МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

Введение в математику

Учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных и самостоятельной работ для студентов ВУЗа

Томск

2018

УДК 000.00:000.0
ББК 00.000 00
0 00

Пособие составлено в соответствии с тематикой лабораторных работ и самостоятельной работы по дисциплине «Введение в математику». Пособие содержит темы и содержание лабораторных работ, методические указания к их проведению. / сост.: Е.А. Шельмина, И.Г. Афанасьева, Е.В. Мыльникова; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2018. – 64 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. Лабораторные работы

Лабораторная работа №1
Числовые множества. Понятие функции. Классификация функций. Элементарные функции.

Цель работы: получить навыки решения задач с использованием числовых множеств и функций.

1.1. Числовые множества. Их виды и границы. Операции над числовыми множествами: сумма, пересечение, разность.

Первичным понятием теории множеств является понятие самого множества.

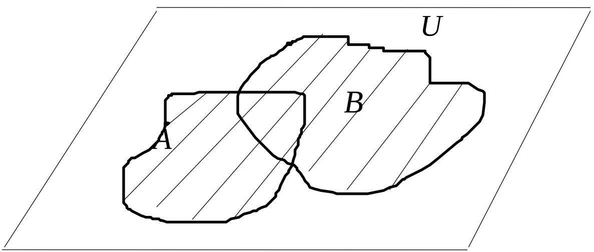
Множество - это совокупность некоторых (произвольных) объектов, объединенных по какому-либо признаку. Элементы множества при этом должны быть различными. Множество обозначается парой скобок $\{...\}$, внутри которых либо просто перечисляются элементы, либо описываются их свойства. Например, $A=\{x \in N / x+2=1\}$ - множество натуральных чисел, удовлетворяющих условию $x+2=1$, очевидно, пусто. $B=\{$ сложение, умножение $\}$ - множество основных арифметических операций.

Если необходимо указать, что объект a является элементом множества A, то пишут $a \in A$ (a принадлежит A), наоборот запись $a \notin A$ говорит о том, что a не принадлежит A.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ и говорят, что множество A является **подмножеством** множества B. Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются **равными**, то есть $A=B$, в противном случае $A \neq B$. Если $M \subset A$ и $M \neq \varnothing$, $M \neq A$, то множество M называется **собственным подмножеством** множества A.

С помощью скобок и операций над множествами можно построить новые множества, более сложные чем исходные.

Объединение. Эта операция над множествами обозначается $A \cup B$, определяется как $C=A \cup B$. Все операции над множествами можно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Если за некоторое универсальное множество, содержащее как подмножества все другие множества, обозначить U (или Ω) и изобразить его в виде всей плоскости, то любое множество $A \subset U$ можно изобразить в виде части плоскости, то есть в виде некоторой фигуры, лежащей на плоскости. C - объединение множеств A и B, C на рисунке заштриховано.



Пересечением двух множеств называется такое множество $C=A \cap B$, которое состоит из элементов, принадлежащих одновременно обоим множествам.

Разностью двух множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят в A и одновременно не входят в B. Если, в частности, A подмножество U, то разность $U \setminus A$ обозначается $\overline{A}$ и называется **дополнением** множества A.

Основные законы алгебры множеств

1) Коммутативный: $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A.$

2) Ассоциативный: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

3) Дистрибутивный: $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{cases}$

4) Законы поглощения: $A \cup A = A,\ A \cap A = A.$

5) Законы де Моргана (двойственности): $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

6) Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} = A.$

7) Закон включения: $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$

8) Закон равенства: $A = B \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow (A \cap B) \vee (\overline{A} \cap \overline{B})).$

Декартово произведение множеств

Если каждому элементу из множества А сопоставлен в соответствие определенный элемент из множества В, то возникает множество, составленное из пар элементов множеств А и В, - **декартово произведение множеств.**

Записывают декартово произведение множеств следующим образом:

А × В = {(a; b) | a ∈ A, b ∈ B}.

Это значит, что если дано множество А = {1,2,3} и множество В = {15,25}, то их декартово произведение будет состоять из пар: А × В = {(1;15), (1;25), (2;15), (2;25), (3;15), (3;25).

Если во множестве А количество элементов равно m, а во множестве В — n, то их декартово произведение будет состоять из m×n элементов.

Следует иметь в виду что А×В и В×А разные множества, так как пары типа (a; b) отличаются от пар тип (b; a).

Примером декартова произведения множеств могут служить: таблица умножения, где умножаются два множества, содержащие натуральные числа; множество точек плоскости с координатами (x; y), где x ∈ A, y ∈ B; множество дробей, в которых числитель принадлежит одному множеству, а знаменатель другому.

Ограниченность числовых множеств, их точные границы. Предельные точки числовых множеств.

Пусть X−произвольное непустое множество действительных чисел. Число $M=max\ X$ называется ***наибольшим (максимальным) элементом*** множества X, если $M\in X$ и для всякого $x\in X$ выполняется неравенство $x\leq M$. Аналогично определяется понятие ***наименьшего (минимального) элемента*** $m=min\ X$ множества X.

Множество X называется ***ограниченным сверху***, если существует действительное число a такое, что $x\leq a$ для всех $x\in X$. Всякое число, обладающее этим свойством, называется ***верхней гранью*** множества X. Для заданного ограниченного сверху множества X множество всех его верхних граней имеет наименьший элемент, который называется ***точной верхней гранью*** множества X и обозначается символом $sup\ X$. Очевидно $sup\ X=max\ X$ тогда и только тогда когда $sup\ X \in X$.

Аналогично определяются понятия ***ограниченного снизу множества, нижней грани и точной нижней грани*** множества X. Последняя обозначается символом $inf\ X$.

Множество X, ограниченное снизу и сверху, называется ***ограниченным***.

