } b) \quad E_2 + E_3 = I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_5 R_5 + I_6 R_6; \quad (13)$$

$$\text{(для контура } c) \quad -E_4 = -I_5 R_5 - I_4 R_4. \quad (14)$$

Совместное решение уравнений (8), (9), (10), (12), (13) и (14) позволит найти все токи.

Если бы в схеме были источники тока, то в ветвях с ними токи были бы определены и количество уравнений, составляемых по второму закону, уменьшилось бы на количество источников тока (при составлении уравнений при этом следовало бы выбирать независимые контуры, не содержащие источников тока).

Недостаток рассмотренного метода — его громоздкость.

### Пример 3.

Для схемы на рис. 9 задано:  $E_1=80$  В;  $E_2=64$  В;  $R_1=6$  Ом;  $R_2=4$  Ом;  $R_3=3$  Ом;  $R_4=1$  Ом.

Требуется найти токи в ветвях схемы и произвести проверку решения расчетом баланса мощностей.



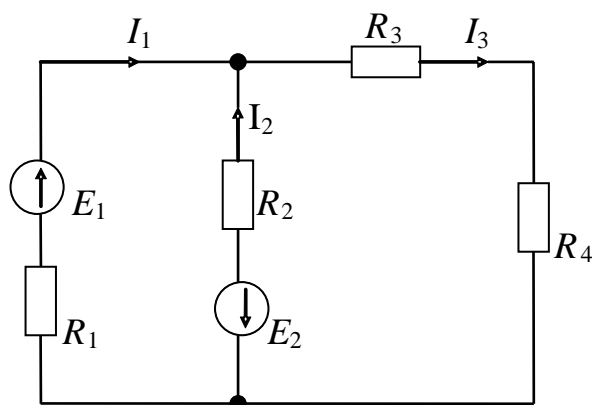


Рис. 9

Произвольно выбираем направления токов, как показано на схеме, и направления обхода контуров по часовой стрелке.

В схеме два узла, три ветви, источников тока нет. Поэтому следует составить одно уравнение по первому и два уравнения по второму законам Кирхгофа:

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_3 \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 &= E_1 + E_2 \\ I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4) &= -E_2 \end{aligned} \right\}.$$

Подставляем численные значения величин и решаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_3 & (а) \\ 6I_1 - 4I_2 &= 80 + 64 & \\ 4I_2 + 4I_3 &= -64 & (б) \end{aligned} \right\}.$$

Подставляем в уравнение (б) значение  $I_3$  из уравнения (а):

$$\left. \begin{aligned} 6I_1 - 4I_2 &= 144 \\ 4I_1 + 8I_2 &= -64 \end{aligned} \right\}.$$

Окончательно получаем:  $I_1 = 14$  А;  $I_2 = -15$  А;  $I_3 = -1$  А. Истинное направление токов  $I_2$  и  $I_3$  противоположно первоначально принятому.

Рассчитаем баланс мощности.

По закону сохранения энергии мощность всех источников, имеющих в цепи, должна быть равна сумме мощностей всех включенных в эту цепь приемников и тех потерь мощности, которые выделяются внутренними сопротивлениями реальных источников. Составленное в соответствии с этим законом математическое уравнение называется **балансом мощности** цепи (при этом следует учитывать, что если через какой-то источник э.д.с. ток реально протекает навстречу направлению э.д.с., то такой ис-

точник является потребителем и его мощность при составлении баланса учитывается со знаком «минус»).

Мощности, доставляемые источниками в цепь:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 = 80 \cdot 14 + 64 \cdot 15 = 2080 \text{ Вт.}$$

Сумма мощностей нагрузок:

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + (R_3 + R_4) I_3^2 = 6 \cdot 14^2 + 4 \cdot 15^2 + (3 + 1) \cdot 1^2 = 2080 \text{ Вт.}$$

Баланс мощностей подтверждает правильность определения ТОКОВ.

#### Пример 4

Для схемы на рис. 10 задано:  $J = 0,08 \text{ А}$ ;  $r = 20 \text{ кОм}$ ;  $E = 230 \text{ В}$ ;  $R_1 = 1 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = 2 \text{ кОм}$ .

Требуется определить все токи и проверить баланс мощности.

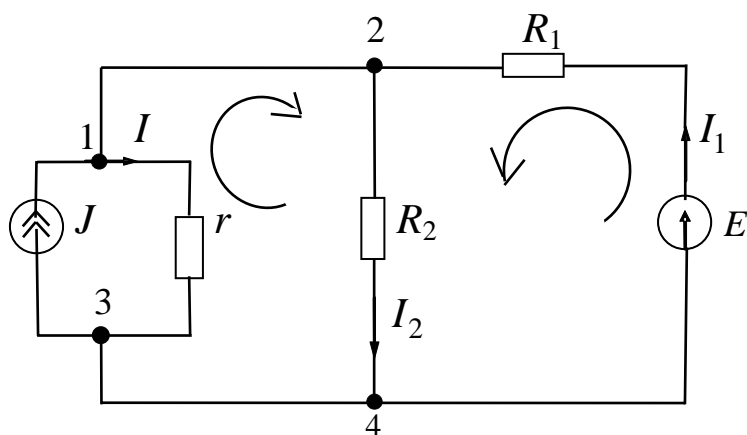


Рис. 10

Разность потенциалов между точками 1 и 2 на схеме равна нулю, аналогично и между точками 3 и 4. То есть с точки зрения правил определения количества составляемых уравнений по законам Кирхгофа точки 1 и 2 образуют один узел, а точки 3 и 4 — второй. Нагляднее это можно видеть, если схему представить, как показано на рис. 11.

Таким образом, цепь содержит четыре ветви, два узла и один источник тока. Поэтому следует составить одно уравнение по первому и два уравнения по второму законам Кирхгофа.

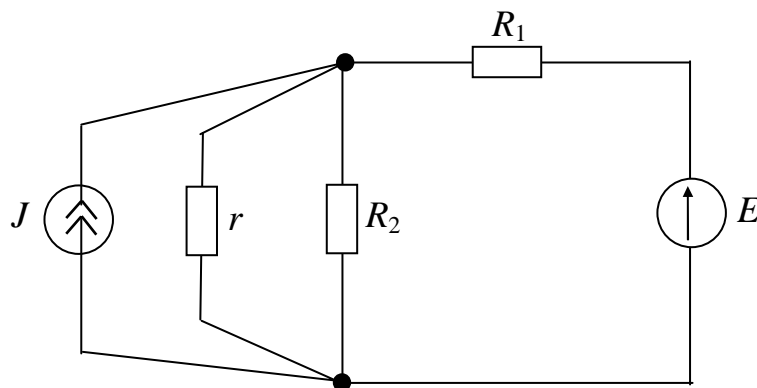


Рис. 11

Выбранные направления обхода контуров и направления токов представлены на рис. 10 (определить токи, протекающие в проводниках, которые соединяют между собой точки 1 и 2, а также 3 и 4 на рис. 10, можно по первому закону Кирхгофа после определения токов  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ).

$$\left. \begin{aligned} J - I - I_2 + I_1 &= 0 \\ E &= I_1 R_1 + I_2 R_2 \\ 0 &= I_2 R_2 - I r \end{aligned} \right\}.$$

$$0,08 - I - I_2 + I_1 = 0; \quad (\text{a})$$

$$230 = 10^3 I_1 + 2 \cdot 10^3 I_2; \quad (\text{б})$$

$$0 = 2 \cdot 10^3 I_2 - 2 \cdot 10^4 I. \quad (\text{в})$$

Из уравнения (в):

$$I = 0,1 I_2.$$

Из уравнения (б):

$$I_1 = 0,23 - 2 \cdot I_2.$$

Подставляя полученные соотношения в (а), получим  $I_2 = 0,1$  А и остальные токи:  $I = 0,01$  А;  $I_1 = 0,03$  А.

Напряжение  $U_{13}$  на источнике тока:

$$U_{13} = I r = 0,01 \cdot 2 \cdot 10^4 = 200 \text{ В.}$$

Мощности, доставляемые источником тока и источником э.д.с. в цепь:

$$U_{13} J + E I_1 = 200 \cdot 0,08 + 230 \cdot 0,03 = 22,9 \text{ Вт.}$$

Сумма мощностей нагрузок:

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + r I^2 = 10^3 \cdot 0,03^2 + 2 \cdot 10^3 \cdot 0,1^2 + 2 \cdot 10^4 \cdot 0,01^2 = 22,9 \text{ Вт.}$$

## 2.4 Метод контурных токов

В этом методе принимается, что в каждом независимом контуре течет свой контурный ток. Уравнения составляются относительно контурных токов. После нахождения их определяются токи ветвей через контурные токи.

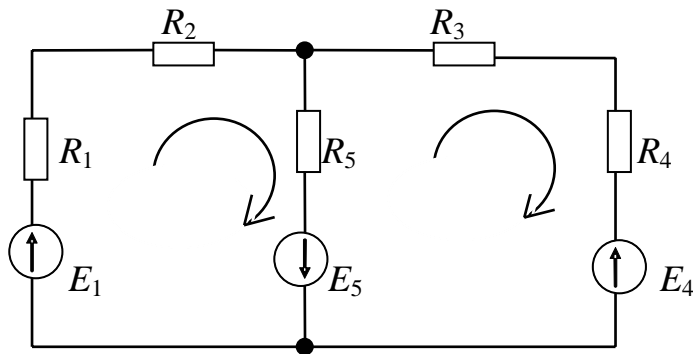


Рис. 12

Число неизвестных здесь равно числу уравнений, которые надо было бы составить по второму закону Кирхгофа.

Используем для пояснений схему на рис. 12.

Выбираем два независимых контура (в каждый из них входит ветвь, не вошедшая в другой) и направления контурных токов и обозначим их  $I_{11}$  и  $I_{22}$ .

Составим уравнения по второму закону Кирхгофа (при этом учтем, что по смежной ветви течет ток  $I_{11} - I_{22}$  сверху вниз):

$$\left. \begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_2) + (I_{11} - I_{22})R_5 &= E_1 + E_5 \\ -(I_{11} - I_{22})R_5 + I_{22}(R_3 + R_4) &= -E_4 - E_5 \end{aligned} \right\}.$$

Перекомпануем эту систему к виду:

$$\left. \begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_2 + R_5) + I_{22}(-R_5) &= E_1 + E_5 \\ I_{11}(-R_5) + I_{22}(R_3 + R_4 + R_5) &= -E_4 - E_5 \end{aligned} \right\}.$$

Введем обозначения:

$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5$ ,  $R_{22} = R_3 + R_4 + R_5$  — полные (или собственные) сопротивления контуров;

$R_{12} = R_{21} = -R_5$  — взаимное (или смежное) сопротивление;

$E_{11} = E_1 + E_5$ ;

$E_{22} = -E_4 - E_5$  — контурные э.д.с.

С учетом обозначений последняя система примет вид:

$$\left. \begin{aligned} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} &= E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} &= E_{22} \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Система уравнений (15) собственно и иллюстрирует правило составления уравнений по методу контурных токов.

Смежное сопротивление берется со знаком «минус», если направления контурных токов в этой ветви противоположны, и со знаком «плюс», если совпадают.

В контурные э.д.с. соответствующие э.д.с. входят со знаком «плюс», если их направление совпадает с принятым направлением контурного тока, и со знаком «минус», если направление противоположно.

Если бы в схеме было больше двух контуров, например три, то система уравнений выглядела бы следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} &= E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} &= E_{22} \\ I_{11}R_{31} + I_{22}R_{32} + I_{33}R_{33} &= E_{33} \end{aligned} \right\}. \quad (15,а)$$

В (15,а)  $R_{12} = R_{21}$ ,  $R_{13} = R_{31}$ ,  $R_{23} = R_{32}$  — смежные сопротивления соответственно первого и второго, первого и третьего, второго и третьего контуров.

В крайних ветвях схемы истинные и контурные токи совпадают, а в смежных определяются как алгебраические суммы контурных токов.

### Пример 5

Для схемы на рис. 13 задано:  $E_1=100$  В;  $E_2=150$  В;  $E_3=28$  В;  $J=2$  мА;  $R_2=2$  кОм;  $R_3=4$  кОм;  $R_4=6$  кОм;  $R_5=8$  кОм.

Требуется определить токи всех ветвей.

В схеме шесть ветвей, четыре узла и один источник тока. По второму закону Кирхгофа для этой схемы необходимо составить два уравнения, столько же и по методу контурных токов.

Наличие источника тока вносит следующие особенности в формирование уравнений: а) ток источника тока, аналогично контурным, необходимо направить только по одному из контуров; б) контурные токи должны направляться по ветвям, не содержащим источник тока.

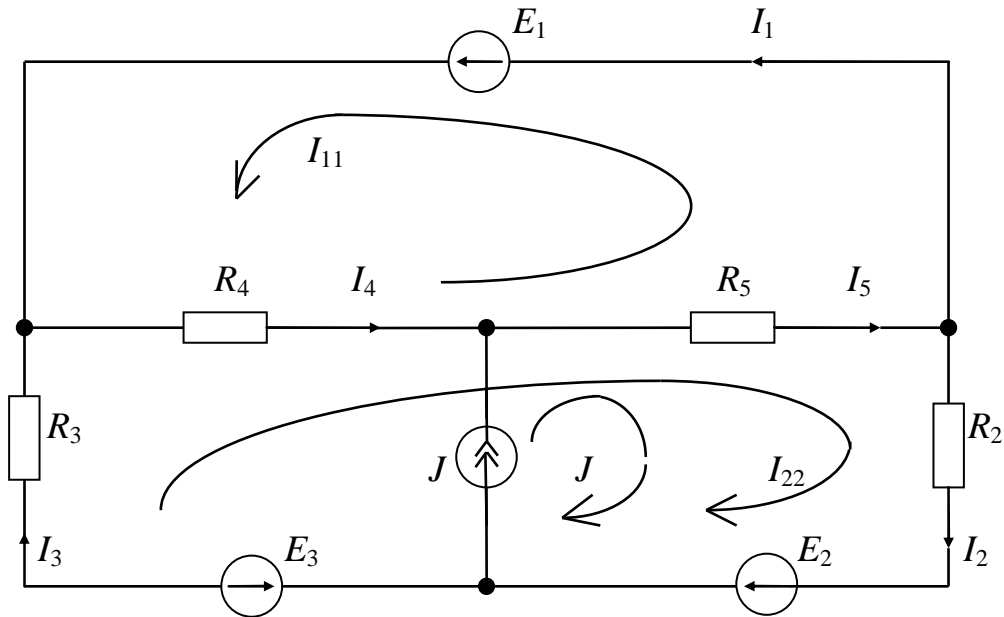


Рис. 13

В соответствии с выбранными направлениями токов составляем уравнения, подобные (15) и (15,а):

$$\left. \begin{aligned} I_{11}(R_4 + R_5) + I_{22}(R_4 + R_5) + J R_5 &= E_1 \\ I_{11}(R_4 + R_5) + I_{22}(R_2 + R_3 + R_4 + R_5) + J(R_2 + R_5) &= E_2 - E_3 \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} 14 I_{11} + 14 I_{22} + 16 \cdot 10^{-3} &= 0,1 \\ 14 I_{11} + 20 I_{22} + 0,02 &= 0,122 \end{aligned} \right\};$$

$$I_{11} = 3 \text{ mA}; \quad I_{22} = 3 \text{ mA}.$$

По контурным токам определяем истинные токи ветвей:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} = 3 \text{ mA}; \quad I_2 = I_{22} + J = 3 + 2 = 5 \text{ mA}; \\ I_3 &= I_{22} = 3 \text{ mA}; \quad I_4 = I_{11} + I_{22} = 3 + 3 = 6 \text{ mA}; \\ I_5 &= I_{11} + I_{22} + J = 3 + 3 + 2 = 8 \text{ mA}. \end{aligned}$$

## 2.5 Метод узловых потенциалов

Ток в любой ветви схемы может быть определен с помощью обобщенного закона Ома по формуле (7). Но чтобы применить закон Ома, нужно знать потенциалы узлов. Метод, в котором за неизвестные принимают потенциалы узлов, называется методом узловых потенциалов.

Причем если один узел заземлить (принять его потенциал равным нулю), то число неизвестных сокращается на единицу. Метод целесообразно применять для сложных схем с небольшим числом узлов.

Для обоснования метода используем схему на рис. 14, содержащую четыре узла и 11 ветвей. Узел 4 заземлим.

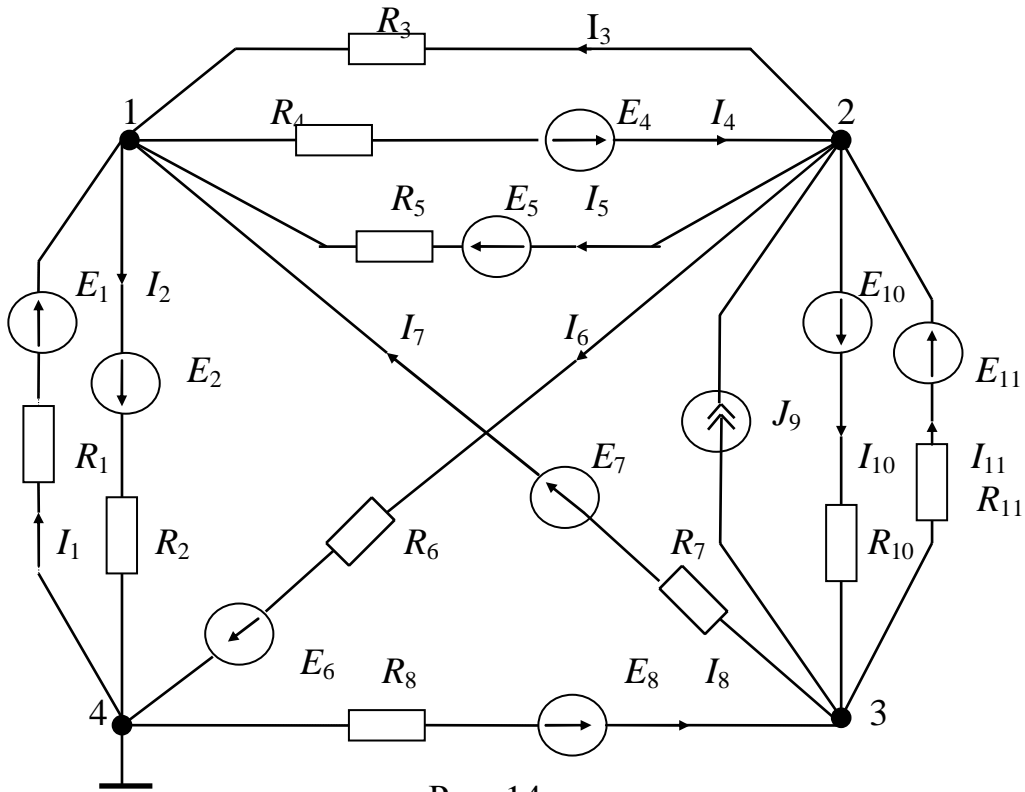


Рис. 14

Составим уравнение по первому закону Кирхгофа для узла 1:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 + I_7 = 0. \quad (16)$$

На основании формулы (7) можно записать:

$$I_1 = \frac{(\varphi_4 - \varphi_1) + E_1}{R_1} = [(\varphi_4 - \varphi_1) + E_1]g_1;$$

$$I_2 = [(\varphi_1 - \varphi_4) + E_2]g_2;$$

$$I_3 = (\varphi_2 - \varphi_1)g_3;$$

$$I_4 = [(\varphi_1 - \varphi_2) + E_4]g_4;$$

$$I_5 = [(\varphi_2 - \varphi_1) + E_5]g_5;$$

$$I_7 = [(\varphi_3 - \varphi_1) + E_7]g_7.$$

Подставим последние соотношения в (16):

$$[(\varphi_4 - \varphi_1) + E_1]g_1 - [(\varphi_1 - \varphi_4) + E_2]g_2 + [(\varphi_2 - \varphi_1) + 0]g_3 - \\ - [(\varphi_1 - \varphi_2) + E_4]g_4 + [(\varphi_2 - \varphi_1) + E_5]g_5 + [(\varphi_3 - \varphi_1) + E_7]g_7 = 0. \quad (17)$$

Перепишем уравнение (17) следующим образом:

$$\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11}. \quad (18)$$

Здесь обозначено:

$$G_{11} = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_7;$$

$$G_{12} = -(g_3 + g_4 + g_5);$$

$$G_{13} = -g_7;$$

$$I_{11} = E_1 g_1 + E_5 g_5 + E_7 g_7 - E_2 g_2 - E_4 g_4.$$

Проанализируем структуру уравнения (18).

Множителем при  $\varphi_1$  является сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся в узле 1.

$G_{12}$  равняется сумме проводимостей ветвей, соединяющих узлы 1 и 2, взятой со знаком «минус», аналогично и  $G_{13}$ .

Ток  $I_{11}$  называется узловым током (первого узла). Это расчетная величина, равная алгебраической сумме токов, полученных от деления э.д.с. ветвей, подходящих к узлу 1, на сопротивления данных ветвей (со знаком «плюс» токи тех ветвей, э.д.с. которых направлены к узлу 1).

Подобные уравнения могут быть составлены и для остальных узлов. Например, для произвольной схемы с  $n$  узлами:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \dots + \varphi_{n-1} G_{1,n-1} &= I_{11} \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \dots + \varphi_{n-1} G_{2,n-1} &= I_{22} \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_1 G_{n-1,1} + \dots + \varphi_{n-1} G_{n-1,n-1} &= I_{n-1,n-1} \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

Здесь  $G_{kk}$  — сумма проводимостей ветвей, сходящихся в узле  $k$ ;  $G_{km}$  — сумма проводимостей ветвей, объединяющих узлы  $k$  и  $m$ , взятая со знаком «минус»;  $I_{kk}$  — узловой ток узла  $k$  (если к узлу  $k$  подтекает ток и от источника тока, то он должен добавиться к  $I_{kk}$  со знаком «плюс», а если вытекает — то со знаком «минус»).



Если между какими-либо двумя узлами нет ветвей, то соответствующая проводимость равна нулю.

После определения узловых потенциалов по обобщенному закону Ома определяются токи в ветвях.

### Пример 6

Для схемы на рис. 14 задано:  $E_1 = E_6 = 10$  В;  $E_2 = 6$  В;  $E_4 = 20$  В;  $E_5 = 30$  В;  $E_7 = 14$  В;  $E_8 = 8$  В;  $E_{10} = 12$  В;  $E_{11} = 7$  В;  $R_1 = 1$  Ом;  $R_2 = R_7 = R_8 = R_{11} = 2$  Ом;  $R_3 = 5$  Ом;  $R_4 = R_5 = 10$  Ом;  $R_6 = R_{10} = 4$  Ом;  $J_9 = 1,5$  А.

Требуется методом узловых потенциалов определить токи в ветвях.

Согласно (19) записываем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} &= I_{11} \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} &= I_{22} \\ \varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} &= I_{33} \end{aligned} \right\}.$$

Подсчитываем проводимости:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_7} =$$

$$= 1 + 0,5 + 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,5 = 2,4 \text{ См};$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{11}} =$$

$$= 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,25 + 0,25 + 0,5 = 1,4 \text{ См};$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{11}} = 0,5 + 0,5 + 0,25 + 0,5 = 1,75 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = -\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) = -0,2 - 0,1 - 0,1 = -0,4 \text{ См};$$

$$G_{13} = G_{31} = -\frac{1}{R_7} = -0,5 \text{ См};$$

$$G_{23} = G_{32} = -\left(\frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{11}}\right) = -0,25 - 0,5 = -0,75 \text{ См}$$

(при расчете  $G_{22}$ ,  $G_{33}$ ,  $G_{23}$  учтено, что проводимость ветви с источником тока  $J_9$  равна нулю).

Определяем узловые токи:

$$I_{11} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_4}{R_4} + \frac{E_5}{R_5} + \frac{E_7}{R_7} = 10 - \frac{6}{2} - \frac{20}{10} + \frac{30}{10} + \frac{14}{2} = 15 \text{ A};$$

$$I_{22} = \frac{E_4}{R_4} - \frac{E_5}{R_5} - \frac{E_6}{R_6} - \frac{E_{10}}{R_{10}} + \frac{E_{11}}{R_{11}} + J_9 = \frac{20}{10} - \frac{30}{10} - \frac{10}{4} - \frac{12}{4} + \frac{7}{2} + 1,5 = -1,5 \text{ A};$$

$$I_{33} = -\frac{E_7}{R_7} + \frac{E_8}{R_8} + \frac{E_{10}}{R_{10}} - \frac{E_{11}}{R_{11}} - J_9 = -\frac{14}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{4} - \frac{7}{2} - 1,5 = -5 \text{ A}.$$

Подставляем полученные данные в исходную систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 2,4\varphi_1 - 0,4\varphi_2 - 0,5\varphi_3 &= 15 \\ -0,4\varphi_1 + 1,4\varphi_2 - 0,75\varphi_3 &= -1,5 \\ -0,5\varphi_1 - 0,75\varphi_2 + 1,75\varphi_3 &= -5 \end{aligned} \right\}.$$

Решим полученную систему с помощью определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2,4 & -0,4 & -0,5 \\ -0,4 & 1,4 & -0,75 \\ -0,5 & -0,75 & 1,75 \end{vmatrix} = 3,6;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 15 & -0,4 & -0,5 \\ -1,5 & 1,4 & -0,75 \\ -5 & -0,75 & 1,75 \end{vmatrix} = 21,7;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2,4 & 15 & -0,5 \\ -0,4 & -1,5 & -0,75 \\ -0,5 & -5 & 1,75 \end{vmatrix} = 0,2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2,4 & 0,4 & 15 \\ -0,4 & 1,4 & -1,5 \\ -0,5 & -0,75 & -5 \end{vmatrix} = -4;$$

$$\varphi_1 = \Delta_1 / \Delta = 21,7 / 3,6 = 6,03 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = \Delta_2 / \Delta = 0,2 / 3,6 = 0,06 \text{ В};$$

$$\varphi_3 = \Delta_3 / \Delta = -4 / 3,6 = -1,11 \text{ В}.$$

Рассчитаем токи в ветвях, применив формулу (7):

$$I_1 = (-\varphi_1 + E_1)/R_1 = (-6,03 + 10)/1 = 3,97 \text{ А};$$

$$I_3 = (\varphi_2 - \varphi_1)/R_3 = -5,97/5 = -1,194 \text{ А};$$

$$I_8 = (-\varphi_3 + E_8)/R_8 = (1,11 + 8)/2 = 4,555 \text{ А};$$

$$I_{11} = [(\varphi_3 - \varphi_2) + E_{11}]/R_{11} = (-1,11 - 0,06 + 7)/2 = 2,915 \text{ А}$$

и так далее.

Сделаем проверку по второму закону Кирхгофа для внешнего контура схемы (выберем направление обхода контура по часовой стрелке).

Сумма падений напряжений:

$$I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_{11} R_{11} - I_8 R_8 = 3,97 \cdot 1 + 1,194 \cdot 5 - 2,915 \cdot 2 - 4,555 \cdot 2 = -5 \text{ В}.$$

Сумма э.д.с.:  $E_1 - E_{11} - E_8 = 10 - 7 - 8 = -5 \text{ В}.$

Второй закон Кирхгофа для выбранного контура выполняется, что и подтверждает правильность расчетов.

## 2.6 Метод двух узлов

Метод двух узлов наиболее целесообразен для расчета схем с двумя узлами и непосредственно вытекает из метода узловых потенциалов. Для схемы с  $n$  параллельными ветвями на рис. 15 согласно формуле (18) можно записать:

$$\varphi_a G_{aa} = I_{aa}.$$

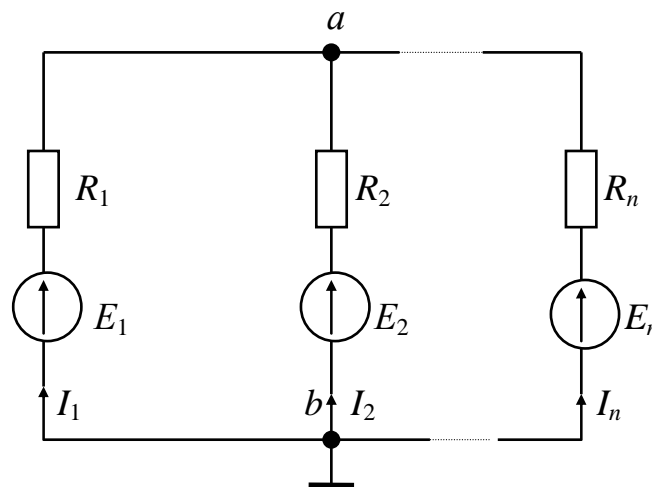


Рис. 15

С учетом принятых на рис. 15 обозначений последнее соотношение перепишем для частного случая отсутствия источников тока:

$$\varphi_a \sum_{k=1}^n g_k = \sum_{k=1}^n (E_k g_k);$$

$$U_{ab} = \frac{\sum_{k=1}^n (E_k g_k)}{\sum_{k=1}^n g_k}. \quad (20)$$

После определения  $U_{ab}$  находятся токи в ветвях по уже известной формуле:

$$I_n = (E_n - U_{ab}) g_n. \quad (21)$$

### Пример 7

Три генератора с э.д.с.  $E_1 = 48$  В;  $E_2 = E_3 = 45$  В и внутренними сопротивлениями  $r_1 = 1,2$  Ом,  $r_2 = 1$  Ом,  $r_3 = 1,5$  Ом работают параллельно на общую нагрузку  $R = 4,2$  Ом, как показано на рис. 16.

Требуется определить напряжение на нагрузке  $U_{ab}$ , токи нагрузки и генераторов.

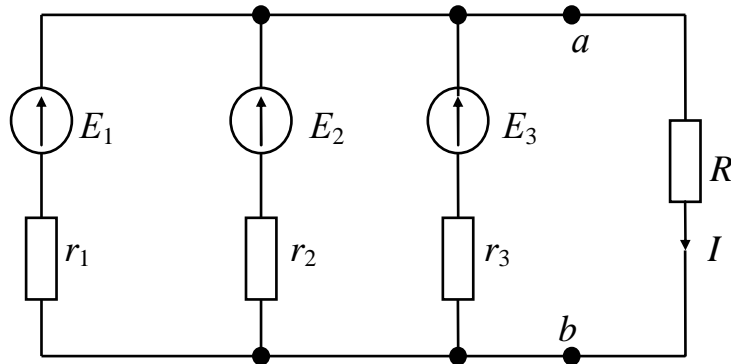


Рис. 16

По формуле (20) определяем напряжение на нагрузке:

$$U_{ab} = \frac{E_1/r_1 + E_2/r_2 + E_3/r_3}{1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 + 1/R} = \frac{48/1,2 + 45/1 + 45/1,5}{1/1,2 + 1 + 1/1,5 + 1/4,2} = 42 \text{ В.}$$

По формуле (21) вычисляем искомые токи:

$$I_1 = (E_1 - U_{ab})/r_1 = (48 - 42)/1,2 = 5 \text{ А;}$$

$$I_2 = (E_2 - U_{ab})/r_2 = (45 - 42)/1 = 3 \text{ А;}$$

$$I_3 = (E_3 - U_{ab})/r_3 = (45 - 42)/1,5 = 2 \text{ А;}$$

$$I = U_{ab}/R = 42/4,2 = 10 \text{ А.}$$

## 2.7 Метод наложения. Преобразование схем

Ток в любой ветви линейной электрической цепи можно рассматривать как алгебраическую сумму частичных токов, вызываемых в этой ветви каждым из источников в отдельности. Это положение называется принципом наложения или принципом суперпозиции, а основанный на этом положении метод — методом наложения. Для расчета этим методом цепи необходимо:

- 1) произвольно расставить направления действительных токов;
- 2) составить частичные схемы замещения, оставив в каждой по одному источнику. Внутренние же сопротивления исключенных источников должны оставаться во всех частичных схемах;
- 3) рассчитав каждую схему, найти частичные токи во всех ветвях;
- 4) определить действительные токи как алгебраическую сумму соответствующих частичных токов.

**Примечание:** методом наложения нельзя пользоваться для подсчета выделяемых в сопротивлениях мощностей, т.к. мощность пропорциональна квадрату тока.

При расчете частичных схем возникает необходимость определения эквивалентного сопротивления отдельных участков схем и токораспределения в ветвях схемы.

Наиболее часто используется последовательное либо параллельное соединение резисторов и их комбинации — смешанное соединение.

Для определения эквивалентного параметра при последовательном соединении суммируются сопротивления, а при параллельном — проводимости. В частном случае параллельного соединения двух резисторов, как показано на рис. 17, получим эквивалентное сопротивление:

$$\frac{1}{R_9} = g_9 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2},$$

$$R_9 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (22)$$

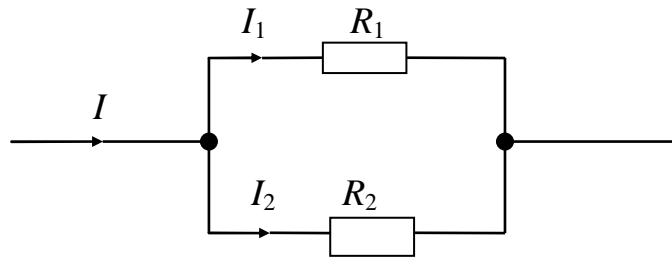


Рис. 17

При параллельном соединении нагрузок токи в них распределяются прямо пропорционально проводимостям. Поэтому для двух параллельных нагрузок токи в каждой из них определяются через ток  $I$  в неразветвленной части цепи (см. рис. 16) следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I \frac{g_1}{g_1 + g_2} = I \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \\ I_2 &= I \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

При последовательном соединении нагрузок напряжения на них прямо пропорциональны сопротивлениям. Следовательно, для схемы на рис. 18

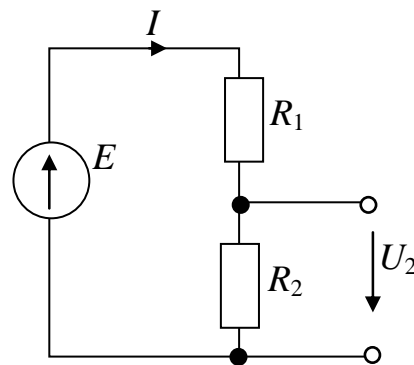


Рис. 18

$$U_2 = I \cdot R_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = E \cdot k,$$

где  $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$  — коэффициент передачи.

Коэффициент передачи может быть только меньше единицы, поэтому схема на рис. 18 называется делителем напряжения (резистивным). Делители используются, например, для согласования уровней измеряемого напряжения и измерительных приборов.

Однако встречаются и схемы, которые нельзя разбить на участки с последовательным или параллельным соединением. Примеры такого соединения нагрузок представлены на рис. 19.



Рис. 19

Схема на рис. 19, *a* называется треугольником, а на рис. 19, *б* — звездой. Для удобства расчетов в зависимости от общей конфигурации схемы (относительно зажимов *a*, *b*, *c* которой и представлены схемы треугольника и звезды) указанные типовые соединения требуется взаимно преобразовывать.

Для эквивалентности схем необходимо и достаточно, чтобы сопротивления или проводимости между любой парой зажимов (*ab*, *bc*, *ca*) при соединении звездой и треугольником были одинаковы. На основании этого условия разработаны формулы эквивалентного преобразования, которые приводятся ниже без вывода.

Преобразование треугольника в эквивалентную звезду:

$$\left. \begin{aligned} R_a &= \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab} + R_{ca} + R_{bc}}; \\ R_b &= \frac{R_{ab}R_{bc}}{R_{ab} + R_{ca} + R_{bc}}; \\ R_c &= \frac{R_{ca}R_{bc}}{R_{ab} + R_{ca} + R_{bc}}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

В частном случае, если в треугольнике все сопротивления одинаковы и равны  $R_{\Delta}$ , то  $R_a = R_b = R_c = R_{\Delta}/3$ .

Преобразование звезды в эквивалентный треугольник:

$$\left. \begin{aligned} R_{ab} &= R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c}; \\ R_{bc} &= R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a}; \\ R_{ca} &= R_c + R_a + \frac{R_c R_a}{R_b}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Если в звезде все сопротивления одинаковы и равны  $R_{\star}$ , то  $R_{ab} = R_{bc} = R_{ca} = 3 R_{\star}$ .

### Пример 8

Для схемы на рис. 20 задано:  $E = 50$  В;  $R_1 = 5$  Ом;  $R_2 = R_4 = R_6 = 10$  Ом;  $R_3 = R_5 = 30$  Ом.

Требуется определить ток  $I$ , протекающий через источник э.д.с.

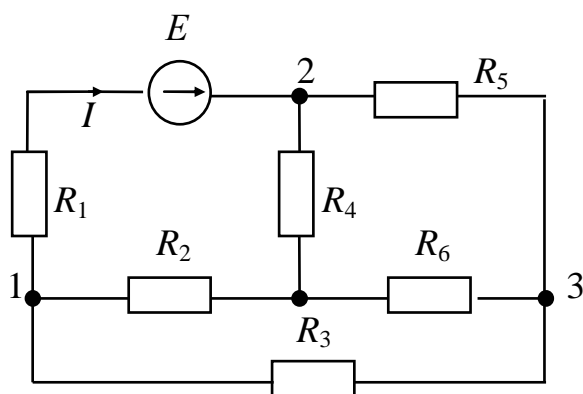


Рис. 20

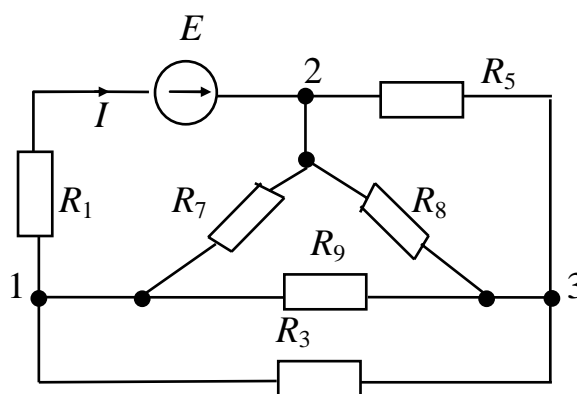


Рис. 21

Относительно узлов 1, 2, 3 резисторы  $R_2$ ,  $R_4$ ,  $R_6$  образуют звезду. Преобразуем ее в эквивалентный треугольник, состоящий из резисторов  $R_7$ ,  $R_8$  и  $R_9$ , как показано на рис. 21.

Так как в звезде  $R_2 = R_4 = R_6 = R_{\star}$ , то сопротивления резисторов треугольника составят значение

$$R_7 = R_8 = R_9 = 3 R_{\star} = 3 \cdot 10 = 30 \text{ Ом.}$$



На схеме (см. рис. 21) резисторы  $R_5$  и  $R_8$ , так же как  $R_3$  и  $R_9$ , включены параллельно. Заменяем эти две пары резисторов эквивалентными резисторами  $R_{10}$  и  $R_{11}$ , воспользовавшись формулой (22):

$$R_{10} = \frac{R_5 R_8}{R_5 + R_8} = \frac{30 \cdot 30}{30 + 30} = 15 \text{ Ом},$$

$$R_{11} = \frac{R_3 R_9}{R_3 + R_9} = \frac{30 \cdot 30}{30 + 30} = 15 \text{ Ом}.$$

С учетом этого схема преобразуется к виду, показанному на рис. 22.

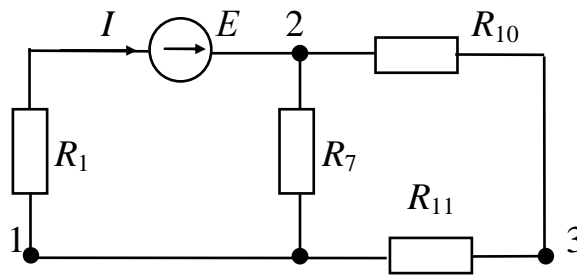


Рис. 22

Эквивалентное сопротивление всей схемы  $R$  будет равно:

$$R = R_1 + \frac{R_7(R_{10} + R_{11})}{R_7 + R_{10} + R_{11}} = 5 + \frac{30(15 + 15)}{30 + 15 + 15} = 20 \text{ Ом}.$$

Искомый ток согласно закону Ома

$$I = E/R = 50/20 = 2,5 \text{ А}.$$

### Пример 9

Методом наложения рассчитать токи в ветвях схемы на рис. 23, *а*, если задано:  $E_1=10$  В;  $E_2=40$  В;  $E_3=5$  В;  $R_1=35$  Ом;  $R_2=5$  Ом;  $R_3=10$  Ом.

Произвольно примем направления истинных токов в ветвях (см. рис. 23, *а*) и составим частичные схемы замещения для каждого из источников э.д.с., как показано на рис. 23, *б* — *г*.

