Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Радиотехнический факультет (РТФ)

Кафедра радиотехнических систем (РТС)

В.А. Кологривов

Контрольные задания и учебно-методическое пособие по разделу «Помехоустойчивое кодирование»

Методическое пособие
для студентов заочной формы обучения
(в том числе с применением дистанционных образовательных технологий)
по направлениям ”Инфокоммуникационные технологии и системы связи” и “Радиотехника”

Разработчик:
доц. кафедры РТС
____________Кологривов В.А.

2018

Кологривов В.А.

Контрольные задания и учебно-методическое пособие по разделу «Помехоустойчивое кодирование». Методическое пособие для студентов заочной формы обучения (в том числе с применением дистанционных образовательных технологий) по направлениям ”Инфокоммуникационные технологии и системы связи” и “Радиотехника” – Томск: Томский гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2018. – 19 с.

В пособии даны необходимые теоретические сведения и проиллюстрирована методика исследования помехоустойчивых блочных алгебраических и циклических кодов, сформулированы задания на контрольные работы и приведены краткие методические указания по их выполнению.

Методическое пособие предназначено для студентов заочной формы обучения (в том числе с применением дистанционных образовательных технологий) по направлениям ”Инфокоммуникационные технологии и системы связи” и “Радиотехника”, изучающих раздел “Помехоустойчивое кодирование”.

Содержание

1 Введение	**4**
2 Линейные блочные коды	**5**
3 Алгебраические коды	**5**
4 Задание на первую контрольную работу	**11**
5 Циклические коды	**12**
6 Задание на вторую контрольную работу	**17**
7 Заключение	**17**
Список использованных источников	**18**

1 Введение

При обучении в технических университетах по направлениям “Инфокоммуникационные технологии и системы связи” и “Радиотехника” изучаются такие дисциплины как “Теория электрической связи”, “Общая теория связи”, “Общая теория радиосвязи”, “Теоретические основы современных технологий беспроводной связи”, “Теоретические основы систем мобильной связи”, которые обязательно содержат разделы, посвященные помехоустойчивому кодированию. В этих разделах знакомят с причинами возникновения ошибок передачи информации и принципами построения так называемых помехоустойчивых кодов, позволяющих обнаруживать и исправлять ошибки передачи.

С момента возникновения, теория помехоустойчивого кодирования шагнула далеко вперед, однако принципы помехоустойчивого кодирования остались прежними. Это, прежде всего, разбиение на блоки, введение контролируемой избыточности, обнаружение и исправление ошибок и так далее.

Именно знакомству с простейшими классическими методами: блочными алгебраическими и циклическими кодами и посвящено данное методическое пособие. Пособие содержит основные понятия, краткие теоретические сведения, методику исследования, контрольные задания и список литературы.

2. Линейные блочные коды

Помехоустойчивость систем радиосвязи определяется вероятностью появления битовых ошибок передачи при заданном отношении сигнал/шум (SNR). Каждому виду цифровой модуляции присуща своя помехоустойчивость, полоса частот и скорость передачи. Все эти показатели взаимообусловлены и попытка улучшить один из них, как правило, ухудшает другие параметры. Использование помехоустойчивого или канального кодирования позволяет находить компромиссы между основными параметрами систем радиосвязи [1-3].

В методическом пособии кратко описаны классические методы кодирования (алгебраические и циклические) и сформулированы два задания на контрольные работы.

3. Алгебраические коды

В процессе передачи цифровых данных в силу помех в канале, многолучевого распространения и ряда других факторов возможно появление ошибок приема. Для обнаружения и исправления ошибок используют дозированное введение избыточности в передаваемые данные, позволяющее на приемной стороне частично обнаруживать и исправлять ошибки [4,5].

Рассмотрим двоичные линейные блочные коды, когда при построении кода используются двоичные символы 0 и 1. Входной информационный поток битов или символов $\{x_i\}$ разбивается на блоки длиной k. Для определенности будем иметь в виду поток именно битов. Блоки информационных битов образуют информационный символ. Далее в блоки вносится избыточность путем добавления в блок дополнительных, избыточных битов или битов четности, которые для алгебраических кодов могут представлять собой комбинации битов информационного блока. Информационные биты и биты четности образуют кодовый символ.