Пусть $x\subset R$. Число $x_0\in R$ называется ***предельной точкой*** множества X, если любая окрестность точки x_0 содержит точку из множества X, отличную от x_0, то есть для $\forall\varepsilon>0\ \exists y\in X$, $y\neq x0$: $|y-x0|<\varepsilon$.

Пример №1.

Задание. Даны множества: A = {2,7,8,10}, B = {1,2,4,8}, C = {2,3,5,6,8}. Перечислите элементы множеств: а) A + B, б) B + C, в) $A\cdot B\cdot C$, г) A \ B, д) C \ B

Решение:

а) $A + B = \{2,7,8,10,1,3,5,6\}$ объединение

б) $B + C = \{1,2,4,8,3,5,6\}$

в) $A \cdot B \cdot C = \{2,8\}$ пересечение

г) $A \setminus B = \{7,10\}$ разность

д) $C \setminus B = \{3,5,6\}$

Пример №2.

Задание. Записать множество $A = \{x \in N \mid x^2 - 3x - 4 \le 0\}$, перечислить его элементы.

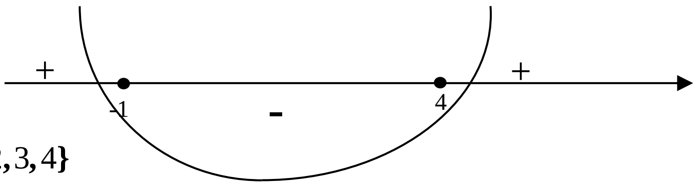
Решение:

$x \in N$ обозначает, что элементы множества А – натуральные числа (1,2,3,4 и т.д.).

В качестве правила исходного множества выступает неравенство: $x^2 - 3x - 4 \le 0$. Чтобы его решить нужно решить уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$ вида $ax^2 + bx + c = 0$. Квадратное уравнение (парабола) можно решить с помощью дискриминанта, обозначается D.

Соответственно, $D = b^2 - 4ac = 25$. Следовательно, корни уравнения $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = 4;-1$

Отмечаем на числовой прямой точки (корни уравнения). Ветви параболы направлены $\uparrow$ так как $a > 0$. Неравенство нестрогое $x \in [-1;\, 4]$.



Ответ: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Пример №3.

Задание. Какие из перечисленных ниже множеств являются ограниченными сверху?

$$A_1 = \{x : x = \frac{1}{2^n}, n \in N\}; \qquad A_6 = \{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in N\};$$

$$A_2 = \{x : x^2 - 6x + 8 = 0\}; \qquad A_7 = \{x : x \in [1,8]\};$$

$$A_3 = \{x : (x-1)(x+2) > 0\}; \qquad A_8 = \{x : x \in (-\infty, +\infty)\}.$$

$$A_4 = \{x : 0 < x < 1\};$$

$$A_5 = \{x : x^2 - 3x < 0\};$$

Решение:

Рассмотрим подробно каждое множество.

A_1 – бесконечное ограниченное множество, так как оно ограничено и сверху, и снизу, его точные грани: $\mathbf{sup}\, A_1 = \mathbf{max}\, A_1 = \frac{1}{2} \in A_1, \mathbf{inf}\, A_1 = 0 \notin A_1$

A_2 – бесконечное ограниченное множество, так как оно ограничено и сверху, и снизу, т.е. $A_2 = \{2, 4\};$

A_3 – ограниченное снизу множество т.к. $x \in (1, +\infty)$, следовательно $\mathbf{inf}\, A_3 = 1 \notin A_3$

A_4 – ограниченное множество так как оно ограничено и сверху, и снизу, его точные грани: $\mathbf{sup}\, A_4 = 1 \notin A_4, \mathbf{inf}\, A_4 = 0 \notin A_4$

A_5 – ограниченное сверху множество т.к. $x \in (-\infty, 0)$, следовательно $\mathbf{sup}\, A_5 = 0 \notin A_5$

A_6 – бесконечное ограниченное множество, так как оно ограничено и сверху, и снизу, его точные грани: $\mathbf{sup}\, A_6 = 1 \notin A_6, \mathbf{inf}\, A_6 = \frac{1}{2} \in A_6$

A_7 –ограниченное множество, так как оно ограничено и сверху, и снизу, его точные грани: $\mathbf{sup}\, A_7 = \mathbf{max}\, A_7 = 8 \in A_7$ **,** $\mathbf{inf}\, A_7 = 1 \in A_7$

A_8 – бесконечное множество, не ограниченное как сверху, так и снизу.

Ответ: A_1, A_2, A_4, A_5, A_6, A_8.

Пример №4

Задание. Найти декартовое произведение множеств: A = {1,8,5}, B = {3,6}

Решение:

Декартовым произведением множеств A и B называется множество

$A \times B = \{(a,b)\ a \in A,\ b \in B\}$, где $A \times B$ - упорядоченные пары элементов.

$A \times B = \{(1,3),(1,6),(8,3),(8,6),(5,3),(5,6)\}$

1.2.Понятие функции. Понятие графика функции. Линейная функция. Классы функций.

Определение. Постоянной называется величина, сохраняющая одно и то же значение. Если величина сохраняет постоянное значение лишь в условиях данного процесса, то она называется параметром. Переменной называется величина, которая может принимать различные числовые значения.

Например, при равномерном движении $S = vt$, где S – путь и t – время есть постоянные величины, а v – скорость является параметром.

Если каждому элементу x множества X $(x \in X)$ ставится в соответствие один элемент y множества Y $(y \in Y)$, то говорят, что на множестве X задана **функция** $y = f(x)$.

При этом x называется независимой переменной (или аргументом), y – зависимой переменной, а f обозначает закон соответствия.

Множество X называется **областью определения** (или существования) функции и обозначается как $D(f)$, а множество Y – **областью значений** функции и обозначается как $E(f)$.