Определим эквивалентное сопротивление схемы  $R_{э1}$  для источника э.д.с.  $E_1$  и частичные токи в первой схеме замещения (см. рис. 23, *б*):

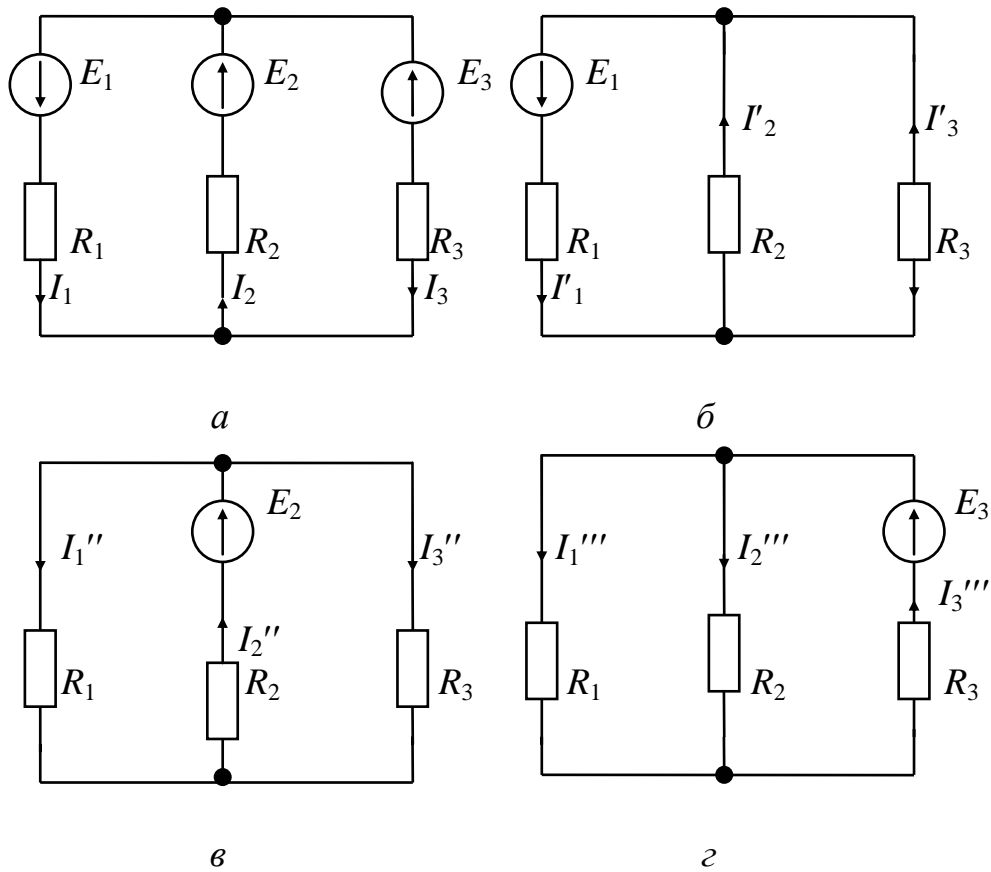


Рис. 23

$$R_{\text{э}1} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3)} = 35 + \frac{5 \cdot 10}{(5 + 10)} = \frac{115}{3} \text{ Ом};$$

$$I'_1 = E_1 / R_{\text{э}1} = 10 \cdot 3 / 115 = 6 / 23 \text{ А};$$

$$I'_2 = \frac{I'_1 R_3}{(R_2 + R_3)} = \frac{6 \cdot 10}{23(5 + 10)} = \frac{4}{23} \text{ А};$$

$$I'_3 = I'_1 - I'_2 = \frac{(6 - 4)}{23} = \frac{2}{23} \text{ А}.$$

Аналогичные вычисления проведем и для двух оставшихся частичных схем замещения:

$$R_{\text{э}2} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{(R_1 + R_3)} = 5 + \frac{35 \cdot 10}{(35 + 10)} = \frac{115}{9} \text{ Ом};$$

$$I''_2 = E_2 / R_{\text{э}2} = 40 \cdot 9 / 115 = 72 / 23 \text{ А};$$

$$I''_1 = \frac{I_2 R_3}{(R_1 + R_3)} = \frac{72 \cdot 10}{23(35 + 10)} = \frac{16}{23} \text{ А};$$

$$I''_3 = I''_2 - I''_1 = \frac{(72 - 16)}{23} = \frac{56}{23} \text{ А};$$

$$R_{\text{э3}} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} = 10 + \frac{35 \cdot 5}{(35 + 5)} = \frac{115}{8} \text{ Ом};$$

$$I'''_3 = E_3 / R_{\text{э3}} = 5 \cdot 8 / 115 = 8 / 23 \text{ А};$$

$$I'''_1 = \frac{I'''_3 R_2}{(R_1 + R_2)} = \frac{8 \cdot 5}{23(35 + 5)} = \frac{1}{23} \text{ А};$$

$$I'''_2 = I'''_3 - I'''_1 = \frac{(8 - 1)}{23} = \frac{7}{23} \text{ А}.$$

Подсчитаем истинные токи в ветвях:

$$I_1 = I'_1 + I''_1 + I'''_1 = \frac{(6 + 16 + 1)}{23} = 1 \text{ А};$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2 - I'''_2 = \frac{(4 + 72 - 7)}{23} = 3 \text{ А};$$

$$I_3 = -I'_3 + I''_3 - I'''_3 = \frac{(-2 + 56 - 8)}{23} = 2 \text{ А}.$$

## 2.8 Метод эквивалентного генератора

В любой электрической схеме можно мысленно выделить какую-то одну ветвь, а всю остальную часть схемы условно изобразить некоторым прямоугольником, как показано на рис. 24, *а*. По отношению к выделенной ветви вся схема, обозначенная прямоугольником, представляет собой так называемый двухполюсник.

Таким образом, двухполюсник — это обобщенное название схемы, которая двумя зажимами присоединена к выделенной ветви.

Если в двухполюснике есть источники энергии, то он называется активным (и обозначается буквой А), а если источников нет — пассивным (обозначается буквой П).

Выделим в сложной цепи одну ветвь с сопротивлением  $R$  (см. рис. 24, *a*). Ток  $I$  в этой ветви и напряжение  $U$  на ее зажимах зависят при прочих равных условиях от величины  $R$ .

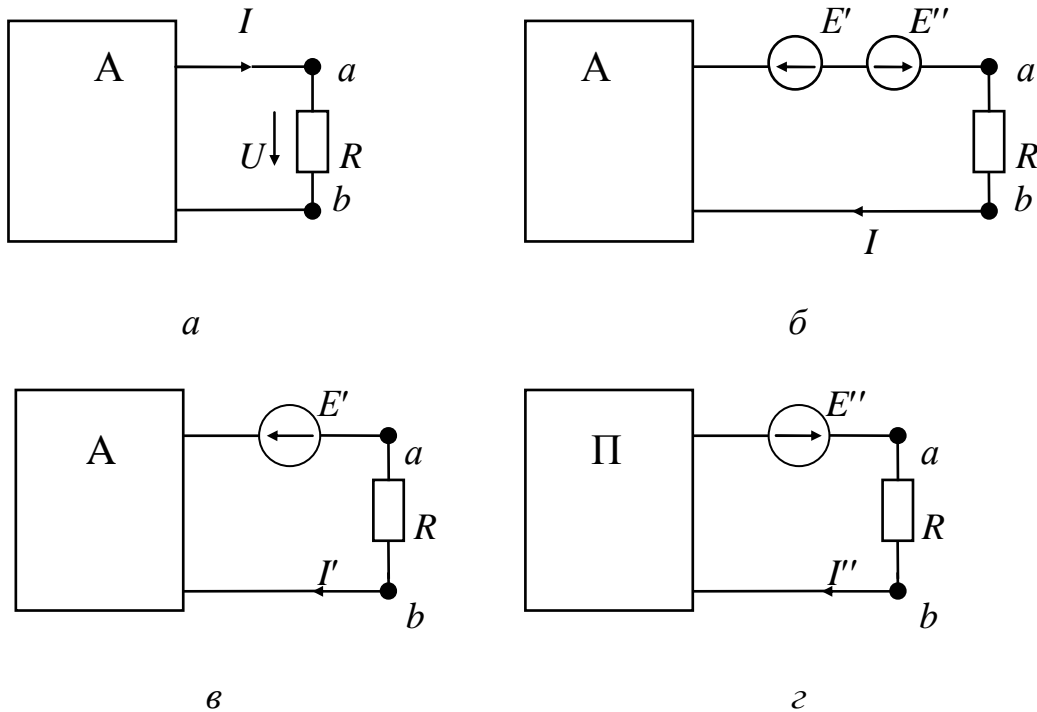


Рис. 24

В частности, при  $R=\infty$  (то есть при холостом ходе, когда ветвь  $ab$  разомкнута) ток  $I=0$ , а напряжение  $U=U_{xx} \neq 0$  (индекс «xx» обозначает холостой ход). Включим последовательно с  $R$  две э.д.с. —  $E'$  и  $E''$ , — равные по величине  $U_{xx}$  и направленные противоположно друг другу, как показано на рис. 24, *б*.

Поскольку  $E' = E''$ , ток  $I$  от их включения в цепь не изменится. Рассчитаем теперь полученную схему методом наложения, причем в первой частичной схеме (рис. 24, *в*) примем  $E''=0$ , а во второй (рис. 24, *г*) — все э.д.с. исходной схемы и  $E'$  равными нулю.

Искомый ток равен сумме частичных токов

$$I = I' + I''.$$

Но  $E' = U_{xx}$ , следовательно  $I'=0$  и  $I=I''$ .

Вывод отсюда таков: ток в любой ветви  $ab$  электрической цепи не изменится, если всю остальную цепь заменить эквивалентным генератором (активным двухполюсником), э.д.с. которого равна напряжению между разомкнутыми зажимами  $ab$  (то есть

напряжению холостого хода), а внутреннее сопротивление — сопротивлению цепи относительно зажимов  $ab$  также при холостом ходе. Этот вывод называется **теоремой об эквивалентном генераторе**.

Метод эквивалентного генератора, основанный на одноименной теореме, целесообразен в тех случаях, когда требуется определить только один из токов некоторой сложной цепи.

Пусть требуется определить ток  $I$  в одной из ветвей схемы (см. рис. 24,  $a$ ).

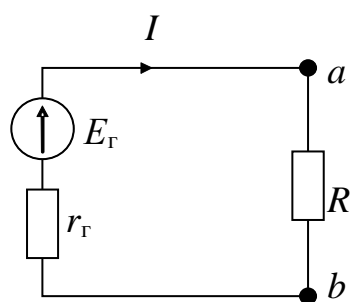


Рис. 25

Всю цепь, кроме ветви с сопротивлением  $R$ , заменим эквивалентным источником, имеющим э.д.с.  $E_{\Gamma} = U_{xx}$  и внутреннее сопротивление  $r_{\Gamma}$ , как показано на рис. 25.

Величину  $r_{\Gamma}$  можно определить, разомкнув зажимы  $ab$  и подсчитав сопротивление цепи относительно этих зажимов (при определении  $r_{\Gamma}$  э.д.с. всех содержащихся в цепи источников принимаются равными нулю).

Если есть и источники тока, то ветви с ними следует считать разомкнутыми).

Из полученной неразветвленной цепи определяем ток:

$$I = E_{\Gamma} / (r_{\Gamma} + R) = U_{xx} / (r_{\Gamma} + R). \quad (26)$$

Методика применения метода:

- 1) находится напряжение на зажимах разомкнутой ветви  $ab$ ;
- 2) определяется сопротивление  $r_{\Gamma}$ , то есть сопротивление всей схемы по отношению к зажимам  $ab$ ;
- 3) подсчитывается искомый ток.

### Пример 10.

Для схемы на рис. 26,  $a$  задано:  $E = 10$  В;  $R_1 = R_4 = 1$  Ом;  $R_2 = 4$  Ом;  $R_3 = R_5 = 2$  Ом. Требуется определить ток в ветви с  $R_5$ .

Размыкаем ветвь  $ab$ , как показано на рис. 26,  $b$ , и находим  $U_{ab\ xx}$ :

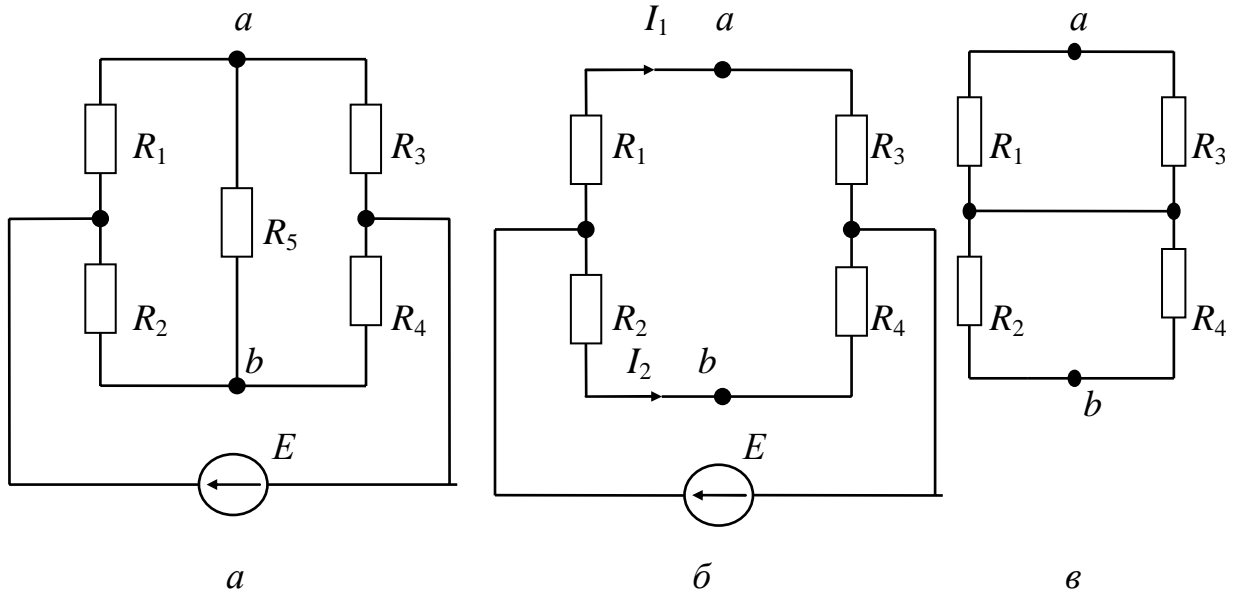


Рис. 26

$$\begin{aligned}\varphi_a &= \varphi_b + I_2 R_2 - I_1 R_1 = \varphi_b + R_2 E / (R_2 + R_4) - R_1 E / (R_1 + R_3) = \\ &= \varphi_b + 4 \cdot 10 / (4 + 1) - 10 / (1 + 2) = (\varphi_b + 4,67) \text{ В};\end{aligned}$$

$$U_{abxx} = \varphi_a - \varphi_b = 4,67 \text{ В.}$$

Рассчитаем сопротивление всей схемы при закороченном источнике  $E$  относительно зажимов  $ab$  (схема рис. 26, в):

$$R_{ab} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 2 / (1 + 2) + 4 / (4 + 1) = 1,47 \text{ Ом.}$$

По формуле (26) определяем искомый ток в ветви с  $R_5$ :

$$I_5 = \frac{U_{abxx}}{R_{ab} + R_5} = \frac{4,67}{(1,47 + 2)} = 1,346 \text{ А.}$$

## 2.9 Теорема компенсации

В любой электрической цепи без изменения токораспределения в ней сопротивление можно заменить э.д.с., численно равной падению напряжения в заменяемом сопротивлении и направленной встречно току в этом сопротивлении.

Для доказательства выделим из схемы одну ветвь с сопротивлением  $R$ , по которой течет ток  $I$ , а всю остальную часть схемы представим двухполюсником, как показано на рис. 27, а.

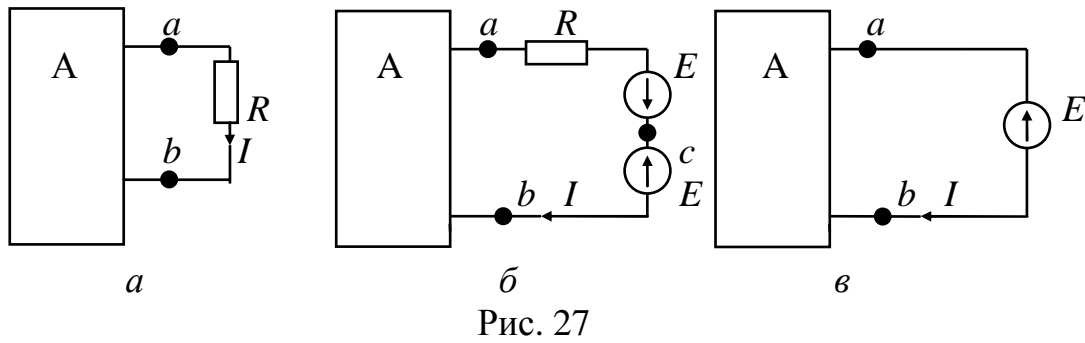


Рис. 27

Если в выделенную ветвь включить две равных и противоположных э.д.с.  $E$ , число равных падению напряжения в сопротивлении  $R$  от тока  $I$  (см. рис. 27, б), то ток  $I$  от этого не изменится. Определим потенциал точки  $c$ :

$$\varphi_c = \varphi_a - IR + E = \varphi_a.$$

Но если  $\varphi_c = \varphi_a$ , то точки  $a$  и  $c$  можно объединить в одну, то есть участок  $ac$  замкнуть и получить схему на рис. 27, в. В этой схеме вместо сопротивления  $R$  включена э.д.с.  $E$ .

## 2.10 Передача энергии в нагрузку

При передаче электрической энергии на достаточно большие расстояния необходимо учитывать сопротивление проводов. Для рассмотрения вопроса используем схему на рис. 28, а, где суммарное сопротивление проводов и внутреннее сопротивление генератора обозначено  $r$ .

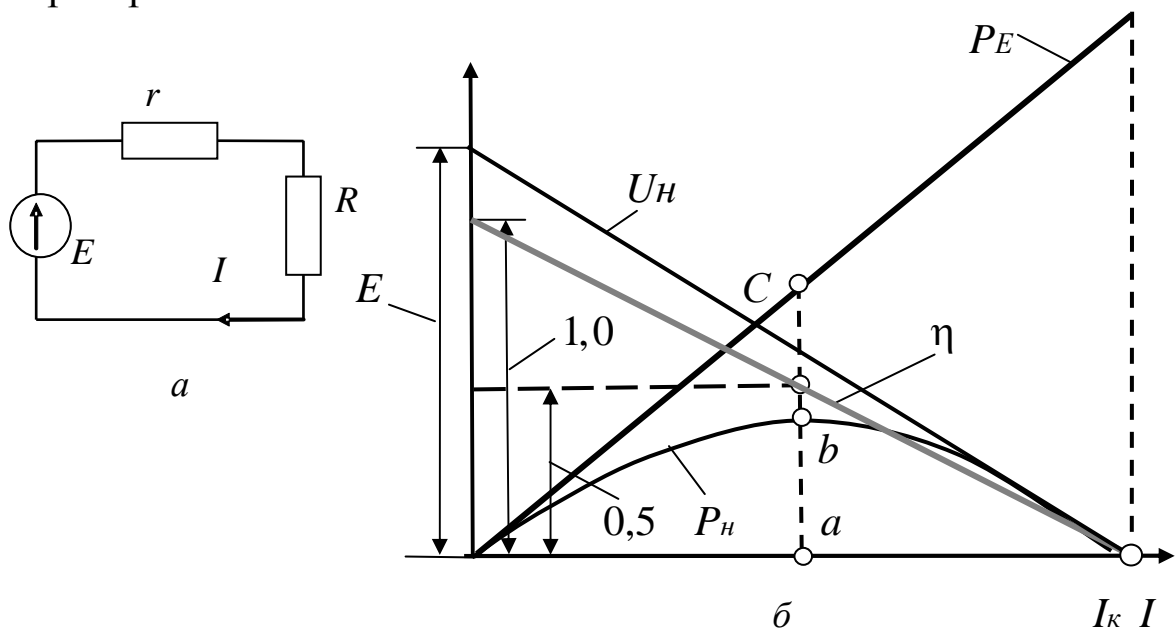


Рис. 28

Мощность в нагрузке  $P_H$  определяется соотношением

$$P_H = P_E - rI^2 = EI - rI^2, \quad (27)$$

или

$$P = RI^2, \quad (28)$$

где  $P_E$  - мощность источника.

Для определения тока  $I$ , при котором мощность  $P_H$  максимальна, найдем производную от  $P_H$  по  $I$  из уравнения (27) и приравняем ее к нулю:

$$dP_H/dI = E - 2rI = 0,$$

откуда искомый ток  $I = E/2r$ .

В рассматриваемой схеме ток  $I = E/(R + r)$ , значит, мощность максимальна при  $R=r$ . Из (28) при  $R=r$  мощность

$$P_{H_{\max}} = r \left( \frac{E}{2r} \right)^2 = E^2/4r.$$

Коэффициент полезного действия (к.п.д.) определяется отношением:

$$\eta = P_H/EI = (RI^2)/EI = (RI)/E = R/(r + R). \quad (29)$$

Таким образом, при передаче в нагрузку максимальной мощности  $\eta=0,5$ .

Напряжение на нагрузке  $U_H = E - rI$ .

По полученным здесь соотношениям на рис. 28, б построены зависимости  $U_H$ ,  $P_E$ ,  $P_H$  и  $\eta$  от тока  $I$ , иллюстрирующие режим работы линии.

При  $R = \infty$  (холостой ход линии) ток  $I = 0$  (на рис. 28, б - точка в начале координат), при  $R = r$  ток определяется отрезком  $Oa$  и при  $R = 0$  (краткое замыкание линии) значение тока максимально и равно  $I_k$ . Кроме того, при  $R = r$  мощность  $P_E$ , определяемая отрезком  $ac$ , равна удвоенной мощности нагрузки ( $ac=2ab=2bc$ ), и  $\eta=0,5$ .

Задача получения максимальной мощности в приемнике актуальна при передаче сигналов по линиям связи. Значение к.п.д. здесь роли не играет, так как уровень мощности сам по себе незначителен. Обеспечение условия  $R=r$  называют согласованием нагрузки (нагрузка же при этом называется согласованной).



Если мощность  $P_n$  значительна, что характерно для линий передач электрической энергии (ЛЭП), то первостепенной становится задача получения высокого значения к.п.д. Из (29) следует, что для этого необходимо обеспечить  $r \ll R$ .

Установим связь между мощностью потерь в ЛЭП  $P_r$  и мощностью нагрузки:

$$P_r = rI^2 = \rho \frac{2l}{S} \left( \frac{P_n}{U} \right)^2, \quad (30)$$

где  $\rho$  — удельное сопротивление материала проводов;

$l$  — длина линии;

$S$  — сечение каждого провода.

Из (30), в частности, следует, что при  $P_n = const$  с повышением напряжения требуется меньшее значение тока и, следовательно, уменьшаются потери в проводах, что, в свою очередь, позволяет уменьшить сечение проводов и расход проводникового материала.

## 3 ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### 3.1 Переменный ток и его основные характеристики

Переменным называется ток, изменяющийся во времени по величине и направлению. Значение тока в любой данный момент времени называют мгновенным и обозначают строчной буквой  $i$ .

Токи, мгновенные значения которых повторяются через равные промежутки времени в той же самой последовательности, называют периодическими. Наименьший промежуток времени, через который эти повторения наблюдаются, называют периодом и обозначают  $T$ . Величина, обратная периоду, называется частотой ( $f = 1/T$ ) и измеряется в герцах.

Наибольшее практическое распространение получил синусоидальный переменный ток, вырабатываемый на электростанциях электрическими машинами — синхронными генераторами. Мгновенное значение синусоидального тока определяется выражением

$$i = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \psi\right) = I_m \sin(\omega t + \psi), \quad (31)$$

где  $I_m$  — амплитуда;

$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$  — угловая частота, рад/с.

Аргумент синуса, т.е. величина  $(\omega t + \psi)$ , называется фазой. Фаза при  $t = 0$ , т.е.  $\psi$ , называется начальной фазой.

Любая синусоидально изменяющаяся величина полностью определяется тремя величинами: амплитудой, частотой, начальной фазой.

График функции (31) приведен на рис. 29, а.

Так как тепловое действие тока, а также механическая сила взаимодействия двух проводников, по которым протекает один и тот же ток, пропорциональны квадрату этого тока, то о величине переменных токов и напряжений обычно судят по их среднеквадратичным значениям за полный период. Это значение называется действующим или эффективным и обозначается прописной буквой  $I$ :

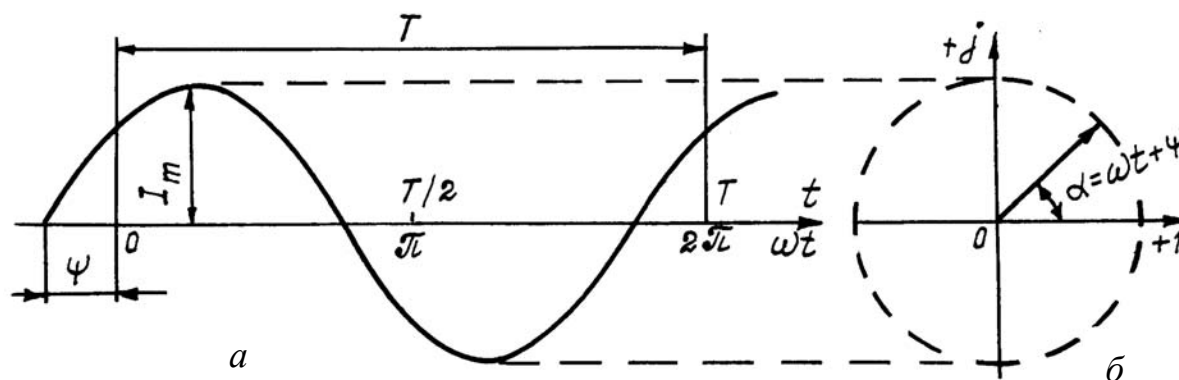


Рис. 29

$$\begin{aligned}
 I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi) dt} = I_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2(\omega t + \psi)}{2} dt} = \\
 &= I_m \sqrt{\frac{1}{2T} (T - 0)} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Кроме того, иногда используется и среднее значение, которое определяется на интервале  $T/2$ :

$$\begin{aligned}
 I_{cp} &= \frac{1}{0,5T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{T} (-\cos \omega t) \Big|_0^{T/2} = \\
 &= \frac{4I_m}{T} = \frac{2I_m}{\pi} = 0,638I_m.
 \end{aligned}$$

Еще одна характеристика периодических функций — коэффициент формы  $k_\phi$ . Это отношение действующего значения функции к среднему. Для синусоидальных функций

$$k_\phi = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2I_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

Для напряжений соотношения аналогичны.

### 3.2 Изображение синусоидальных функций векторами и комплексными числами

Условимся на комплексной плоскости по оси абсцисс откладывать действительную часть комплексного числа и обозначать эту ось  $+1$ , а по оси ординат — мнимую часть и обозначать  $+j$  ( $j = \sqrt{-1}$ ).

Из курса математики известна формула Эйлера:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha. \quad (32)$$

Комплексное число  $e^{j\alpha}$  изображается на комплексной плоскости вектором, численно равным единице и составляющим угол  $\alpha$  с осью  $+1$  (угол  $\alpha$  отсчитывается против часовой стрелки от оси  $+1$ ), как показано на рис. 30.

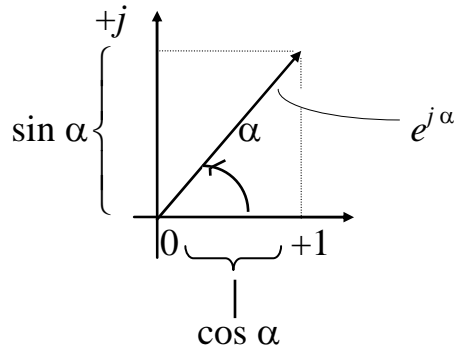


Рис. 30

Модуль функции  $e^{j\alpha}$  равен единице:

$$|e^{j\alpha}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1.$$

Проекция функции  $e^{j\alpha}$  на ось  $+1$  равна  $\cos \alpha$ , а на ось  $+j$  равна  $\sin \alpha$ .

Если вместо функции  $e^{j\alpha}$  взять функцию  $I_m e^{j\alpha}$ , то

$$I_m e^{j\alpha} = I_m \cos \alpha + j I_m \sin \alpha.$$

На комплексной плоскости эта функция, так же как и функция  $e^{j\alpha}$ , изобразится под углом  $\alpha$  к оси  $+1$ , но длина вектора будет в  $I_m$  раз больше.

В формуле (32) угол  $\alpha$  может быть любой. Положим, что  $\alpha = \omega t + \psi$ , т.е. угол  $\alpha$  изменяется прямо пропорционально времени. Тогда

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m \cos(\omega t + \psi) + j I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Коэффициент при  $j$  здесь равен правой части выражения (31).

Таким образом, синусоидально изменяющийся ток  $i$  можно представить как  $\text{Im} [I_m e^{j(\omega t + \psi)}]$  (мнимую часть  $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ )

или, что то же самое, как проекцию вращающегося вектора  $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$  на ось  $+j$  (см. рис. 29, б).

Учитывая, что синусоидальная функция времени  $I_m \sin(\omega t + \psi)$  и вращающийся вектор  $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$  одинаково проецируются на вертикальную ось в виде мгновенного значения  $i$  (если графики построены в одинаковом масштабе, как это и сделано на рис. 29), американский инженер и ученый Ч.П. Штейнметц предложил изображать синусоидально изменяющиеся величины векторами на комплексной плоскости, причем, для единообразия, для момента времени  $t = 0$ . Для этого момента времени вектор

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m e^{j\psi} = \dot{I}_m,$$

где  $\dot{I}_m$  — комплексная величина, модуль которой равен  $I_m$ ;

$\psi$  — угол, под которым вектор  $\dot{I}_m$  проведен к оси  $+1$  на комплексной плоскости, равный начальной фазе.

Величину  $\dot{I}_m$  называют **комплексной амплитудой** тока  $i$ . Комплексная амплитуда изображает ток  $i$  на комплексной плоскости для момента времени  $t=0$ .

Конечно, комплексные амплитуды или векторы, изображающие синусоидальные функции времени, имеют другой смысл, чем векторы, определяющие физические величины в пространстве, к которым относятся векторы скорости, силы, напряженности электрического поля и т.д.

Например, если  $i = 8 \sin(\omega t + 20^\circ)$  А, то комплексная амплитуда будет

$$\dot{I}_m = 8e^{j20^\circ} \text{ А.}$$

Обратный пример: по известной комплексной амплитуде тока  $\dot{I}_m = 25e^{-j30^\circ}$  А требуется записать выражение мгновенного значения тока.

Для перехода от комплексной амплитуды к мгновенному значению необходимо умножить  $\dot{I}_m$  на  $e^{j\omega t}$  и взять мнимую часть этого произведения:

$$i = \text{Im}\left(25e^{-j30^\circ} e^{j\omega t}\right) = \text{Im}\left[25e^{j(\omega t - 30^\circ)}\right] = 25 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ А.}$$

Так как переменные токи и напряжения обычно характеризуются действующими значениями, введем понятие комплекса действующего значения. Под **комплексом действующего значения** синусоидальной функции понимают частное от деления комплексной амплитуды на  $\sqrt{2}$ :

$$\dot{i} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}.$$

Рассмотрим далее вопрос о том, как сложить две синусоидальные функции  $i_1$  и  $i_2$  одинаковой частоты, но с различными амплитудами и различными начальными фазами. Непосредственное суммирование связано с трудоемкими и громоздкими тригонометрическими вычислениями. Значительно проще решение может быть получено графически при помощи векторной диаграммы или аналитически — путем суммирования комплексных амплитуд.

Сумма двух рассматриваемых токов даст некоторый ток  $i$  той же частоты:  $i = i_1 + i_2$ ;

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1); \quad i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Требуется найти амплитуду  $I_m$  и начальную фазу  $\psi$  тока  $i$ . С этой целью изобразим суммируемые токи векторами  $\dot{I}_{1m} = I_{1m} e^{j\psi_1}$  и  $\dot{I}_{2m} = I_{2m} e^{j\psi_2}$ , как показано на рис. 31.

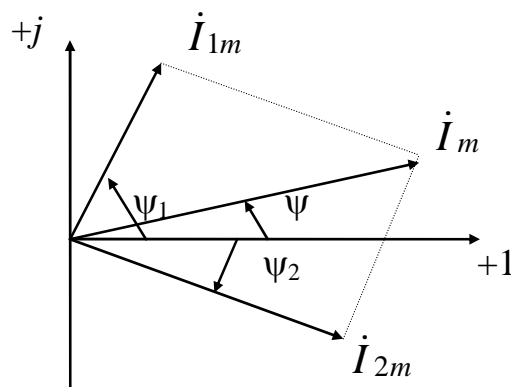


Рис. 31

Геометрическая сумма векторов  $\dot{I}_{1m}$  и  $\dot{I}_{2m}$  даст комплексную амплитуду суммарного тока  $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$ .

Амплитуда тока  $I_m$  будет определяться длиной суммарного вектора, а начальная фаза  $\psi$  — углом, образованным этим вектором и осью  $+1$ .

Для определения разности двух токов надо на комплексной плоскости произвести не сложение, а вычитание соответствующих векторов.

Теперь перейдем к аналитическому методу. На основании выполненного выше построения можно записать

$$\dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m} = \dot{I}_m.$$

Чтобы произвести суммирование комплексных чисел, их надо представить в алгебраической форме:

$$\dot{I}_{1m} = I'_{1m} + jI''_{1m}; \quad \dot{I}_{2m} = I'_{2m} + jI''_{2m}.$$

Выполнив суммирование, получим

$$I'_{1m} + jI''_{1m} + I'_{2m} + jI''_{2m} = I'_m + jI''_m = \dot{I}_m,$$

где  $I'_m = I'_{1m} + I'_{2m}$ ;  $I''_m = I''_{1m} + I''_{2m}$ .

Отсюда находим

$$I_m = \sqrt{(I'_m)^2 + (I''_m)^2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{I''_m}{I'_m}.$$

Так как  $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg}(\psi \pm \pi)$ , то для определения  $\psi$  нужно еще знать, в какой четверти комплексной плоскости располагается вектор  $\dot{I}_m$ . Это легко установить по знакам действительной и мнимой частей  $\dot{I}_m$ .

Метод расчета цепей, основанный на изображении синусоидальных функций времени комплексными числами, получил название *комплексного или символического метода*.

### 3.3 Элементы цепей переменного тока

Составными элементами цепей синусоидального тока являются резистор, индуктивная катушка и конденсатор.

Термин «сопротивление» для цепей переменного тока, в отличие от цепей постоянного тока, недостаточно полный, поскольку

ку сопротивление переменному току оказывают не только те элементы цепи, в которых выделяется энергия в виде теплоты (их называют **активными сопротивлениями**), но и те элементы цепи, в которых энергия в виде теплоты не выделяется, но периодически запасается в электрическом или магнитном полях. Такие элементы цепи называют **реактивными**, а их сопротивления переменному току — **реактивными сопротивлениями**. Реактивными сопротивлениями обладают индуктивные катушки и конденсаторы.

### 1. Резистор (активное сопротивление)

Пусть по резистору с сопротивлением  $R$  течет ток  $i = I_m \sin \omega t$ . По закону Ома напряжение на резисторе

$$u = iR = RI_m \sin \omega t = U_m \sin \omega t,$$

где  $U_m = RI_m$ .

Комплексы тока  $\dot{I}$  и напряжения  $\dot{U}$  по фазе совпадают.

Протекание по цепи тока сопровождается потреблением от источника энергии. Скорость поступления энергии характеризуется мощностью. Условимся под мгновенным значением мощности понимать произведение мгновенного значения напряжения  $u$  на участке цепи на мгновенное значение тока  $i$ , протекающего по этому участку:

$$p = ui,$$

где  $p$  — функция времени.

При активной нагрузке

$$p = U_m I_m \sin^2 \omega t = \frac{U_m I_m}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

Мгновенная мощность имеет постоянную составляющую  $U_m I_m / 2$  и составляющую  $U_m I_m \cos 2\omega t / 2$ , изменяющуюся с частотой  $2\omega$ .

На рис. 32 представлены кривые мгновенных значений тока, напряжения и мощности при активной нагрузке.



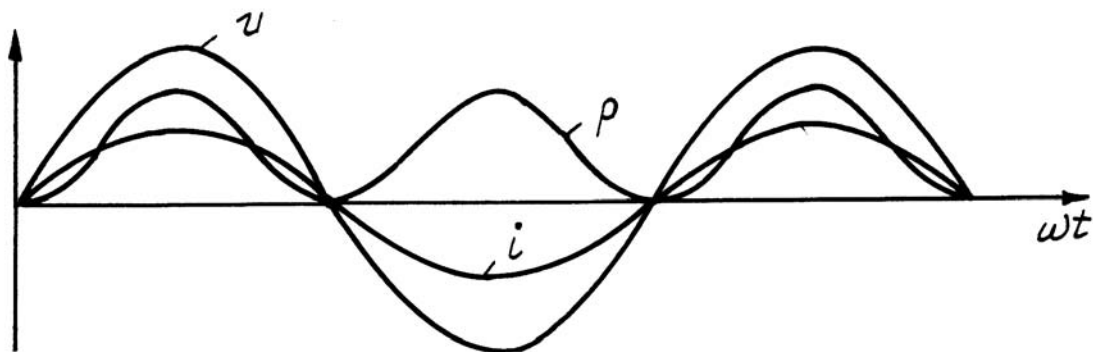


Рис. 32

## 2. Индуктивная катушка

Предположим, что активное сопротивление обмотки катушки равно нулю и катушка обладает только индуктивностью  $L$ .

Если через  $L$  течет ток  $i = I_m \sin \omega t$ , то в катушке наводится э.д.с. самоиндукции ( $e_L$ ):

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Для того чтобы через индуктивность проходил переменный ток, на ее выводах должно быть напряжение, равное и противоположное наведенной э.д.с.:

$$u_L = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = U_m \sin(\omega t + 90^\circ) = U_m \cos \omega t,$$

где  $U_m = \omega L I_m$ .

Произведение  $\omega L$  обозначают  $X_L$  и называют индуктивным сопротивлением:  $X_L = \omega L$ . Единица индуктивного сопротивления  $\text{с}^{-1} \cdot \text{Ом} \cdot \text{с} = \text{Ом}$ .

Напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на  $90^\circ$ , что и показано векторами на рис. 33, а и диаграммами мгновенных значений на рис. 33, б.

Мгновенная мощность —

$$p = ui = U_m \cos \omega t I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t —$$

положительна, когда  $u$  и  $i$  имеют одинаковые знаки (см. рис. 33, б). Площадь, ограниченная кривой  $p$  и осью абсцисс за это время, представляет собой энергию, которая взята от источника и пошла

на создание энергии магнитного поля в индуктивности. Ток на этих интервалах по абсолютной величине увеличивается.

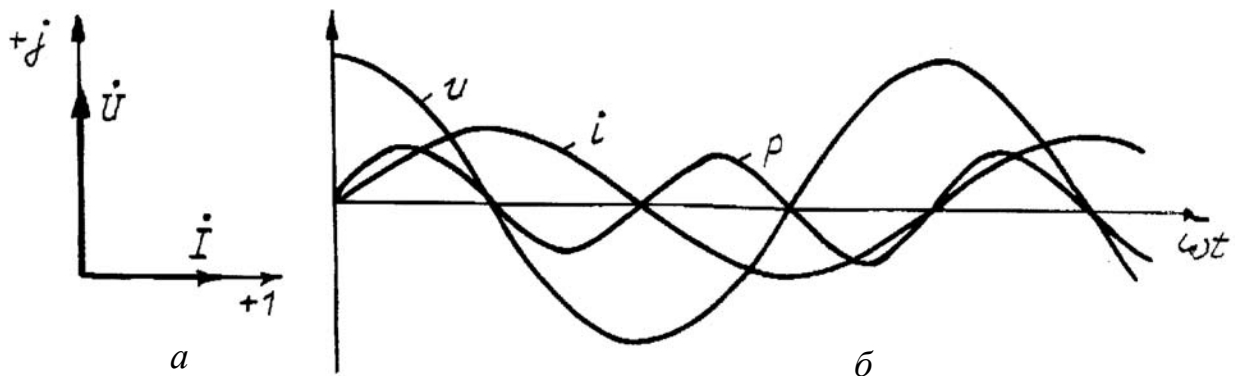


Рис. 33

Когда  $u$  и  $i$  имеют противоположные знаки,  $p$  отрицательна. Значение тока по абсолютной величине на этих интервалах уменьшается, энергия магнитного поля отдается обратно в источник.

### 3. Конденсатор

Если к конденсатору приложено напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ , то заряд  $q$  будет изменяться по закону:

$$q = Cu = CU_m \sin \omega t,$$

т.е. конденсатор будет периодически перезаряжаться. Но перезарядка вызовет протекание тока через конденсатор:

$$i = \frac{dq}{dt} = d(CU_m \sin \omega t) / dt = \omega CU_m \cos \omega t = \omega CU_m \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Ток через конденсатор опережает по фазе напряжение на конденсаторе на  $90^\circ$  (см. векторную диаграмму на рис. 34, *a* и временные диаграммы на рис. 34, *б*).