Информационные и кодовые символы алгебраических кодов представляются двоичными векторами, а операции кодирования и декодирования представляются векторно-матричными операциями с использованием суммирования по модулю 2.

На приемной стороне эти избыточные биты используются для обнаружения ошибок передачи, поэтому их часто называют проверочными битами. Информационные символы, расширенные битами четности, представляют собой кодовые символы. Различают систематические и несистематические коды. Систематические коды в кодовом символе содержат информационные биты в явном виде, а несистематические – не содержат.

Систематическое алгебраическое кодирование. Рассмотрим на примере кода $(n,k) = (5,3)$, где k- число информационных битов в кодовом символе; n- общее число битов в кодовом символе. Следовательно, в кодовом символе содержится $n - k = m$ проверочных битов. Число проверочных битов определяет исправляющую способность или мощность кода. Сделаем два замечания: число проверочных бит для алгебраических кодов ограничивается числом информационных битов в блоке; имеется оптимум по числу проверочных битов, так как увеличение их числа в системах реального времени ведет к снижению скорости передачи полезной информации и снижению мощности за счет уменьшения длительности битов в кодовом символе.

Блочное алгебраическое кодирование. Систематический код $(5,3)$ может быть представлен следующей системой уравнений

$$\begin{array}{l} 1\cdot x_i \oplus 0\cdot x_{i+1} \oplus 0\cdot x_{i+2} = y_i \\ 0\cdot x_i \oplus 1\cdot x_{i+1} \oplus 0\cdot x_{i+2} = y_{i+1} \\ 0\cdot x_i \oplus 0\cdot x_{i+1} \oplus 1\cdot x_{i+2} = y_{i+2} \\ 0\cdot x_i \oplus 1\cdot x_{i+1} \oplus 1\cdot x_{i+2} = y_{i+3} \\ 1\cdot x_i \oplus 0\cdot x_{i+1} \oplus 1\cdot x_{i+2} = y_{i+4} \end{array} = G^t \cdot x = y.$$

где i- текущий индекс бита;

$\oplus$- операция суммирования по модулю 2;

G^t- матрица коэффициентов системы уравнений;

x- вектор-столбец информационного символа;

y- вектор-столбец кодового символа.

Представление системы в транспонированном виде через вектор-строки символов позволяет записать операцию кодирования в виде

$$x \cdot G = y,$$

где G- порождающая или кодирующая матрица. Суммирование при умножении строки на столбец производится по модулю 2. Порождающая матрица систематического алгебраического кода может быть представлена в блочном виде как

$$G = [I \quad | \quad P],$$

где I- единичная матрица;

P- матрица четности.

Записывая построчно все возможные информационные символы, получим соответствующие им кодовые символы

$$x \cdot G = y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как видим, кодовые символы содержат информационные биты и биты четности. Каждый кодовый символ уникален. Забегая вперед отметим, что добавление всего двух бит четности порождает достаточно маломощный код, который не позволяет исправить даже все одиночные (однократные) ошибки кодового символа.

Синдромное алгебраическое декодирование. Синдромное декодирование не представляет собой какое-то прямое восстановление передаваемых битов по принятым символам, а выставление некоторых «флагов» по состоянию которых и принимается решение об ошибке. В качестве критерия правильности приема используется понятие синдром, как набор признаков возможных ошибок. Понятие синдрома связано с проверочной матрицей H, которая формально определяется из условия ортогональности порождающей G и проверочной матрицы H

$$G \cdot H^t = [I_{k \cdot k} \quad | \quad P_{k\cdot(n-k)}] \cdot \left[P^t_{(n-k)\cdot k} \quad | \quad I_{(n-k)\cdot(n-k)}\right] = 0,$$

где индексы указывают число строк и столбцов блоков.

Так порождающей матрице

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

соответствует транспонированная проверочная матрица

$$H^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ - & - \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

или

$$G \cdot H^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ - & - \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычисление синдрома через проверочную матрицу осуществляется по выражению

$$S = z \cdot H^t,$$

где $z = y \oplus e$- принятый, возможно с ошибкой кодовый символ;

e- вектор ошибки, например, вектора ошибок в первом и втором битах представляются в виде $e_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$, $e_2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$.