Существует несколько **способов задания** функции:

- **аналитический**: функция задается в виде формулы или закона соответствия: $y = f(x)$;

- **табличный**: значения функции перечисляются в виде таблицы с указанными значениями аргумента;

- **графический**: функция изображается в виде графика;

- **словесный**: функция описывается правилом ее составления.

Определение. Если $y = f(x)$ и $u = \varphi(x)$ – функции своих аргументов, причем область определения функции $f(x)$ содержит область значений функции $\varphi(x)$, то каждому x из области определения функции $\varphi(x)$ соответствует y такое, что $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Эта функция, определяемая соответствием $y = f[\varphi(x)]$, называется **сложной** функцией, например, если $y = u^2$, где $u = \sin x$, то $y = (\sin x)^2 = \sin^2 x$.

Функции обладают следующими **основными свойствами**:

1. Четность и нечетность. Функция называется **четной**, если для любых значений x из ее области определения выполняется условие: $f(-x) = f(x)$.

Функция называется **нечетной**, если для любых значений x из ее области определения выполняется условие: $f(-x) = -f(x)$.

Если функция не является ни четной, ни нечетной, то она называется функцией **общего вида**.

2. Монотонность. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** (**убывающей**) на промежутке X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции. Возрастающие или убывающие функции относят к строго монотонным функциям.

Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 < x_2$. Тогда функция возрастает на промежутке X, если $f(x_1) < f(x_2)$, и убывает, если $f(x_1) > f(x_2)$.

Если для условия $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 < x_2$ выполняется нестрогое неравенство: $f(x_1) \le f(x_2)$ (или $f(x_1) \ge f(x_2)$), то функция называется **невозрастающей (или неубывающей)**.

3. Ограниченность. Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на промежутке X, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$. Иначе функция называется **неограниченной**.

4. Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется **периодической** с периодом $T \ne 0$, если для любых x из области определения функции $f(x+T) = f(x)$.

Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида *y=kx+b*.

В уравнении функции число k, которое мы умножаем на x называется коэффициентом наклона.

Например, в уравнении функции *y=-2x+3 k=-2 b=3*;

Классификация функций

К **основным элементарным** функциям относятся:

- степенная функция $y = x^n$;

- показательная функция $y = a^x$;

- логарифмическая функция $y = \log_a x$;

- тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$;

- обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$.

Элементарными называются все функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью алгебраических действий и образования сложных функций. Например, функции $y = x + \lg \cos x$, $y = 3^{\sin x + \cos x}$ являются элементарными.

Пример №1

Задание: Найти области определения следующих функций:

1) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$
2) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$
3) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$
4) $y = \mathbf{lg}(x + 3)$
5) $y = \mathbf{arcsin}(x - 2)$

Решение:

1) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

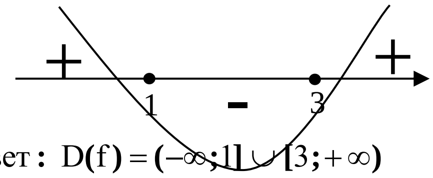
подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$x^2 - 4x + 3 \geq 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 16 - 4*1*3 = 4$

$x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = 3;\ 1$



Ответ: $D(f) = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

2) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$

точки, в которых знаменатель обращается в ноль.

Решим квадратное уравнение:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$D = 1$

$x_{1/2} = 2;\ 1$

Данные значения не входят в $D(f)$

$D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

3) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$

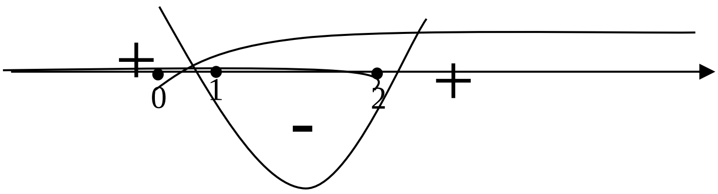
Должны выполняться 2 условия:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ 2x - x^2 > 0 \end{cases}$$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ $\quad$ $2x - x^2 > 0$

$D = 1$ $\quad$ $x(2 - x) > 0$

$x_{1/2} = 2;\ 1$ $\quad$ $x > 0 \quad x < 2$



Ответ: $D(f) = (0; 1]$

4) $y = \mathbf{lg}(x+3)$

Натуральный логарифм $(\mathbf{ln}\,x)$ – логарифм по основанию e $(\mathbf{log}_e\,x)$

Десятичный логарифм $(\mathbf{lg}\,x)$ – логарифм по основанию 10 $(\mathbf{log}_{10}\,x)$

$\mathbf{log}_a\, b = c \quad a > 0,\, a \neq 1,\; b > 0$

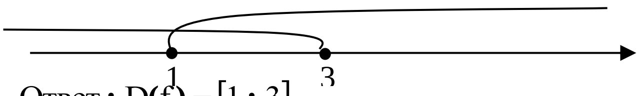
$x + 3 > 0 \quad x > -3$

Ответ: $D(f) = (-3;\, +\infty)$

5) $y = \mathbf{arcsin}(x-2)$

$-1 \le x - 2 \le 1$

$$\begin{cases} x - 2 \le 1 \\ x - 2 \ge -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \le 3 \\ x \ge 1 \end{cases}$$



Ответ: $D(f) = [1\,;\,3]$

Пример №2

Задание:

Определить, какие из данных ниже функций являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

1) $y = 3 - x^2 + 2x^4$ 2) $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ 3) $y = \mathbf{ln}\dfrac{1-x}{1+x}$

Решение:

1) $y = 3 - x^2 + 2x^4$

Условия:

$f(x) = f(-x)$ функция четная

$f(-x) = -f(x)$ функция нечетная

$f(-x) = 3 - (-x)^2 + 2(-x)^4 = 3 - x^2 + 2x^4$ четная

2) $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

$f(-x) = \dfrac{-x-1}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x-1}{x^2+1}$ функция ни четная

Проверим на условие нечетности т.е. $f(-x) = -f(x)$

$-f(x) = -\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right) = \dfrac{-x+1}{x^2+1}$

Ответ: функция ни четная, ни нечетная.