Амплитуда тока  $I_m$  равна амплитуде напряжения  $U_m$ , деленной на емкостное сопротивление:

$$X_C = 1/\omega C.$$

Действительно,

$$I_m = \omega CU_m = \frac{U_m}{1/\omega C} = \frac{U_m}{X_C}.$$

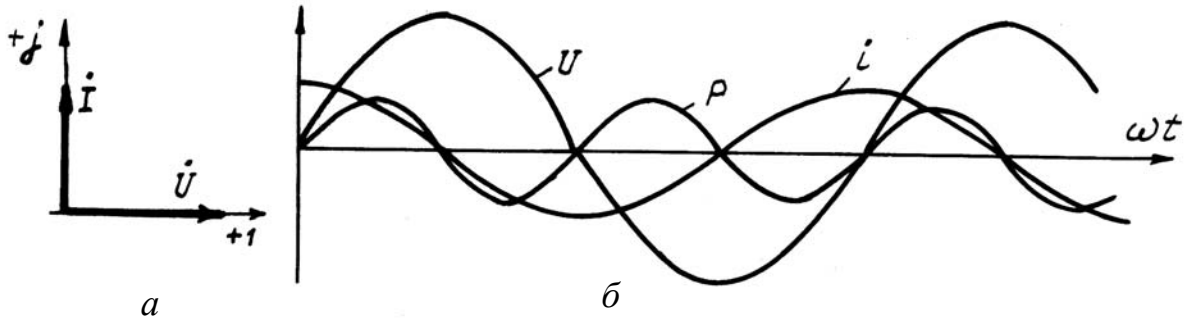


Рис. 34

Мгновенная мощность

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t.$$

За первую четверть периода конденсатор потребляет от источника энергию (мгновенная мощность положительна, см. рис. 34, б), которая идет на создание электрического поля в нем. Во вторую четверть периода напряжение на конденсаторе уменьшается от максимума до нуля и запасенная в электрическом поле энергия отдается источнику (мгновенная мощность отрицательна). Далее процессы повторяются.

### 3.4 Основы символического метода

Пусть есть некоторый вектор  $\dot{A} = Ae^{j\varphi}$ . Каков будет результат от умножения этого вектора на  $j$  и на  $-j$ ?

Представим векторы  $j$  и  $-j$  в показательной форме:  $j = 1e^{j90^\circ}$ ;  $-j = 1e^{-j90^\circ}$ .

Произведем умножение:

$$\dot{A}j = Ae^{j\varphi}e^{j90^\circ} = Ae^{j(\varphi+90^\circ)};$$

$$\dot{A}(-j) = Ae^{j\varphi}e^{-j90^\circ} = Ae^{j(\varphi-90^\circ)}.$$

По модулю результирующий вектор не меняется. Умножение  $\dot{A}$  на  $j$  поворачивает исходный вектор на  $90^\circ$  в сторону опережения, т.е. против часовой стрелки, а умножение  $\dot{A}$  на  $-j$  поворачивает исходный вектор на  $90^\circ$  в сторону отставания, т.е. по часовой стрелке. Это и показано на рис. 35.

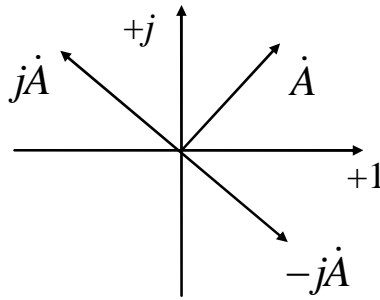


Рис. 35

С учетом изложенного перейдем к сущности **символического метода** расчета цепей синусоидального тока. Он заключается в переходе от дифференциальных уравнений, составленных для мгновенных значений величин, к алгебраическим уравнениям, составленным относительно комплексов тока и э.д.с.

Мгновенные значения тока  $i$  заменяют комплексной амплитудой тока  $\dot{I}_m$ ;

мгновенное значение напряжения на резисторе  $u_R$ , равное  $Ri$ , заменяют комплексом  $R\dot{I}_m$ ;

мгновенное значение напряжения на индуктивности  $u_L = Ldi/dt$  заменяют комплексом  $j\dot{I}_m\omega L$ , опережающим ток на  $90^\circ$ ;

мгновенное значение напряжения на конденсаторе  $u_C = \frac{1}{C} \int idt$  заменяют комплексом  $-j\dot{I}_m/\omega C$ , отстающим от тока на  $90^\circ$ ;

мгновенное значение э.д.с.  $e$  заменяют комплексом  $\dot{E}_m$ .

Например, для схемы на рис. 36 уравнение для мгновенных значений можно записать так:

$$e = u_R + u_L + u_C, \text{ или } e = iR + Ldi/dt + \frac{1}{C} \int idt.$$

Запишем его в комплексной форме:

$$\dot{E}_m = \dot{I}_m R + j\dot{I}_m \omega L - j\dot{I}_m / \omega C = \dot{I}_m (R + j\omega L - j/\omega C).$$

Следовательно, для схемы (см. рис. 36)

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{R + j\omega L - j/\omega C}.$$

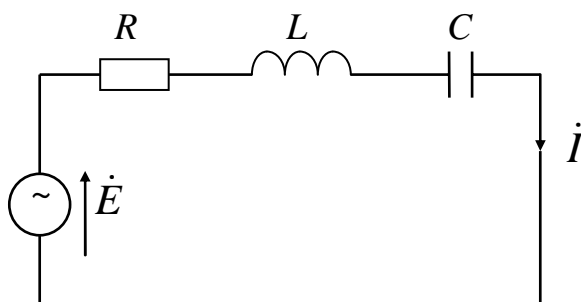


Рис. 36

Это уравнение позволяет найти комплексную амплитуду тока  $\dot{I}_m$  через комплексную амплитуду э.д.с.  $\dot{E}_m$  и сопротивления цепи  $R$ ,  $\omega L$  и  $1/\omega C$ .

Метод называют **символическим** потому, что ток и каждое напряжение заменяются своими комплексными изображениями, или символами. Так,  $j\dot{I}_m\omega L$  есть изображение, или символ, напряжения на индуктивности  $u_L = Ldi/dt$  и т.д.

Комплексная величина  $R + j\omega L - j/\omega C$  имеет размерность сопротивления, называется **комплексным сопротивлением** и обозначается через  $Z$ . Как и всякий комплекс,  $Z$  можно записать в показательной форме:

$$Z = ze^{j\varphi} = R + j\omega L - j/\omega C.$$

Модуль комплексного сопротивления принято обозначать через  $z$ . Точку над  $Z$  не ставят, потому что принято ставить ее только над такими комплексными величинами, которые отображают синусоидальные функции времени.

Исходное уравнение для рассматриваемой схемы можно записать так:  $\dot{E}_m = \dot{I}_m Z$ . Поделив обе его части на  $\sqrt{2}$ , получим уравнение для комплексов действующих значений:

$$\dot{I} = \dot{E}/Z. \quad (33)$$

Уравнение (33) представляет собой **закон Ома для цепи синусоидального тока**.

В общем случае  $Z$  имеет некоторую действительную часть  $R$  и некоторую мнимую часть  $jX$ :

$$Z = R + jX,$$

где  $R$  — **активное сопротивление**,  $X$  — **реактивное**.

Для схемы на рис. 36 реактивное сопротивление

$$X = \omega L - 1/\omega C.$$

Величина  $Y$ , обратная комплексному сопротивлению, называется **комплексной проводимостью**.

$$Y = \frac{1}{Z} = g - jb = ye^{-j\varphi}.$$

Единица комплексной проводимости — См ( $\text{Ом}^{-1}$ ). Действительную часть ее обозначают через  $g$ , а мнимую — через  $b$ . Так как

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = g - jb,$$

то

$$g = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad b = \frac{X}{R^2 + X^2}; \quad y = \sqrt{g^2 + b^2}. \quad (34)$$

Если  $X$  положительно, то и  $b$  положительно. При  $X$  отрицательном  $b$  также отрицательно.

При использовании комплексной проводимости закон Ома (33) запишется так:

$$\dot{I} = \dot{U}Y = \dot{U}g - j\dot{U}b = \dot{I}_a + \dot{I}_p,$$

где  $\dot{I}_a$  — активная составляющая тока;

$\dot{I}_p$  — реактивная составляющая тока;

$\dot{U}$  — напряжение на участке цепи, сопротивление которого равно  $Z$ .

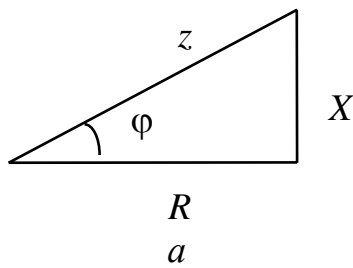
Модуль комплексного сопротивления

$$z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Графическая интерпретация этого выражения называется **треугольником сопротивлений** и приводится на рис. 37, а

Аналогично применяется и понятие **треугольника проводимостей**. Такой треугольник показан на рис. 37, б.

Расчет любой цепи переменного тока связан с комплексными числами. Поэтому нужно иметь в виду следующее.



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{b}{g}.$$

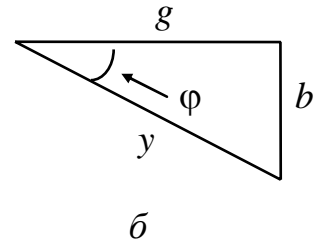


Рис. 37

Сложение двух и большего числа комплексов удобнее производить, используя алгебраическую форму записи:

$$(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) + (a_3 + jb_3) = (a_1 + a_2 + a_3) + j(b_1 + b_2 + b_3).$$

Деление и умножение комплексных чисел удобнее всего производить, пользуясь показательной формой записи:

$$\frac{C_1 e^{j\varphi_1}}{C_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{C_1}{C_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

По первому закону Кирхгофа алгебраическая сумма мгновенных значений токов, сходящихся в любом узле схемы, равна нулю. Заменяв каждый ток его комплексным изображением, получим выражение *первого закона Кирхгофа в символической форме*:

$$\sum \dot{I} = 0. \quad (35)$$

Аналогично этому записывается для любого замкнутого контура и *второй закон Кирхгофа в символической форме*:

$$\sum \dot{I}Z = \sum \dot{E}. \quad (36)$$

Для расчета цепей постоянного тока разработаны методы на основе первого и второго законов Кирхгофа, с помощью которых вести расчет проще, чем решать систему уравнений, составленных непосредственно по законам Кирхгофа. Но законы Кирхгофа применимы и для синусоидальных цепей переменного тока. Поэтому все рассмотренные методы расчета цепей постоянного тока применимы и здесь. Нужно лишь вместо постоянного тока  $I$  использовать комплекс тока  $\dot{I}$ , вместо проводимости  $g$  — комплексную проводимость  $Y$ , вместо сопротивления  $R$  — комплексное сопротивление  $Z$  и вместо постоянной э.д.с.  $E$  — комплексную э.д.с.  $\dot{E}$ .

Ток и напряжения на различных участках цепи синусоидального тока, как правило, по фазе не совпадают. Наглядное представление о фазовом расположении различных векторов дает векторная диаграмма токов и напряжений, вследствие чего с помощью такой диаграммы можно контролировать правильность производимых аналитических расчетов. Рассмотрим это на примерах.

### Пример 11

В схеме на рис. 38, а  $e = 141\sin\omega t$  В;  $R_1=3$  Ом;  $R_2=2$  Ом;  $L=0,00955$  Гн;  $\omega=314$  с<sup>-1</sup>. Требуется определить ток и напряжения на элементах цепи.

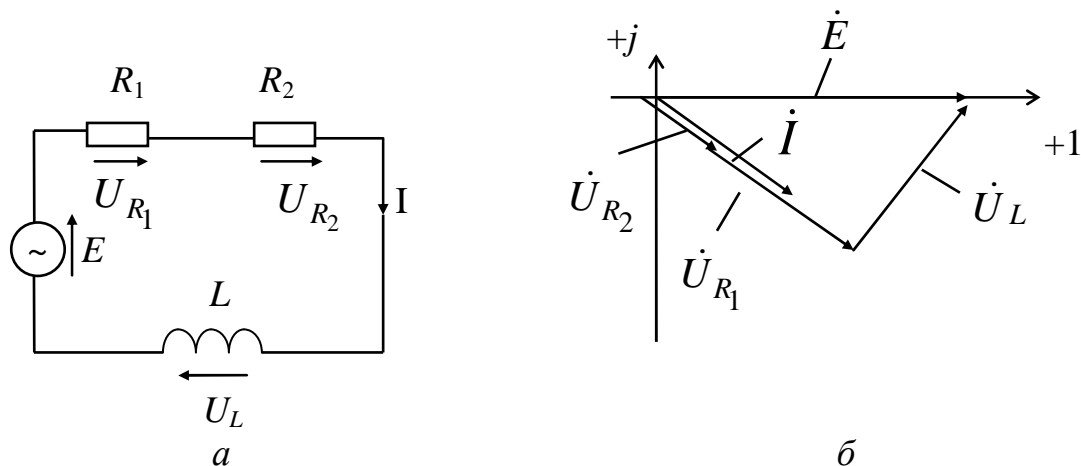


Рис. 38

**Замечание.** Направления токов, э.д.с. и напряжений на переменном токе изменяются с каждым полупериодом. Поэтому на схемах направления указанных величин обозначаются лишь для одного из полупериодов.

**Решение.**

Запишем уравнение для мгновенных значений:

$$i(R_1 + R_2) + L \frac{di}{dt} = e.$$

Перейдем от него к уравнению в комплексах:

$$\dot{I}(R_1 + R_2) + j\omega L \dot{I} = \dot{E}, \text{ или } \dot{I}Z = \dot{E},$$

где  $Z = R_1 + R_2 + j\omega L = 3 + 2 + j314 \cdot 0,00955 = 5 + j3 =$



$$= \sqrt{5^2 + 3^2} \cdot e^{j \arctg 3/5} = 5,83 e^{j31^\circ} \text{ Ом.}$$

Комплекс действующего значения э.д.с.  $\dot{E} = 141/\sqrt{2} = 100 \text{ В.}$

Ток в цепи

$$\dot{I} = \dot{E}/Z = 100/5,83 e^{j31^\circ} = 17,2 e^{-j31^\circ} \text{ А.}$$

Напряжение на элементах  $R_1, R_2, L$ :

$$\dot{U}_{R_1} = \dot{I} R_1 = 51,6 e^{-j31^\circ} \text{ В.}$$

$$\dot{U}_{R_2} = \dot{I} R_2 = 34,4 e^{-j31^\circ} \text{ В.}$$

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I} = e^{j90^\circ} \cdot 3 \cdot 17,2 e^{-j31^\circ} = 51,6 e^{j59^\circ} \text{ В.}$$

Если бы в рассматриваемой схеме к элементам подключили вольтметры (эффективного значения), то их показания соответствовали бы модулям найденных комплексных напряжений ( $U_{R_1} = 51,6 \text{ В}$ ;  $U_{R_2} = 34,4 \text{ В}$ ;  $U_L = 51,6 \text{ В}$ ;

Векторная диаграмма изображена на рис. 38, б. Вектор  $\dot{E}$ , имеющий нулевую начальную фазу, направлен по оси +1. Вектор  $\dot{I}$  отстает от него на  $31^\circ$ . Вектор напряжения на индуктивности  $\dot{U}_L$  опережает вектор тока на  $90^\circ$ . Сумма векторов падений напряжения на элементах схемы равна э.д.с.  $\dot{E}$ .

### Пример 12

В схеме на рис. 39, а  $R=4 \text{ Ом}$ ;  $\omega = 10^5 \text{ с}^{-1}$ . При  $E = 10 \text{ мВ}$  по цепи протекал ток  $I = 2 \text{ мА}$  (здесь  $E$  и  $I$  не комплексы, а модули). Требуется определить величину емкости конденсатора.

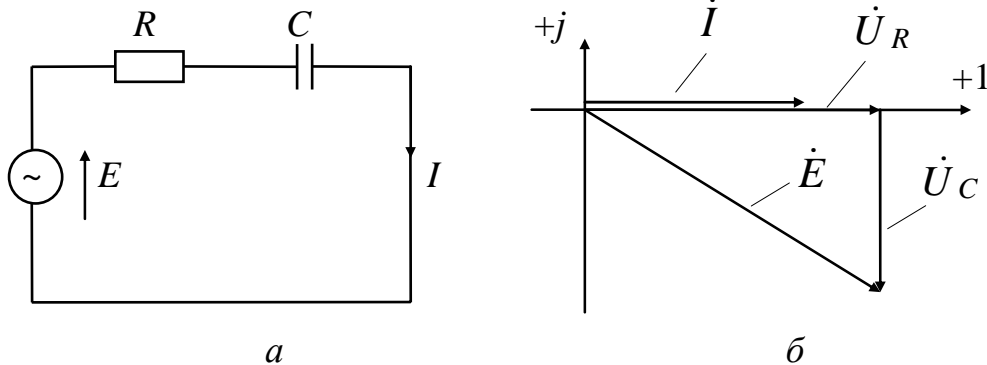


Рис. 39

Комплексное сопротивление цепи  $Z = R - j/\omega C$ , его модуль  $z = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$ .

По закону Ома  $I = E/z$ . Отсюда

$$z = \frac{E}{I} = \frac{10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}} = 5 \text{ Ом.}$$

Следовательно,

$$X_C = 1/\omega C = \sqrt{z^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ Ом;}$$

$$C = 1/\omega X_C = 1/10^5 \cdot 3 = 3,33 \text{ мкФ.}$$

Векторная диаграмма изображена на рис. 39, б. Начальные фазы  $\dot{E}$  и  $\dot{I}$  по условию заданы не были. Поэтому один из указанных векторов, а именно  $\dot{I}$ , направлен по оси +1. Расположение остальных векторов определилось относительно вектора  $\dot{I}$ . Если бы по оси +1 был направлен вектор  $\dot{E}$ , то вся диаграмма повернулась бы на соответствующий угол против часовой стрелки. Но от поворота взаимное расположение всех векторов не изменилось бы.

### Пример 13

На участке разветвленной цепи, как показано на рис. 40, а, активное сопротивление численно равно индуктивному. Амперметр  $A_2$  показывает 5 А. Что покажет  $A_3$ ?

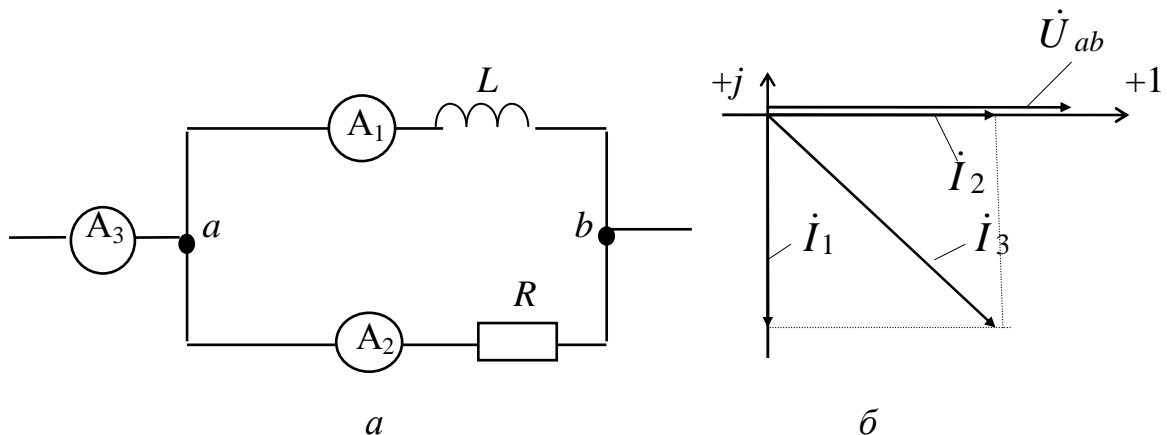


Рис. 40

Построим векторную диаграмму, как показано на рис. 40, б. Величина вектора  $\dot{U}_{ab}$  взята произвольно, т.к. на решение задачи не влияет. Ток  $\dot{I}_1$  отстает от тока  $\dot{I}_2$  на  $90^\circ$  и равен ему по величине.

не. Ток неразветвленной части схемы  $\dot{i}_3 = \dot{i}_2 + \dot{i}_1$ . Модуль тока  $I_3$  равен  $\sqrt{5^2 + 5^2} = 7,05$  А. Это значение и покажет амперметр  $A_3$ .

### Пример 14

Построить векторную диаграмму токов и напряжений для схемы на рис. 41, а, если  $R_1 = 10$  Ом;  $R_3 = 2,5$  Ом;  $\omega L_1 = 10$  Ом;  $\omega L_3 = 20$  Ом;  $1/\omega C = 14,1$  Ом;  $I_1 = 1$  А.

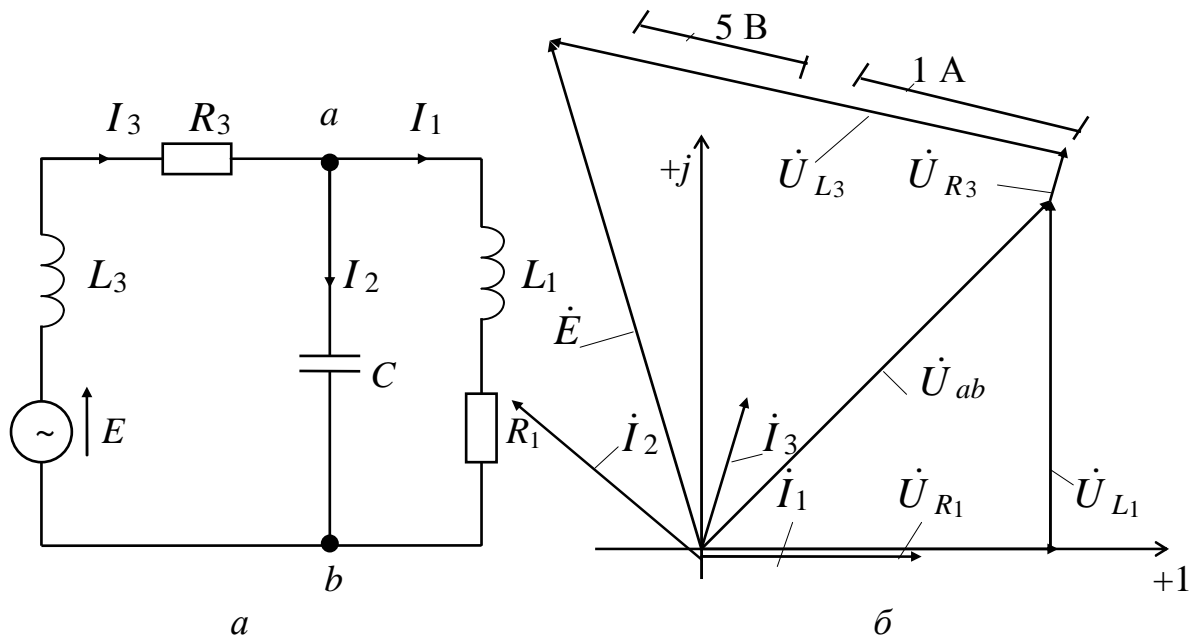


Рис. 41

Выберем положительные направления токов в соответствии с рисунком. Ток  $\dot{i}_1$  направим по оси +1, т.е.  $\dot{i}_1 = I_1 e^{j0}$ .

$$\dot{U}_{R_1} = R_1 \dot{i}_1 = 10 e^{j0} \text{ В (совпадает с током } \dot{i}_1 \text{)}.$$

$$\dot{U}_{L_1} = j\omega L_1 \dot{i}_1 = 10 e^{j90^\circ} \text{ В (опережает ток } \dot{i}_1 \text{ на } 90^\circ \text{)}.$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{R_1} + \dot{U}_{L_1} = 10 e^{j0} + 10 e^{j90^\circ} = 10 + j10 = 14,1 e^{j45^\circ} \text{ В.}$$

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{-j/\omega C} = \frac{14,1 e^{j45^\circ}}{14,1 e^{-j90^\circ}} = 1 e^{j135^\circ} \text{ А (опережает } \dot{U}_{ab} \text{ на } 90^\circ \text{)}.$$

$$\dot{i}_3 = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = 1 + 1 e^{j135^\circ} = 1 + j0,7 - 0,7 = 0,3 + j0,7 = 0,76 e^{j67^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{U}_{R_3} = R_3 \dot{i}_3 = 2,5 \cdot 0,76 e^{j67^\circ} = 1,9 e^{j67^\circ} \text{ В (совпадает с током } \dot{i}_3 \text{)}.$$

$\dot{U}_{L_3} = j\omega L_3 \dot{I}_3 = 20 \cdot 0,76 e^{j67^\circ} e^{j90^\circ} = 15,2 e^{j157^\circ}$  В (опережает ток  $\dot{I}_3$  на  $90^\circ$ ).

$$\dot{E} = \dot{U}_{L_3} + \dot{U}_{R_3} + \dot{U}_{ab}$$

$$\dot{U}_{L_3} = 15,2 e^{j157^\circ} = 15,2 \cos 157^\circ + j15,2 \sin 157^\circ = (-14 + j5,93) \text{ В.}$$

$$\dot{U}_{R_3} = 1,9 e^{j67^\circ} = 1,9 \cos 67^\circ + j1,9 \sin 67^\circ = (0,74 + j1,75) \text{ В.}$$

$$\begin{aligned} \dot{E} &= (-14 + 0,74 + 10) + j(5,93 + 1,75 + 10) = -3,26 + j17,68 = \\ &= \sqrt{3,26^2 + 17,68^2} e^{j\varphi} = 18 e^{j\varphi} \text{ В.} \end{aligned}$$

Анализируя величины и знаки действительной и мнимой частей комплексной величины, можно видеть, что вектор  $\dot{E}$  расположен во второй четверти комплексной плоскости. Значит, с учетом периодичности функции арктангенса, угол  $\varphi$  следует вычислять по формуле:

$$\varphi = \pi - \arctg(17,68/3,26) = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

Следовательно,  $\dot{E} = 18 e^{j100^\circ}$  В.

Векторная диаграмма с учетом принятого масштаба построена на рис. 41, б.

### 3.5 Активная, реактивная и полная мощности

Мощность переменного тока — величина, периодически изменяющаяся. Ее мгновенное значение  $p = ui$ .

Пусть ток отстает по фазе от напряжения на угол  $\varphi$ , т.е.  $u = U_m \sin \omega t$ ;  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ . Тогда мгновенное значение мощности

$$p = ui = U_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi).$$

Но

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta).$$

Тогда

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt{2}U \sqrt{2}I}{2} \cos \varphi - \frac{\sqrt{2}U \sqrt{2}I}{2} \cos(2\omega t - \varphi) = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Мгновенная мощность имеет постоянную составляющую и переменную двойной частоты. Диаграммы изменения  $u$ ,  $i$ ,  $p$  приведены на рис. 42. На интервалах, когда  $u$  и  $i$  имеют одинаковое направление, мгновенная мощность положительна, энергия потребляется от источника. На интервалах, когда  $u$  и  $i$  имеют противоположное направление, мгновенная мощность отрицательна и энергия возвращается источнику.

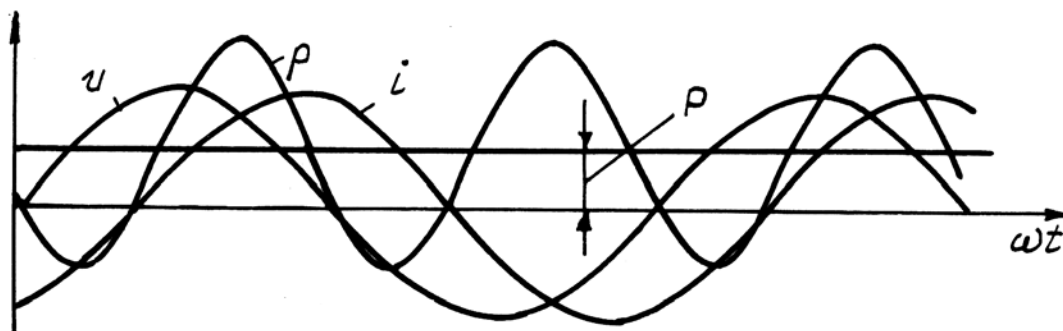


Рис. 42

Среднее значение мгновенной мощности за период переменного напряжения (или тока) называется **активной мощностью** и обозначается, как и в цепях постоянного тока, прописной буквой  $P$ . Так как среднее значение гармонической составляющей на периоде повторения равно нулю, то

$$P = UI \cos \varphi. \quad (37)$$

Активная мощность физически представляет собой энергию, которая выделяется в единицу времени в виде теплоты на участке цепи с сопротивлением  $R$ :

$$P = U_a I = RI^2,$$

где  $U_a = U \cos \varphi$  — активная составляющая напряжения.

Единицей измерения активной мощности является ватт (Вт).

Под **реактивной мощностью**  $Q$  понимают произведение

$$Q = UI \sin \varphi. \quad (38)$$

В зависимости от знака  $\varphi$  реактивная мощность может быть как положительной, так и отрицательной.

Единица измерения здесь та же, что и у активной мощности, но для различия используется вольт-ампер реактивный (ВАр).

Реактивная мощность характеризует собой ту энергию, которой обмениваются генератор и приемник (если реактивных элементов в приемнике нет, то  $\cos \varphi = 1$ ;  $\varphi = 0$ , мгновенная мощность не имеет отрицательных значений, реактивная мощность равна нулю).

Полная (или кажущаяся) мощность

$$S = UI. \quad (39)$$

Единица полной мощности — В·А.

Полную мощность можно характеризовать как максимальную активную мощность, которую мог бы отдать генератор при активной нагрузке.

Мощности  $P$ ,  $Q$  и  $S$  связаны следующей зависимостью:

$$S^2 = P^2 + Q^2. \quad (40)$$

Очень важной характеристикой цепей переменного тока является отношение

$$\frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi. \quad (41)$$

Для лучшего использования электрических генераторов желательно иметь максимально возможное значение  $\cos \varphi$ . Например, для питания приемника мощностью 10 000 кВт при  $\cos \varphi = 0,7$  источник питания должен быть рассчитан на мощность 14 300 кВА, а при  $\cos \varphi = 1$  — на 10 000 кВА.

Высокое значение  $\cos \varphi$  желательно также для уменьшения потерь в ЛЭП. При неизменной активной мощности  $P$  приемника ток в линии тем меньше, чем больше значение  $\cos \varphi$ :

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi}.$$

Большинство реальных потребителей электроэнергии имеют индуктивный характер нагрузки, т.е. в сети ток отстает от напряжения. Отмеченное можно проиллюстрировать схемой на рис. 43, а (конденсатор отключен) и векторной диаграммой на рис. 43, б.

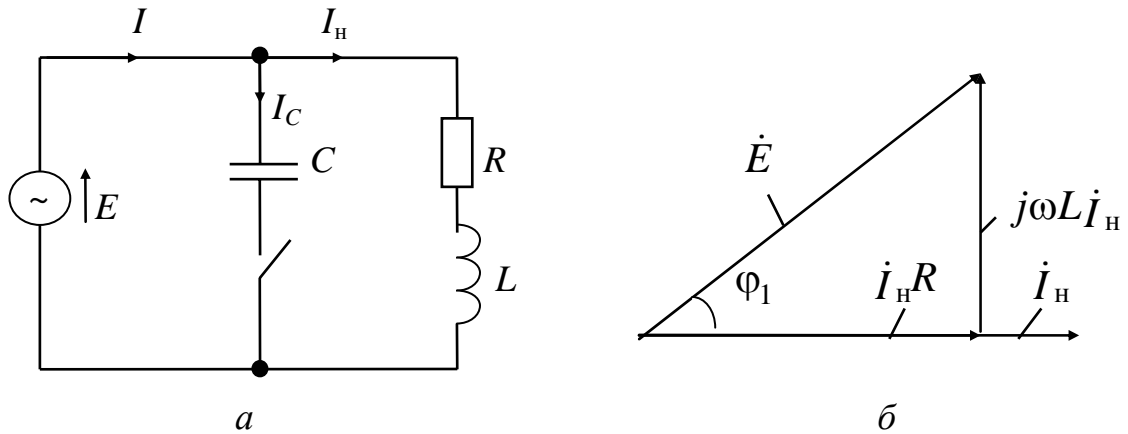


Рис. 43

При отключенном конденсаторе имеем

$$I = I_H = \frac{P}{U \cos \varphi_1}, \quad \varphi_1 = \arctg \frac{\omega L}{R}.$$

Подключение в схему конденсатора приведет к изменению тока  $I$ , что можно проследить по векторной диаграмме на рис. 44 (для удобства построений здесь вектор  $\dot{E}$  направлен вертикально, но взаимное расположение векторов  $\dot{E}$  и  $\dot{i}$  не изменилось).

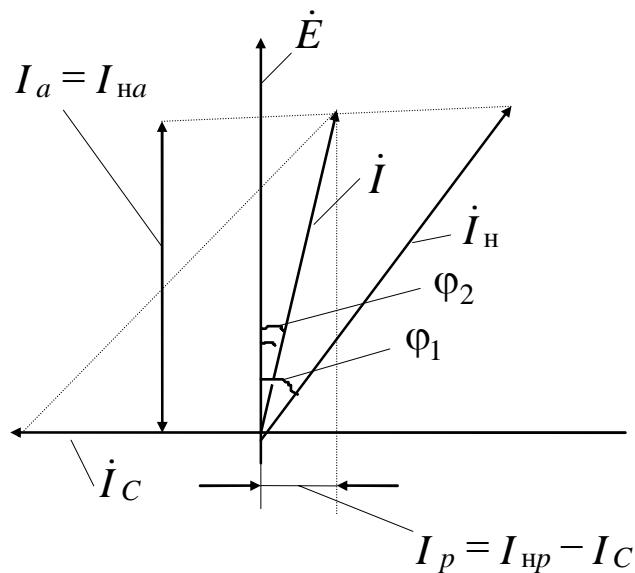


Рис. 44

На диаграмме обозначено:  $I_a$  и  $I_p$  — активная и реактивная составляющие тока  $I$ ;  $I_{Ha}$  и  $I_{Hp}$  — активная и реактивная составляющие тока  $I_H$ .

Для схемы с конденсатором получим

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{I_{\text{нр}} - I_C}{I_a} = \frac{I_{\text{нр}}}{I_{\text{на}}} - \frac{I_C}{I_{\text{на}}} = \operatorname{tg} \varphi_1 - \frac{C\omega U}{P/U} = \operatorname{tg} \varphi_1 - \frac{C\omega U^2}{P}.$$

Отсюда требуемая емкость для уменьшения отставания тока от величины  $\varphi_1$  до величины  $\varphi_2$

$$C = (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2) \frac{P}{\omega U^2}.$$

Если требуется полная компенсация угла сдвига фаз, то

$$C = \frac{P}{\omega U^2} \operatorname{tg} \varphi_1.$$

Компенсация сдвига фаз существенна для энергоемких потребителей, например промышленных предприятий. Осуществляется она в местах ввода линии питания в распределительном устройстве. Экономически выгодно подключать конденсаторы на возможно более высокое напряжение, так как величина  $C$  обратно пропорциональна квадрату напряжения.

Рассмотрим простой прием расчета активной и реактивной мощностей. Пусть задан некоторый комплекс

$$\dot{A} = A e^{j\varphi_A} = A \cos \varphi_A + jA \sin \varphi_A.$$

Введем понятие сопряженного комплекса. Под комплексом  $\dot{A}$ , сопряженным с комплексом  $\dot{A}$ , будем понимать комплекс

$$\dot{A}^* = A e^{-j\varphi_A} = A \cos \varphi_A - jA \sin \varphi_A.$$

Обозначим напряжение на некотором участке цепи  $\dot{U} = U e^{j\varphi_u}$ , ток по этому участку  $\dot{I} = I e^{j\varphi_i}$ . Угол между напряжением и током  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ . Умножим комплекс напряжения на сопряженный комплекс тока  $\dot{I}^* = I e^{-j\varphi_i}$  и обозначим полученный комплекс через  $\tilde{S}$

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = UI e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.$$

Значок  $\sim$  (тильда) над  $S$  обозначает комплекс (а не сопряженный комплекс) полной мощности, составленный при участии сопряженного комплекса тока  $\dot{I}^*$ .



Таким образом, активная мощность  $P$  есть действительная часть ( $\text{Re}$ ), а реактивная мощность  $Q$  — мнимая часть ( $\text{Im}$ ) произведения  $\dot{U} I^*$ :

$$\left. \begin{aligned} P &= \text{Re} \left[ \dot{U} I^* \right]; \\ Q &= \text{Im} \left[ \dot{U} I^* \right]. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Для определения же полной мощности следует пользоваться только формулой (40).

Из закона сохранения энергии следует, что в любой цепи должен соблюдаться **баланс мощностей**. Для цепей переменного тока он формулируется следующим образом: сумма активных мощностей источников равна сумме активных мощностей приемников, а сумма реактивных мощностей источников равна сумме реактивных мощностей приемников.

При этом под реактивной мощностью приемников энергии понимается сумма произведений квадратов токов ветвей на реактивные сопротивления ветвей с учетом их знака.

Реактивная мощность, получаемая индуктивным элементом, положительна, а емкостным — отрицательна. Поэтому баланс для полных мощностей не соблюдается (на основании (39)

$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ , но в этом выражении знак  $Q$  роли не играет).

Для экспериментального определения мощности применяются специальные приборы — ваттметры. Ваттметр содержит две обмотки и соответственно две пары зажимов для подключения его в цепь. Одна обмотка включается в цепь последовательно, подобно амперметру, вторая — параллельно участку цепи, подобно вольтметру. На схемах ваттметр изображается в виде кружка с буквой  $W$ , из которого выходят четыре конца, как показано на рис. 45.

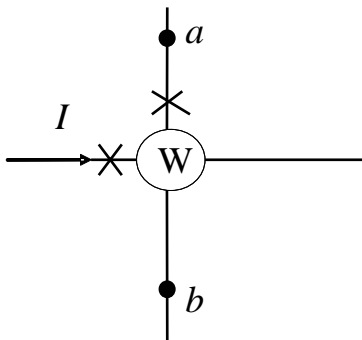


Рис. 45

Для правильного включения в цепь начала обмоток обозначаются звездочками. Ваттметр устроен таким образом, что измеряет произведение эффективных зна-

чений напряжения  $U_{ab}$  на ток  $I$  и на косинус угла сдвига между током и напряжением (предполагается, что ток втекает в вывод последовательной обмотки, отмеченной звездочкой, а напряжение на параллельной обмотке равно разности потенциалов между выводом со звездочкой — точка  $a$  на рис. 45 — и выводом без звездочки — точка  $b$  на рисунке).

Как правило, ваттметр включают в схему так, что он измеряет активную мощность. Но можно при определенном подключении измерять и реактивную мощность.

### Пример 15

Приборы, подключенные к цепи на рис. 46, дали следующие показания:  $U = 65$  В;  $I = 5$  А;  $P = 300$  Вт.

Требуется вычислить комплексное сопротивление  $Z$  и комплексные проводимости  $Y$  цепи для случаев: а)  $\varphi > 0$ ; б)  $\varphi < 0$ .

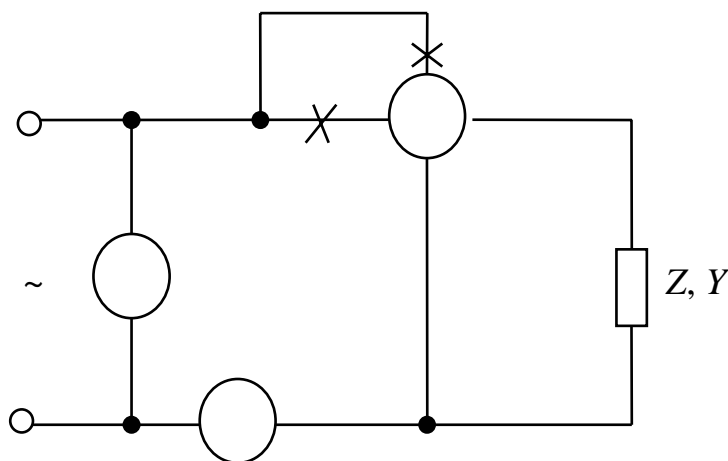


Рис. 46

Модуль сопротивления и его аргумент:

$$z = U/I = 65/5 = 13 \text{ Ом};$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{300}{65 \cdot 5} = 0,923; \quad \varphi = \pm 22,6^\circ.$$

Искомые комплексные сопротивления и проводимости цепи:

а)  $\varphi > 0$ :

$$\begin{aligned} Z &= z e^{j\varphi} = 13 e^{j22,6^\circ} = 13 \cos 22,6^\circ + j13 \sin 22,6^\circ = \\ &= 13 \cdot 0,923 + j13 \cdot 0,385 = (12 + j5) \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$Y = 1/Z = \frac{1}{13} e^{-j22,6^\circ} = 0,077 e^{-j22,6^\circ} = 0,077 \cdot 0,923 - j0,077 \cdot 0,385 = \\ = (7,1 - j2,96) \cdot 10^{-2} \text{ См};$$

б)  $\varphi < 0$ :

$$Z = 13 e^{-j22,6^\circ} = (12 - j5) \text{ Ом}; \\ Y = 1/Z = \frac{1}{13} e^{j22,6^\circ} = (7,1 + j2,96) \cdot 10^{-2} \text{ См}.$$

Для определения знака  $\varphi$  необходимо провести следующий опыт: подключить параллельно нагрузке  $Z$  конденсатор небольшой емкости и проследить реакцию амперметра.