При отсутствии ошибок в кодовых символах им соответствуют нулевые синдромы

$$y \cdot H^t = S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Можно показать, что синдром зависит только от места возникновения ошибки в символе и не зависит от самого символа. Кроме того, синдром ошибочного вектора равен синдрому вектора ошибки

$$S = z \cdot H^t = (y \oplus e) \cdot H^t = e \cdot H^t.$$

Пусть в первых битах первого, второго и третьего кодового символа произошли ошибки, тогда синдромы для них определятся как

$$z \cdot H^t = S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть во вторых битах первого, второго и третьего кодового символа произошли ошибки, тогда синдромы для них определятся как

$$z \cdot H^t = S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть в третьих битах первого, второго и третьего кодового символа произошли ошибки, тогда синдромы для них определятся как

$$z \cdot H^t = S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из примеров видно, что синдром зависит только от места возникновения ошибки. Ошибке в первом бите соответствует синдром

$$S_1 = [0 \quad 1].$$

Ошибке во втором бите соответствует синдром

$$S_2 = [1 \quad 0].$$

Ошибке во втором бите соответствует синдром

$$S_3 = [1 \quad 1].$$

При рассмотрении ошибок в четвертом и пятом битах увидим, что синдромы начинают повторяться вследствие маломощности рассматриваемого кода.

Найдем синдромы векторов ошибок

$$y \cdot H^t = S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как видим, синдромы ошибок совпали с синдромами векторов ошибок. Синдромы ошибок в первых трех битах различны, а далее повторяются в силу недостаточной мощности кода.

С другой стороны наш код систематический и для восстановления в приемнике информационных бит мощности кода для исправления одиночных ошибок достаточно.

Приведем соответствие векторов ошибок и синдромов

$$\begin{matrix} 0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0 & 0\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,0 & 1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0 & 1\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,0 & 1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1 & 0\,1 \end{matrix}.$$

Исправление ошибок при систематическом кодировании и синдромном алгебраическом декодировании производится следующим образом:

1. Определяются синдромы ошибок.
2. Из соответствия векторов ошибок и синдромов определяются вектора ошибок.
3. Ошибочные символы суммируются по модулю 2 с соответствующими векторами ошибок и тем самым ошибки исправляются.

Формально исправление ошибок в принятых с ошибками кодовых символах запишется как

$$y = z \oplus e = y \oplus e \oplus e = y.$$

Дело в том, что операции суммирования и вычитания по модулю 2 совпадают.

Так для рассмотренных примеров ошибок в первых трех битах кодовых символов имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, одиночные ошибки в первых трех битах кодовых символов успешно восстановлены.

4. Задание на первую контрольную работу

Используя теоретический материал методического пособия, рассмотреть двоичный, блочный, линейный, алгебраический, систематический код $(6, 3)$ и представить все синдромы одиночных ошибок.

Контрольную работу представить отдельной пояснительной запиской, содержащей все необходимые разделы с пояснениями и выводами. Использование подходящих программных продуктов не возбраняется. Необходимо лишь отметить, что ситуация частично осложняется необходимостью программной реализации арифметики по модулю 2.

5. Циклические коды

В процессе передачи цифровых данных в силу помех в канале, многолучевого распространения и аномального затухания возможно появление ошибок приема. Для обнаружения и исправления ошибок используют дозированное введение избыточности в передаваемые данные, позволяющее на приемной стороне частично обнаруживать и исправлять ошибки [6,7].

Рассмотрим двоичные линейные блочные коды, использующие при построении кода двоичные символы 0 и 1. Входной информационный поток битов или символов $\{x_i\}$ разбивается на блоки длиной k. Для определенности будем иметь в виду поток именно битов. Блоки информационных битов образуют информационный символ. Далее в блоки вносится избыточность путем подачи битов информационного символа на регистр сдвига с обратными связями. Число избыточных битов здесь будет определяться структурой кодера. На приемной стороне эти избыточные биты используются для обнаружения ошибок передачи, поэтому их часто называют проверочными битами. Информационные символы, расширенные битами четности, представляют собой кодовые символы. Различают систематические и несистематические коды. Систематические коды в кодовом символе содержат информационные биты в явном виде, а несистематические – не содержат.