3) $y = \mathbf{ln}\dfrac{1-x}{1+x}$

Ответ: функция ни четная, ни нечетная из свойств натурального логарифма.

Пример №3

Задание:

Найти период функции:

а) $y = \mathbf{sin}\,3x$ б) $y = \mathbf{cos}\,\dfrac{x}{2}$ в) $y = \mathbf{sin}\,\dfrac{2x}{7} + 5\,\mathbf{cos}\,\dfrac{x}{5}$

Решение:

Функция $y = f(x),\ x \in X$ имеет период T, если для любого $x \in X$ выполняется равенство

$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$

Функция, имеющую отличный от нуля период T, называют периодической.
Если функция периодическая с периодом T, то при любом целом $k \neq 0$ число вида kT тоже период этой функции.

а) $y = \sin 3x$

Пусть T – основной период функции $y = \sin 3x$

$f(x) = \sin 3x \Rightarrow f(X + T) = \sin 3(X + T) = \sin(3X + 3T)$

Период функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ равен 2π

Чтобы число T было периодом f должно выполняться тождество

$\sin(3X + 3T) = \sin 3x \Rightarrow 3T = 2\pi n$

по условию нужно найти основной период

$$3T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

Ответ: $T = \frac{2\pi}{3}$

б) $y = \cos\frac{x}{2}$

$$f(x) = \cos\frac{x}{2} \Rightarrow f(X + T) = \cos\frac{x}{2}(X + T) = \cos\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}T\right)$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}T\right) = \cos\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}T = 2\pi \Rightarrow T = 4\pi$$

Ответ: $T = 4\pi$

Основной период функции $y = \cos kx$ или $y = \sin kx$ равен $\frac{2\pi}{k}$

в) $y = \sin\frac{2x}{7} + 5\cos\frac{x}{5}$

$$\sin\frac{2x}{7} \Rightarrow f(X + T) = \sin\frac{2x}{7}(X + T) = \sin\left(\frac{2}{7}X + \frac{2}{7}T\right) = \sin\frac{2x}{7}$$

$$\frac{2}{7}T = 2\pi \Rightarrow T = 7\pi$$

$$\cos\frac{x}{5} \Rightarrow f(X + T) = \cos\frac{x}{5}(X + T) = \cos\left(\frac{1}{5}X + \frac{1}{5}T\right) = \cos\frac{x}{5}$$

$$\frac{1}{5}T = 2\pi \Rightarrow T = 10\pi$$

Период данной функции будет наименьшее кратное чисел 7π и 10π, т.е. $T = 70\pi$

Пример №4

Задание:

Вычислить значение функции в заданных точках:

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + 1};\quad f(2),\ f\left(\frac{5}{2}\right),\ f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Решение:

$$f(2)=\frac{2*2-3}{2^2+1}=\frac{1}{5}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{2*\frac{5}{2}-3}{\left(\frac{5}{2}\right)^2+1}=\frac{8}{29}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2*\frac{1}{x}-3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}=\frac{(2-3x)x}{(1+x^2)}$$

Пример №5

Задание:

Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{9\pi}{2}-18x-18\sqrt{2}\cos x+97 \text{ на полуинтервале } \left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{5}\right).$$

Решение:

$$y'=\left(\frac{9\pi}{2}-18x-18\sqrt{2}\cos x+97\right)'=-18+18\sqrt{2}\sin x$$

$$-18+18\sqrt{2}\sin x=0$$

$$\sin x=\frac{18}{18\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x=\frac{\pi}{4}$$

Точка $x=\frac{\pi}{4}$ принадлежит заданному интервалу.

Вычислим значение функции в точках $:-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}$

$$\cos(-x)=\cos x$$

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{9\pi}{2}-18\left(-\frac{\pi}{2}\right)-18\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+97=\frac{9\pi}{2}+9\pi+97=\frac{27\pi}{2}+97\approx 139{,}39$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9\pi}{2}-18\left(\frac{\pi}{4}\right)-18\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+97=\frac{9\pi}{2}-\frac{18\pi}{4}-18\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+97=$$

$$=-18\sqrt{2}*\frac{\sqrt{2}}{2}+97=-18+97=79$$

Ответ : 79

Пример №6

Задание:

Даны функции $f(x)=\frac{5x^2+2}{7x^2+3},\varphi(x)=\frac{1}{x+1}$. Найдите $f[f(x)],\ \varphi[\varphi(x)],\ f[\varphi(x)],\ \varphi[f(x)]$.

Решение:

$$f[f(x)]=\frac{5\left(\frac{5x^2+2}{7x^2+3}\right)^2+2}{7\left(\frac{5x^2+2}{7x^2+3}\right)^2+3}=\frac{\frac{5\left(5x^2+2\right)^2+2\left(7x^2+3\right)^2}{\left(7x^2+3\right)^2}}{\frac{7\left(5x^2+2\right)^2+3\left(7x^2+3\right)^2}{\left(7x^2+3\right)^2}}=\frac{223x^4+184x^2+38}{322x^4+266x^2+55}$$

$$\varphi[\varphi(x)]=\frac{1}{\frac{1}{x+1}+1}=\frac{x+1}{2+x}$$

$$\varphi[f(x)]=\frac{1}{\frac{5x^2+2}{7x^2+3}+1}=\frac{7x^2+3}{12x^2+5}$$

$$f[\varphi(x)]=\frac{5\left(\frac{1}{x+1}\right)^2+2}{7\left(\frac{1}{x+1}\right)^2+3}=\frac{7+4x+2x^2}{10+6x+3x^2}$$

Пример №7

Задание:

Представьте сложную функцию в виде цепочки элементарных функций:

а) $y=\sqrt{x^2+8x-17}$ б) $y=\mathbf{lg}\left(\mathbf{cos}\left(\sqrt{5x-3}\right)\right)$