Если нагрузка имела емкостный характер, то добавление емкостной нагрузки приведет к увеличению тока и увеличению показания амперметра. В этом случае  $\varphi$  отрицательно.

Если же подключение конденсатора приводит к уменьшению тока, то  $\varphi$  положительно (см., например, векторную диаграмму на рис. 44, поясняющую компенсацию сдвига фаз).

### Пример 16.

Для схемы на рис. 47 дано:  $u = 120\sqrt{2} \sin 314t$  В;  $R_1 = 10$  Ом;  $R_2 = 24$  Ом;  $R_3 = 15$  Ом;  $L_1 = 19,1$  мГн;  $L_3 = 63,7$  мГн;  $C_2 = 455$  мкФ.

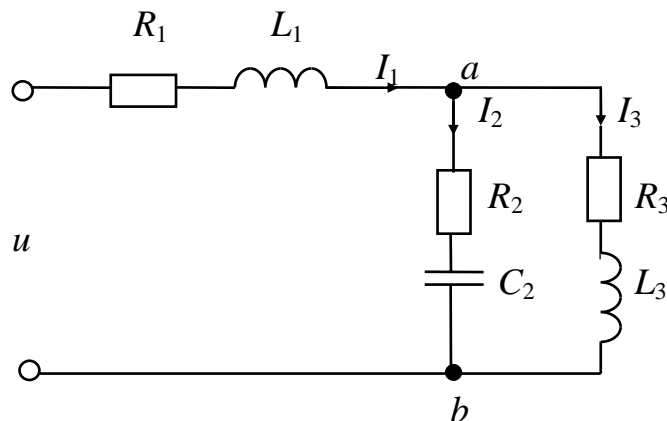


Рис. 47

Требуется определить все токи, проверить баланс мощностей, построить векторную диаграмму.

Рассчитаем реактивные сопротивления:

$$X_1 = \omega L_1 = 314 \cdot 19,1 \cdot 10^{-3} = 6 \text{ Ом};$$

$$X_2 = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{314 \cdot 455 \cdot 10^{-6}} = 7 \text{ Ом};$$

$$X_3 = \omega L_3 = 314 \cdot 63,7 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом}.$$

Комплекс эффективного значения приложенного к цепи напряжения в  $\sqrt{2}$  раз меньше комплексной амплитуды, поэтому

$$\dot{U} = 120\sqrt{2}/\sqrt{2} = 120 \text{ В}.$$

Введем обозначение комплексных сопротивлений:

$$Z_1 = R_1 + jX_1 = (10 + j6) \text{ Ом};$$

$$Z_2 = R_2 + jX_2 = (24 - j7) = 25 \cdot e^{-j6,25^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_3 = R_3 + jX_3 = (15 + j20) = 25 \cdot e^{j53,13^\circ} \text{ Ом}.$$

Полное сопротивление цепи

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = 10 + j6 + \frac{25e^{-j16,26^\circ} \cdot 25e^{j53,13^\circ}}{39 + j13} =$$

$$= 10 + j6 + \frac{625e^{j36,87^\circ}}{41,11e^{j18,44^\circ}} = 10 + j6 + 15,2e^{j18,43^\circ} =$$

$$= 10 + j6 + 14,4 + j4,8 = 24,4 + j10,8 = 26,7e^{j23,9^\circ} \text{ Ом}.$$

В неразветвленной части цепи проходит ток

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{120}{26,7e^{j23,9^\circ}} = 4,5e^{-j23,9^\circ} \text{ А}.$$

Токи в параллельных ветвях, согласно формуле (23), могут быть выражены через ток в неразветвленной части цепи:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \dot{I}_1 \frac{15 + j20}{39 + j13} = 4,5e^{-j23,9^\circ} \frac{25e^{j53,13^\circ}}{41,11e^{j18,44^\circ}} = 2,74e^{j10,8^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = \dot{I}_1 \frac{24 - j7}{39 + j13} = 4,5e^{-j23,9^\circ} \frac{25e^{-j16,26^\circ}}{41,11e^{j18,44^\circ}} = 2,74e^{-j58,6^\circ} \text{ А}.$$

Найдем активные мощности всей цепи и отдельных ее ветвей:

$$P = \text{Re} \left[ \dot{U} \dot{I}_1^* \right] = \text{Re} \left[ 120 \cdot 4,5e^{j23,9^\circ} \right] = 540 \cos 23,9^\circ = 494 \text{ Вт};$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 =$$

$$= 4,5^2 \cdot 10 + 2,74^2 \cdot 24 + 2,74^2 \cdot 15 = 202,5 + 180,2 + 112,6 = 495,3 \text{ Вт.}$$

С учетом погрешности вычислений баланс активных мощностей выполняется.

Наконец, определим реактивные мощности всей цепи и отдельных ее ветвей:

$$Q = \text{Im} \left[ \dot{U} I_1^* \right] = \text{Im} \left[ 120 \cdot 4,5 e^{j23,9^\circ} \right] = 540 \sin 23,9^\circ = 218,8 \text{ ВАр};$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = I_1^2 X_1 - I_2^2 X_2 + I_3^2 X_3 =$$

$$= 4,5^2 \cdot 6 - 2,74^2 \cdot 7 + 2,74^2 \cdot 20 = 121,5 - 52,6 + 150,1 = 219 \text{ ВАр.}$$

Отсюда видно, что выполняется и баланс реактивных мощностей.

На рис. 48 приведена векторная диаграмма.

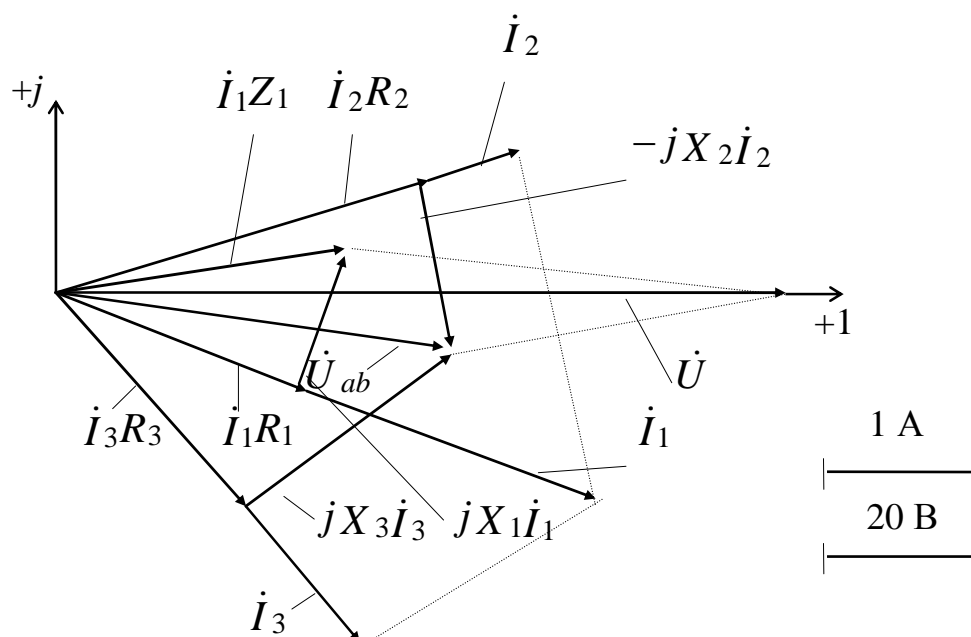


Рис. 48

Порядок построения диаграммы следующий: по результатам расчетов отложены векторы токов  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_3$ , затем по направлению  $\dot{I}_1$  отложен вектор  $\dot{I}_1 R_1 = \dot{U}_{R_1}$  и перпендикулярно к нему в сторону опережения — вектор  $jX_1 \dot{I}_1 = \dot{U}_{L_1}$ . Их сумма дает вектор  $\dot{I}_1 Z_1 = \dot{U}_{Z_1}$ . Далее в фазе с  $\dot{I}_2$  построен вектор  $\dot{I}_2 R_2 = \dot{U}_{R_2}$  и пер-

пендикулярно к нему в сторону отставания — вектор  $-jX_2\dot{I}_2 = \dot{U}_{C_2}$ , а их сумма дает вектор напряжения на параллельном участке  $\dot{U}_{ab}$ . Тот же вектор может быть получен, если в фазе с  $\dot{I}_3$  отложить  $\dot{I}_3 R_3 = \dot{U}_{R_3}$  и к нему прибавить вектор  $jX_3\dot{I}_3 = \dot{U}_{L_3}$ , опережающий  $\dot{I}_3$  на  $90^\circ$ . Сумма векторов  $\dot{I}_1 Z_1$  и  $\dot{U}_{ab}$  дает вектор приложенного напряжения  $\dot{U}$ .

### 3.6 Частотные характеристики

К частотным характеристикам электрических цепей относятся входные и передаточные функции, записанные в комплексной форме.

**Входная комплексная функция цепи** — это зависимость от частоты комплексного сопротивления

$$Z(j\omega) = z(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = r(\omega) + jx(\omega)$$

или комплексной проводимости

$$Y(j\omega) = y(\omega) \cdot e^{-j\varphi(\omega)} = g(\omega) - jb(\omega)$$

относительно двух заданных выводов.

В качестве примера построим зависимость от частоты модуля  $z(\omega)$  и аргумента  $\varphi(\omega)$  входного комплексного сопротивления схемы на рис. 49, а

Входное сопротивление

$$Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{1}{g + j\omega C} = \frac{g - j\omega C}{g^2 + (\omega C)^2}$$

и

$$z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{g^2 + (\omega C)^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi(\omega) = -\frac{\omega C}{g}.$$

Зависимости  $z(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  показаны на рис. 49, б, в.

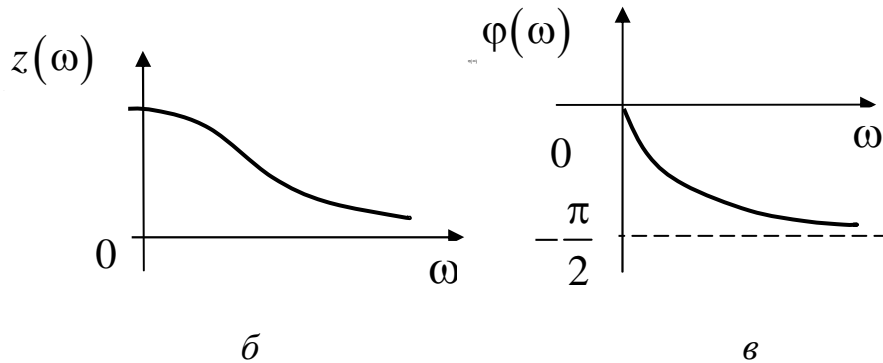
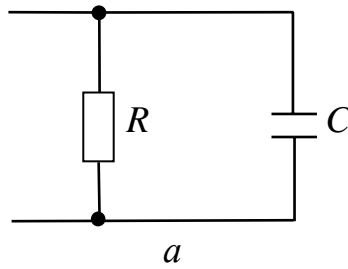


Рис. 49

**Передаточная комплексная функция** (комплексный коэффициент передачи) цепи определяет реакцию цепи на внешнее воздействие и равна отношению выходной величины (напряжение, ток) к входной величине (напряжение, ток), выраженных в комплексной форме.

Различают четыре вида передаточных функций:

– передаточная функция по напряжению

$$K_u(j\omega) = \frac{U_{\text{вых}}(j\omega)}{U_{\text{вх}}(j\omega)};$$

– передаточная функция по току

$$K_I(j\omega) = \frac{I_{\text{вых}}(j\omega)}{I_{\text{вх}}(j\omega)};$$

– передаточное сопротивление

$$K_z(j\omega) = \frac{U_{\text{вых}}(j\omega)}{I_{\text{вх}}(j\omega)};$$

– передаточная проводимость

$$K_Y(j\omega) = \frac{I_{\text{вых}}(j\omega)}{U_{\text{вх}}(j\omega)}.$$

Зависимость модуля передаточной функции  $K(\omega)$  от частоты называется **амплитудной частотной характеристикой (АЧХ)**, зависимость аргумента передаточной функции  $\varphi(\omega)$  — **фазовой частотной характеристикой (ФЧХ)**. На комплексной плоскости можно построить геометрическое место конца вектора  $K(j\omega)$  при изменении частоты — **амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ)**.

### 3.7 Явление резонанса

Пусть пассивный двухполюсник содержит одну или несколько индуктивностей и одну или несколько емкостей (и, конечно, активные сопротивления). Под резонансным режимом работы такого двухполюсника понимают режим, при котором входное сопротивление двухполюсника является чисто активным.

По отношению к внешней цепи двухполюсник в резонансном режиме ведет себя как активное сопротивление, поэтому ток и напряжение на его входе совпадают по фазе. Реактивная мощность двухполюсника при этом равна нулю.

Различают две основные разновидности резонансных режимов: резонанс токов и резонанс напряжений.

**Резонанс напряжений** возникает в последовательной  $RLC$ -цепи, представленной на рис. 50, а.

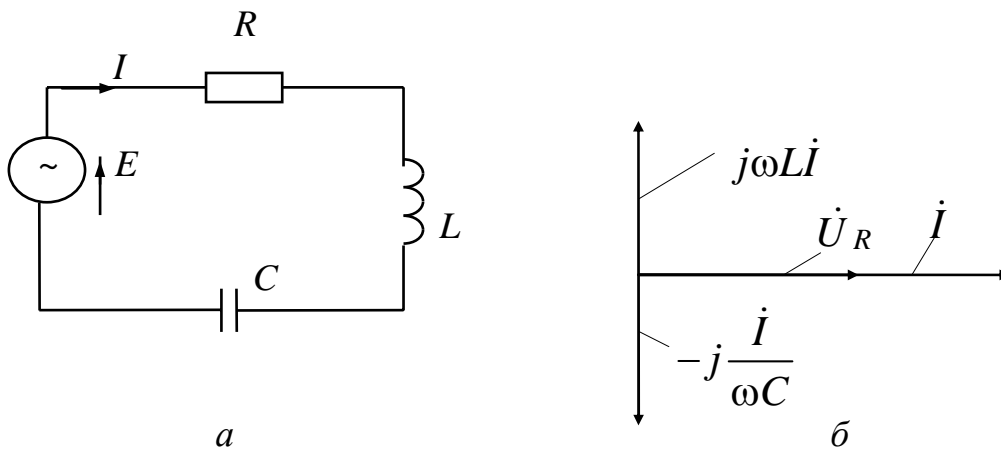


Рис. 50



При резонансе ток в цепи должен совпадать по фазе с э.д.с.  $\dot{E}$ . Это возможно, если входное сопротивление схемы  $Z = R + j(\omega L - 1/\omega C)$  будет чисто активным. Условие наступления резонанса в схеме (см. рис. 50, а)

$$\omega L = 1/\omega C. \quad (43)$$

Здесь значения противоположных по фазе напряжений на индуктивности и емкости равны, как показано на диаграмме (рис. 50, б), поэтому резонанс в последовательной цепи получил название резонанса напряжений.

Напряжения на индуктивности и емкости при резонансе могут значительно превышать напряжение на входных зажимах, которое равно напряжению на активном сопротивлении.

Полное сопротивление цепи  $z$  при  $X = 0$  минимально:  $z = \sqrt{R^2 + X^2} = R$ , а ток  $I$  максимален.

Резонанса можно достичь, изменяя один из трех параметров:  $\omega$ ,  $L$  или  $C$ . Угловая частота, при которой наступает резонанс, называется угловой резонансной частотой и определяется из условия (43):

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (44)$$

Соответственно резонансная частота

$$f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}.$$

Индуктивное и емкостное сопротивления при резонансе —

$$\omega_0 L = 1/\omega_0 C = \sqrt{L/C} = \rho.$$

Величина  $\rho$  называется характеристическим сопротивлением.

Напряжения на реактивных элементах —

$$U_L = U_C = \omega_0 L I = \frac{\omega_0 L}{R} E.$$

Отношение

$$\frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{R} = Q \quad (45)$$

называется **добротностью** резонансного контура. Добротность показывает, во сколько раз напряжение на индуктивном (емкостном) элементе превышает напряжение на входе схемы в резонансном режиме.

Примерный вид зависимости тока от частоты для рассматриваемой схемы (при неизменном значении  $E$ ) представлен на рис. 51 и называется амплитудной частотной характеристикой.

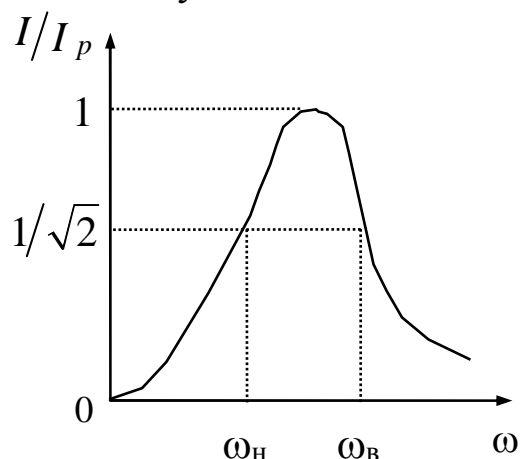


Рис. 51

График АЧХ показывает, что последовательная  $RLC$ -цепь (последовательный резонансный контур) обладает избирательными свойствами, которые характеризуются полосой пропускания. **Полоса пропускания**  $\Pi = \omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}}$  определяется из условия, что ток на частотах  $\omega_{\text{н}}$  и  $\omega_{\text{в}}$  уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с током при резонансе. Здесь частоты  $\omega_{\text{н}}$  и  $\omega_{\text{в}}$  являются соответственно нижней и верхней границами полосы пропускания.

Установим связь между добротностью, полосой пропускания и резонансной частотой.

Комплекс действующего значения тока в цепи  $\dot{I}$ , действующее значение тока в цепи  $I$  и действующее значение тока при резонансе  $I_p$  соответственно равны:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + j(X_L - X_C)}; \quad I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}; \quad I_p = \frac{E}{R}.$$

На границах полосы пропускания

$$\frac{I}{I_p} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$2R^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$$

и окончательно

$$R = \pm(X_L - X_C). \quad (46)$$

В (46) знак «минус» перед скобкой соответствует нижней, а знак «плюс» — верхней границам полосы пропускания.

Из (45) выразим

$$R = \frac{\omega_0 L}{Q}$$

и подставим в (46) для нижней границы полосы пропускания, используя параметры реактивных элементов:

$$\frac{\omega_0 L}{Q} = -\omega_H L + \frac{1}{\omega_H C}.$$

Поделив последнее равенство на  $L$  и подставив из (44)

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

получим:

$$\omega_H^2 + \frac{\omega_0}{Q} \omega_H - \omega_0^2 = 0.$$

Положительный корень решения этого уравнения дает нижнюю границу полосы пропускания:

$$\begin{aligned} \omega_H &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{1 + 4Q^2}}{2} = \\ &= \frac{\omega_0}{2Q} \left( \sqrt{1 + 4Q^2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Аналогично находится верхняя граница полосы пропускания:

$$\omega_B = \frac{\omega_0}{2Q} \left( \sqrt{1 + 4Q^2} + 1 \right). \quad (48)$$

С учетом (47) и (48) полоса пропускания определяется следующим выражением:

$$\Pi = \omega_B - \omega_H = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (49)$$

Из (49) следует, что для последовательного резонансного контура чем больше добротность, тем уже полоса пропускания, т.е. лучше избирательность.

Если при резонансе эквивалентное сопротивление цепи чисто активное, а ток и приложенное напряжение совпадают по фазе, то при  $\omega \neq \omega_0$  наблюдается следующее.

На частотах меньше резонансной реактивное сопротивление цепи

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

будет иметь емкостный характер, так как реактивное сопротивление конденсатора больше реактивного сопротивления индуктивности, а при частотах больше резонансной уже сопротивление индуктивности станет больше сопротивления конденсатора, и реактивное сопротивление цепи примет индуктивный характер. В соответствии с этим при частотах меньше резонансной ток в цепи опережает приложенное напряжение (угол  $\varphi$  положителен) и при частотах больше резонансной — отстает от напряжения (угол  $\varphi$  отрицателен).

Для расчета угла  $\varphi$  используется формула:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (50)$$

В частном случае на границах полосы пропускания с учетом (46) получим:

$$\varphi_H = \operatorname{arctg} \frac{-(X_L - X_C)}{R} = 45^\circ;$$

$$\varphi_B = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} = -45^\circ.$$

Здесь обозначено:  $\varphi_H$  и  $\varphi_B$  — соответственно начальная фаза тока на нижней и верхней границах полосы пропускания.

Построенный по (50) график называется фазовой частотной характеристикой (ФЧХ).

Примерный вид фазовой частотной характеристики приведен на рис. 52.

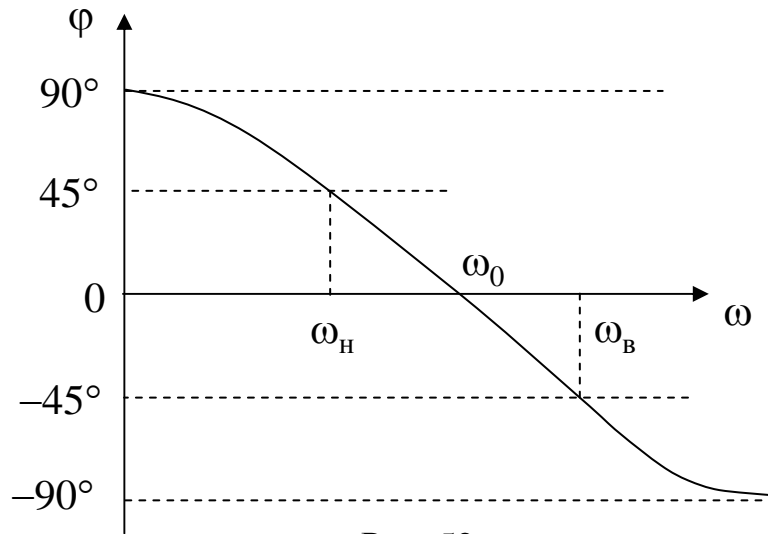


Рис. 52

Явление резонанса в схеме на рис. 53, а с параллельными ветвями, содержащими разнохарактерные реактивные сопротивления, называется **резонансом токов**.

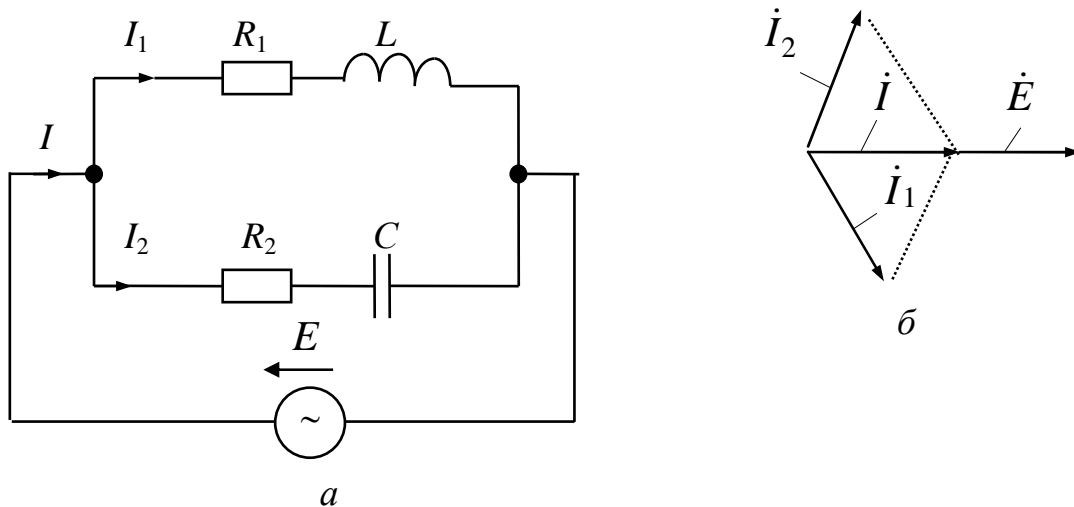


Рис. 53

Ток  $\dot{I}_1$  в ветви с индуктивностью отстает от э.д.с  $\dot{E}$  (см. диаграмму на рис. 53, б) и может быть записан как

$$\dot{I}_1 = \dot{E}Y_1.$$

Ток  $\dot{I}_2$  в ветви с емкостью опережает напряжение:

$$\dot{I}_2 = \dot{E}Y_2.$$

Ток в неразветвленной части цепи —

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{E}(Y_1 + Y_2) = \dot{E} \cdot Y.$$

Определим комплексную проводимость  $Y$ :

$$Y = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2 + j\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} =$$

$$= \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} - j \left( \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1/\omega C}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right).$$

По определению резонансного режима ток  $\dot{I}$  должен совпадать по фазе с э.д.с.  $E$ . Это будет при условии, что мнимая часть проводимости  $Y$  равна нулю.

Следовательно, условие наступления режима резонанса токов в схеме на рис. 53, *a* можно записать так:

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + 1/\omega^2 C^2}. \quad (51)$$

Изменением одной из величин в (51) при неизменных остальных четырех не всегда может быть достигнут резонанс. Резонанс отсутствует, если значение изменяемой величины, вычисленное по (51), получается мнимым или комплексным. Например, решим (51) относительно  $\omega$ :

$$\omega L R_2^2 + \frac{L}{\omega C^2} = \frac{R_1^2}{\omega C} + \frac{\omega L^2}{C},$$

$$\omega^2 L R_2^2 C^2 + L = R_1^2 C + \omega^2 L^2 C,$$

$$\omega^2 L C (L - C R_2^2) = L - C R_1^2,$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L - C R_1^2}{L - C R_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}.$$

То есть резонанс возможен, если  $R_1$  и  $R_2$  оба больше или оба меньше  $\rho$ .

Эквивалентная проводимость контура при резонансе равна действительной части комплексной проводимости:

$$\begin{aligned}
g = \operatorname{Re}[Y] &= \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega'_0)^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \frac{1}{(\omega'_0)^2 C^2}} = \\
&= \frac{R_1}{R_1^2 + L^2 \frac{1}{LC} \cdot \frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}} + \frac{R_2}{R_2^2 + \frac{1}{C^2 \frac{1}{LC} \cdot \frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}} = \\
&= \frac{R_1}{R_1^2 + \frac{\rho^2 (\rho^2 - R_1^2)}{\rho^2 - R_2^2}} + \frac{R_2}{R_2^2 + \frac{\rho^2 (\rho^2 - R_2^2)}{\rho^2 - R_1^2}} = \\
&= \frac{R_1 (\rho^2 - R_2^2)}{\rho^4 - R_1^2 R_2^2} + \frac{R_2 (\rho^2 - R_1^2)}{\rho^4 - R_1^2 R_2^2} = \frac{R_1 + R_2}{\rho^2 - R_1 R_2}.
\end{aligned}$$

Потребляемый от источника ток при резонансе минимален и рассчитывается по следующему соотношению:

$$I_p = \frac{\dot{E}(R_1 + R_2)}{\rho^2 + R_1 R_2}.$$

Примерный вид АЧХ для параллельного колебательного контура представлен на рис. 54.

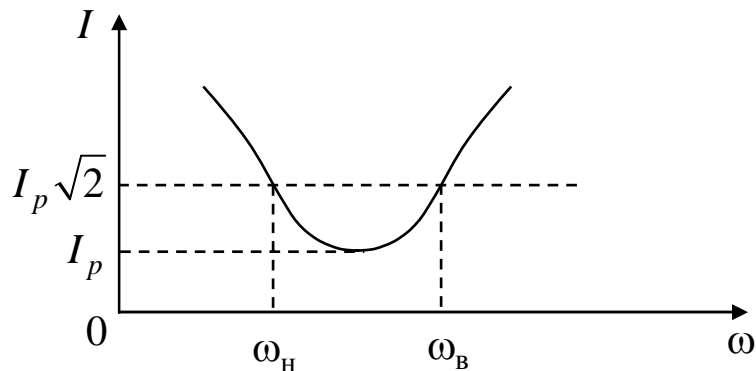


Рис. 54

Избирательные свойства этого контура, так же как и последовательного, характеризуются полосой пропускания. Границы полосы пропускания  $\omega_H$  и  $\omega_B$  здесь соответствуют увеличению тока источника по сравнению с резонансным в  $\sqrt{2}$  раз.

Если в контуре потери малы, что характерно для радиотехники и электросвязи, то можно считать  $R_1 \approx 0$ ,  $R_2 \approx 0$  и резонансная частота в параллельном контуре будет определяться тем же соотношением, что и в последовательном (см. формулу 44).

Построим зависимость тока от частоты  $I(\omega)$  в неразветвленной части схемы для идеального случая  $R_1 = R_2 = 0$ .

На рис. 55 показаны частотные характеристики проводимостей ветвей  $b_1 = b_L = 1/\omega L$  и  $b_2 = -b_C = -\omega C$  и входной проводимости цепи  $b = b_1 + b_2 = 1/\omega L - \omega C$ . Ток  $I = |b|E$ , поэтому кривая  $|b| = F(\omega)$  в соответствующем масштабе и есть резонансная кривая тока  $I(\omega)$ .

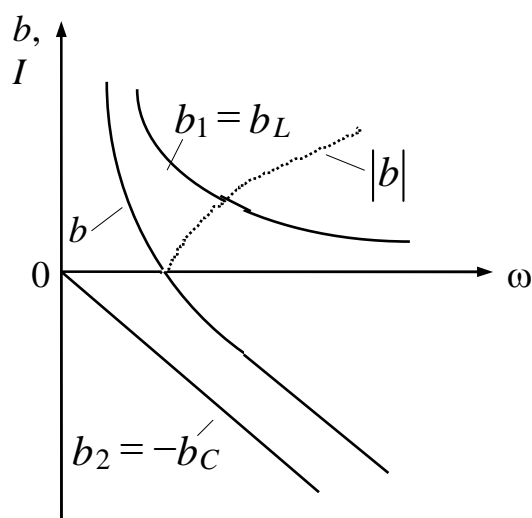


Рис. 55

При изменении частоты от 0 до  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  эквивалентная проводимость  $b > 0$ , т.е. индуктивная, и изменяется от  $\infty$  до нуля. При  $\omega = \omega_0$  наступает резонанс токов,  $b = 0$ ,  $I = 0$ ,  $I_1 = E/\omega_0 L = E/\rho$  и  $I_2 = \omega_0 C E = E/\rho$ . При возрастании частоты от  $\omega_0$  до  $\infty$  входная проводимость  $b < 0$ , т.е. емкостная, и изменяется от нуля до  $-\infty$ .

### Пример 17

Для схемы на рис. 50, а дано:  $R=10$  Ом;  $L=0,1$  мГн;  $C=100$  пФ;  $E=1$  В.

Требуется определить величину напряжений на индуктивности и емкости и активную мощность цепи при резонансе.



По формулам (44) и (45) определяем предварительно резонансную частоту и добротность:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^{-12}} = 10^7 \text{ с}^{-1};$$

$$Q = \omega_0 L / R = 10^7 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} / 10 = 100.$$

Ток в цепи при резонансе

$$I = E/R = 1/10 = 0,1 \text{ А.}$$

Искомые напряжения и мощность

$$U_L = U_C = EQ = 1 \cdot 100 = 100 \text{ В};$$

$$P = I^2 R = 0,01 \cdot 10 = 0,1 \text{ Вт.}$$

### Пример 18

Для схемы на рис. 56 задано:  $R_2 = R_3 = 1 \text{ кОм}$ ;  $C = 10 \text{ нФ}$ ;  $L = 0,05 \text{ Гн}$ .

Требуется определить резонансную частоту  $\omega_0$  и эквивалентное сопротивление цепи при резонансе  $Z_9$ .

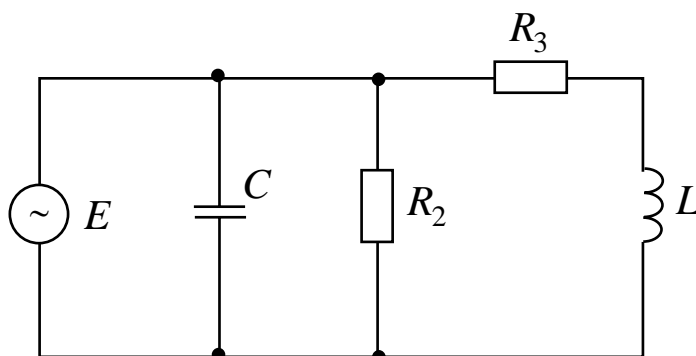


Рис. 56

В цепи на рис. 56 реактивные элементы расположены в параллельных ветвях, значит, в данной цепи будет резонанс токов. При резонансе токов следует оперировать с проводимостями.

Определим проводимости ветвей, введя обозначение  $R_2 = R_3 = R$ :

$$Y_1 = \frac{1}{-j \frac{1}{\omega C}} = j\omega C; \quad Y_2 = \frac{1}{R};$$

$$Y_3 = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

При резонансе сумма мнимых частей проводимостей параллельных ветвей равна нулю, следовательно,

$$\omega C = \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2},$$

$$\omega^2 L^2 C = L - R^2 C,$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L - R^2 C}{L^2 C}} = \sqrt{\frac{0,05 - 1000^2 \cdot 10^{-8}}{0,05^2 \cdot 10^{-8}}} = 4 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

Для нахождения эквивалентной проводимости цепи при резонансе токов следует просуммировать действительные части проводимостей ветвей:

$$\begin{aligned} Y_9 &= \frac{1}{R} + \frac{R}{R^2 + \omega_0^2 L^2} = \frac{1}{R} + \frac{R}{R^2 + \frac{L - R^2 C}{L^2 C}} = \\ &= \frac{1}{R} + \frac{RC}{L} = \frac{L + R^2 C}{RL}. \end{aligned}$$

Эквивалентное сопротивление обратно проводимости, следовательно,

$$Z_9 = \frac{1}{Y_9} = \frac{RL}{L + R^2 C} = \frac{10^3 \cdot 0,05}{0,05 + 10^6 \cdot 10^{-8}} = 833,3 \text{ Ом}.$$

### 3.8 Цепи с взаимной индуктивностью

В состав электрических цепей могут входить катушки, магнитно-связанные с другими катушками. Поток одной из них пронизывает другие и наводит в них э.д.с. взаимоиндукции, которые должны быть учтены при расчете. При составлении уравнений для магнитно-связанных цепей необходимо знать, согласно или встречно направлены потоки самоиндукции и взаимоиндукции.

Правильное заключение об этом можно сделать, если известно направление намотки катушек на сердечнике и выбрано положительное направление токов в них.

На рис. 57, *а* катушки включены согласно, а на рис. 57, *б* — встречно. На схемах сердечники не изображают, ограничиваясь тем, что одноименные зажимы (например, начала катушек) помечают точками и взаимную индуктивность — линией со стрелками и буквой  $M$ , как показано на рис. 57, *в*, *г*.

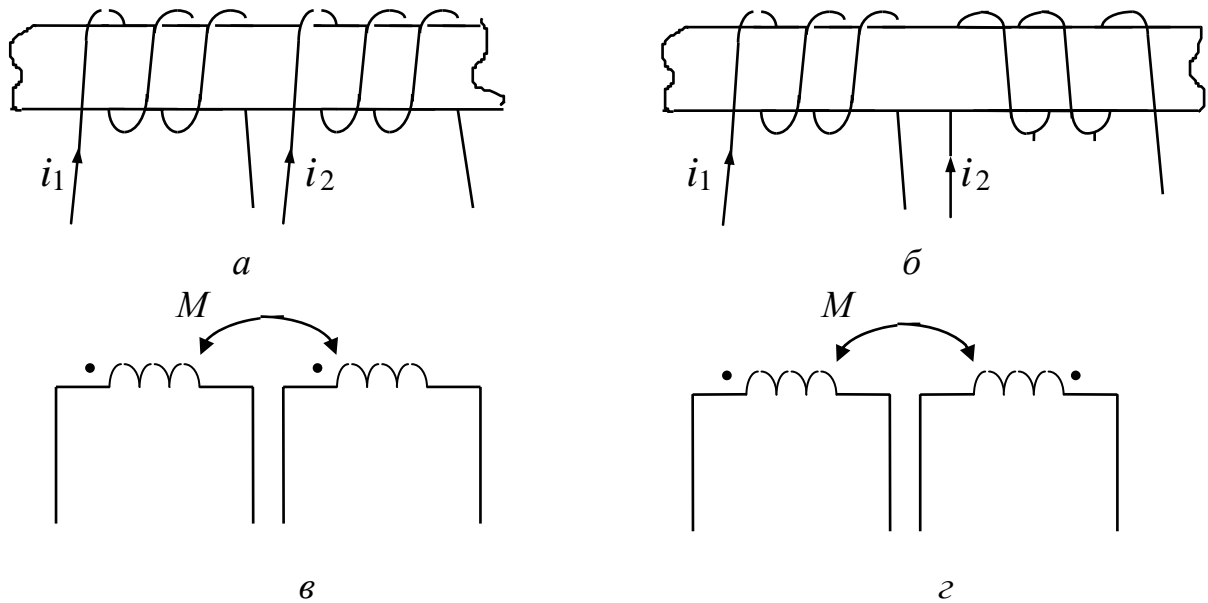


Рис. 57

Экспериментальное определение взаимной индуктивности  $M$  двух магнитно-связанных катушек легко осуществляется из двух опытов последовательного включения катушек. На рис. 58, *а* изображена схема последовательного согласного включения двух катушек, а на схеме рис. 58, *б* — последовательного встречного включения тех же катушек с активными сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  и собственными индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$ .

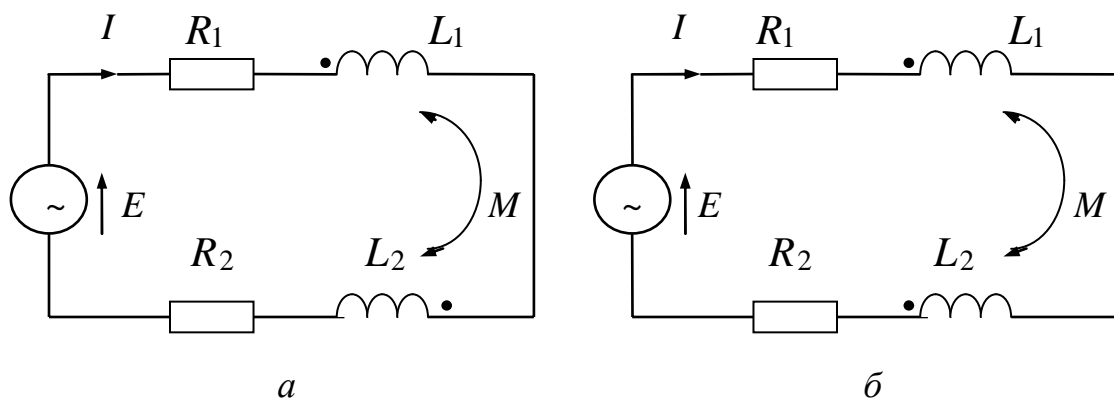


Рис. 58

При согласном включении магнитные потоки, как свой, так и от соседней катушки, совпадают по направлению. Значит, будут совпадать и наводимые в каждой катушке э.д.с. самоиндукции и взаимной индукции. Следовательно, и напряжения  $u_L$  и  $u_M$ , идущие на преодоление этих э.д.с., тоже будут направлены одинаково. Составим уравнения электрического равновесия схемы на рис. 58, а по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений:

$$e = iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + iR_2.$$

В комплексной форме

$$\dot{E} = \dot{I} [R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)],$$

$$\text{или } \dot{E} = \dot{I} Z_{\text{согл}},$$

где  $Z_{\text{согл}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)$ .

Рассматриваемую цепь из двух катушек, таким образом, можно представить как эквивалентную катушку с параметрами

$$R = R_1 + R_2, \quad L = L_1 + L_2 + 2M.$$

При встречном включении потоки, собственный и от соседней катушки, будут направлены противоположно, поэтому  $u_L$  и  $u_M$  будут направлены противоположно, что отразится уравнением

$$\dot{E} = I R_1 + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} + \dot{I} R_2,$$

$$\text{или } \dot{E} = \dot{I} Z_{\text{встр}},$$

где  $Z_{\text{встр}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$ .

Эквивалентная индуктивность при встречном включении  $L = L_1 + L_2 - 2M$ .

Измерив в схемах на рис. 58 экспериментально приложенное к цепи напряжение, ток и активную мощность, можно определить реактивные сопротивления  $X_{\text{согл}}$  и  $X_{\text{встр}}$ .