Систематическое циклическое кодирование. Рассмотрим на примере кода $(n,k)=(5,2)$, где k- число информационных битов в кодовом символе; n- общее число битов в кодовом символе. Следовательно, в кодовом символе содержится $n-k=m$ проверочных битов. Число проверочных битов определяет исправляющую способность или мощность кода. Сделаем два замечания: число проверочных битов определяется структурой циклического кодера; имеется оптимум по числу проверочных битов, так как увеличение их числа в системах реального времени ведет к снижению скорости передачи полезной информации и снижению мощности за счет уменьшения длительности битов в кодовом символе. Информационные и кодовые символы, как и сами структуры регистров сдвига, удобно описывать в виде двоичных полиномов соответствующей степени, а их в свою очередь двоичными векторами. Систематическое циклическое кодирование сводится к операции деления полинома информационного символа на образующий полином соответствующий структуре кодера. Для обеспечения возможности деления полиномов предварительно степень полинома информационного символа повышается на число регистров сдвига кодера (степень образующего полинома). Полиномы кодеров и декодеров должны быть примитивными, во избежание катастрофических ситуаций кодирования и декодирования.

В систематических циклических кодерах информационные символы подаются сразу на выход кодера и параллельно в регистр сдвига с обратными связями. По завершении информационного символа регистр сдвига размыкается и его содержимое начинает поступать на выход кодера в виде бит четности, завершая кодовый символ.

В декодере информационные биты с кодера поступают в регистр сдвига с замкнутой обратной связью. По завершении систематической части обратная связь размыкается и содержимое регистров сдвига представляет собой синдром как остаток от деления полинома кодового символа на полином декодера. Полиномы как и структуры кодера и декодера совпадают. Синдром текущего кодового символа выталкивается при поступлении информационной части следующего символа.

Блочное циклическое кодирование. Систематический код $(5,2)$ означает, что информационный блок содержит два бита, например, $0\ 0$; $0\ 1$; $1\ 0$; $1\ 1$. Это представление можно трактовать как векторы или как полиномы вида $0x^1 + 0x^0$; $0x^1 + 1x^0$; $1x^1 + 0x^0$; $1x^1 + 1x^0$. Структура циклического кодера может быть представлена примитивным полиномом третьего порядка $1x^3 + 0x^2 + 1x^1 + 1x^0$ или вектором $1\ 0\ 1\ 1$. Для представления операции кодирования в виде деления полиномов информационный полином возводят в старшую степень полинома кодера, т.е. возможные информационные символы могут принять вид 0 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 1 0 0 0 0; 1 1 0 0 0.

Рассмотрим операцию систематического кодирования на примере двух информационных символов путем деления информационного вектора на вектор кодера

$$\oplus\begin{array}{r} 1\,0\,0\,0\,0 \\ \underline{1\,0\,1\,1} \\ 1\,1\,0 \end{array} \left[\begin{array}{l} \underline{1\,0\,1\,1} \\ 1 \end{array}\right. ; \qquad \begin{array}{r} \oplus\;1\,1\,0\,0\,0 \\ \underline{1\,0\,1\,1} \\ \oplus\;1\,1\,1\,0 \\ \underline{1\,0\,1\,1} \\ 1\,0\,1 \end{array} \left[\begin{array}{l} \underline{1\,0\,1\,1} \\ 1\,1 \end{array}\right. .$$

Добавляя к информационному вектору, полученные в остатке биты четности получаем уникальные кодовые векторы-символы: 1 0 1 1 0 и 1 1 1 0 1.