Решение:

а) $y=\sqrt{x^2+8x-17}$

Пусть $t=x^2+8x-17$ (квадратная функция)

$y=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$ (степенная функция)

б) $y=\mathbf{lg}\left(\mathbf{cos}\left(\sqrt{5x-3}\right)\right)$

Пусть $t=5x-3$ (линейная функция)

$z=\sqrt{t}$ (степенная функция)

$p=\mathbf{cos}\,z$ (тригонометрические функции)

$y=\mathbf{lg}\,p$ (логарифмические функции)

Пример №8

Задание:

Построить график функции:

а) $f(x)=|x-1|+|x+3|$ б) $f(t)=|x^2-x-20|$

Решение:

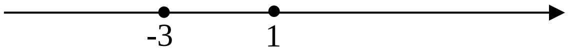
$$|x|=\begin{cases} x, x\ge 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$

Находим нули подмодульных выражений

$x-1=0 \quad x+3=0$

$x=1 \qquad x=-3$

Разбиваем ось на промежутки



Для каждого промежутка запишем функцию:

1) $x < -3$

$x-1<0 \quad x+3<0$

$|x-1| = -x+1$

$|x+3| = -x-3$

$y = -x+1-x-3 = -2x-2$

пусть $x_1 = -4 \Rightarrow y_1 = 6$

$x_2 = -5 \Rightarrow y_2 = 8$

2) $-3 \le x \le 1$

$x+3>0$

$|x+3| = x+3$

$|x-1| = -x+1$

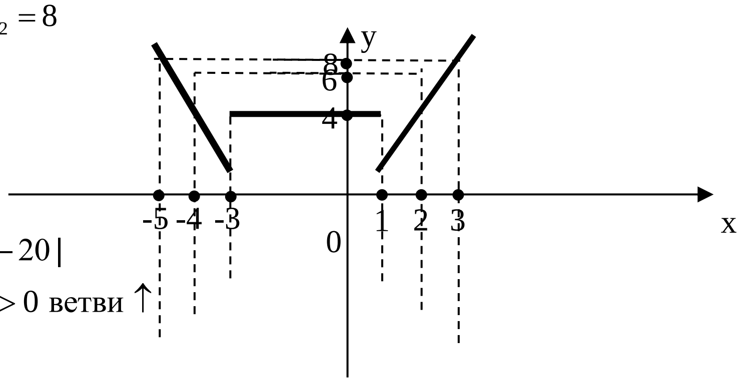
$y = -x+1+x+3 = 4$

3) $x > 1$

$y = x-1+x+3 = 2x+2$

пусть $x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 6$

$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 8$



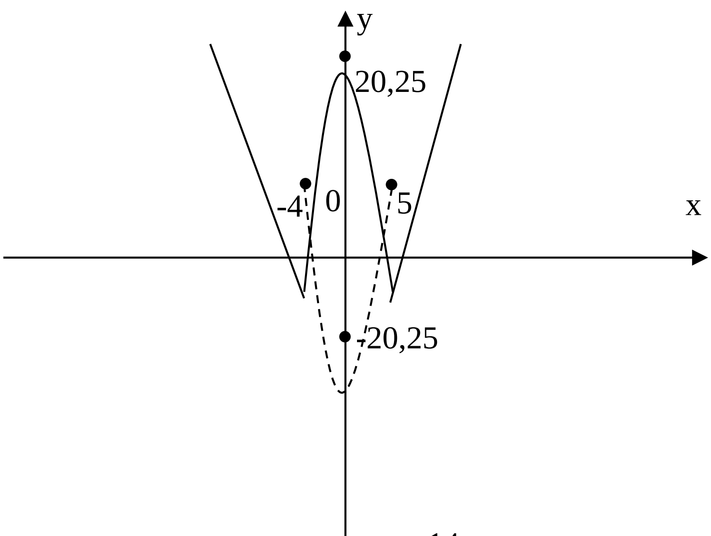
б) $f(t) = |x^2 - x - 20|$

$x^2 - x - 20 = 0 \quad a > 0$ ветви $\uparrow$

$x_{1/2} = 5; -4$

$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$

$y_в = -20,25$



Задачи для самостоятельного решения

1) Даны два множества: A – отрезок [1;10] и B – полуинтервал [2;6). Перечислите элементы множеств: а) A + B в) $A \cdot B$, г) A \ B, д) B \ A
2) Найти объединение множеств A и B, если $A = \{x \mid x^2 + 2x - 3 \le 0\}$ и $B = \{x \mid x^2 - 6x - 16 \le 0\}$.
3) Записать множество
   $A = \{x \in R \mid x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$,
   перечислить его элементы.
4) Найти декартовое произведение множеств: A = {4,1,5}, B = {3,6}.
5) Для множества X = [-1,1] найти max X, min X, sup X и inf X если они существуют.
6) Какие из перечисленных ниже множеств являются ограниченными снизу?

$A_1 = \{x : |x| > 1\};$ $A_6 = \{x : 0 \le x < +\infty\};$

$A_2 = \{x : |x| < 1\};$ $A_7 = \{1,10,100,1000\};$

$A_3 = \{x : x < 0\};$ $A_8 = \{x : x(x-5) < 0\};$

$A_4 = \{x : -4 < x \le 3\};$ $A_9 = \{x : x \in (-\infty, -1]\};$

$A_5 = \{x : -\infty < x < 0\};$

7) Найти области определения следующих функций:

$$а)\ f(x) = \sqrt{x+1}; \quad б)\ f(x,y) = \arccos\frac{x+y}{2} \quad в)\ f(x) = \left[\frac{\arcsin\frac{3-2x}{5}}{\sqrt{3-x}}\right].$$

8) Определить, какие из данных ниже функций являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

$$а)\ y = x^3 + 3 \quad б)\ y = \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad в)\ y = x\sin x + 2\cos x$$