Но, с другой стороны,

$$\left. \begin{aligned} X_{\text{согл}} &= \omega(L_1 + L_2 + 2M), \\ X_{\text{встр}} &= \omega(L_1 + L_2 - 2M). \end{aligned} \right\}$$

Отсюда получим

$$X_{\text{согл}} - X_{\text{встр}} = 4\omega M,$$

и окончательно

$$M = \frac{X_{\text{согл}} - X_{\text{встр}}}{4\omega}$$

Расчеты разветвленных цепей при наличии взаимной индуктивности можно вести, составляя уравнения по законам Кирхгофа или методом контурных токов.

Если на электрической схеме токи двух магнитно-связанных катушек одинаково ориентированы относительно одноименно обозначенных зажимов, например оба направлены к точкам или оба направлены от точек, то имеет место согласное включение, в противном случае — встречное.

Если магнитно связано несколько катушек, то начало и конец размечают для каждой пары катушек отдельно.

Методику составления уравнений рассмотрим на примерах.

### Пример 19

Задана цепь на рис. 59. Параметры катушек:  $R_1 = R_2 = 20$  Ом;  $\omega L_1 = 10$  Ом;  $\omega L_2 = 20$  Ом; сопротивление взаимной индукции  $\omega M = 10$  Ом. К цепи подключена э.д.с.  $E = 150$  В.

Требуется определить все токи и построить векторную диаграмму, определить показание каждого ваттметра и мощности тепловых потерь в каждой из ветвей.

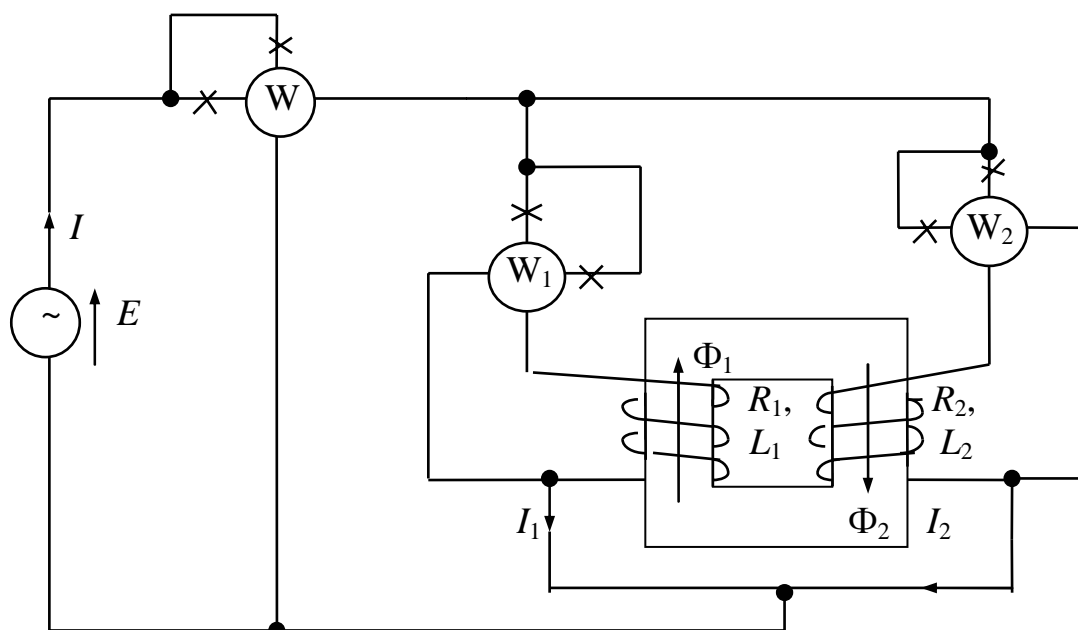


Рис. 59

Из рис. 59 видно, что катушки соединены согласно, т.к. каждую из них магнитные потоки само- и взаимной индукции пронизывают в одном и том же направлении. На рис. 60 вычерчена схема рассматриваемой цепи.

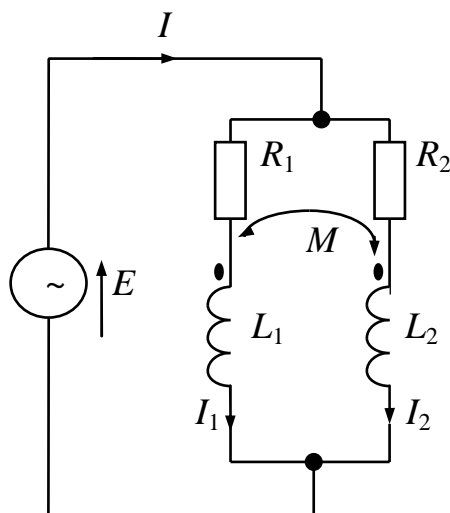


Рис. 60

Введем обозначения:

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = 20 + j10 = 22,36e^{j26,56^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = 20 + j20 = 28,28e^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_M = j\omega M = j10 \text{ Ом}.$$

По законам Кирхгофа,

$$\dot{E} = \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_M; \quad (\text{а})$$

$$\dot{E} = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_1 Z_M; \quad (\text{б})$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2. \quad (\text{в})$$

Решим совместно уравнения (а) и (б):

$$\dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_M = \dot{E}; \quad \left. \begin{array}{l} \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_M = \dot{E}; \\ \dot{I}_1 Z_M + \dot{I}_2 Z_2 = \dot{E}; \end{array} \right\}$$

$$\dot{I}_1 Z_M + \dot{I}_2 Z_2 = \dot{E}; \quad \left. \begin{array}{l} \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_M = \dot{E}; \\ \dot{I}_1 Z_M + \dot{I}_2 Z_2 = \dot{E}; \end{array} \right\}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{E} & Z_M \\ \dot{E} & Z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 & Z_M \\ Z_M & Z_2 \end{vmatrix}} = \dot{E} \frac{Z_2 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= 150 \frac{20 + j20 - j10}{22,36e^{j26,56^\circ} \cdot 28,28e^{j45^\circ} - (j10)^2} = \\
&= 150 \frac{22,36e^{j26,56^\circ}}{632,34e^{j71,56^\circ} + 100} = 150 \frac{22,36e^{j26,56^\circ}}{200 + j600 + 100} = \\
&= 150 \frac{22,36e^{j26,56^\circ}}{670,82e^{j63,43^\circ}} = 5e^{-j36,87^\circ} = (4 - j3) \text{ A}; \\
i_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} Z_1 & \dot{E} \\ Z_M & \dot{E} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 & Z_M \\ Z_M & Z_2 \end{vmatrix}} = \dot{E} \frac{Z_1 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} = 4,47e^{-j63,5^\circ} = (2 - j4) \text{ A}.
\end{aligned}$$

Из уравнения (в)

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 6 - j7 = 9,22e^{-j49,4^\circ} \text{ A}.$$

На рис. 61 по уравнениям (а) — (в) построена векторная диаграмма. По оси +1 отложен вектор  $\dot{E}$ . На основе расчетов построены векторы  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}$ . Затем на основании уравнения (а) построены векторы  $\dot{I}_1 R_1$ ;  $j\omega L_1 \dot{I}_1$  (опережает вектор  $\dot{I}_1$  на  $90^\circ$ );  $j\omega M \dot{I}_2$  (опережает вектор  $\dot{I}_2$  на  $90^\circ$ ); их сумма дает вектор  $\dot{E}$ . Аналогично построены векторы по уравнению (б).

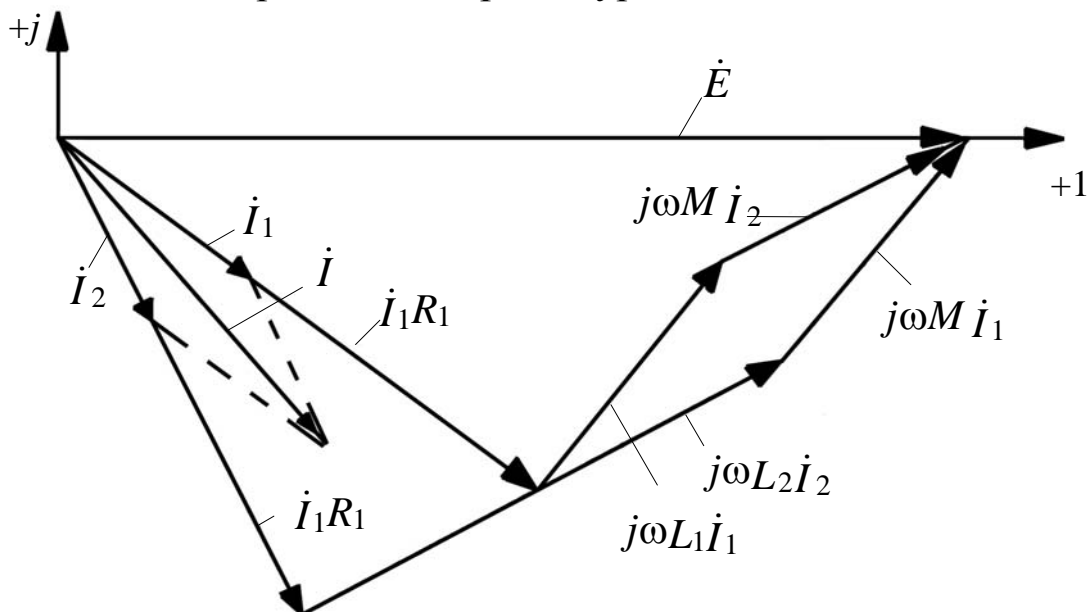


Рис. 61

Определяем показания каждого из ваттметров:

$$P_1 = \operatorname{Re} \left[ \dot{U} I_1^* \right] = \operatorname{Re} [150(4 + j3)] = 150 \cdot 4 = 600 \text{ Вт};$$

$$P_2 = \operatorname{Re} \left[ \dot{U} I_2^* \right] = \operatorname{Re} [150(2 + j4)] = 150 \cdot 2 = 300 \text{ Вт};$$

$$P = \operatorname{Re} \left[ \dot{U} I^* \right] = \operatorname{Re} [150(6 + j7)] = 150 \cdot 6 = 900 \text{ Вт}.$$

Тепловые потери в первой и второй ветвях соответственно равны:

$$\Delta P_1 = I_1^2 R_1 = 5^2 \cdot 20 = 500 \text{ Вт};$$

$$\Delta P_2 = I_2^2 R_2 = 4,47^2 \cdot 20 = 400 \text{ Вт},$$

а их сумма  $\Delta P_1 + \Delta P_2$  равна мощности  $P$ , поступающей во всю рассматриваемую цепь.

Активная мощность  $P_1 = 600$  Вт, потребляемая первой ветвью от источника энергии, частично расходуется на тепловые потери в этой ветви ( $\Delta P_1 = 500$  Вт), и оставшаяся часть поступает ( $600 - 500 = 100$  Вт) в магнитное поле, откуда вследствие взаимной индукции передается во вторую катушку. Это видно из следующего. Напряжение взаимной индукции на первой катушке

$$\dot{U}_{1M} = Z_M \dot{I}_2 = j10(2 - j4) = (40 + j20) \text{ В},$$

а мощность, передаваемая полем из первой катушки во вторую,

$$P_{1M} = \operatorname{Re} \left[ \dot{U}_{1M} I_1^* \right] = \operatorname{Re} [(40 + j20)(4 + j3)] = 40 \cdot 4 - 20 \cdot 3 = 100 \text{ Вт}.$$

Аналогично

$$\dot{U}_{2M} = Z_M \dot{I}_1 = j10(4 - j3) = (30 + j40) \text{ В};$$

$$P_{2M} = \operatorname{Re} \left[ \dot{U}_{2M} I_2^* \right] = \operatorname{Re} [(30 + j40)(2 + j4)] = 30 \cdot 2 - 40 \cdot 4 = -100 \text{ Вт}.$$



### 3.9 Воздушный трансформатор

В электротехнике широко применяется передача энергии из одного контура в другой при помощи трансформаторов. Они могут иметь различные назначения, но чаще всего предназначаются для преобразования величины переменного напряжения. Такое преобразование необходимо, например в том случае, если напряжение источника энергии отличается от напряжения, которое требуется для приемника энергии.

Трансформатор состоит из двух или нескольких индуктивно связанных катушек (обмоток). Воздушные трансформаторы не имеют ферромагнитного сердечника и применяются при высоких частотах.

Обмотка трансформатора, к которой подводится питание, называется первичной, обмотка, к которой присоединяется приемник энергии — вторичной. Напряжения между выводами обмоток и токи в этих обмотках называются соответственно первичными и вторичными напряжениями и токами трансформатора. Цепи, в состав которых входят первичная и вторичная обмотки трансформатора, называются соответственно первичной и вторичной цепями трансформатора.

Цепь с воздушным трансформатором приведена на рис. 62 и рассчитывается в следующем примере.

#### Пример 20

Для схемы на рис. 62 задано:  $E=120$  В;

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = (10 + j42) \text{ Ом}; \quad Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = (15 + j70) \text{ Ом};$$

$$Z = R - j/\omega C = (5 - j10) \text{ Ом}; \quad Z_M = j\omega M = j20 \text{ Ом}.$$

Требуется определить показание вольтметра и построить векторную диаграмму.

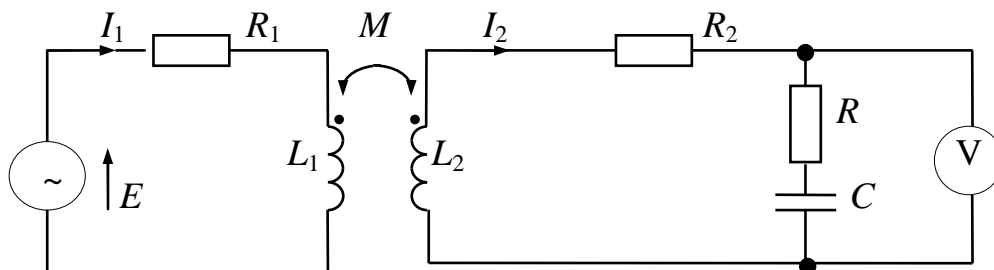


Рис. 62

Система уравнений второго закона Кирхгофа для этого случая будет (токи втекают в разноименные выводы катушек, т.е. включение катушек встречное):

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_2 Z_M &= \dot{E}; \\ -\dot{I}_1 Z_M + \dot{I}_2 (Z + Z_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(б)} \end{array}$$

Определим токи:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{E} & -Z_M \\ 0 & Z + Z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 & -Z_M \\ -Z_M & Z + Z_2 \end{vmatrix}} = \dot{E} \frac{Z + Z_2}{Z_1(Z + Z_2) - Z_M^2} = \\ &= 120 \frac{20 + j60}{(10 + j42)(20 + j60) - (j20)^2} = \\ &= 120 \frac{20 + j60}{200 + j600 + j840 - 2520 + 400} = \\ &= 120 \frac{63,25 e^{j71,57^\circ}}{2400 e^{j143,13^\circ}} = 3,16 e^{-j71,56^\circ} \text{ A}; \\ \dot{I}_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} Z_1 & \dot{E} \\ -Z_M & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 & \dot{E} \\ -Z_M & 0 \end{vmatrix}} = \dot{E} \frac{Z_M}{Z_1(Z + Z_2) - Z_M^2} = \\ &= 120 \frac{20 e^{j90^\circ}}{2400 e^{j143,13^\circ}} = 1 e^{-j53,13^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

Напряжение на сопротивлении  $Z$

$$\begin{aligned} \dot{U}_Z &= \dot{I}_2 Z = 1 e^{-j53,13^\circ} (5 - j10) = 1 e^{-j53,13^\circ} \cdot 11,2 e^{-j63,43^\circ} = \\ &= 11,2 e^{-j116,56^\circ} \text{ В}, \end{aligned}$$

следовательно, показание вольтметра будет 11,2 В.

Векторная диаграмма приведена на рис. 63. Порядок ее построения таков: на основе расчетов отложены векторы  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$ , далее в соответствии с уравнением (а) отложены векторы  $\dot{I}_1 R_1$ ,

$j\omega L_1 \dot{I}_1$  (опережает  $\dot{I}_1$  на  $90^\circ$ ),  $-j\omega M \dot{I}_2$  (отстает от  $\dot{I}_2$  на  $90^\circ$ ), их сумма дает вектор  $\dot{E}$ . Аналогично построены векторы по уравнению (б).

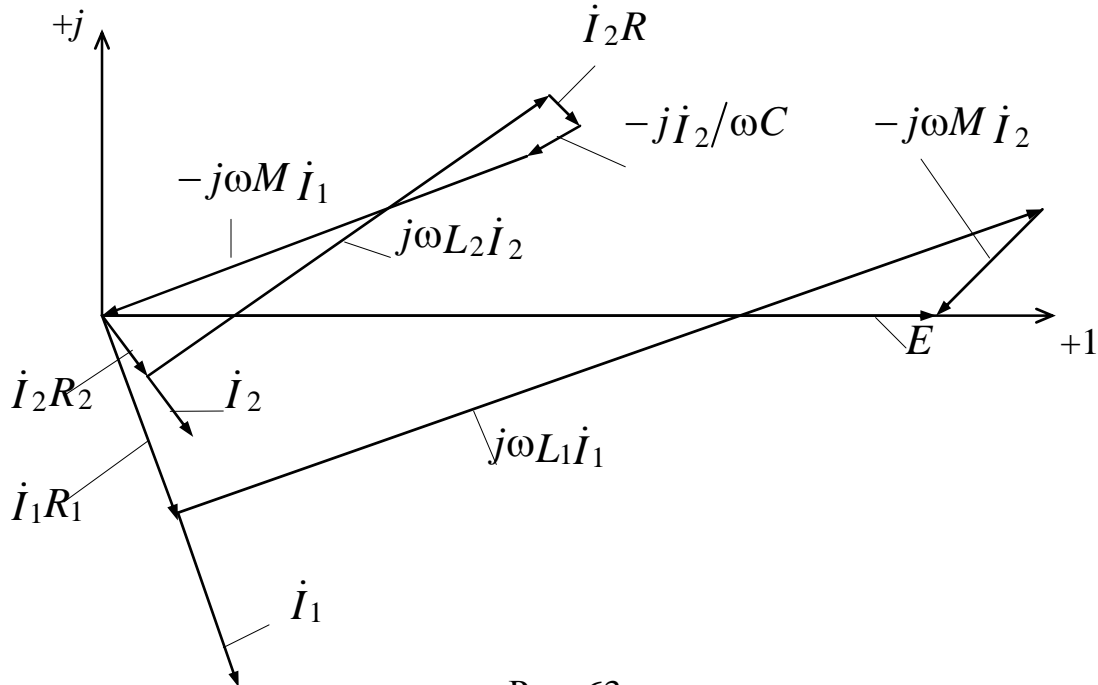


Рис. 63

### 3.10 Передача энергии в нагрузку на переменном токе

Представим источник сигнала и линию связи, соединяющую его с нагрузкой  $Z_H = R_H + jX_H$ , активным двухполюсником, как показано на рис. 64.

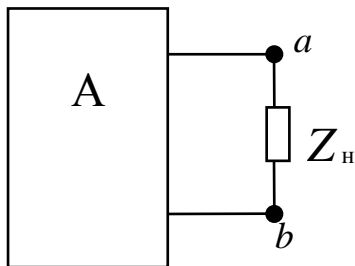


Рис. 64

Выясним, при соблюдении каких условий в нагрузке выделяется максимальная активная мощность.

По методу эквивалентного генератора (см. подраздел 2.8) ток в нагрузке

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_{abxx}}{Z_{BX} + Z_H},$$

где  $Z_{BX} = R_{BX} + jX_{BX}$  — входное сопротивление двухполюсника по отношению к зажимам  $ab$ .

Поэтому

$$i = \frac{\dot{U}_{abxx}}{R_{вх} + R_{н} + j(X_{вх} + X_{н})}.$$

Параметры источника и линии являются заданными, поэтому  $R_{вх}$  и  $X_{вх}$  изменять нельзя, а можно изменять лишь  $R_{н}$  и  $X_{н}$ . Выберем такое  $X_{н}$ , чтобы ток в цепи был максимальным; это возможно, если  $X_{вх} + X_{н} = 0$ . При этом двухполюсник работает в резонансном режиме — ток через нагрузку по фазе совпадает с напряжением  $\dot{U}_{abxx}$ :  $\dot{I} = \dot{U}_{abxx} / (R_{вх} + R_{н})$ .

Как и в цепи постоянного тока (см. подраздел 2.10), если взять  $R_{н} = R_{вх}$ , мощность нагрузки будет максимальна и равна

$$P_{\max} = U_{abxx}^2 / 4R_{вх}.$$

Таким образом, чтобы выделить в нагрузке максимально возможную мощность, необходимо выбрать следующие сопротивления нагрузки:  $X_{н} = -X_{вх}$ ;  $R_{н} = R_{вх}$ . Следует напомнить, что при этом к.п.д. составляет 50 %.

Для линий передач электрической энергии переменного тока (равно как и постоянного тока) важно не согласование нагрузки, а уменьшение потерь в ЛЭП, т.е. повышение к.п.д. ЛЭП переменного тока обладает как активным сопротивлением  $R_{л}$ , так и индуктивным  $X_{л} = \omega L_{л}$ . Так как  $X_{л}$  увеличивается с ростом частоты, то в промышленных и бытовых электрических цепях переменного тока используется сравнительно низкая частота (50–60) Гц. На автономных же объектах (кораблях, самолетах и т.д.) с малой протяженностью линий и вследствие этого относительно небольшой индуктивностью частота переменного тока составляет 400 Гц и выше.

## 4 ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

### 4.1 Основные понятия

На рис. 65 схематично показано устройство генератора переменного тока с тремя обмотками на статоре. Для упрощения каждая обмотка показана состоящей только из двух проводов, заложённых в диаметрально противоположные пазы статора. Эти провода на заднем торце статора соединены друг с другом. На переднем торце статора они оканчиваются зажимами  $A, X, B, Y, C, Z$ , которые служат для подсоединения внешней цепи.

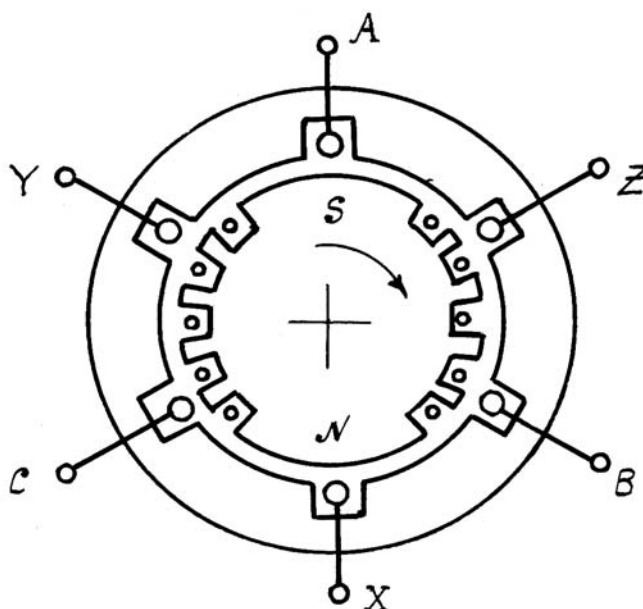


Рис. 65

Наводимые в обмотках э.д.с. максимальны, когда ось полюсов ротора пересекает проводники статора. Для разных обмоток это происходит в различные моменты времени. Поэтому наводимые э.д.с. не совпадают по фазе. Каждая из обмоток статора расположена в пространстве под углом  $120^\circ$  относительно двух других обмоток (по ходу либо против хода часовой стрелки). Поэтому и наводимые на обмотках э.д.с. сдвинуты на  $120^\circ$ , как показано на рис. 66 (эти э.д.с. обозначены  $e_A, e_B, e_C$ ).

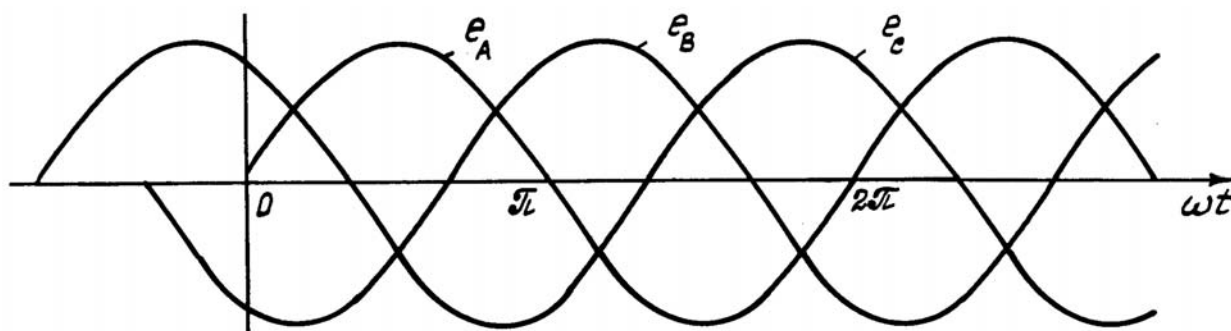


Рис. 66

Система трех э.д.с. одинаковой частоты и амплитуды, сдвинутых на  $120^\circ$  (или, что то же самое, на одну треть периода) друг относительно друга, называется **трехфазной системой**. Совокупность электрических цепей с трехфазными источниками питания называется трехфазной системой электрических цепей. Отдельные ее части называются **фазами**, например отдельные обмотки генератора называют фазными обмотками или, кратко, фазами генератора. Таким образом, в электротехнике термин «фаза» имеет два различных значения: он является, с одной стороны, понятием, характеризующим стадию периодического процесса, и, с другой стороны, наименованием составной части трехфазной системы электрических цепей.

Выводам фазных обмоток генераторов дают наименования «начало» и «конец». «Начала» обозначают первыми буквами латинского алфавита (А, В и С), а «концы» — последними буквами (Х, Y и Z). При разметке руководствуются следующим условием: при одинаковых положительных направлениях э.д.с. во всех обмотках от концов к началам (или наоборот) э.д.с. должны быть сдвинуты по фазе относительно друг друга симметрично:

$$e_A = E_m \sin \omega t;$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t - 240^\circ) = E_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

Порядок, в котором э.д.с. в фазных обмотках генератора проходят через одинаковые значения, например через положительные максимумы, называют **последовательностью фаз** или

**порядком чередования фаз.** При указанном на рис. 65 направлении вращения ротора получаем последовательность фаз АВСА и т.д. Такая последовательность называется **прямой**. Если изменить направление вращения ротора на противоположное, то последовательность фаз получится **обратной**.

Существуют различные способы соединения обмоток генератора с нагрузкой. Самым неэкономичным способом явилось бы соединение каждой обмотки генератора с нагрузкой двумя проводами, на что потребовалось бы шесть соединительных проводов. В целях экономии обмотки трехфазного генератора соединяют **в звезду** или **треугольник**. Аналогично соединяют и нагрузку. Число соединительных проводов при этом уменьшается с шести до четырех или трех.

На электрической схеме трехфазный генератор принято изображать в виде трех обмоток, расположенных друг к другу под углом  $120^\circ$ . При соединении звездой одноименные зажимы (например, «концы») трех обмоток объединяют в одну точку, которую называют нулевой точкой генератора 0. Обмотки генератора обозначают буквами А, В, С и ставят их у «начала» обмоток. Схема соединения обмоток генератора звездой приведена на рис. 67, а и соответствующая ей векторная диаграмма — на рис. 67, б.

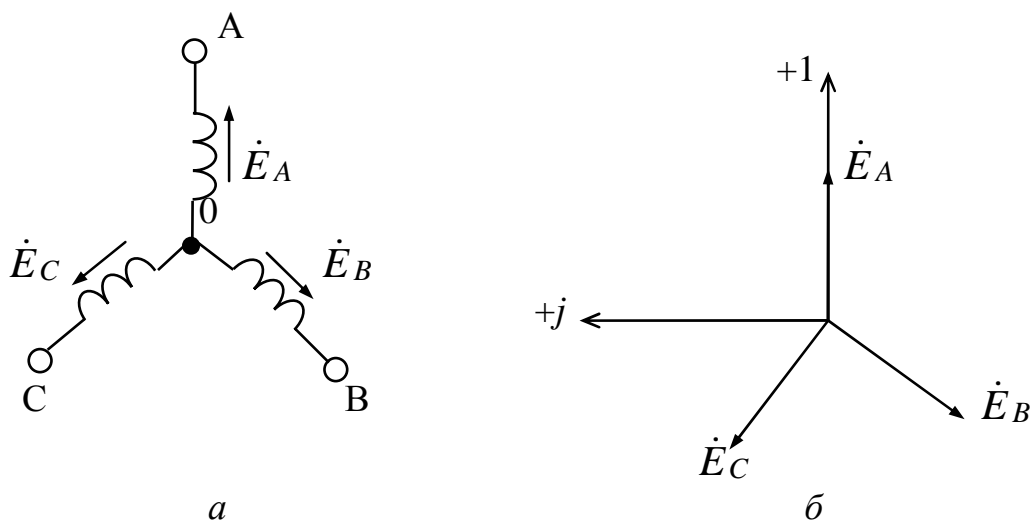


Рис. 67

Следует заметить, что при построении векторных диаграмм трехфазных цепей оси координат  $+1$  и  $+j$  поворачивают таким образом, чтобы векторы трехфазной системы э.д.с. располагались симметрично относительно вертикали (на рис. 67, б оси координат повернуты на  $90^\circ$  по часовой стрелке).

Соединение обмоток генератора треугольником показано на рис. 68, а. Здесь конец первой обмотки генератора соединен с началом второй и т.д. Из векторной диаграммы э.д.с., приведенной на рис. 68, б, видно, что геометрическая сумма э.д.с. в замкнутом треугольнике равна нулю. Поэтому если к зажимам А, В, С не присоединена нагрузка, то по обмоткам генератора не будет протекать ток.

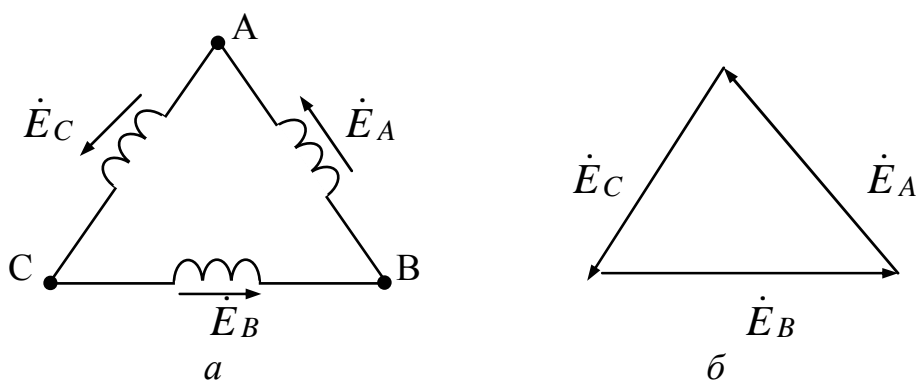


Рис. 68

На рис. 68, б оси координат не показаны, но так как э.д.с. фазы А имеет нулевую начальную фазу, то можно мысленно представить, что ось  $+1$  совпадает с направлением вектора  $\dot{E}_A$ .

Пять простейших способов соединения трехфазного генератора с трехфазной нагрузкой изображены на рис. 69—73. Из этих рисунков видно, что схемы соединения обмоток генератора и нагрузок не зависят друг от друга.

Точку, в которой объединены три вывода трехфазной нагрузки при соединении ее звездой, называют **нулевой точкой нагрузки** и обозначают  $0'$ . **Нулевым проводом** называют провод, соединяющий нулевые точки генератора и нагрузки. Ток нулевого провода обозначим  $I_0$ . Положительное направление этого тока выберем от точки  $0'$  к точке 0 (см. рис. 69).



Схема соединения звезда-звезда с нулевым проводом  
Линейный провод

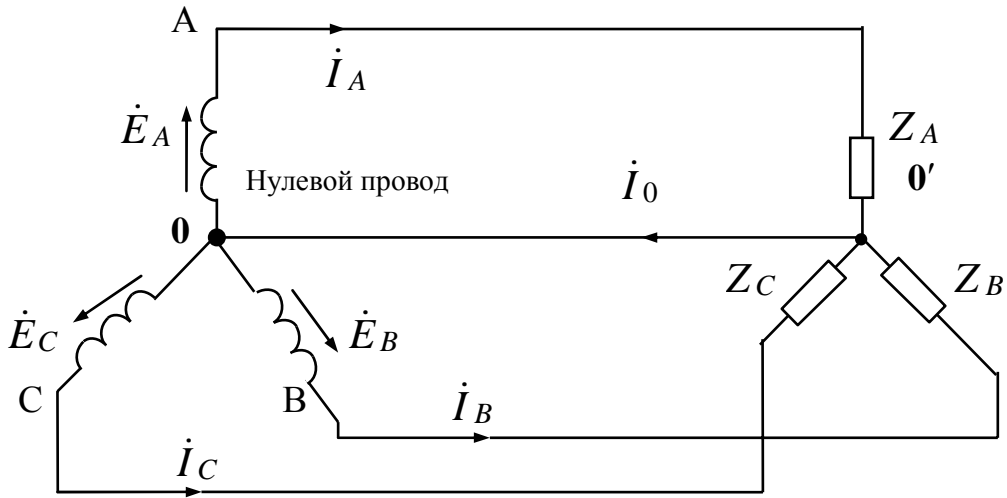


Рис. 69

Схема соединения звезда-звезда без нулевого провода

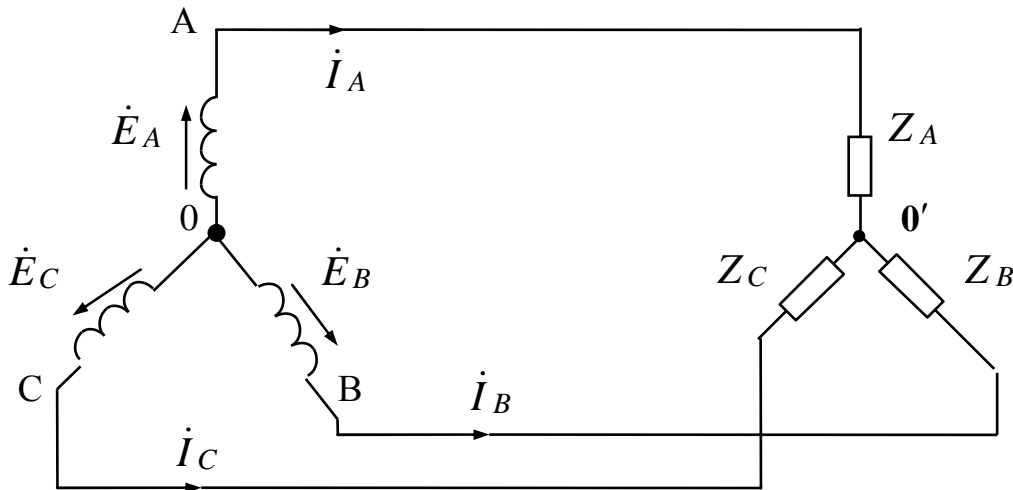


Рис. 70

Схема соединения звезда-треугольник

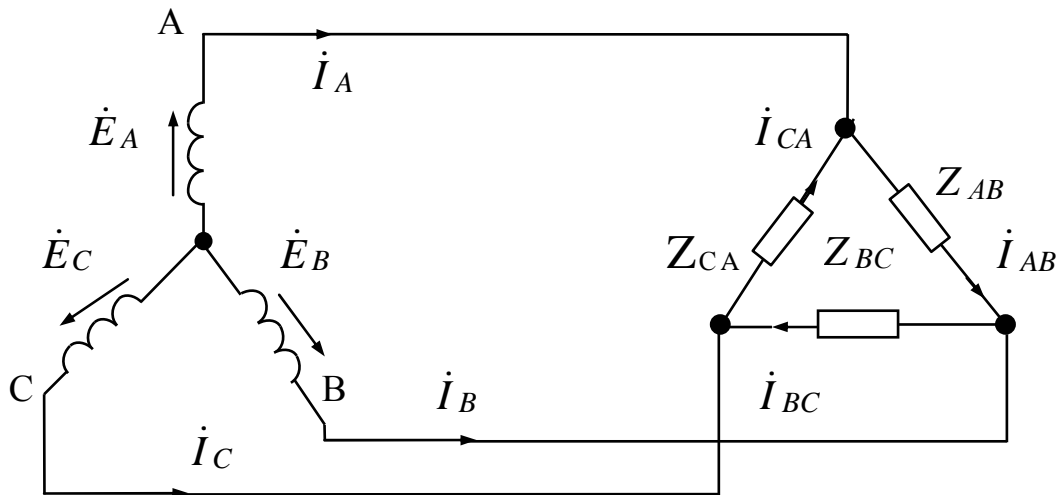


Рис. 71

Схема соединения треугольник-треугольник

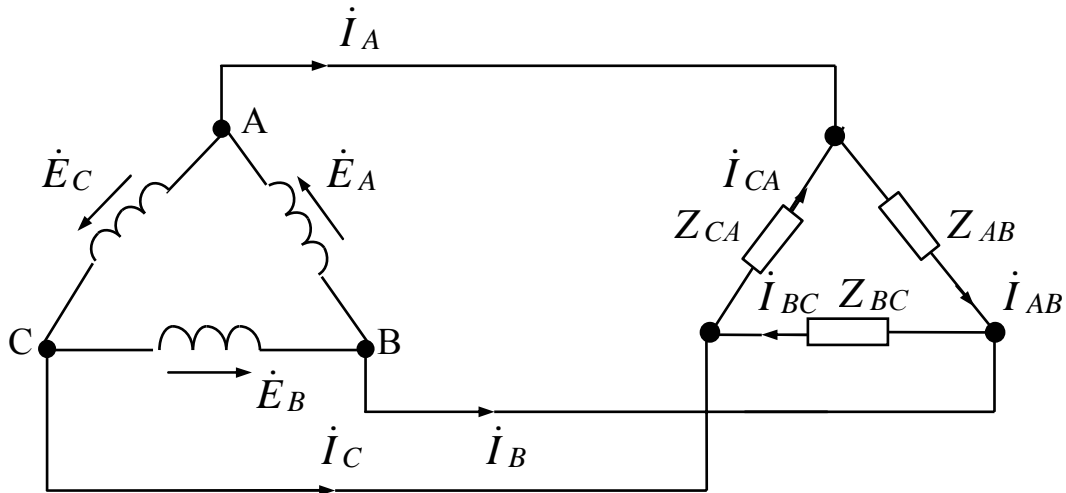


Рис. 72

Схема соединения треугольник-звезда

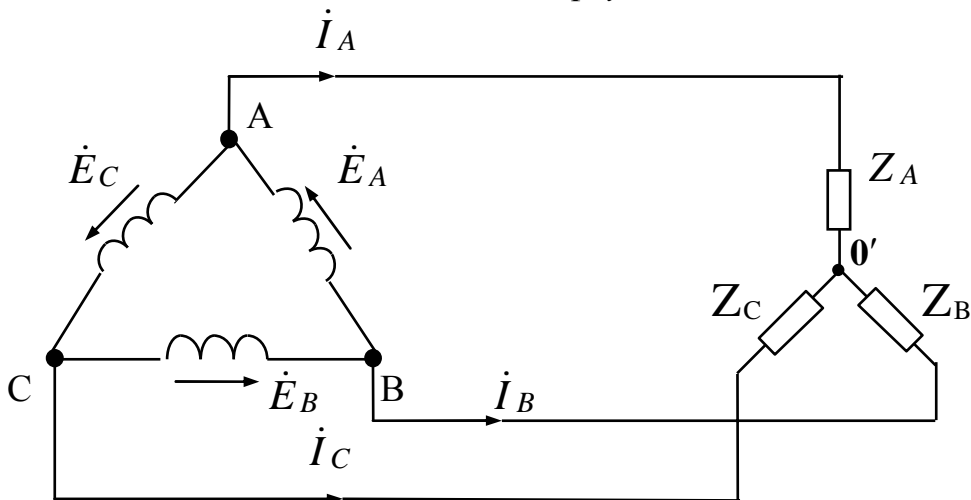


Рис. 73

Провода, соединяющие точки А, В, С генератора с нагрузкой, называют *линейными*. Протекающие по ним токи так же называют *линейными* и обозначают  $I_A, I_B, I_C$ . Условимся за положительное направление линейных токов принимать направление от генератора к нагрузке. Модули линейных токов часто обозначают  $I_L$  (не указав никакого дополнительного индекса), особенно тогда, когда все линейные токи по модулю одинаковы.

Напряжение между линейными проводами называют **линейным** и часто снабжают двумя индексами, например  $U_{AB}$ ; модуль линейного напряжения обозначают  $U_{\text{л}}$ .

Протекающие по фазам генератора или нагрузки токи называют фазными токами генератора  $I_{\text{ф}}$  или соответственно нагрузки, а напряжения на них — фазными напряжениями  $U_{\text{ф}}$ .