<u>Синдромное циклическое декодирование</u>. Синдромное декодирование циклических кодов производится путем деления принятого кодового вектора на вектор декодера. Если кодовые символы приняты без ошибок передачи, то в остатке при делении получаем нулевые синдромы

$$\oplus\begin{array}{r} 1\,0\,1\,1\,0 \\ \underline{1\,0\,1\,1} \\ 0\,0\,0 \end{array} \left[\begin{array}{l} \underline{1\,0\,1\,1} \\ 1 \end{array}\right. ; \qquad \begin{array}{r} \oplus\;1\,1\,1\,0\,1 \\ \underline{1\,0\,1\,1} \\ \oplus\;1\,0\,1\,1 \\ \underline{1\,0\,1\,1} \\ 0\,0\,0 \end{array} \left[\begin{array}{l} \underline{1\,0\,1\,1} \\ 1\,1 \end{array}\right. .$$

Теперь рассмотрим последовательно появление одиночных ошибок передачи в первом, втором и т.д. битах и появляющиеся при этом в остатках синдромов:

ошибки в первых битах

$$\begin{array}{r} \underline{0\,0\,1\,1\,0} \\ 1\,1\,0 \end{array} \left[\begin{array}{l} \underline{1\,0\,1\,1} \\ 0\,0 \end{array}\right. ; \qquad \oplus\begin{array}{r} 0\,1\,1\,0\,1 \\ \underline{1\,0\,1\,1} \\ 1\,1\,0 \end{array} \left[\begin{array}{l} \underline{1\,0\,1\,1} \\ 0\,1 \end{array}\right. ;$$

ошибки во вторых битах

$$\begin{array}{rl}
\oplus\ 11110 & \lfloor\underline{1011} \\
\underline{1011} & \ 11 \\
\oplus\ 1000 & \\
\underline{1011} & \\
011 &
\end{array};
\qquad
\begin{array}{rl}
\oplus\ 10101 & \lfloor\underline{1011} \\
\underline{1011} & \ 1 \\
011 &
\end{array};$$

ошибки в третьих битах

$$\begin{array}{rl}
\oplus\ 10010 & \lfloor\underline{1011} \\
\underline{1011} & \ 1 \\
100 &
\end{array};
\qquad
\begin{array}{rl}
\oplus\ 11001 & \lfloor\underline{1011} \\
\underline{1011} & \ 11 \\
\oplus\ 1111 & \\
\underline{1011} & \\
100 &
\end{array};$$

ошибки в четвертых битах

$$\begin{array}{rl}
\oplus\ 10100 & \lfloor\underline{1011} \\
\underline{1011} & \ 1 \\
010 &
\end{array};
\qquad
\begin{array}{rl}
\oplus\ 11111 & \lfloor\underline{1011} \\
\underline{1011} & \ 11 \\
\oplus\ 1001 & \\
\underline{1011} & \\
010 &
\end{array};$$

ошибки в пятых битах

$$\begin{array}{rl}
\oplus\ 10111 & \lfloor\underline{1011} \\
\underline{1011} & \ 1 \\
001 &
\end{array};
\qquad
\begin{array}{rl}
\oplus\ 11100 & \lfloor\underline{1011} \\
\underline{1011} & \ 11 \\
\oplus\ 1010 & \\
\underline{1011} & \\
001 &
\end{array}.$$

Как видим, все синдромы уникальны и не зависят от вектора-символа, а зависят от локализации ошибки.

Можно искать синдромы и по векторам ошибок:

Ошибка в первом бите

$$\begin{array}{rl}
\oplus\ 10000 & \lfloor\underline{1011} \\
\underline{1011} & \ 1 \\
110 &
\end{array};$$

Ошибка во втором бите

$$\begin{array}{rl}
\oplus\ 01000 & \lfloor\underline{1011} \\
\underline{1011} & \ 01 \\
011 &
\end{array};$$

Ошибка в третьем бите

$$\begin{array}{r|l} \underline{0\;0\;1\;0\;0} & \underline{1\;0\;1\;1} \\ 1\;0\;0 & 0\;0 \end{array};$$

Ошибка в четвертом бите

$$\begin{array}{r|l} \underline{0\;0\;0\;1\;0} & \underline{1\;0\;1\;1} \\ 0\;1\;0 & 0\;0\;0 \end{array};$$

Ошибка в пятом бите

$$\begin{array}{r|l} \underline{0\;0\;0\;0\;1} & \underline{1\;0\;1\;1} \\ 0\;0\;1 & 0\;0\;0 \end{array};$$