9) Вычислить значение функции в заданных точках:

$$f(x) = x^2 - x + 1; \quad f(2), \quad f(a+1), \quad f\left(\frac{2}{7}\right).$$

10) Найти период функции:

$$а)\ y = \cos 5x; \quad б)\ y = \sin 2x + \mathrm{tg}\frac{x}{2}; \quad в)\ y = \sin^2 x.$$

11) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.
    $f(x) = x^2 - 2x + 5,\ x \in [-1, 4].$
12) Пусть $f(x) = x^2$ и $\varphi(x) = 2^x$. Найдите: а) $f[\varphi(x)]$, б) $\varphi[f(x)]$.
13) Дано сложная функция
    $f(x) = \sqrt{\log_2(\sin x)},$
    представьте в виде цепочки элементарных функций.
14) Построить график функции:
    а) $f(x) = |x^2 - 4|$ б) $f(t) = |x+3|$

Лабораторнаяработа №2

Предел последовательности и предел функций. Непрерывность и дифференцируемость. Замечательные пределы. Экономический смысл производной в экономике. Приложение производной в экономической теории.

Цель работы: получение навыков вычисления пределов и производных.

2.1. Последовательности и их виды. Понятие предела последовательности. Понятие предела функции. Понятие непрерывности и дифференцируемости.

Пусть каждому натуральному числу поставлено в соответствие определенное действительное число: числу 1 соответствует число a_1, числу 2 – число a_2, числу 3 – число a_3, и т.д., числу n число a_n. Тогда говорят, что задана числовая последовательность и пишут: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$, где $n = 1,2,3,\ldots$.

Каждое значение a_n $(n = 1,2,3,\ldots)$ называется *элементом* или *членом последовательности*, а число n – его номером.

Обозначают последовательность как a_n, $n = 1,2,3,\ldots$, либо $\{a_n\}$, либо перечислением ее членов.

Числовая последовательность всегда содержит бесконечное множество элементов, среди которых могут быть равные. Например, 1) $\{n\} = \{1,2,3,\ldots\}$; 2) $\{\cos \pi x\} = \{-1,1,-1,1,\ldots,1\}$.

Способы задания последовательности

Аналитический. При данном способе последовательность задается формулой n-го члена или, говорят, общего члена последовательности. Например, формулой $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ задается последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$, у которой: $a_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}; a_2 = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}; a_3 = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}, \ldots$, то есть последовательность $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots$.

Рекуррентный. При данном способе задания последовательности любой ее член, начиная с некоторого, выражается через предшествующие члены. При таком способе задания указывают первый член последовательности и формулу, по которой можно вычислить любой другой ее член по известным предшествующим. Например, пусть $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, тогда:

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3;$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5;$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8,$$

и т.д., в результате имеем последовательность: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$.

Словесный. При данном способе последовательность задается описанием ее членов. Например, число $e = 2{,}71828$ может быть представлено в виде последовательности десятичных приближений с разной степенью точности: $2,; 2{,}7; 2{,}71; 2{,}718; 2{,}7182; 2{,}71828; \ldots$.

Определение. Число a называется **пределом числовой последовательности** $\{x_n\}$, если для любого, сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер

N (зависящий от ε, $N = N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначается предел последовательности как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Иными словами, число a есть предел числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, начиная с которого (при $n > N$) все члены последовательности будут заключены в ε-окрестности точки a. Вне этой окрестности может быть лишь конечное число членов данной последовательности.

Таким образом, «доказать по определению», что число a есть предел последовательности $\{x_n\}$, означает указать способ определения по любому числу $\varepsilon > 0$ номера N, начиная с которого все члены последовательности не выходят за пределы ε-окрестности точки a.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, не имеющая предел – *расходящейся*.

Свойства пределов:

1) если последовательность имеет предел, то он единственный;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} C = C \quad (C = const)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (C \cdot x_n) = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} {x_n}^m = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^m$;

В случае, когда общий член последовательности представляет собой отношение двух многочленов от n (дробь, числитель и знаменатель которой есть многочлены, называется рациональной), чтобы применить свойства предела, надо числитель и знаменатель разделить на старшую степень n, т.е. на максимальную из степеней числителя и знаменателя. Нетрудно убедиться, что в результате такого деления числитель и знаменатель уже имеют пределы и выполняется следующее *правило*: если степень числителя меньше степени знаменателя, рациональная дробь стремится к нулю. Если степени числителя и знаменателя совпадают, предел рациональной дроби равен отношению их старших коэффициентов (т.е. коэффициентов при старшей степени n).

Относительно арифметических действий с последовательностями можно сделать следующие замечания.

Замечание. Если последовательность x_n имеет предел (сходится), а последовательность y_n расходится, их сумма $x_n + y_n$ расходится. Если обе последовательности x_n и y_n расходятся, то их сумма может быть как сходящейся, так и расходящейся последовательностью.

Пусть дана некоторая последовательность $x_n = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Последовательно выбрав из нее элементы, например, только с четными номерами, мы получим новую последовательность, состоящую из чисел x_2, x_4, x_6 и т.д. Фактически сначала мы организовали последовательность номеров $n_k = 2k$, $k = 1,2,3,\ldots\ldots$, а затем выбрали из x_n элементы с номерами n_k. Важно, что при этом мы не возвращались назад, т.е. каждый следующий номер был больше предыдущего: $n_1 < n_2 < \ldots$. Последовательность элементов x_{n_k}, полученная таким образом, называется *подпоследовательностью* последовательности x_n. Ясно, что существует бесконечно много способов выделения подпоследовательности из данной последовательности (т.е. бесконечно много последовательностей номеров n_k). Например, для $x_n = n$: $x_{2k} = \{2,4,6,\ldots\}$; $x_{2k-1} = \{1,3,5,\ldots\}$; $x_{k^2} = \{1,4,9,16,\ldots\}$ и т.д.