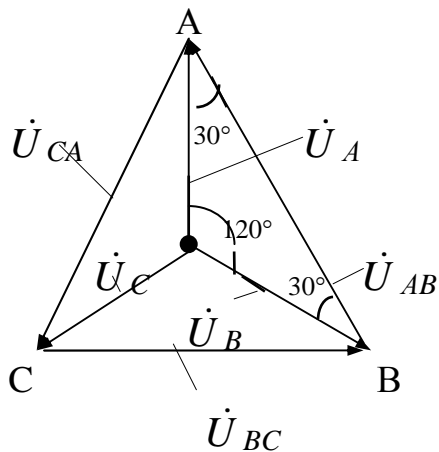


Рис. 74

При соединении генератора в звезду (см. рис. 69—71) линейное напряжение по модулю в  $\sqrt{3}$  раза больше фазного напряжения генератора. Это следует из векторной диаграммы фазных и линейных напряжений, представленной на рис. 74. Модуль линейного напряжения  $U_{\text{л}}$  есть основание равнобедренного треугольника с острыми углами по  $30^\circ$ , следовательно,

$$U_{\text{л}} = U_{AB} = U_{\text{ф}} 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3} U_{\text{ф}}. \quad (51)$$

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = U_{\text{л}} e^{j30^\circ};$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = U_{\text{л}} e^{-j90^\circ};$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = U_{\text{л}} e^{j150^\circ}.$$

Линейный ток при соединении генератора в звезду равен фазному току генератора. При соединении генератора в треугольник линейное напряжение равно фазному напряжению генератора (см. рис. 72, 73).

При соединении нагрузки треугольником положительные направления для токов выбирают по часовой стрелке. Индексы у токов соответствуют выбранным для них положительным направлениям: первый индекс отвечает точке, от которой ток утека-

ет, второй — точке, к которой ток притекает. Линейные токи здесь не равны фазным токам нагрузки и определяются через них по первому закону Кирхгофа (см. рис. 71, 72):

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}. \quad (52)$$

## 4.2 Расчет трехфазных цепей

Трехфазные цепи являются разновидностью цепей синусоидального тока, и поэтому расчет и исследование процессов в них производят теми же методами и приемами, которые рассматривались в разделе 3. Рассмотрим некоторые простейшие трехфазные цепи.

*Соединение звезда-звезда с нулевым проводом* (см. рис. 69).

Если сопротивлением нулевого провода пренебречь, то потенциалы точек 0 и 0' будут равны и эти точки будут представлять собой как бы одну точку. При этом в схеме образуются три обособленных контура, через которые проходят токи

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{Z_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B}{Z_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C}{Z_C};$$

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

Если  $Z_A = Z_B = Z_C$  (такую нагрузку называют *равномерной*), то ток  $\dot{I}_0$  равен нулю и нулевой провод может быть изъят из схемы без изменения режима ее работы.

При неравномерной нагрузке фаз ток  $\dot{I}_0$  в общем случае не равен нулю.

### Пример 21

В схеме на рис. 75 э.д.с. каждой фазы генератора равна 127 В. Сопротивления фаз нагрузки равны по модулю и составляют 6,35 Ом. Требуется определить ток нулевого провода.

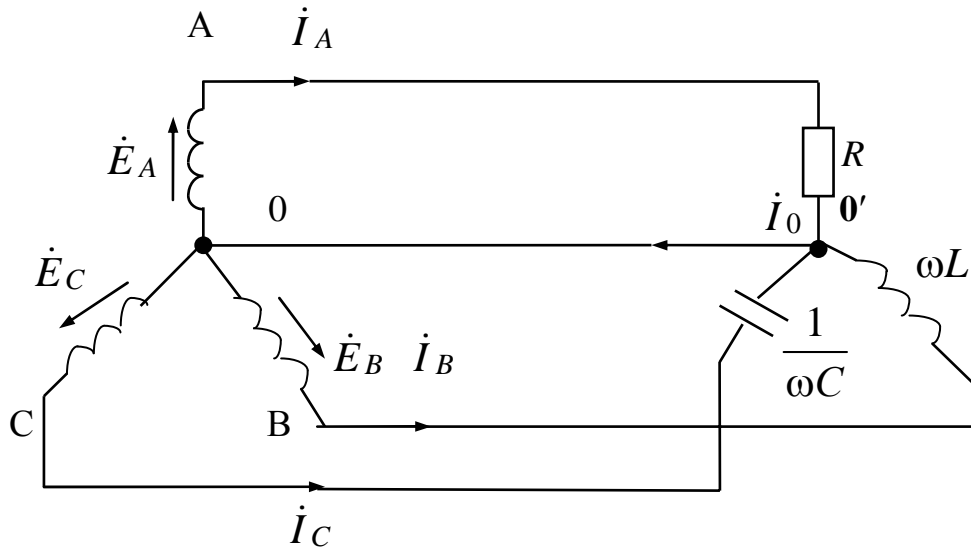


Рис. 75

Для решения построим векторную диаграмму, которая показана на рис. 76. Токи всех фаз по модулю равны  $127/6,35 = 20$  А. Ток  $\dot{I}_A$  совпадает по фазе с  $\dot{E}_A$ , ток  $\dot{I}_B$  отстает от  $\dot{E}_B$  на  $90^\circ$ , ток  $\dot{I}_C$  опережает  $\dot{E}_C$  на  $90^\circ$ .

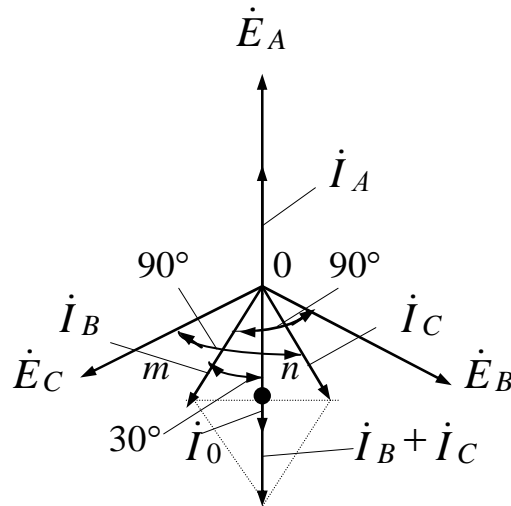


Рис. 76

Из векторной диаграммы модуль суммы векторов  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  —

$$I_B + I_C = 0n \cdot 2 = 0m \cdot \cos 30^\circ \cdot 2 = 20 \cos 30^\circ \cdot 2 = 34,64 \text{ А.}$$

Модуль тока  $\dot{I}_0$  —

$$I_0 = (I_B + I_C) - I_A = 34,64 - 20 = 14,64 \text{ А.}$$

Ток  $\dot{i}_0$  направлен в противоположную сторону относительно  $\dot{i}_A$  и  $\dot{E}_A$ , т.е.  $\dot{i}_0 = 14,64 e^{-j180^\circ}$  А.

Решим задачу символическим методом:

$$\dot{i}_A = \frac{\dot{E}_A}{R} = \frac{127}{6,35} = 20 \text{ А};$$

$$\dot{i}_B = \frac{\dot{E}_B}{j\omega L} = \frac{127 e^{-j120^\circ}}{6,35 e^{j90^\circ}} = 20 e^{-j210^\circ} = 20 e^{j150^\circ} = (-17,32 + j10) \text{ А};$$

$$\dot{i}_C = \frac{\dot{E}_C}{-j/\omega C} = \frac{127 e^{j120^\circ}}{6,35 e^{-j90^\circ}} = 20 e^{j210^\circ} = 20 e^{-j150^\circ} = (-17,32 - j10) \text{ А};$$

$$\begin{aligned} \dot{i}_0 &= \dot{i}_A + \dot{i}_B + \dot{i}_C = 20 - 17,32 + j10 - 17,32 - j10 = \\ &= -14,64 \text{ А} = 14,64 e^{-j180^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

В продолжение этого примера определим, чему должно равняться значение  $R$ , чтобы ток нулевого провода стал равен нулю.

Из векторной диаграммы (см. рис. 76) видно, что  $\dot{i}_0$  будет равен нулю, если модуль тока  $I_A$  будет равен сумме модулей токов  $I_B$  и  $I_C$ , т.е. если  $I_A = 34,64$  А. Тогда

$$R = \frac{127}{34,64} = 3,67 \text{ Ом.}$$

*Соединение звезда-треугольник (см. рис. 71)*

Ток  $\dot{i}_{AB}$  вызывается напряжением  $\dot{U}_{AB}$ . Модуль и фаза его относительно напряжения  $\dot{U}_{AB}$  определяются сопротивлением нагрузки  $Z_{AB}$ . Ток  $\dot{i}_{BC}$  вызван напряжением  $\dot{U}_{BC}$ . Модуль и фаза его относительно  $\dot{U}_{BC}$  определяются сопротивлением  $Z_{BC}$ . Ток  $\dot{i}_{CA}$  вызван напряжением  $\dot{U}_{CA}$  и зависит от сопротивления  $Z_{CA}$ . Линейные токи вычисляются по соотношениям (52).

При равномерной нагрузке фаз линейные токи по модулю в  $\sqrt{3}$  раз больше фазных токов нагрузки. При неравномерной нагрузке линейные токи могут быть и больше, и меньше фазных токов нагрузки.

**Пример 22**

Для схемы на рис. 71 задано:  $Z_{AB} = -j19$  Ом (емкостная нагрузка);  $Z_{BC} = j19$  Ом (индуктивная нагрузка);  $Z_{CA} = 19$  Ом. Э.д.с. каждой фазы генератора 220 В.

Требуется определить все токи схемы и построить векторную диаграмму.

Примем направление оси +1 вертикально вверх и в соответствии с векторной диаграммой фазных и линейных напряжений (см. рис. 74) определим линейные напряжения:

$$\dot{U}_{AB} = 220 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j30^\circ} = 380e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{BC} = 380e^{-j90^\circ} \text{ В}; \dot{U}_{CA} = 380e^{j150^\circ} \text{ В}.$$

Токи в фазах нагрузки

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{380e^{j30^\circ}}{19e^{-j90^\circ}} = 20e^{j120^\circ} = (-10 + j17,32) \text{ А};$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{BC}} = \frac{380e^{-j90^\circ}}{19e^{j90^\circ}} = 20e^{-j180^\circ} = -20 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{CA}} = \frac{380e^{j150^\circ}}{19} = 20e^{j150^\circ} = (-17,32 + j10) \text{ А}.$$

Линейные токи определяем по (52):

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = -10 + j17,32 + 17,32 - j10 = 7,32 + j7,32 = \\ &= \sqrt{7,32^2 + 7,32^2} e^{j \arctg 1} = 10,35e^{j45^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = -20 + 10 - j17,32 = -(10 + j17,32) = \\ &= -\sqrt{10^2 + 17,32^2} e^{j \arctg 17,32/10} = -20e^{j60^\circ} = 20e^{-j120^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = -17,32 + j10 + 20 = 2,68 + j10 = 10,35e^{j75^\circ} \text{ А}.$$

В соответствии с рассчитанными значениями токов и напряжений векторная диаграмма построена на рис. 77.

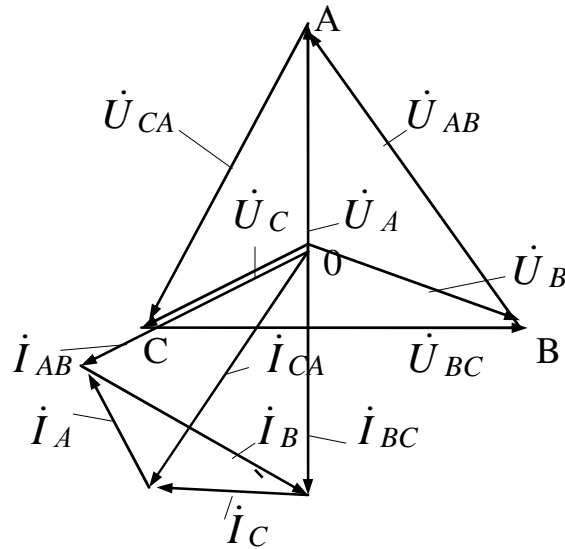


Рис. 77

Порядок построения следующий. Вначале строятся векторы фазных и линейных напряжений, затем — векторы токов фаз нагрузки ( $\dot{I}_{AB}$  опережает  $\dot{U}_{AB}$  на  $90^\circ$ ,  $\dot{I}_{BC}$  отстает от  $\dot{U}_{BC}$  на  $90^\circ$ ,  $\dot{I}_{CA}$  совпадает с направлением  $\dot{U}_{CA}$ ) и, наконец, по правилам вычитания векторов в соответствии с (52) — векторы линейных токов.

*Соединение звезда-звезда без нулевого провода (см. рис. 70)*

Схема такого соединения представляет собой схему с двумя узлами. Поэтому для расчета токов здесь целесообразно пользоваться методом двух узлов (см. подраздел 2.6). Напряжение между узлами  $O'$  и  $O$

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \frac{\dot{E}_A (Y_A + e^{-j120^\circ} Y_B + e^{j120^\circ} Y_C)}{Y_A + Y_B + Y_C}. \quad (53)$$

Три вектора:  $1$ ;  $e^{-j120^\circ}$  и  $e^{j120^\circ}$  — образуют симметричную трехфазную систему, подобную представленной на рис. 67, б. Следовательно, сумма рассматриваемых векторов равна нулю:

$$1 + e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ} = 0. \quad (54)$$

Если нагрузка равномерна ( $Y_A = Y_B = Y_C$ ), то для рассматриваемого соединения с учетом (54) получим:



$$\dot{U}_{0'0} = \frac{\dot{E}_A Y_A (1 + e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ})}{3Y_A} = 0.$$

При этом напряжение на каждой фазе нагрузки равно соответствующей э.д.с.:

$$\dot{U}_{A0'} = \dot{E}_A; \dot{U}_{B0'} = \dot{E}_B; \dot{U}_{C0'} = \dot{E}_C.$$

Если нагрузка неравномерна, то  $\dot{U}_{0'0} \neq 0$  и  $\dot{U}_{A0'} = \dot{E}_A - \dot{U}_{0'0}$ ;  $\dot{U}_{B0'} = \dot{E}_B - \dot{U}_{0'0}$ ;  $\dot{U}_{C0'} = \dot{E}_C - \dot{U}_{0'0}$ .

Токи в фазах нагрузки:

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{A0'}/Z_A; \dot{I}_B = \dot{U}_{B0'}/Z_B; \dot{I}_C = \dot{U}_{C0'}/Z_C.$$

При наличии магнитно-связанных катушек расчет трехфазных цепей ведется так же, как и расчет магнитно-связанных цепей однофазного тока, т.е. на основе уравнений, составляемых по законам Кирхгофа.

### Пример 23

Для схемы на рис. 78 задано:  $E_\phi = 127$  В;  $\omega L = 1/\omega C = 4$  Ом;  $\omega M = 2$  Ом. Требуется определить показания амперметра и вольтметра.

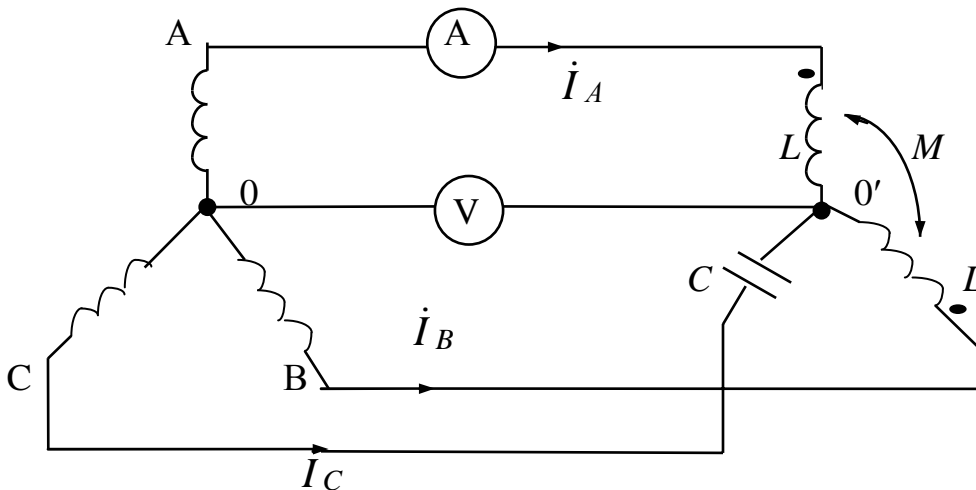


Рис. 78

Уравнение по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0. \quad (a)$$

Уравнение по второму закону Кирхгофа для контура  $0A0'B0$ :

$$\begin{aligned} \dot{I}_A j\omega L + \dot{I}_B j\omega M - \dot{I}_B j\omega L - \dot{I}_A j\omega M &= \dot{U}_{AB}; \\ \dot{I}_A j4 + \dot{I}_B j2 - \dot{I}_B j4 - \dot{I}_A j2 &= 220e^{j30^\circ}; \\ 2j(\dot{I}_A - \dot{I}_B) &= 220e^{j30^\circ}. \end{aligned} \quad (б)$$

Уравнение по второму закону Кирхгофа для контура  $0C0'B0$ :

$$\begin{aligned} \dot{I}_C(-j/\omega C) - \dot{I}_B j\omega L - \dot{I}_A j\omega M &= \dot{U}_{CB}; \\ -4j\dot{I}_C - 2j\dot{I}_A - 4j\dot{I}_B &= 220e^{j90^\circ}. \end{aligned} \quad (в)$$

Из уравнения (б) выразим  $\dot{I}_A = \dot{I}_B - 110e^{j120^\circ}$  и подставим в (а):

$$\dot{I}_C = 110e^{j120^\circ} - 2\dot{I}_B.$$

Уравнение (в) преобразуем к виду

$$2\dot{I}_C + \dot{I}_A + 2\dot{I}_B = -110$$

и подставим полученные значения  $\dot{I}_A$  и  $\dot{I}_C$ :

$$220e^{j120^\circ} - \dot{I}_B - 110e^{j120^\circ} = -110;$$

$$\dot{I}_B = 110(e^{j120^\circ} + 1) = 110(-0,5 + j0,866 + 1) = 110e^{j60^\circ} \text{ А.}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_B - 110e^{j120^\circ} = 110(e^{j60^\circ} - e^{j120^\circ}) = \\ &= 110(0,5 + j0,866 + 0,5 - j0,866) = 110 \text{ А.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_0' &= \dot{\Phi}_0 + \dot{E}_A - \dot{I}_A j\omega L - \dot{I}_B j\omega M = 0 + 127 - j110 \cdot 4 - j220e^{j60^\circ} = \\ &= 127 - j440 - j110 + 190,5 = 317,5 - j550 = 635e^{-j60^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Таким образом, приборы покажут 110 А и 635 В.

### Пример 24

Бытовые электрические сети выполняются однофазными, то есть в каждую квартиру жилого дома подается лишь одна из фаз трехфазной электрической системы. Подводится же к многоквартирному жилому дому трехфазная четырехпроводная сеть (три

линейных провода и нулевой, обмотки генератора соединены в звезду). В технической части подвального помещения есть распределительное устройство, от которого с помощью двухпроводных линий (от нулевого провода и одного из линейных проводов) электроэнергия распределяется по квартирам. К каждой фазе подключается примерно одинаковое количество квартир.

Электрические соединения на распределительном устройстве осуществляются с помощью болтов. Предположим, подсоединяющий нулевой провод трехфазного четырехпроводного кабеля болт при монтаже был плохо затянут. В месте контакта появилось сравнительно большое сопротивление, которое со временем увеличилось из-за окисления поверхности металла. В результате контакт все больше нагревался и в конце концов отгорел. То есть вместо схемы звезда-звезда с нулевым проводом образовалась схема звезда-звезда без нулевого провода.

Требуется определить, как изменятся напряжения в розетках квартир жилого дома при отгорании (или обрыве) нулевого провода на входе распределительного устройства, если фазное напряжение питающей сети 220 В, а эквивалентные сопротивления фаз нагрузки жилого дома в целом составляют 5 Ом, 10 Ом и 15 Ом (в предположении, что эти сопротивления чисто активные).

Решение поясняется схемой на рис. 79.

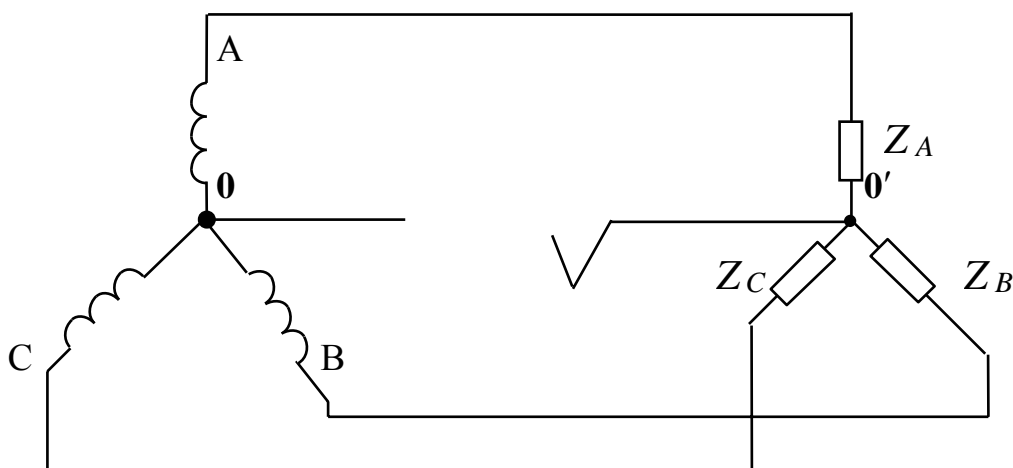


Рис. 79

Будем считать  $Z_A = 5$  Ом,  $Z_B = 10$  Ом,  $Z_C = 15$  Ом.

По методу двух узлов

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_{0'0} &= \frac{\dot{E}_A/Z_A + \dot{E}_B/Z_B + \dot{E}_C/Z_C}{1/Z_A + 1/Z_B + 1/Z_C} = \\
 &= \frac{220/5 + 220 \cdot e^{-j120^\circ}/10 + 220 \cdot e^{j120^\circ}/15}{1/5 + 1/10 + 1/15} = \\
 &= \frac{44 + 22 \cdot e^{-j120^\circ} + 14,67 \cdot e^{j120^\circ}}{0,4} = \\
 &= \frac{44 - 11 - j19,5 - 7,34 + j12,7}{0,4} = \\
 &= \frac{25,65 - j6,35}{0,4} = (64,13 - j15,88) \text{ В.}
 \end{aligned}$$

Напряжения на фазах нагрузки:

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_{A0'} &= \dot{E}_A - \dot{U}_{0'0} = 220 - 64,13 + j15,88 = 155,87 + j15,88 = 156,7 \cdot e^{j5,8^\circ} \text{ В;} \\
 \dot{U}_{B0'} &= \dot{E}_B - \dot{U}_{0'0} = 220e^{-j120^\circ} - 64,13 + j15,88 = \\
 &= -110 - j190,53 - 64,13 + j15,88 = \\
 &= -174,13 - j174,65 = 246,6 \cdot e^{-j134,9^\circ} \text{ В;} \\
 \dot{U}_{C0'} &= \dot{E}_C - \dot{U}_{0'0} = 220e^{j120^\circ} - 64,13 + j15,88 = \\
 &= -110 + j190,53 - 64,13 + j15,88 = \\
 &= -174,13 + j206,41 = 270 \cdot e^{j130,2^\circ} \text{ В.}
 \end{aligned}$$

Таким образом, напряжение сети в квартирах, подключенных к фазе А, будет составлять 156,7 В, к фазе В — 246,6 В, к фазе С — 270 В.

### 4.3 Активная, реактивная и полная мощности трехфазной системы

Под *активной мощностью* трехфазной системы понимают сумму активных мощностей фаз нагрузки и активной мощности сопротивления, включенного в нулевой провод:

$$P = P_A + P_B + P_C + P_0.$$

**Реактивная мощность** трехфазной системы представляет собой сумму реактивных мощностей фаз нагрузки и реактивной мощности сопротивления, включенного в нулевой провод:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_0.$$

Полная мощность  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ .

Если нагрузка равномерная, то

$$P_0 = Q_0 = 0; P_A = P_B = P_C = U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi;$$

$$Q_A = Q_B = Q_C = U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi;$$

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi; Q = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi;$$

$$S = 3U_\phi I_\phi,$$

где  $\varphi_\phi$  — угол между напряжением  $U_\phi$  на фазе нагрузки и током  $I_\phi$  фазы нагрузки.

Для измерения активной мощности трехфазной системы в общем случае (неравномерная нагрузка и наличие нулевого провода) необходимо включать три ваттметра, как показано на рис. 80. Активная мощность системы равна сумме показаний трех ваттметров.

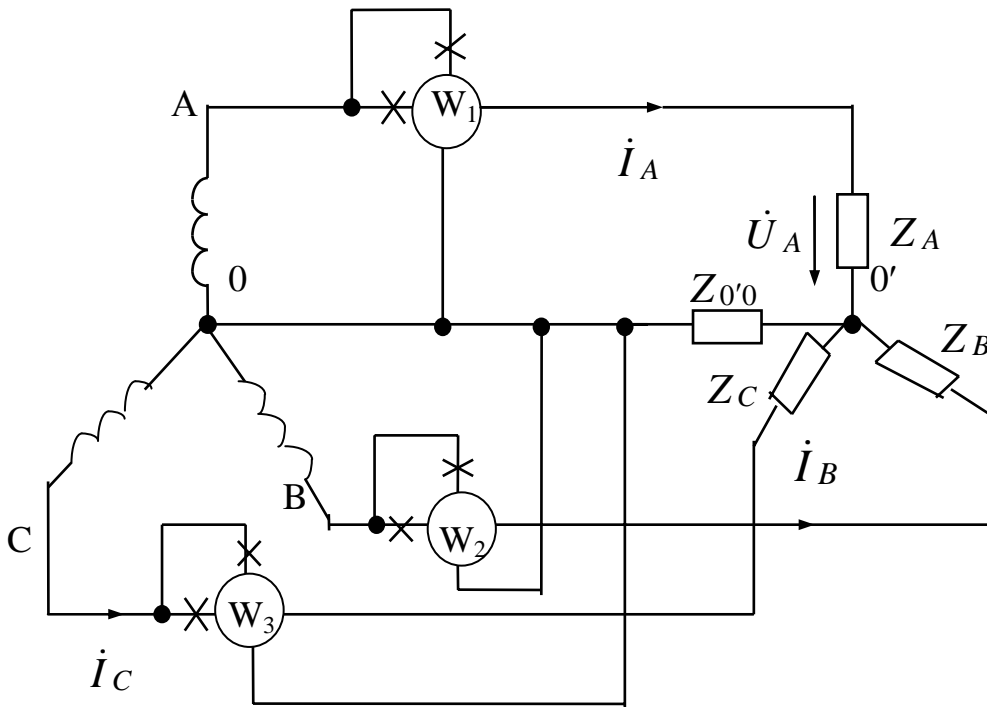


Рис. 80

Если нулевой провод отсутствует, то измерение мощности производят двумя ваттметрами по схеме на рис. 81. Сумма показаний двух ваттметров при этом определяет активную мощность всей системы независимо от того, звездой или треугольником соединена нагрузка.

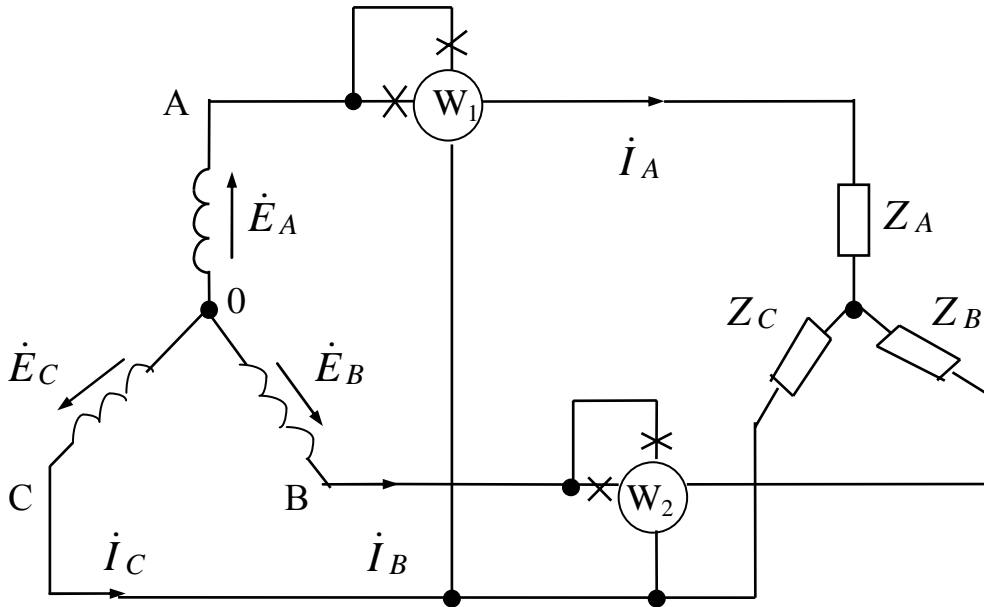


Рис. 81

Показание первого ваттметра равно  $\operatorname{Re} \left[ \dot{U}_{AC} I_A^* \right]$ , второго  $-\operatorname{Re} \left[ \dot{U}_{BC} I_B^* \right]$ .

Но

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ \dot{U}_{AC} I_A^* + \dot{U}_{BC} I_B^* \right] &= \operatorname{Re} \left[ (\dot{U}_A - \dot{U}_C) I_A^* + (\dot{U}_B - \dot{U}_C) I_B^* \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[ \dot{U}_A I_A^* + \dot{U}_B I_B^* + \dot{U}_C I_C^* \right], \end{aligned}$$

так как  $I_A^* + I_B^* = -I_C^*$ .

**Пример 25**

В схеме на рис. 82 э.д.с. фаз генератора  $E_\phi = 220$  В,  
 $R = \omega L = 1/\omega C = 76$  Ом.

Требуется определить показания ваттметров  $W_1$  и  $W_2$  и проверить баланс активных мощностей.

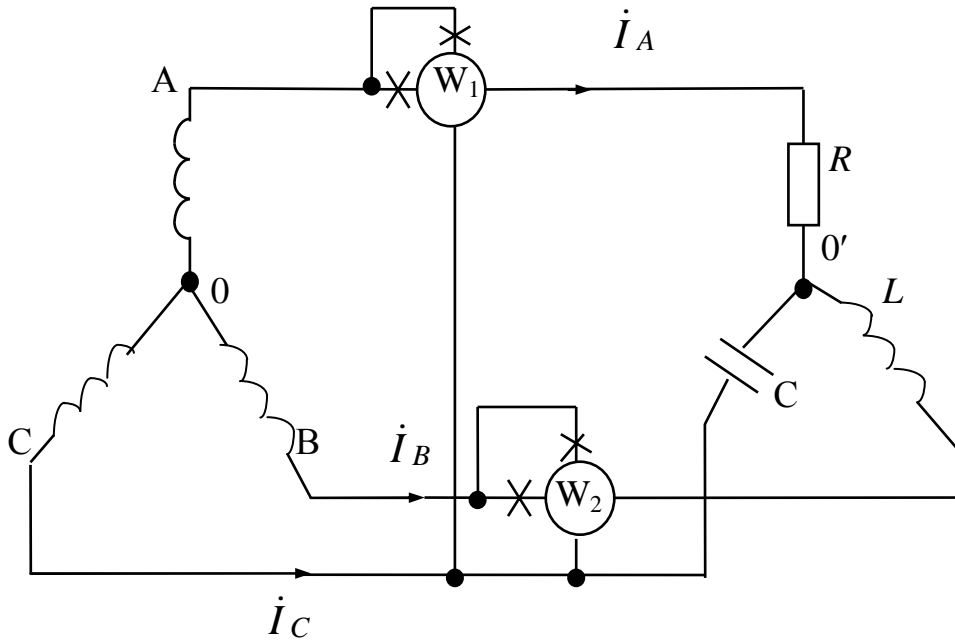


Рис. 82

В данном примере для сокращения записей обозначим  $1/R = y$ . Тогда

$$Y_A = 1/R = y,$$

$$Y_B = 1/j\omega L = -j/\omega L = -j/R = -jy,$$

$$Y_C = (1/j\omega C)^{-1} = j\omega C = jy.$$

По методу двух узлов

$$\begin{aligned} \dot{U}_{0'0} &= E_\phi \frac{Y_A + e^{-j120^\circ} Y_B + e^{j120^\circ} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = E_\phi \frac{1 + e^{-j210^\circ} + e^{j210^\circ}}{1 - j + j} = \\ &= E_\phi (1 - 0,866 + j0,5 - j0,5 - 0,866) = 220(-0,732) = -160 \text{ В.} \end{aligned}$$

Напряжение на фазе А нагрузки

$$\dot{U}_{A0'} = \dot{E}_A - \dot{U}_{0'0} = 220 - (-160) = 380 \text{ В.}$$

Ток фазы А

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{A0'}}{R} = \frac{380}{76} = 5 \text{ А (совпадает по фазе с } \dot{U}_{A0'}, \text{ т.е. имеет}$$

нулевую начальную фазу).

Напряжение на фазе В нагрузки

$$\begin{aligned} \dot{U}_{B0'} &= \dot{E}_B - \dot{U}_{0'0} = 220e^{-j120^\circ} - (-160) = \\ &= -110 - j191 + 160 = 50 - j191 = 197e^{-j75^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Ток фазы В

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{B0'}}{j\omega L} = \frac{197e^{-j75^\circ}}{76e^{j90^\circ}} = 2,6e^{-j165^\circ}.$$

К ваттметру  $W_1$  приложено напряжение  $\dot{U}_{AC} = -\dot{U}_{CA}$ , т.е.  $\dot{U}_{AC} = 220\sqrt{3}e^{-j30^\circ}$  В (см. диаграмму на рис. 74), к ваттметру  $W_2$  — напряжение  $\dot{U}_{BC} = 220\sqrt{3}e^{-j30^\circ}$  В.

Показание первого ваттметра:

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos(\hat{U}_{AC} \dot{I}_A) = 220 \cdot \sqrt{3} \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ = 1650 \text{ Вт.}$$

Показание второго ваттметра:

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos(\hat{U}_{BC} \dot{I}_B) = 220 \cdot \sqrt{3} \cdot 2,6 \cdot \cos 75^\circ = 256 \text{ Вт.}$$

Суммарная активная мощность генератора:

$$P_1 + P_2 = 1650 + 256 = 1906 \text{ Вт.}$$

Активная мощность нагрузок:

$$\sum I^2 R = I_A^2 R = 5^2 \cdot 76 = 1900 \text{ Вт.}$$

С учетом погрешности вычислений баланс активных мощностей выполняется.

### Пример 26

Определить показания ваттметров в схеме предыдущего примера, если произошел обрыв фазы С приемника.

К линейному напряжению  $\dot{U}_{AB}$  в таком случае подключены последовательно  $R$  и  $L$ , следовательно,



$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AB}}{R + j\omega L} = \frac{380e^{j30^\circ}}{76 + j76} = \frac{380e^{j30^\circ}}{107,5e^{j45^\circ}} = 3,54e^{-j15^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{I}_B = -\dot{I}_A = 3,54 \cdot e^{-j15^\circ} \cdot e^{-j180^\circ} = 3,54e^{-j195^\circ} \text{ А.}$$

Показания ваттметров:

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos(\overset{\wedge}{\dot{U}_{AC} \dot{I}_A}) = 380 \cdot 3,54 \cos 15^\circ = 1299 \text{ Вт,}$$

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos(\overset{\wedge}{\dot{U}_{BC} \dot{I}_B}) = 380 \cdot 3,54 \cos 105^\circ = -348 \text{ Вт.}$$

Баланс активных мощностей:

$$P_1 + P_2 = 1299 - 348 = 951 \text{ Вт; } I_A^2 R = 3,54^2 \cdot 76 = 952 \text{ Вт.}$$

#### 4.4 Указатель последовательности чередования фаз

Определение последовательности чередования фаз в трехфазной симметричной системе э.д.с. (напряжений) можно осуществить с помощью простейшей схемы из двух ламп накаливания и конденсатора, показанной на рис. 83 (емкостное сопротивление конденсатора здесь должно быть равно активному сопротивлению лампы накаливания).

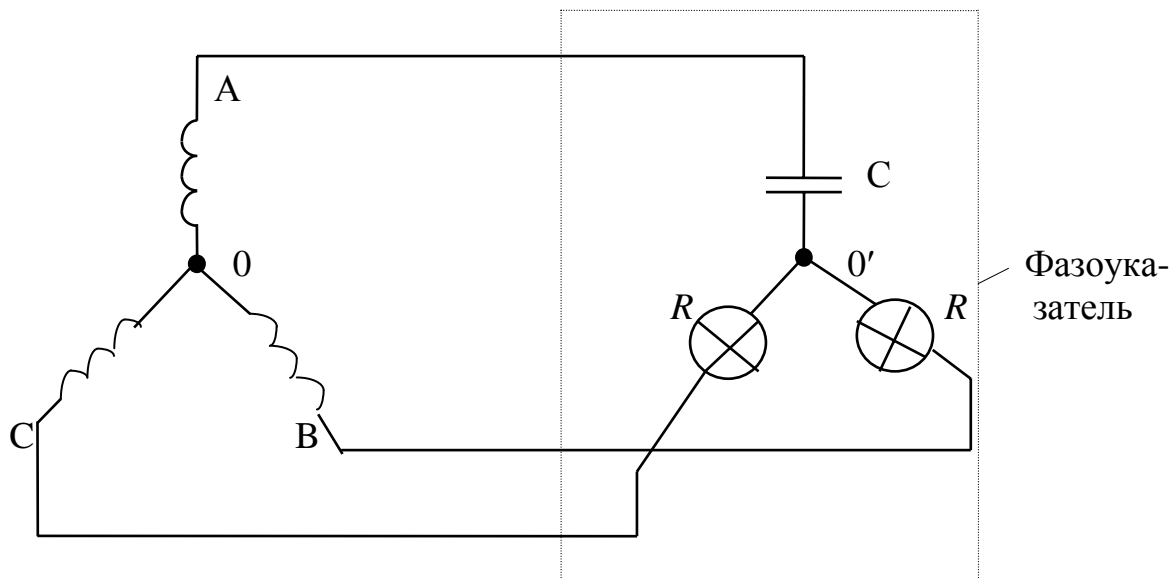


Рис. 83

Зададимся численными значениями величин:  $E_\phi = 100$  В;  $R = 1/\omega C = 10$  Ом и определим напряжения на фазах нагрузки.

Обозначим  $y = 1/R = Y_B = Y_C$ .

$$Y_A = (1/-j\omega C)^{-1} = j\omega C = jy.$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{0'0} &= E_\phi \frac{Y_A + e^{-j120^\circ} Y_B + e^{j120^\circ} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = E_\phi \frac{j + e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ}}{j + 2} = \\ &= E_\phi \frac{j - 0,5 - j0,866 + j0,866 - 0,5}{j + 2} = E_\phi \frac{j - 1}{j + 2} = \\ &= 100 \frac{\sqrt{2} e^{j135^\circ}}{\sqrt{5} e^{j26,6^\circ}} = 63,2 e^{j108,4^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Напряжения в фазах В и С нагрузки:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{B0'} &= \dot{E}_B - \dot{U}_{0'0} = 100 e^{j120^\circ} - 63,2 e^{j108,4^\circ} = \\ &= -50 - j86,6 + 19,9 - j60 = -30,1 - j146,6 = 149,7 e^{-j101,6^\circ} \text{ В;} \\ \dot{U}_{C0'} &= \dot{E}_C - \dot{U}_{0'0} = 100 e^{j120^\circ} - 63,2 e^{j108,4^\circ} = \\ &= -50 + j86,6 + 19,9 - j60 = -30,1 + j26,6 = 40,2 e^{j138,5^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Из полученных численных данных можно заключить, что лампа в фазе В будет гореть ярко, а в фазе С — тускло. Следовательно, если фазу трехфазной системы э.д.с., к которой подключен конденсатор, принять за фазу А, то фаза, к которой окажется подключенной ярко горящая лампа, есть фаза В, а фаза с тускло горящей лампой — фаза С.

#### 4.5 Получение кругового вращающегося магнитного поля

Рассмотрим вопрос, каким будет магнитное поле катушки, по которой протекает синусоидальный ток. Используем для пояснения рис. 84, на котором схематично показан разрез катушки.

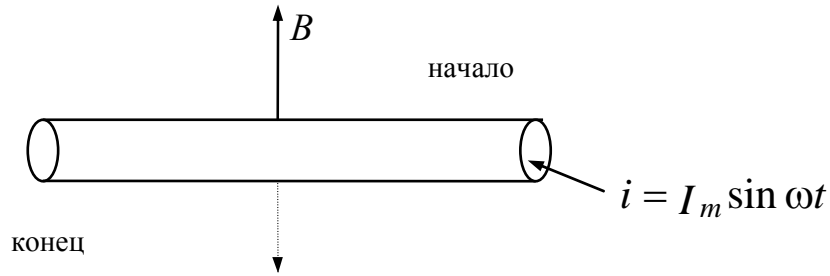


Рис. 84

Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции  $B$ . Направление  $B$  определяется направлением катушки и направлением тока в данный момент времени. Если ток входит в начало катушки (это направление тока будем считать положительным, ему соответствует интервал времени от 0 до  $\pi$ ), то вектор магнитной индукции направлен вверх. В следующий полупериод, когда ток отрицателен, вектор  $B$  направлен вниз. Таким образом, геометрическим местом концов вектора  $B$  является ось катушки. То есть синусоидальный ток создает пульсирующее магнитное поле, вектор магнитной индукции которого изменяется (пульсирует) вдоль оси катушки.