Как видим синдромы ошибок полностью совпали с синдромами ошибочных символов. Все синдромы одиночных ошибок различны, это значит, что возможно исправление всех одиночных ошибок. Приведем соответствие векторов ошибок и синдромов

$$\begin{array}{ll} 0\;0\;0\;0\;0 & 0\;0\;0 \\ 1\;0\;0\;0\;0 & 1\;1\;0 \\ 0\;1\;0\;0\;0 & 0\;1\;1 \\ 0\;0\;1\;0\;0 & 1\;0\;0 \\ 0\;0\;0\;1\;0 & 0\;1\;0 \\ 0\;0\;0\;0\;1 & 0\;0\;1 \end{array}.$$

Исправление ошибок при систематическом кодировании и синдромном циклическом декодировании производится следующим образом:

1. Определяются синдромы ошибок.
2. Из соответствия векторов ошибок и синдромов определяются вектора ошибок.
3. Ошибочные символы суммируются по модулю 2 с соответствующими векторами ошибок и тем самым ошибки исправляются.

6. Задание на вторую контрольную работу

Используя теоретический материал методического пособия, рассмотреть двоичный, блочный, линейный, циклический, систематический код $(6, 3)$ и представить все синдромы одиночных ошибок. Структура циклического кодера соответствует примитивному полиному третьего порядка $1x^3 + 0x^2 + 1x^1 + 1x^0$ или вектору $1\ 0\ 1\ 1$.

Контрольную работу представить отдельной пояснительной запиской, содержащей все необходимые разделы с пояснениями и выводами. Использование подходящих программных продуктов не возбраняется. Необходимо лишь отметить, что ситуация частично осложняется необходимостью программной реализации арифметики по модулю 2.

7. Заключение

Таким образом, в методическом пособии приведены необходимые теоретические сведения по линейным блочным алгебраическим и циклическим кодам. На конкретных примерах проиллюстрированы: содержание, методика и объем исследований.

Выполнение контрольных работ призвано упражнениями закрепить полученные теоретические знания, а оформление пояснительных записок позволяет продемонстрировать: знания стандарта оформления, навыки структурированного представления результатов, связность изложения и логичность выводов.

Список использованных источников

1. Васильев, К.К. Теория электрической связи: учебное пособие / К.К. Васильев, В.А. Глушков, А.В. Дормидонтов, А.Г. Нестеренко; под общ. ред. К.К. Васильева. – Ульяновск: УлГТУ, 2008.– 452 с.
2. Вернер, М. Основы кодирования. Учебник для ВУЗов. – М.: Техносфера, 2004.- 288 с.
3. Голдсмит, А. Беспроводные коммуникации. Под ред В.А. Березовского, (сер. Мир радиоэлектроники). – М.: Техносфера, 2011.- 904 с.
4. Кологривов, В. А. Помехоустойчивое кодирование и синдромное декодирование блоковых кодов: Учебно-методическое пособие по лабораторной и самостоятельной работе и практическим занятиям [Электронный ресурс] / В. А. Кологривов, А. А. Алишери — Томск: ТУСУР, 2018. — 21 с. — Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/7541
5. Кологривов, В. А. Помехоустойчивое кодирование и квазисиндромное декодирование блоковых кодов: Учебно-методическое пособие по лабораторной и самостоятельной работе, и практическим занятиям [Электронный ресурс] / В. А. Кологривов, А. А. Алишери. — Томск: ТУСУР, 2018. — 22 с. — Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/7604
6. Кологривов, В. А. Систематическое циклическое кодирование: Учебно-методическое пособие по лабораторной и самостоятельной работе, и практическим занятиям [Электронный ресурс] / В. А. Кологривов, К. А. Гердт. — Томск: ТУСУР, 2018. — 20 с. — Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/7632
7. Кологривов, В. А. Несистематическое циклическое кодирование: Учебно-методическое пособие по лабораторной, самостоятельной работе и практическим занятиям [Электронный ресурс] / В. А.

Кологривов, К. А. Гердт — Томск: ТУСУР, 2018. — 19 с. — Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/7579