Приведем еще одно **свойство предела последовательности**: последовательность x_n имеет предел тогда и только тогда, когда все ее подпоследовательности имеют предел, и притом один и тот же.

Определение. Говорят, что **последовательность стремится к бесконечности**, если, начиная с некоторого номера N, ее элементы становятся по модулю больше любого наперед заданного положительного числа $|x_n| > M$.

Если при этом все элементы последовательности, начиная с некоторого номера, остаются положительными, говорят, что последовательность сходится к «плюс бесконечности»: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, а если отрицательными — то к «минус бесконечности»: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Определение. Последовательность, сходящаяся к бесконечности, к $+\infty$ или к $-\infty$, называется *бесконечно большой* (б.б.). В свою очередь, последовательность, сходящаяся к нулю, называется *бесконечно малой* (б.м.).

Если об отношении $\dfrac{x_n}{y_n}$ нельзя сказать заранее ничего определенного: оно может иметь предел, стремиться к бесконечности или не иметь никакого предела, то говорят, что имеет место **неопределенность вида** $0/0$.

Неопределенность другого **вида** $(\infty - \infty)$ возникает при вычитании бесконечно большой последовательности из бесконечно большой.

Определение. Число a называется **пределом** функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x) - a| < \varepsilon$. Обозначение предела функции: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

Часто исследуется случай, когда x_0 – бесконечная величина. В таких случаях предел функции определяется следующим образом: число a называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ или $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число N, чтобы для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, выполнялось неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале, а x_0 и x два произвольных значения аргумента из этого интервала. Разность между двумя значениями аргумента называется **приращением аргумента** и обозначается $x - x_0 = \Delta x$, откуда следует, что значение аргумента x можно определить через x_0 и его же приращение:

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Разность между двумя значениями функции называется **приращением функции** и обозначается: $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение. Функция называется непрерывной в точке x_0, если: а) функция определена в точке x_0 и в некоторой окрестности, содержащей эту точку; б) предел приращения функции равен 0 при стремлении приращения аргумента к нулю, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)=0.$$

Замечание. Для непрерывной функции возможна перестановка символов предела и функции:, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$.

Функция называется **непрерывной на промежутке**, если она непрерывна в каждой его точке. Если некоторая функция $f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной, то эта точка называется **точкой разрыва**, а функция – **разрывной** в данной точке.

Свойства функций, непрерывных в точке:

1. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма $f(x)+\varphi(x)$, произведение $f(x)\cdot\varphi(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (при условии $\varphi(x)\neq 0$) являются функциями, непрерывными в точке x_0.
2. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)>0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)>0$.
3. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке u_0, а функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f\left[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right]$, то есть под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.

Свойства функций, непрерывных на отрезке:

1. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.
2. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M (**теорем Вейерштрасса**).
3. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и значения на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдется точка $\xi\in(a,b)$ такая, что $f(\xi)=0$ (**теорема Больцано-Коши**).

Определение. Функция называется **непрерывной слева** в точке x_0, если левый предел в этой точке существует и равен значению функции: $f(x_0-0)=f(x_0)$. Аналогично определяется **непрерывность справа**: $f(x_0+0)=f(x_0)$.

Из определения вытекает следующее **свойство** непрерывной функции в точке: если функция непрерывна в точке x_0 как слева, так и справа, то она непрерывна в этой точке (все три числа $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ и $f(x_0)$ должны быть равны между собой). Фраза «левый и правый пределы имеют смысл (или существуют)», означает, что они конечны.

Если функция имеет предел в точке x_0 и при этом разрывна в этой точке, говорят, что в точке x_0 имеется ***устранимый разрыв***. В этом случае необходимо доопределить функцию в этой точке, например, определив ее предел.

Неустранимым разрывом называется разрыв, когда предела функции в точке не существует. При этом выделяют разрывы I-го и II-го рода.

Если для функции в точке x_0 имеют смысл оба числа $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ и при этом функция разрывна, то говорят, что в точке x_0 имеет место **разрыв I-го рода**. Все устранимые разрывы являются разрывами I-го рода. Величина $\Delta = \left|f(x_0+0) - f(x_0-0)\right|$ называется **скачком функции**.

Если не существует конечного левого или правого предела (или обоих), говорят о **разрыве II -го рода** (или **бесконечном разрыве**).

Пример №1

Задание:

Если $a_n = \frac{4n-1}{n}$**,** найдите a_{19}**.**

Решение:

$a_{19} = \frac{4*19-1}{19} = \frac{75}{19}$

Пример №2

Задание:

Пусть последовательность {aₙ} определена формулой для явного члена $a_n = 5^n - 7^n + \frac{1}{n}$. Она возрастающая или убывающая?

Решение:

$a_n = 5^n - 7^n + \frac{1}{n}$

$a_{n+1} - a_n = 5^{n+1} - 7^{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(5^n - 7^n + \frac{1}{n}\right) = 5*5^n - 7*7^n + \frac{1}{n+1} - 5^n + 7^n - \frac{1}{n} =$

$= 5^n(5-1) - 7^n(7-1) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = 5^n*4 - 7^n*6 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$5^n*4 - 7^n*6 < 0$

$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n+1} < 0$

$x_{n+1} < x_n$ последовательность убывающая

Сумма этих 2^x отрицательных выражений представляет собой разницу между членами последовательности, поэтому последовательность уменьшается.

Пример №3

Задание:

1) Исследовать последовательность $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{2n-1}{2n}, \ldots$**;** на ограниченность.