Далее предположим, что три одинаковые катушки расположены так, что их оси смещены на  $120^\circ$  по отношению друг к другу, как показано на рис. 85, а. Присоединим катушки к симметричной трехфазной системе э.д.с. Пусть токи входят в начала катушек (начала обозначены буквой  $H$ , а концы —  $K$ ) и изменяются следующим образом:

$$i_1 = I_m \sin \omega t;$$

$$i_2 = I_m \sin(\omega t - 120^\circ); \quad i_3 = I_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

Графики токов изображены на рис. 85, б. Каждый из токов создает пульсирующее поле, направленное вдоль оси своей катушки.

Положительное направление оси первой катушки обозначим +1, второй +2, третьей +3, магнитную индукцию первой катушки обозначим  $B_1$ , второй —  $B_2$ , третьей —  $B_3$ .

На рис. 86 изобразим мгновенные значения  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  и результирующую индукцию  $B_p$  для моментов времени  $\omega t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ .

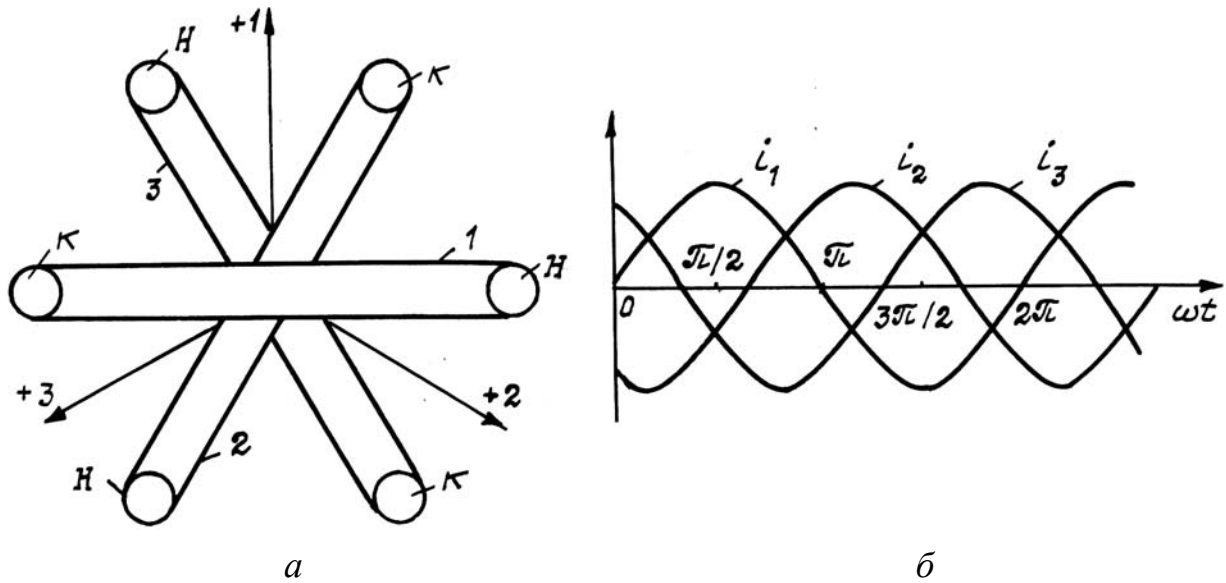


Рис. 85

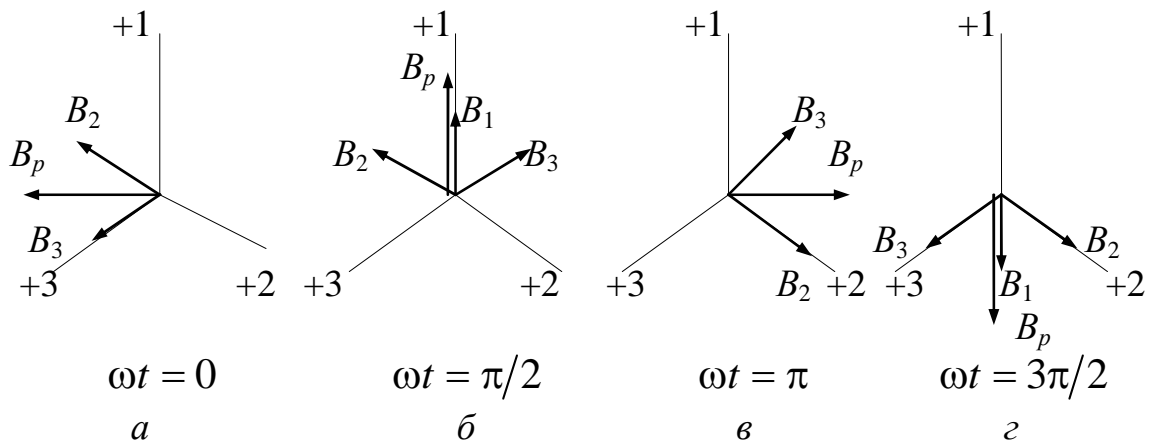


Рис. 86

С увеличением времени вектор результирующей магнитной индукции, оставаясь по величине равным  $1,5 B_m$ , вращается с угловой скоростью  $\omega$  по направлению от начала первой катушки с током  $I_m \sin \omega t$  к началу второй катушки с током  $I_m \sin(\omega t - 120^\circ)$ .

Можно сказать, что вектор результирующей магнитной индукции вращается в сторону катушки с отстающим током.

Если ток  $I_m \sin(\omega t - 120^\circ)$  пропускать по третьей, а ток  $I_m \sin(\omega t + 120^\circ)$  — по второй катушке, то направление вращения поля изменится на обратное.

Вращающееся магнитное поле используется в электрических двигателях переменного тока.

Наиболее распространенным в промышленности типом двигателя переменного тока является трехфазный асинхронный дви-

гатель. В нем имеется неподвижная часть — статор, в пазах которого помещены три катушки, создающие круговое вращающееся магнитное поле, и подвижная часть — ротор, в пазах которого находятся три замкнутых на себя или на внешнее сопротивление катушки; схематично устройство асинхронного двигателя в разрезе дано на рис. 87.

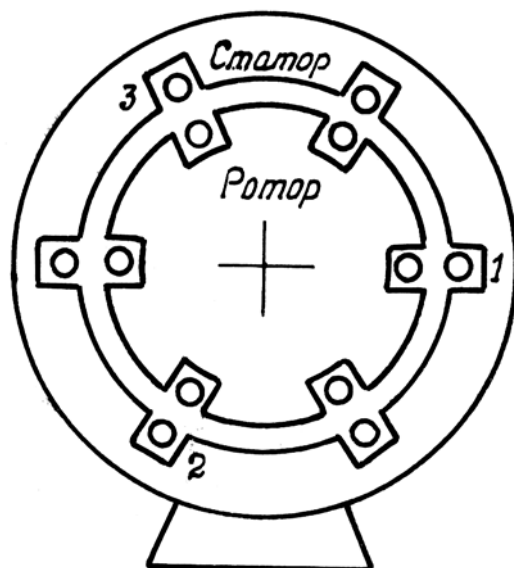


Рис. 87

Допустим, что сначала ротор неподвижен. При этом вращающееся магнитное поле, созданное обмотками статора, пересекает провода катушек неподвижного ротора с угловой частотой  $\omega$  и наводит в них э.д.с. Э.д.с. вызовут токи в катушках ротора. По закону Ленца, эти токи стремятся своим магнитным полем ослабить вызвавшее их магнитное поле.

Механическое взаимодействие токов ротора с вращающимся магнитным полем приведет к тому, что ротор начнет вращаться в ту же сторону, в какую вращается магнитное поле.

В установившемся режиме частота вращения ротора  $\omega_p$  составляет  $(0,98...0,95) \omega$ . Двигатель называют асинхронным потому, что ротор его вращается не синхронно с вращающимся полем;  $\omega_p$  не может равняться угловой частоте вращающегося поля. Это станет понятно, если учесть, что при  $\omega_p = \omega$  вращающееся поле не пересекало бы провода катушек ротора, в них отсутствовал бы ток и ротор не испытывал бы вращающего момента.

## 5 ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ

### 5.1 Разложение в ряд Фурье. Частотный спектр.

Несинусоидальные токи в линейных электрических цепях возникают от периодических э.д.с., изменяющихся во времени по закону, отличающемуся от функции синуса. Например, э.д.с. могут иметь форму треугольника, прямоугольника, трапеции и т.д. Кроме того, может быть искажена форма исходно синусоидальной э.д.с. за счет подключения к сети переменного тока мощных нагрузок с нелинейными вольт-амперными характеристиками.

Из курса математики (Высшая математика, часть 3) известно, что любая периодическая функция  $f(\omega t)$  с периодом  $T$ , удовлетворяющая условиям Дирихле (а все периодические функции в электротехнике этим условиям удовлетворяют), может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (55)$$

здесь  $A_0$  — постоянная составляющая;

$a_k$  — амплитуда косинусной составляющей  $k$ -й гармоники;

$b_k$  — амплитуда синусной составляющей  $k$ -й гармоники.

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt; \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt; \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Так как

$$a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t = c_k \sin(k\omega t + \varphi_k),$$

где  $c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  и  $\varphi_k = \arctg \frac{a_k}{b_k}$ , то ряд Фурье (55) может быть

записан в другой форме:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega t + \varphi_k), \quad (57)$$

где  $c_k$  — амплитуда  $k$ -й гармоники ряда Фурье.

Гармоники, для которых  $k$  — число нечетное, называются нечетными гармониками, для которых  $k$  — число четное, — четными гармониками.

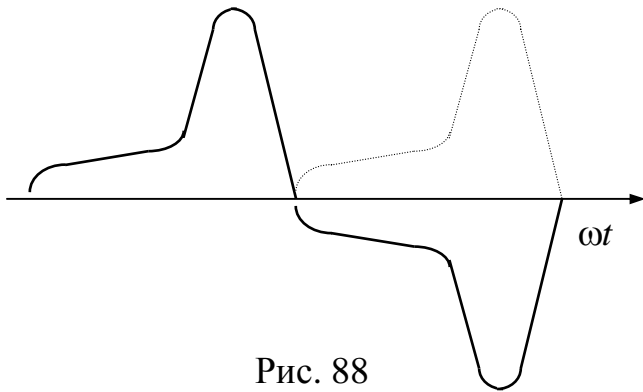


Рис. 88

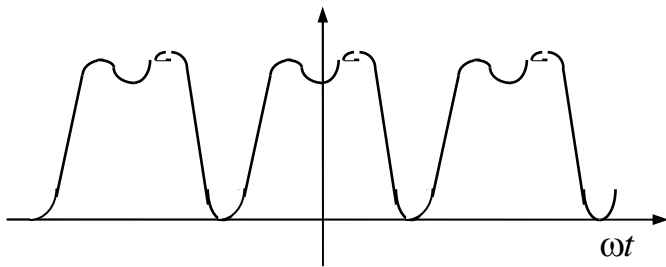


Рис. 89

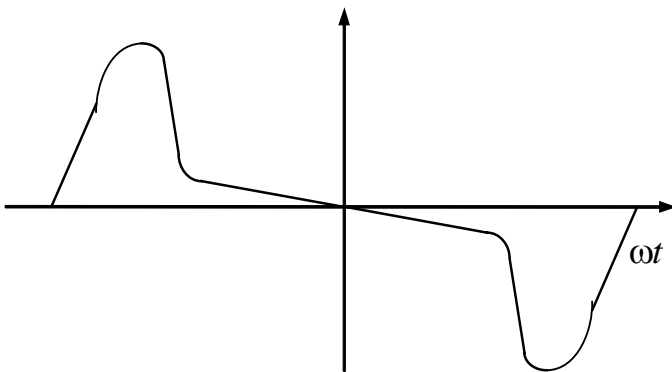


Рис. 90

На рис. 88–90 изображены три периодические кривые, обладающие некоторыми специфическими свойствами.

Кривая на рис. 88 удовлетворяет условию  $-f(\omega t + \pi) = f(\omega t)$ .

Кривые, для которых выполняется это свойство, называют симметричными относительно оси абсцисс. В разложении таких кривых в ряд Фурье отсутствуют постоянная составляющая и четные гармоники.

Кривая, подобная кривой на рис. 89, обладает симметрией относительно оси ординат. Для нее выполняется условие  $f(-\omega t) = f(\omega t)$ .

В разложении таких кривых в ряд Фурье отсутствуют синусные составляющие.

Кривые по типу кривой на рис. 90 обладают свойством

$$-f(-\omega t) = f(\omega t).$$

Они называются кривыми, симметричными относительно начала координат. Разложение их в ряд Фурье содержит только синусные составляющие.

Для некоторых кривых геометрически правильной формы разложение в ряд Фурье дается в справочной и учебной литературе по математике и электротехнике.

Совокупность гармонических составляющих несинусоидальной периодической функции называется ее дискретным частотным спектром. Спектр можно характеризовать зависимостью  $C_k$  (спектр амплитуд) и  $\varphi_k$  (спектр фаз) от частоты  $k\omega$ .

Для пояснения рассмотрим приведенную на рис. 91, а функцию  $f(t)$  в виде ряда прямоугольных импульсов продолжительность  $\tau$  с высотой  $A$ , следующих один за другим через интервалы времени  $T = 2\tau$ .

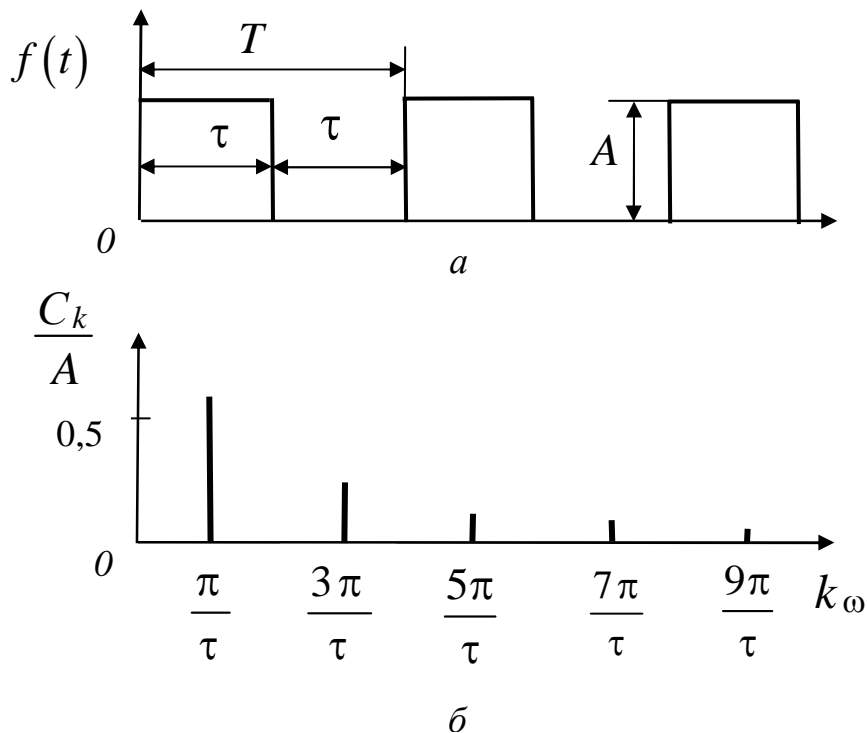


Рис. 91



Разложение такой функции в ряд Фурье приводится в справочной литературе и имеет вид

$$f(\omega t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \cdot \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right),$$

где  $\omega = \frac{\pi}{\tau}$ .

Дискретный спектр амплитуд рассматриваемых импульсов приведен на рис. 91, б.

### Пример 27

В силовой электронике при получении постоянного напряжения из переменного (т.е. при выпрямлении) для оценки качества постоянного напряжения используется показатель, называемый коэффициентом пульсаций  $k_{\Pi}$ . Коэффициент пульсаций равен отношению амплитуды низшей гармоники переменной составляющей выпрямленного напряжения к его среднему значению. Определим коэффициент пульсаций для выпрямленного напряжения  $u_d$ , диаграмма которого приведена на рис. 92.

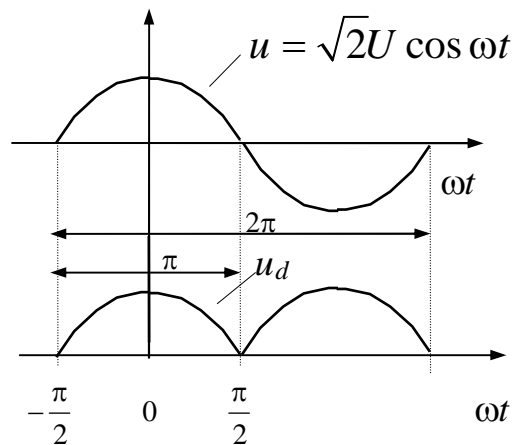


Рис. 92

Для использования симметрии кривой  $u_d$  примем начало отсчета времени, как показано на рис. 92. Тогда переменное напряжение можно записать:

$$u = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}U \cos \omega t.$$

Период  $T$  кривой выпрямленного напряжения  $u_d$  в два раза меньше периода  $T_0$  переменного напряжения  $u$ . То есть в угловой мере период кривой  $u_d$  равен  $\pi$ .

Обозначим среднее значение выпрямленного напряжения  $U_d$  и вычислим его по формуле (56) как постоянную составляющую разложения в ряд Фурье:

$$U_d = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2}U \cos \omega t d(\omega t) = \frac{\sqrt{2}U}{\pi} (\sin \omega t) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} U.$$

Так как частота кривой  $u_d$  в два раза больше частоты напряжения  $u$ , то низшей гармоникой выпрямленного напряжения будет вторая (относительно гармоники переменного напряжения). Обозначим амплитуду второй гармоники выпрямленного напряжения  $U_{2m}$  и вычислим ее с учетом того, что при симметрии кривой относительно оси ординат синусные составляющие разложения в ряд Фурье отсутствуют:

$$U_{2m} = c_2 = a_2 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos 2\omega t dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2}U \cos \omega t \cdot \cos 2\omega t d(\omega t).$$

С использованием известного из тригонометрии соотношения

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

получим:

$$\begin{aligned} U_{2m} &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} U \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (\cos \omega t + \cos 3\omega t) d(\omega t) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} U (\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3}) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} U \left( 2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} U. \end{aligned}$$

Коэффициент пульсаций для рассматриваемой формы кривой выпрямленного напряжения составит величину

$$k_{\pi} = \frac{U_{2m}}{U_d} = \frac{4\sqrt{2}U}{3\pi} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}U} = \frac{2}{3} = 0,667.$$

## 5.2 Расчет линейных цепей с несинусоидальными токами

Перед проведением расчетов цепей с несинусоидальной э.д.с. последняя должна быть представлена рядом Фурье. Если несинусоидальная э.д.с. задана аналитически, то разложение осуществляется по формулам (56), если графически — то графоаналитическим методом [1], который здесь не рассматривается.

Согласно принципу наложения, мгновенное значение тока любой ветви схемы равно сумме мгновенных значений токов отдельных гармоник. Аналогично мгновенное значение напряжения на любом участке схемы равно сумме мгновенных значений напряжений отдельных гармоник на этом участке. Расчет производится для каждой из гармоник в отдельности при помощи приемов, изложенных в разделе 3.

Сначала производится расчет токов и напряжений от действия постоянной составляющей э.д.с. После этого производится расчет токов и напряжений от действия первой гармоники э.д.с., затем от второй гармоники э.д.с., от третьей и т.д.

При расчете токов и напряжений от постоянной составляющей э.д.с. необходимо иметь в виду, что падение напряжения на индуктивности  $L$  от постоянного тока равно нулю, а также следует иметь в виду, что постоянный ток через емкость  $C$  не протекает.

При расчете необходимо учитывать, что индуктивное сопротивление растет прямо пропорционально частоте, поэтому индуктивное сопротивление для  $k$ -ой гармоники  $X_{Lk}$  в  $k$  раз больше, чем индуктивное сопротивление для первой гармоники  $X_{L_1}$ :

$$X_{L_1} = \omega L; \quad X_{Lk} = k\omega L = k X_{L_1}. \quad (58)$$

Емкостное сопротивление уменьшается с ростом частоты, поэтому емкостное сопротивление для  $k$ -ой гармоники  $X_{Ck}$  в  $k$  раз меньше, чем емкостное сопротивление  $X_{C_1}$  для первой гармоники:

$$X_{C_1} = \frac{1}{\omega C}; \quad X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{X_{C_1}}{k}. \quad (59)$$

Для каждой из гармоник может быть построена своя векторная диаграмма. Но на одной векторной диаграмме откладывать токи и напряжения различных частот, а равно и складывать векторно токи и напряжения различных гармоник недопустимо, поскольку угловые скорости вращения векторов различных частот неодинаковы.

Рассмотрим далее вопрос определения *действующих значений несинусоидальных токов и напряжений*.

По определению (см. подраздел 3.1), квадрат действующего значения тока  $I$  выражается через мгновенное значение тока  $i$  следующим образом:

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt.$$

Если ток

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots,$$

то

$$i^2 = I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \varphi_k) + \sum_{\substack{p=0 \\ g=0, p \neq g}}^{\infty} I_{pm} I_{gm} \sin(p\omega t + \varphi_p) \sin(g\omega t + \varphi_g).$$

Но

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T \sin^2(k\omega t + \varphi_k) dt &= \frac{T}{2}, \\ \int_0^T \sin(p\omega t + \varphi_p) \sin(g\omega t + \varphi_g) dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad p \neq g$$

Поэтому

$$I^2 = I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \frac{I_{3m}^2}{2} + \dots,$$

или

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \dots}$$

Так как амплитуда  $k$ -ой гармоники тока  $I_{km}$  в  $\sqrt{2}$  раз больше действующего значения  $k$ -ой гармоники  $I_k$ , то

$$\frac{I_{km}^2}{2} = \frac{I_{km}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{km}}{\sqrt{2}} = I_k^2$$

и

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots} \quad (60)$$

Следовательно, действующее значение несинусоидального тока равно квадратному корню из суммы квадратов постоянной составляющей тока и действующих значений отдельных гармоник. От сдвигов фаз  $\varphi_k$  действующее значение не зависит.

Аналогичным образом определяется действующее значение несинусоидального напряжения.

Под **активной мощностью**  $P$  несинусоидального тока понимается сумма активных мощностей отдельных гармоник:

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots$$

**Полная мощность**  $S$  равна произведению действующего значения несинусоидального напряжения на действующее значение несинусоидального тока:

$$S = UI,$$

где  $I$  определяется по (60),  $U$  — по аналогичной формуле.

В ряде случаев, например при изучении некоторых простейших свойств нелинейных электрических цепей, несинусоидальные токи и напряжения заменяют **эквивалентными синусоидальными**. Замена производится таким образом, что действующее значение синусоидального тока принимается равным действующему значению заменяемого несинусоидального тока, а действующее значение синусоидального напряжения берется равным действующему значению несинусоидального напряжения.

Угол сдвига фаз  $\varphi_0$  между эквивалентными синусоидами напряжения и тока берется таким, чтобы активная мощность эквивалентного тока была равна активной мощности несинусоидального тока:

$$\cos \varphi_0 = \frac{P}{UI}.$$

Для того чтобы характеризовать форму несинусоидальной функции, используется ряд показателей. Наиболее распространены следующие: коэффициент формы (см. подраздел 3.1), коэффициент амплитуды, коэффициент искажения, коэффициент гармоник. Дадим их определения на примере токов.

**Коэффициентом амплитуды** называется отношение максимального значения функции к действующему значению:

$$k_a = \frac{i_{\max}}{I}.$$

К примеру, для синусоидальных функций  $k_a = \sqrt{2}$ .

**Коэффициентом искажения** называется отношение действующего значения основной гармоники функции к действующему значению всей функции:

$$k_{\text{и}} = \frac{I_1}{I}.$$

Для синусоидальных функций  $I_1 = I$ , следовательно,  $k_{\text{и}} = 1$ .

**Коэффициентом гармоник** называется отношение действующего значения высших гармоник к действующему значению основной гармоники:

$$k_{\text{г}} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}}{I_1}.$$

Для синусоиды  $k_{\text{г}} = 0$ .

### 5.3 Резонансные явления при несинусоидальных токах

Как известно из подраздела 3.6, резонансным режимом работы электрической цепи, содержащей одну или несколько индуктивностей и одну или несколько емкостей, называют такой режим работы ее, при котором ток на входе этой цепи совпадает по фазе с действующей на входе э.д.с.

Если воздействующая э.д.с. несинусоидальна, то в электрической цепи могут возникать резонансные режимы не только на первой гармонике, но и на высших гармониках.

Условимся под резонансом на  $k$ -й гармонике понимать такой режим работы, при котором ток  $k$ -й гармоники на входе цепи по фазе совпадает с  $k$ -й гармоникой действующей на входе э.д.с. (но при этом токи остальных гармоник не совпадают по фазе с вызвавшими их э.д.с.).

При возникновении резонансного и близкого к нему режима на какой-либо высшей гармонике токи и (или) напряжения этой гармоники могут оказаться большими, чем токи и напряжения первой гармоники на тех же участках цепи, несмотря на то, что амплитуда соответствующей высшей гармоники э.д.с. на входе схемы может быть в несколько раз меньше амплитуды первой гармоники э.д.с.

Исследование резонансных явлений при несинусоидальных токах часто производят, полагая активные сопротивления дросселей нулевыми (в контурах, содержащих только конденсаторы и дроссели, но не содержащих резисторов). В таком случае входное сопротивление контура при резонансе токов равно бесконечности, а при резонансе напряжений — нулю.

### Пример 28

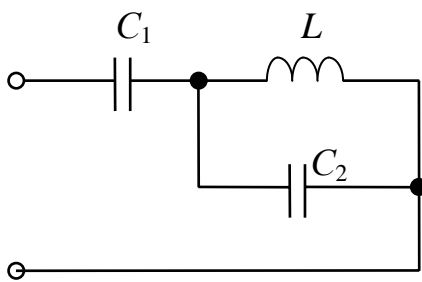


Рис. 93

В схеме на рис. 93 задана индуктивность  $L$ . Полагая активное сопротивление дросселя нулевым, найти, при каких значениях емкостей  $C_1$  и  $C_2$  входное сопротивление схемы для первой гармоники равняется нулю, а для девятой гармоники равно бесконечности.

В соответствии с условиями задания составим систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{-j}{\omega C_1} + \frac{j\omega L \left( \frac{-j}{\omega C_2} \right)}{j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C_2} \right)} = 0 \\ Z_9 &= \frac{-j}{9\omega C_1} + \frac{j9\omega L \left( \frac{-j}{9\omega C_2} \right)}{j \left( 9\omega L - \frac{1}{9\omega C_2} \right)} = \infty \end{aligned} \right\}.$$

Решим полученную систему уравнений.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega C_1} + \frac{L\omega}{\omega^2 LC_2 - 1} &= 0 \\ \frac{1}{9\omega C_1} + \frac{9L\omega}{81\omega^2 LC_2 - 1} &= \infty \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 LC_2 + \omega^2 LC_1 &= 1 \\ (81\omega^2 LC_2 - 1)9\omega C_1 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Последнее уравнение получено из уравнения (а) после приведения его к общему знаменателю и приравнивания последнего к нулю.

$$81\omega^2 LC_2 = 1; \quad C_2 = \frac{1}{81\omega^2 L};$$

$$C_1 = \frac{80}{81\omega^2 L}.$$

### Пример 29

Для схемы на рис. 94 задано:  $R = \omega L = 3$  Ом;  $1/\omega C = 27$  Ом;  
 $e(t) = 100 + 80\sin(\omega t + 30^\circ) + 60\sin(3\omega t + 20^\circ) + 50\sin(5\omega t + 45^\circ)$  В.



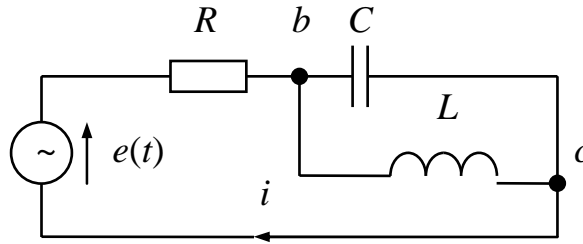


Рис. 94

Требуется определить эффективные значения тока  $i$  и э.д.с.  $e$ .  
 Рассчитаем комплексное сопротивление участка  $bc$  для первой, третьей и пятой гармоник:

$$Z_{bc1} = \frac{3j(-27j)}{-27j + 3j} = \frac{81}{-24j} = j3,38 \text{ Ом};$$

$$Z_{bc3} = \frac{9j(-9j)}{-9j + 9j} = \infty \text{ (на третьей гармонике резонанс токов);}$$

$$Z_{bc5} = \frac{15j(-5,4j)}{15j - 5,4j} = \frac{81}{j9,6} = -j8,44 \text{ Ом.}$$

Полное сопротивление цепи для соответствующих гармоник:

$$Z_1 = R + Z_{bc1} = 3 + j3,38 = 4,52e^{j48,41^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_3 = R + Z_{bc3} = \infty;$$

$$Z_5 = R + Z_{bc5} = 3 - j8,44 = 8,96e^{-j70,43^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_0 = R = 3 \text{ Ом.}$$

Составляющие тока в неразветвленной части схемы:

$$I_0 = \frac{100}{3} = 33,3 \text{ А};$$

$$i_1 = \frac{80e^{j30^\circ}}{4,52e^{j48,41^\circ}} = 17,7e^{-j18,41^\circ} \text{ А};$$

$$i_3 = 0;$$

$$i_5 = \frac{50e^{j45^\circ}}{8,96e^{-j70,43^\circ}} = 5,58e^{j115,43^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение тока в неразветвленной части схемы:

$$i(t) = 33,3 + 17,7 \sin(\omega t - 18,41^\circ) + 5,58 \sin(5\omega t + 115,43^\circ) \text{ А.}$$

Искомые эффективные значения величин:

$$I = \sqrt{33,3^2 + \frac{17,7^2}{2} + \frac{5,58^2}{2}} = 35,8 \text{ А;}$$

$$E = \sqrt{100^2 + \frac{80^2}{2} + \frac{60^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 127,5 \text{ В.}$$

#### 5.4 Особенности работы трехфазных систем, вызываемые гармониками, кратными трем

Э.д.с. генератора могут быть искажены, то есть могут быть несинусоидальными. Будем считать, что каждая из э.д.с. фаз повторяет по форме остальные со сдвигом на  $1/3$  периода.

При разложении в ряд Фурье  $k$ -я гармоника фазы А равна:

$$e_{kA} = E_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Э.д.с. фазы В отстает от э.д.с. фазы А на  $T/3$ , поэтому

$$e_{kB} = E_{km} \sin \left[ k\omega \left( t - \frac{T}{3} \right) + \varphi_k \right] = E_{km} \sin(k\omega t - 120^\circ \cdot k + \varphi_k).$$

Последняя форма записи получена с учетом того, что

$$k\omega \frac{T}{3} = k \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{3} = k \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \cdot k.$$

Э.д.с. фазы С опережает э.д.с. фазы А на  $T/3$ , следовательно,

$$e_{kC} = E_{km} \sin \left[ k\omega \left( t + \frac{T}{3} \right) + \varphi_k \right] = E_{km} \sin(k\omega t + 120^\circ \cdot k + \varphi_k).$$

Таким образом, третьи (и кратные трем) гармоники во всех трех фазах совпадают по фазе.

Далее обсудим особенности работы трехфазных систем, вызываемые гармониками, кратными трем.

1. Если обмотки генератора соединены в треугольник, как показано на рис. 95, то по ним будут протекать токи гармоник, кратных трем, даже при отсутствии внешней нагрузки.

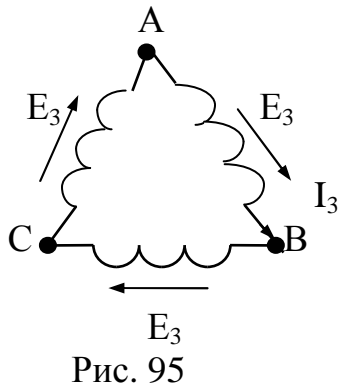
Алгебраическая сумма третьих гармоник э.д.с. в треугольнике равна  $3E_3$ . Обозначим сопротивление обмотки каждой фазы для третьей гармоники через  $Z_3$ , тогда ток третьей гармоники в треугольнике равен:

$$\dot{i}_3 = \frac{3\dot{E}_3}{3Z_3} = \frac{\dot{E}_3}{Z_3}.$$

Аналогично для шестой, девятой и т.д. гармоник.

Действующее значение тока, протекающего по замкнутому треугольнику в схеме на рис. 95, равно:

$$I = \sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \dots}$$

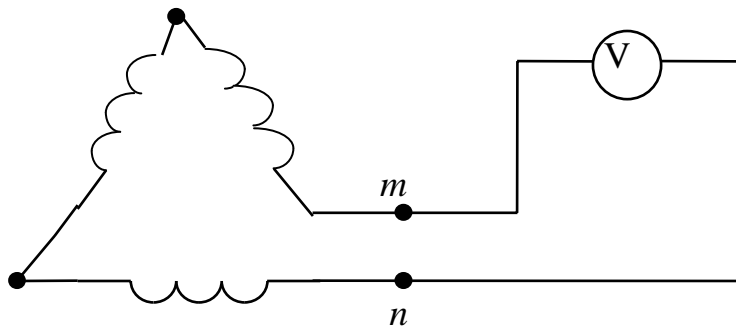


2. При соединении обмоток генератора в открытый треугольник по схеме на рис. 96 при наличии гармоник, кратных трем, на зажимах  $m$  и  $n$  будет напряжение

$$U_{mn} = 3E_{3m} \sin(3\omega t + \varphi_3) + 3E_{6m} \sin(6\omega t + \varphi_6) + \dots$$

Показание вольтметра будет равно:

$$U = 3\sqrt{E_3^2 + E_6^2 + \dots}$$



3. В линейном напряжении вне зависимости от того, звездой или треугольником соединены обмотки генератора, кратные трем гармоники отсутствуют.

Докажем это свойство для случая холостого хода генератора, т.е. когда внешняя нагрузка отсутствует. Но оно остается в силе и при наличии нагрузки.

Рассмотрим сначала схему соединения треугольником (см. рис. 95). Обозначим  $\dot{\phi}_{A3}$  — потенциал точки А и  $\dot{\phi}_{B3}$  — потенциал точки В по третьей гармонике, получим

$$\dot{\phi}_{A3} = \dot{\phi}_{B3} - \dot{E}_3 + \dot{I}_3 Z_3.$$

Но  $\dot{E}_3 = \dot{I}_3 Z_3$ , следовательно,  $\dot{\phi}_{A3} = \dot{\phi}_{B3}$ .

При соединении в звезду (рис. 97) линейное напряжение

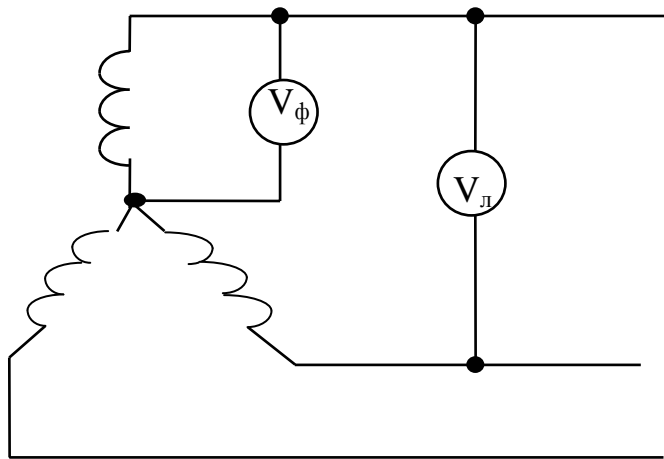


Рис. 97

третьей гармоники равно разности соответствующих фазных напряжений. Так как третьи гармоники в фазных напряжениях совпадают по фазе, то при составлении этой разности они вычитаются.

В фазном напряжении могут присутствовать все гармоники. Поэтому действующее значение фазного напряжения

$$U_{\phi} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}$$

В линейном напряжении (см. рис. 95) отсутствуют гармоники, кратные трем, поэтому

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + \dots}$$

Отношение  $U_{\text{л}}/U_{\phi} < \sqrt{3}$ , если есть гармоники, кратные трем.

4. При соединении генератора и равномерной нагрузки в звезду и отсутствии нулевого провода токи кратных трех гармоник по линейным проводам не протекают. Поэтому между нулевыми точками приемника  $O'$  и генератора  $O$  будет действовать напряжение

$$u_{O'O} = E_{3m} \sin(3\omega t + \varphi_3) + E_{6m} \sin(6\omega t + \varphi_6) + \dots$$

Действующее значение его

$$U_{O'O} = \sqrt{\frac{E_{3m}^2}{2} + \frac{E_{6m}^2}{2} + \dots}$$

5. Если в схеме звезда-звезда с нулевым проводом при равномерной нагрузке фаз сопротивление нагрузки для третьей гармоники обозначить  $Z_{H3}$ , а сопротивление нулевого провода для третьей гармоники обозначим  $Z_{O3}$ , то по нулевому проводу будет протекать ток третьей гармоники, равный:

$$\dot{I}_{O3} = \frac{\dot{E}_3}{Z_{O3} + \frac{Z_{H3}}{3}}$$

По каждому из линейных проводов будет протекать ток третьей гармоники  $\dot{I}_{O3}/3$ .

Аналогично находятся токи и от других гармоник, кратных трем.

## 6 ТЕОРИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА. ФИЛЬТРЫ

### 6.1 Основы теории пассивного четырехполюсника

Генератор и приемник обычно соединяются через промежуточную цепь, в общем случае сколь угодно сложную. Каждая из таких цепей имеет два входных зажима (к ним подсоединяется генератор) и два выходных (к ним подсоединяется нагрузка). Отсюда и название — четырехполюсник.

**Основными уравнениями** четырехполюсника называются линейные зависимости, связывающие его входные и выходные величины. Исходя из этих уравнений, можно любой сложный четырехполюсник заменить одной из простых эквивалентных схем, что существенно упрощает расчет и исследования.

Схема на рис. 98 иллюстрирует соединение генератора с э.д.с.  $\dot{E}_1$  и нагрузки  $Z_2$  через пассивный четырехполюсник.

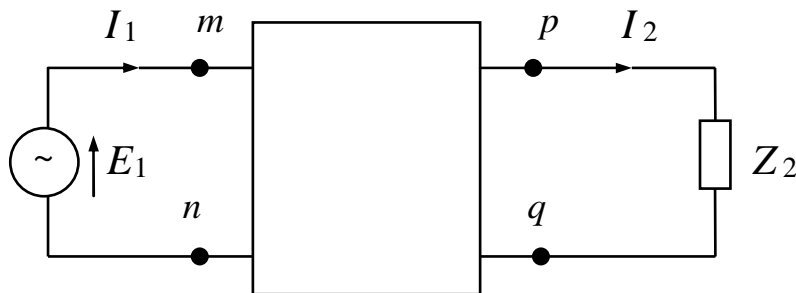


Рис. 98

Заменим нагрузку  $Z_2$  на э.д.с.  $\dot{E}_2$ , направленную встречно току  $\dot{I}_2$  и численно равную напряжению  $\dot{U}_2$  на нагрузке  $Z_2$ , как показано на рис. 99. Такая замена возможна согласно теореме компенсации (см. подраздел 2.9).

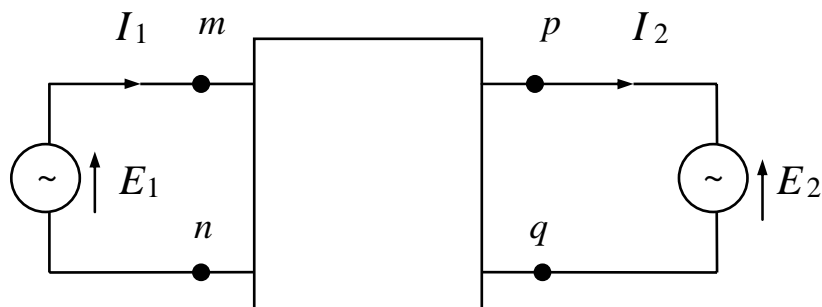


Рис. 99

Запишем выражения для токов через э.д.с. и входные и взаимные проводимости ветвей (т.е. используем метод наложения):

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{E}_1 Y_{11} - \dot{E}_2 Y_{12}; \\ \dot{I}_2 &= \dot{E}_1 Y_{12} - \dot{E}_2 Y_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{E}_1 Y_{11} - \dot{E}_2 Y_{12}; \\ \dot{I}_2 &= \dot{E}_1 Y_{12} - \dot{E}_2 Y_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

— • • • —

**Примечание.** Под входными проводимостями понимаются проводимости, имеющие в формулах (61), (62) одинаковые индексы, а под взаимными — проводимости, имеющие разные индексы.

Ветвь цепи с источником  $E_1$  (см. рис. 97) будем называть первой, а ветвь с источником  $E_2$  — второй.

Через входную проводимость (например  $Y_{11}$ ) можно определить ток в ветви (первой) с источником э.д.с. ( $E_1$ ), если остальные э.д.с. в цепи равны нулю ( $E_2=0$ ).

Через взаимную проводимость ( $Y_{12}$ ) можно определить ток в ветви (например, второй) без источника э.д.с. (при  $E_2=0$ ) от источника э.д.с. ( $E_1$ ), расположенного в другой ветви (первой).

— • • • —

Из (62) получим:

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 \frac{Y_{22}}{Y_{12}} + \dot{I}_2 \frac{1}{Y_{12}}. \quad (63)$$

Подставим (63) в (61):

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_2 \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}{Y_{12}} + \dot{I}_2 \frac{Y_{11}}{Y_{12}}. \quad (64)$$

Введем обозначения:

$$A = \frac{Y_{22}}{Y_{12}};$$

$$C = \frac{Y_{11}Y_{12} - Y_{12}^2}{Y_{12}};$$

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{Y_{12}}; \\ D &= \frac{Y_{11}}{Y_{12}}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  называются постоянными четырехполюсника.  $A$  и  $D$  — безразмерные,  $B$  имеет размерность сопротивления,  $C$  — проводимости.

Заменяя в (63) и (64)  $E_1$  на  $U_1$  и  $E_2$  на  $U_2$ , получим основные уравнения четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Найдем определитель этой системы:

$$AD - BC = \frac{Y_{11}Y_{22}}{Y_{12}^2} - \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}{Y_{12}^2} = 1.$$

Поменяем местами источник и приемник, как показано на рис. 100.

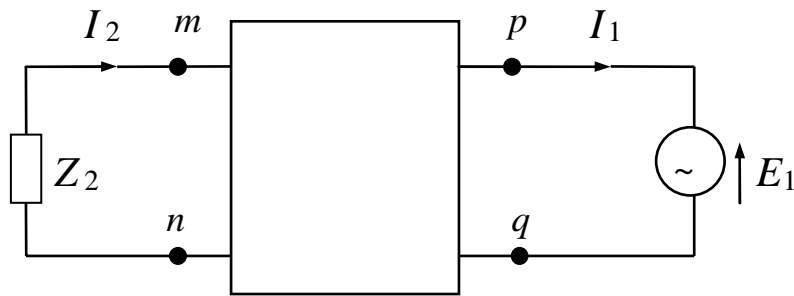


Рис. 100

Если здесь также заменить  $Z_2$  на э.д.с.  $E_2$ , направленную встречно  $I_2$ , то получим:

$$\dot{I}_2 = -\dot{E}_2 Y_{11} + \dot{E}_1 Y_{12}; \quad (67)$$

$$\dot{I}_1 = -\dot{E}_2 Y_{12} + \dot{E}_1 Y_{22}. \quad (68)$$

Из (67) следует

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 \frac{Y_{11}}{Y_{12}} + \dot{I}_2 \frac{1}{Y_{12}}. \quad (69)$$



Подставим (69) в (68):

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_2 \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}{Y_{12}} + \dot{I}_2 \frac{Y_{22}}{Y_{12}}. \quad (70)$$

Заменив в (69) и (70)  $\dot{E}_1$  на  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{E}_2$  на  $\dot{U}_2$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Сравнивая системы уравнений (66) и (71) для прямого (см. рис. 80) и обратного (см. рис. 92) включений четырехполюсника, можно видеть, что поменялись местами постоянные  $A$  и  $D$ .

Четырехполюсник называют *симметричным*, если при перемене местами источника и нагрузки токи в источнике и нагрузке не изменяются. В симметричном четырехполюснике  $A=D$ .

Комплексные коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  можно определить по формулам (65), если схема внутренних соединений четырехполюсника и ее параметры известны, либо используя входные сопротивления четырехполюсника, полученные опытным или расчетным путем.

Определим комплексное входное сопротивление четырехполюсника при трех различных режимах его работы.

1. Комплекс входного сопротивления со стороны зажимов  $mn$  при разомкнутой ветви  $pq$  (холостой ход ветви  $pq$ ):

$$Z_{1x} = z_{1x} e^{j\varphi_x}. \quad (72)$$

2. Комплекс входного сопротивления со стороны зажимов  $mn$  при коротком замыкании зажимов  $pq$  (короткое замыкание ветви  $pq$ ):

$$Z_{1к} = z_{1к} e^{j\varphi_{1к}}. \quad (73)$$

3. Комплекс входного сопротивления со стороны зажимов  $pq$  при коротком замыкании зажимов  $mn$ :

$$Z_{2к} = z_{2к} e^{j\varphi_{2к}}. \quad (74)$$

Из системы (66) при холостом ходе ветви  $pq$ , когда  $i_2 = 0$ , получим

$$\dot{U}_{1x} = A\dot{U}_{2x}; \quad \dot{I}_{1x} = C\dot{U}_{2x}.$$

Отсюда комплекс входного сопротивления

$$Z_{1x} = \frac{\dot{U}_{1x}}{\dot{I}_{1x}} = \frac{A}{C}.$$

При коротком замыкании ветвей  $pq$ , когда  $\dot{U}_2 = 0$ ,

$$\dot{U}_{1к} = B\dot{I}_{2к}; \quad \dot{I}_{1к} = D\dot{I}_{2к},$$

следовательно,

$$Z_{1к} = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{1к}} = \frac{B}{D}.$$

При обратном питании и коротком замыкании входных зажимов (см. рис. 100)  $\dot{U}_2 = 0$ , поэтому из (71) следует:

$$\dot{U}_{1к} = B\dot{I}_{2к}; \quad \dot{I}_{1к} = A\dot{I}_{2к};$$

$$Z_{2к} = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{1к}} = \frac{B}{A}.$$

Таким образом, для определения четырех неизвестных имеем четыре уравнения:

$$AD - BC = 1; \quad (75)$$

$$Z_{1x} = A/C; \quad (76)$$

$$Z_{1к} = B/D; \quad (77)$$

$$Z_{2к} = B/A. \quad (78)$$

Составим разность

$$1 - \frac{Z_{1к}}{Z_{1x}} = 1 - \frac{BC}{DA} = \frac{AD - BC}{DA} = \frac{1}{DA},$$

ИЛИ

$$\frac{Z_{1x} - Z_{1к}}{Z_{1x}} = \frac{1}{AD}. \quad (79)$$

Поделим (78) на (77):

$$\frac{Z_{2к}}{Z_{1к}} = \frac{D}{A}. \quad (80)$$

Умножим (79) на (80):

$$\frac{(Z_{1х} - Z_{1к}) Z_{2к}}{Z_{1х} Z_{1к}} = \frac{1}{A^2};$$

$$A = \sqrt{\frac{Z_{1х} Z_{1к}}{(Z_{1х} - Z_{1к}) Z_{2к}}}. \quad (81)$$

Таким образом, вначале по (81) рассчитывается постоянная четырехполюсника  $A$ , затем по (76) определяется постоянная  $C$ , по (78) — постоянная  $B$  и по (77) — постоянная  $D$ .

Функции сколь угодно сложного пассивного четырехполюсника как передаточного звена между источником и нагрузкой могут выполнять (при фиксированной частоте) простейшие электрические схемы, называемые схемами замещения четырехполюсника: Т-схема замещения (см. рис. 101) и П-схема замещения (см. рис. 102).

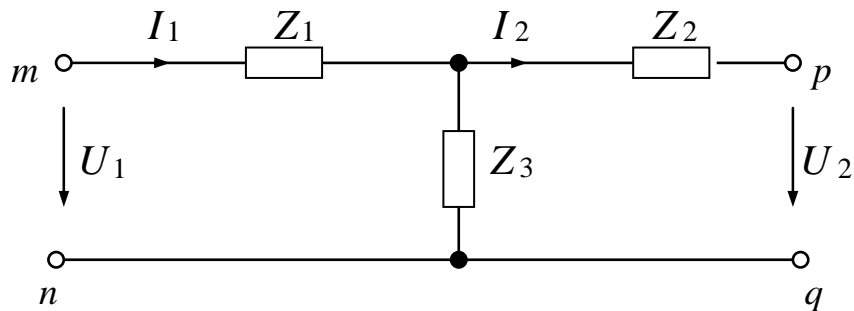


Рис. 101

Три сопротивления Т- или П-схем замещения должны быть рассчитаны исходя из того, чтобы схема замещения обладала такими же коэффициентами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , какими обладает заменяемый ею четырехполюсник. Задача эта однозначна, так как схема замещения содержит три элемента и четырехполюсник характеризуется тоже тремя параметрами (одна связь между  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  задана уравнением  $AD - BC = 1$ ).

Выразим напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  в T-схеме (см. рис. 101) через напряжение  $\dot{U}_2$  и ток  $\dot{I}_2$ :

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_2}{Z_3} = \dot{U}_2 \frac{1}{Z_3} + \dot{I}_2 \left( 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \right); \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_1 Z_1 = \dot{U}_2 + \dot{U}_2 \frac{Z_1}{Z_3} + \dot{I}_2 \left( 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \right) Z_1 + \dot{I}_2 Z_2 = \\ &= \dot{U}_2 \left( 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) + \dot{I}_2 \left( Z_1 + \frac{Z_2 Z_1}{Z_3} + Z_2 \right). \end{aligned} \quad (83)$$

Сопоставим (82) и (83) с (66) и найдем

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 + \frac{Z_1}{Z_3}; & B &= Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}; \\ C &= \frac{1}{Z_3}; & D &= 1 + \frac{Z_2}{Z_3}. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} Z_3 &= 1/C; \\ Z_1 &= (A-1)/C; \\ Z_2 &= (D-1)/C. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

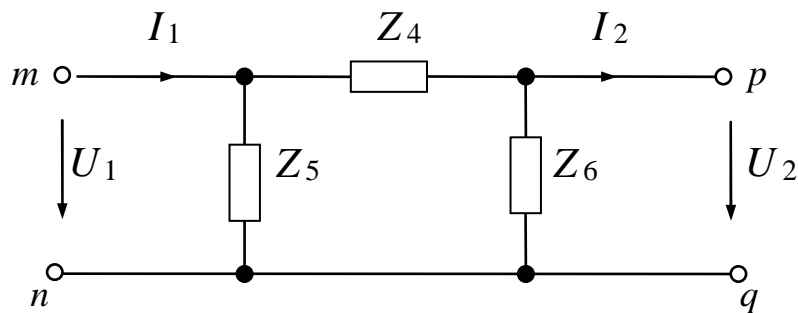


Рис. 102

Аналогичные выкладки для П-схемы (см. рис. 102) дают:

$$A = 1 + \frac{Z_4}{Z_6}; \quad B = Z_4; \quad C = \frac{Z_4 + Z_5 + Z_6}{Z_5 Z_6}; \quad D = 1 + \frac{Z_4}{Z_5}.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} Z_4 &= B; \\ Z_5 &= B/(D-1); \\ Z_6 &= B/(A-1). \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Если четырехполюсник симметричный, то  $A=D$  и в Т-схеме замещения  $Z_1 = Z_2$ , а в П-схеме —  $Z_5 = Z_6$ .

Исследование многих цепей, составленных из четырехполюсников, удобно проводить с помощью так называемых характеристических параметров — характеристического сопротивления  $Z_C$  и постоянной передачи  $g$ . Ограничимся рассмотрением этих параметров для симметричного четырехполюсника.

Распределение токов и напряжений на входе и выходе четырехполюсника зависит от его нагрузки. В частности, может быть создан такой режим, при котором входное сопротивление четырехполюсника равно сопротивлению приемника. Сопротивление  $Z_H$ , которое нужно включить для этого на выходные зажимы четырехполюсника, называют повторным или *характеристическим*, а режим, при котором  $Z_H = Z_C$ , — *режимом согласованной нагрузки*. В этом режиме

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z_H = Z_C. \quad (87)$$

Для определения  $Z_C$  через постоянные четырехполюсника используем основные уравнения (66), которые для симметричного четырехполюсника примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

С учетом (87)

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\frac{\dot{U}_2}{Z_C} = \left( A + \frac{B}{Z_C} \right) \dot{U}_2 = \frac{AZ_C + B}{Z_C} \dot{U}_2 = (AZ_C + B)\dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = (CZ_C + A)\dot{I}_2;$$

$$Z_C = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{AZ_C + B}{CZ_C + A},$$

откуда

$$\begin{aligned} CZ_C^2 + AZ_C &= AZ_C + B, \\ Z_C &= \sqrt{B/C}. \end{aligned}$$

Из (87) видно, что при согласованной нагрузке

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = A + \frac{B}{Z_C} = A + CZ_C = A + \sqrt{BC} = A + \sqrt{A^2 - 1}, \quad (89)$$

так как  $A^2 - BC = 1$ .

Отношение входных величин к выходным представляет собой комплексное число и может быть записано в показательной форме

$$A + \sqrt{BC} = A + \sqrt{A^2 - 1} = k e^{jb} = e^a \cdot e^{jb} = e^g, \quad (90)$$

где  $g = a + jb = \ln(A + \sqrt{BC})$  — комплексное число, называемое **постоянной передачи четырехполюсника**,

$a$  — коэффициент затухания,

$b$  — коэффициент фазы.

Названия  $a$  и  $b$  определяются их ролью. Если четырехполюсник находится в режиме согласованной нагрузки, то

$$\dot{U}_1 = U_2 e^g = U_2 e^a \cdot e^{jb},$$

то есть коэффициент затухания может быть определен по отношению модулей напряжений (или токов) как

$$a = \ln \frac{U_1}{U_2}$$

и характеризует изменение напряжений (или токов) только по величине.

Изменение же фазы определяется коэффициентом  $b$ , так как умножение вектора на  $e^{jb}$  соответствует повороту этого вектора на  $b$  без изменения его величины.

Безразмерные величины  $a$  и  $b$  измеряются соответственно:  $a$  в неперах,  $b$  — в радианах. Затуханием в 1 непер обладает четырехполюсник, у которого при согласованной нагрузке выходное напряжение  $\dot{U}_2$  в  $e = 2,718$  раз меньше входного.

## 6.2 Основы теории электрических фильтров

Под электрическим фильтром понимают четырехполюсники, включаемые между источником и приемником, назначение которых состоит в том, чтобы беспрепятственно (без затухания) пропускать к приемнику токи одних частот и задерживать или пропускать, но с большим затуханием, токи других частот.

Диапазон частот, пропускаемых фильтром без затухания, называют *полосой прозрачности*; диапазон частот, пропускаемых с затуханием, — *полосой затухания*.

Фильтры обычно собирают из реактивных элементов (индуктивных и емкостных) по симметричной Т-или П-схеме (см. рис. 101; 102), т.е. при  $Z_1 = Z_2$  и  $Z_5 = Z_6$ .

Условимся сопротивления  $Z_1$  и  $Z_4$  на указанных рисунках называть *продольными*, а  $Z_3$  и  $Z_5$  — *поперечными*.

Фильтры, в которых произведение продольного сопротивления на соответствующее поперечное сопротивление представляет собой некоторое постоянное для данного фильтра число (число  $k$ ), не зависящее от частоты, принято называть *k-фильтрами*. Фильтры, в которых это произведение зависит от частоты, называют *m-фильтрами*.

Сопротивление нагрузки  $Z_H$ , включаемой на выходе фильтра, должно быть согласовано с характеристическим сопротивлением фильтра  $Z_C$  ( $Z_C = Z_H$ ). Входное сопротивление  $k$ -фильтра при этом также равно  $Z_C$ . В  $k$ -фильтрах  $Z_C$  существенно изменяется в зависимости от частоты  $\omega$ , находящейся в полосе прозрачности. Это обстоятельство вызывает необходимость изменять сопротивление нагрузки в функции частоты (особенно при приближении к границе полосы прозрачности), что нежелательно. В  $m$ -фильтрах при определенных значениях коэффициента  $m$  сопротивление  $Z_C$  мало изменяется от частоты (в пределах полосы про-

зрачности), и поэтому нагрузка практически может быть одна и та же по модулю для различных  $\omega$ , находящихся в этих пределах.

Качество фильтра тем выше, чем более резко выражены его фильтрующие свойства, т.е. чем более резко возрастает затухание в полосе затухания.

Фильтрующие свойства четырехполюсников обусловлены возникновением в них резонансных режимов — резонансов токов или резонансов напряжений.

В рамках настоящей дисциплины ограничимся рассмотрением основ теории  $k$ -фильтров.

Если нагрузка  $Z_n$  согласована с характеристическим сопротивлением  $Z_C$  четырехполюсника, то напряжение  $\dot{U}_2$  и ток в нагрузке  $\dot{I}_2$  связаны с напряжением  $\dot{U}_1$  и током  $\dot{I}_1$  на входе четырехполюсника на основании формул (88) и (89) следующими соотношениями:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-g}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-g},$$

или

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-a} e^{-jb}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-a} e^{-jb}.$$

Множитель  $e^{-a}$  определяет, во сколько раз модуль напряжения (тока) на выходе фильтра меньше модуля напряжения (тока) на его входе.

Если  $a = 0$ , то  $e^{-a} = e^0 = 1$  и фильтр пропускает колебания без затухания. Таким образом, в полосе прозрачности  $a = 0$ .

В полосе затухания  $a > 0$ . Множитель  $e^{-jb}$ , по модулю равный единице, свидетельствует о том, что напряжение  $\dot{U}_2$  и ток  $\dot{I}_2$  отстают соответственно от  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  на угол  $b$ .

Фильтрующие свойства четырехполюсника рассмотрим с привлечением функции гиперболического косинуса. Гиперболический косинус от комплексного аргумента  $g$  можно выразить через показательные функции как

$$chg = \frac{e^g + e^{-g}}{2}.$$



Для получения величины  $e^{-g}$  воспользуемся соотношением симметричного четырехполюсника  $A^2 - BC = 1$ .

Это соотношение с учетом (90) можно записать так:

$$1 = (A + \sqrt{BC})(A - \sqrt{BC}) = e^g(A - \sqrt{BC}),$$

откуда

$$e^{-g} = \frac{1}{e^g} = A - \sqrt{BC}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ch}g = \frac{e^g + e^{-g}}{2} = A,$$

или

$$A = \operatorname{ch}(a + jb).$$

Гиперболический косинус от суммы двух аргументов (с учетом того, что  $\operatorname{ch}jb = \cos b$  и  $\operatorname{ch}jb = j \sin b$ ) можно представить следующим образом:

$$\operatorname{ch}(a + jb) = \operatorname{ch}a \cdot \cos b + j \operatorname{cha} \cdot \sin b.$$

Для любого фильтра, собранного по Т-схеме (см. предыдущий подраздел),  $A = 1 + Z_1/Z_3$ .

Для фильтра, собранного по П-схеме,  $A = 1 + Z_4/Z_5$ .

Из каких бы реактивных сопротивлений ни был собран фильтр, отношения  $Z_1/Z_3$  в Т-схеме и  $Z_4/Z_5$  в П-схеме всегда будут действительными (не мнимыми и не комплексными) числами — отношение двух мнимых чисел всегда есть число действительное. Следовательно, всегда будет действительным и коэффициент  $A$ . Но если коэффициент  $A$  действителен, то действительным должно быть выражение равного ему  $\operatorname{ch}(a + jb)$ :

$$\operatorname{ch}(a + jb) = -\operatorname{ha} \cdot \cos b + j \operatorname{sha} \cdot \sin b = A.$$

Это выражение действительно, если

$$\operatorname{sha} \cdot \sin b = 0. \quad (91)$$

При этом

$$\operatorname{cha} \cdot \cos b = A. \quad (92)$$

Уравнения (91) и (92) используют для определения границ полосы прозрачности и характера изменения угла  $b$  в этой полосе, а также характера изменения коэффициента затухания в полосе затухания.

Равенство (91) для полосы прозрачности ( $a = 0$ ) удовлетворяется, так как  $\operatorname{sh}a = \operatorname{sh}0 = 0$ . В силу того что  $\operatorname{ch}0 = 1$ , уравнение (92) для полосы прозрачности переходит в следующее:

$$\cos b = A. \quad (93)$$

Круговой косинус ( $\cos b$ ) может изменяться в пределах от  $+1$  до  $-1$ . Поэтому крайние значения коэффициента  $A$  (являющегося функцией частоты, то есть  $A(\omega)$ ) в полосе прозрачности равны  $\pm 1$ . Полоса прозрачности в общем случае лежит в диапазоне частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ . Значения  $\omega_1$  и  $\omega_2$  для фильтров НЧ и ВЧ (о типах фильтров будет сказано ниже) определяются путем решения уравнений

$$A(\omega) = \pm 1. \quad (94)$$

Для полосовых и заграждающих фильтров  $\omega_1$  и  $\omega_2$  находят как корни уравнения  $A(\omega) = -1$ .

Частоту, являющуюся граничной между полосой прозрачности и полосой затухания, называют *частотой среза*.

Характер изменения угла  $b$  в функции от  $\omega$  для зоны прозрачности определяют в соответствии с уравнением (93) следующим образом:

$$b = \arccos A(\omega). \quad (95)$$

Определим  $a$  и  $b$  для полосы затухания. В полосе затухания  $a > 0$ . Уравнение (91) удовлетворяется при условии

$$\sin b = 0, \quad (96)$$

то есть при

$$b = 0 \quad (97)$$

и (или) при

$$b = \pm\pi. \quad (98)$$

Согласно уравнению (91), при  $b = 0$

$$\operatorname{cha} = A(\omega), \quad (99)$$

а при  $b = \pm\pi$

$$\operatorname{cha} = -A(\omega). \quad (100)$$

Уравнения (99) и (100) позволяют по значениям  $A$  как функции  $\omega$  рассчитать  $\operatorname{cha}$  в полосе затухания, а по  $\operatorname{cha}$  определить  $a$  и, таким образом, построить кривую  $a=f(\omega)$ . Из уравнений (97) и (98) следует, что в полосе затухания напряжение  $\dot{U}_2$  на выходе фильтра находится либо в фазе (при  $b = 0$ ), либо в противофазе (при  $b = \pm\pi$ ) с напряжением  $\dot{U}_1$  на входе фильтра.

Отметим два важных момента:

1) с изменением частоты  $\omega$  меняются коэффициенты  $B$  и  $C$  четырехполюсника, поэтому изменяется и характеристическое сопротивление  $Z_C = \sqrt{B/C}$ . Для того чтобы фильтр работал на согласованную нагрузку (только в этом случае справедлива изложенная теория фильтров), при изменении частоты нужно менять и сопротивление нагрузки;

2) в полосе прозрачности характеристическое сопротивление фильтра всегда активное, а в полосе затухания — чисто реактивное (индуктивное или емкостное).

К-фильтры подразделяются на низкочастотные (НЧ), высокочастотные (ВЧ), полосно-пропускающие и полосно-заграждающие.

**Фильтрами НЧ** называют фильтры, пропускающие в нагрузку лишь низкие частоты: с  $\omega_1 = 0$  до  $\omega_2$ . Полоса их затухания находится в интервале от  $\omega_2$  до  $\infty$ .

Схемы двух фильтров НЧ приведены на рис. 103, а, б. Характер изменения коэффициента затухания  $a$  и коэффициента фазы  $b$  качественно иллюстрируют кривые на рис. 103, в.

Под **фильтрами ВЧ** понимают фильтры, пропускающие в нагрузку лишь высокие частоты: с  $\omega_1$  до  $\infty$ . Полоса затухания их находится в интервале от 0 до  $\omega_1$ .

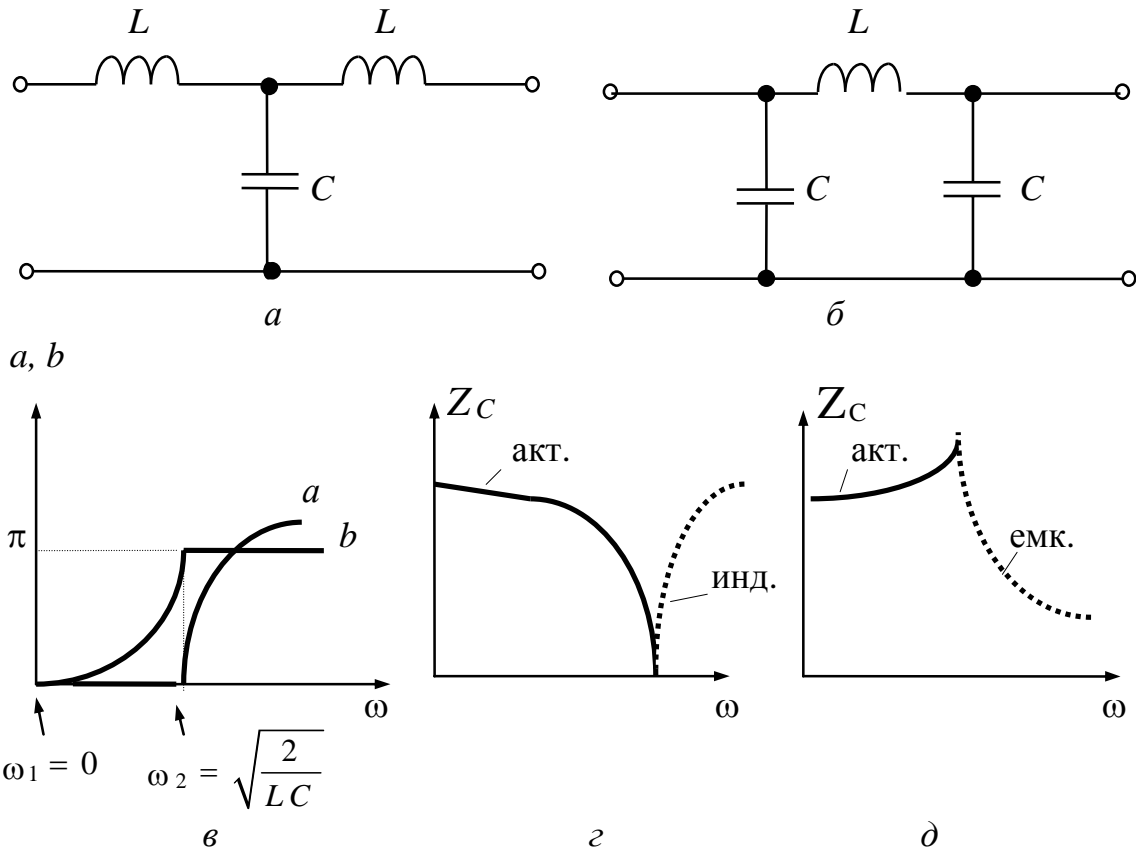


Рис. 103

Схемы двух фильтров ВЧ приведены на рис. 104, а, б. Характер изменения коэффициентов  $a$  и  $b$  для них иллюстрируется кривыми на рис. 104, в.

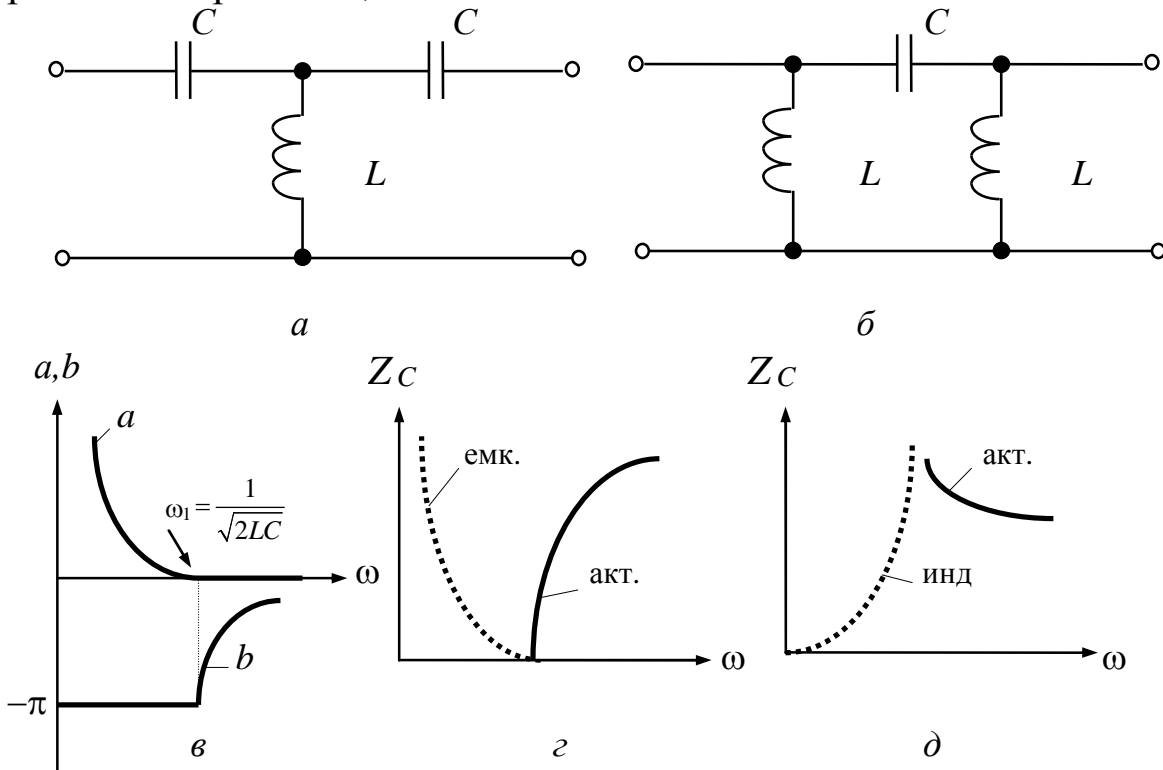


Рис. 104

Рассмотрим вопрос об изменении модуля характеристического сопротивления  $Z_C$  в полосе прозрачности, например для Т-фильтра НЧ (см. рис. 103, а). С этой целью в выражение  $Z_C = \sqrt{B/C}$  подставим значение  $B$  и  $C$  в соответствии с формулами (84) и в результате получим

$$Z_C = \sqrt{2L/C - \omega^2 L^2}.$$

График  $Z_C = f(\omega)$  представлен на рис. 103, з. При  $\omega = \omega_1 = 0$   $Z_C = \sqrt{2L/C}$ . С увеличением частоты  $Z_C$  уменьшается, сначала мало отличаясь от значения  $\sqrt{2L/C}$ . При достижении значения  $\omega = \omega_2 = \sqrt{2/LC}$   $Z_C = 0$ .

Аналогичные зависимости представлены: для П-фильтра НЧ — на рис. 101, д; для Т-фильтра ВЧ — на рис. 103, з; для П-фильтра ВЧ — на рис. 103, д.

Если фильтр предназначен для работы на частотах, находящихся внутри полосы прозрачности данного фильтра и относительно далеко отстоящих от значения  $\omega$ , при котором  $Z_C = 0$ , то сопротивление нагрузки  $Z_H$  выбирают равным  $Z_C$ , которое соответствует  $\omega = \omega_1 = 0$ . Для Т-фильтра НЧ  $Z_C = \sqrt{2L/C}$ .

Для фильтров ВЧ обычно нагрузку согласовывают со значением  $Z_C$  при  $\omega \rightarrow \infty$ .

В полосе затухания  $Z_C$  оказывается чисто реактивным для всех типов К-фильтров.

Для того чтобы выяснить, индуктивный или емкостный характер имеет  $Z_C$  в полосе затухания, следует определить характер входного сопротивления этого фильтра для предельного режима, а именно, для фильтров НЧ при очень низкой частоте, а для фильтров ВЧ при очень высокой частоте, считая выходные зажимы схем закороченными. Характер  $Z_C$  указан на рисунке около соответствующих графиков.

**Полосно-пропускающие фильтры** представляют собой фильтры, пропускающие в нагрузку лишь узкую полосу частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ . Слева от  $\omega_1$  и справа от  $\omega_2$  находятся полосы затухания. Схема простейшего полосно-пропускающего  $k$ -фильтра изо-

бражена на рис. 105, *a*, его характеристики — на рис. 105, *б*, *в*. Параметры схемы должны удовлетворять условию  $L_1C_1 = L_2C_2$ .

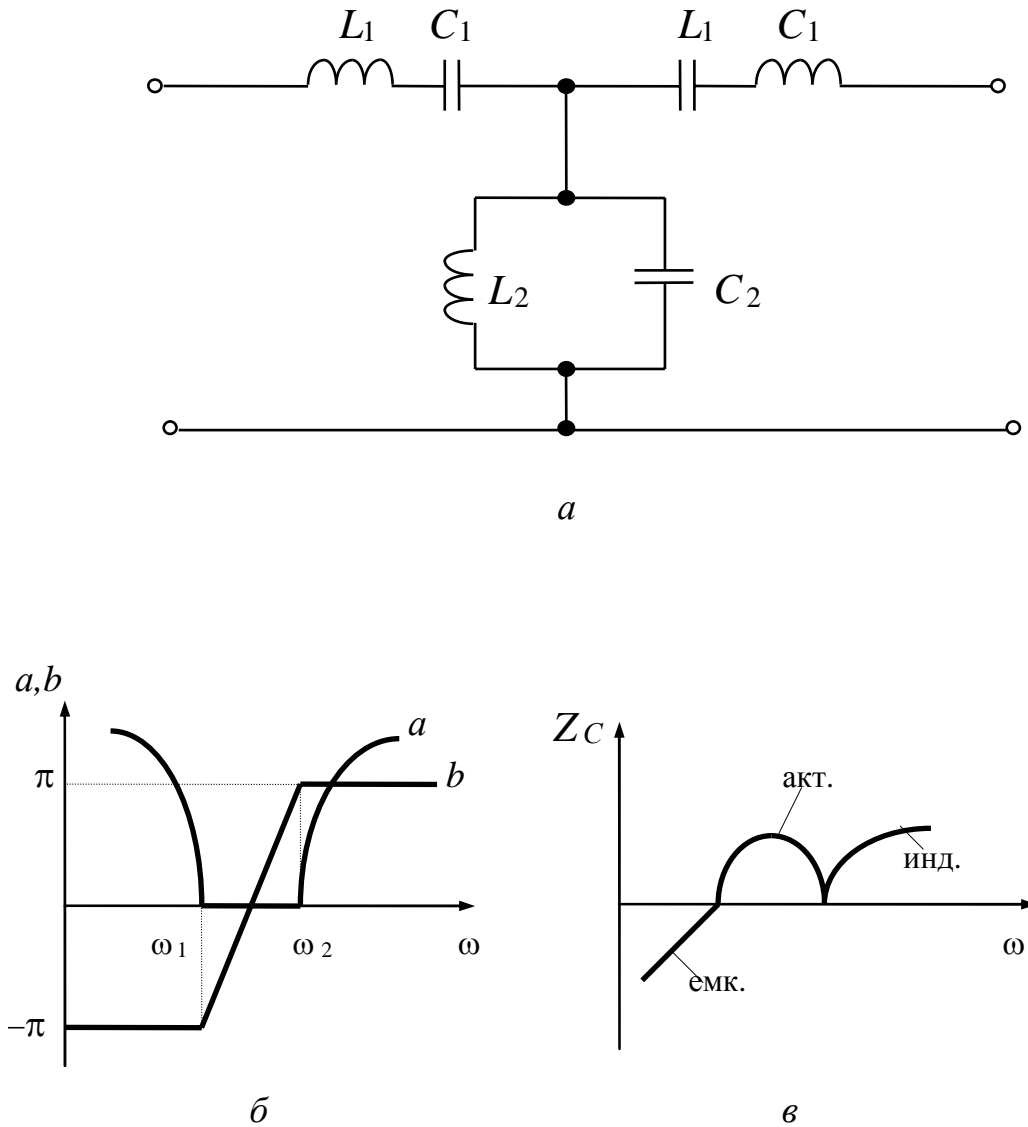


Рис. 105

Под **полосно-заграждающими фильтрами** (рис. 106, *a*) понимают фильтры, в которых полоса прозрачности как бы разрезана на две части полосой затухания (рис. 106, *б*). Слева от  $\omega_1$  и справа от  $\omega_2$  находятся две части полосы прозрачности. В схеме простейшего заграждающего фильтра на рис. 106, *a*  $L_1C_1 = L_2C_2$ .

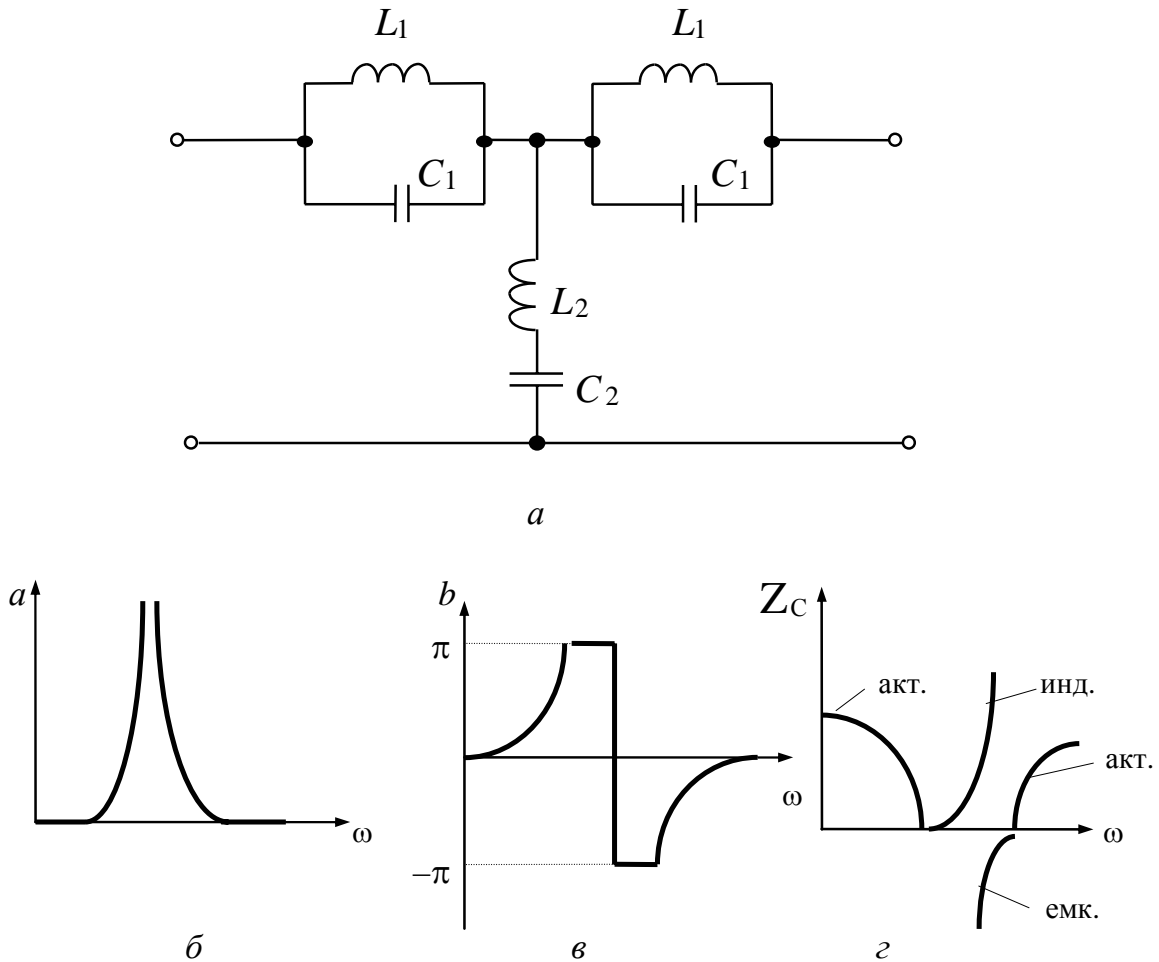


Рис. 106

По схеме  $k$ -фильтра без проведения подробного математического анализа можно судить о том, к какому из перечисленных типов может быть отнесен тот или иной фильтр. Заключение основывается на характере продольного сопротивления фильтра.

Характер продольного сопротивления  $k$ -фильтра, как правило, прямо противоположен характеру поперечного сопротивления. Если продольное сопротивление индуктивное, то поперечное — емкостное. Если продольное образовано последовательно соединенными  $L$  и  $C$ , то поперечное — параллельно соединенными  $L$  и  $C$  и т.д. Если продольное сопротивление состоит только из индуктивностей, то фильтр относится к категории НЧ; если продольное сопротивление чисто емкостное, то фильтр — ВЧ.

Если продольное сопротивление состоит из последовательно соединенных  $L$  и  $C$ , то фильтр — полосового типа. Если продольное сопротивление состоит из параллельно соединенных  $L$  и  $C$ , то фильтр — заграждающего типа.

## 7 ЛИТЕРАТУРА

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. — М.: Гардарики, 2001. — 638 с.
2. Основы теории цепей: Учебник для вузов / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 528 с.
3. Демирчян К.С. и др. Теоретические основы электротехники. Том 1: Учебник для вузов. — Санкт-Петербург: Питер, 2006. — 464 с.
4. Бессонов Л.А. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: Учебное пособие. — М.: Высш. шк., 2003. — 528 с.