Решение:

$\frac{2n-1}{2n} \geq \frac{1}{2} \quad x_n = \frac{2n-1}{2n} \quad M = \frac{1}{2}$

$\forall x \in X \Rightarrow x \leq M$ ограничен. сверху

$\forall x \in X \Rightarrow x \geq M$ ограничен. снизу

$x_n \geq M \Rightarrow$ ограниченная снизу

$x_{n+1} > x_n$ возрастающая последовательсть

Пример №4

Задание:

Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3+5n^2+n+1}{n^3-2n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4+2n^2+4}{n^3+5n+3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3-2n^2+1}{2n^3+6}\right)^3$

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+5}-2}{\sqrt{18n+1}-3}$

Решение:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3+5n^2+n+1}{n^3-2n+2} = \{\text{делим числитель и знаменатель на старшую степень величины } n\} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(1-\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\cancel{\frac{5}{n}}^{0}+\cancel{\frac{1}{n^2}}^{0}+\cancel{\frac{1}{n^3}}^{0}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\cancel{\frac{2}{n^2}}^{0}+\cancel{\frac{2}{n^3}}^{0}\right)} = 3$$

$$б) \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+2n^2+4}{n^3+5n+3} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} n^4\left(1+\cancel{\frac{2}{n^2}}+\cancel{\frac{4}{n^4}}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} n^4\left(\cancel{\frac{1}{n}}+\cancel{\frac{5}{n^3}}+\cancel{\frac{3}{n^4}}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{0} = \infty$$

$$в) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3-2n^2+1}{2n^3+6}\right)^3 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$г) \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{n^2+3n+1-\left(n^2+1\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+1}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3n}{\left(\sqrt{n^2\left(1+\cancel{\frac{3}{n}}+\cancel{\frac{1}{n^2}}\right)}+\sqrt{n^2\left(1+\cancel{\frac{1}{n^2}}\right)}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

$$д) \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+5}-2}{\sqrt{18n+1}-3}$$

Старшая степень числителя совпадает со старшей степенью знаменателя и равна $n^{\frac{1}{2}}$.

Вынесем $n^{\frac{1}{2}}$ за скобку в числителе и знаменателе и сократим на него:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+5}-2}{\sqrt{18n+1}-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{n\left(2+\cancel{\frac{5}{n}}\right)}-2}{\sqrt{n\left(18+\cancel{\frac{1}{n}}\right)}-3}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2}{18}}=\frac{1}{3}$$

Пример №5

Задание:

Используя теорему о существовании предела монотонной ограниченной последовательности, докажите существование следующих пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+2}+\frac{1}{3^3+3}+\ldots+\frac{1}{3^n+n}\right)$$

Решение:

$x_1=\frac{1}{3+1}$, $x_2=\frac{1}{3^2+2}$, ... , $x_n=\frac{1}{3^n+n}$

$x_1>x_2>\ldots>x_n$

Данная последовательность монотонно убывает

Последовательность является ограниченной сверху, поскольку для всех $n=1,2,3,\ldots,n$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{3^n+n}\le\frac{1}{3+1}$$

Пример №6

Задание:

Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin4x}{x}$ б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{tg3x}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg2x}{x}$

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin5x}{x}$ д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos4x-\cos3x}{x^2}$

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin4x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{4\sin4x}{4x}=4$

б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{tg3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{5\sin5x}{5x}}{\frac{3tg3x}{3x}}=\frac{5}{3}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\operatorname{arctg}2x}{2x}=2$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\arcsin 5x}{5x}=5$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 3x}{x^2}=\left\{\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}*\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right\}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{7x}{2}*\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2*\frac{7}{2}\sin\frac{7x}{2}*\sin\frac{x}{2}}{\frac{7x}{2}*x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-7*\sin\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}*7*\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=-\frac{-7}{2}$$

Пример №7

Задание:

Найдите следующие пределы:

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{x^4+1}\right)^{2x^2+3};\ \text{б)}\lim_{x\to 0}\left(1+\sin^2 4x\right)^{\frac{1}{x}};\ \text{в)}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+6}{x^2+4}\right)^{x^4}.$$

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{x^4+1}\right)^{2x^2+3}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$ (второй замечательный предел)

$\frac{1}{n}=\frac{x^2}{x^4+1}$ => $n=\frac{x^4+1}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{x^2}{x^4+1}\right)^{\frac{x^4+1}{x^2}}\right)^{\frac{x^2}{x^4+1}}\right)^{2x^2+3}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2x^4+3\right)}{x^4+1}}=e^2$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 4x\right)^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}=e$

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\left(1+\sin^2 4x\right)^{\frac{1}{\sin^2 4x}}\right)^{\sin^2 4x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{x}}=e^0=1$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+6}{x^2+4}\right)^{x^4}$

$$\frac{x^2+6}{x^2+4}-1=\frac{2}{x^2+4}$$

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{2}{x^2+4}\right)^{\frac{x^2+4}{2}}\right)^{\frac{2}{x^2+4}}\right)^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4}{x^2+4}}=e^{\infty}$$

Пример №8

Задание:

Найти предел:

$$\text{а) }\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2};\ \text{б) }\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2};\ \text{в) }\lim\limits_{x\to2}(x^3+4x-5)$$

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-5)(x-1)}{(x-2)(x-1)}=4$

$x^2-6x+5=0$

$D=16$, $x_{1/2}=5;1$

$x^2-3x+2=0$

$D=1$, $x_{1/2}=2;1$

б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{1}{4}$

в) $\lim\limits_{x\to2}(x^3+4x-5)=\lim\limits_{x\to2}(2^3+4*2-5)=11$

Пример №9

Задание:

Исследовать на непрерывность функцию $y=x^2-2x$.

Решение:

$D(f)=(-\infty;+\infty)$

Найдем приращение заданной функции Δy произвольной точке x:

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)-(x^2-2x)=$

$=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-2x-2\Delta x-x^2+2x=2x\Delta x+\Delta x^2-2\Delta x$

Функция f(x) непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x_0)$:

$$\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta f(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$$

Вывод: $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}\left(2x\Delta x+\Delta x^2-2\Delta x\right)=0,$ следовательно функция $y=x^2-2x$ является непрерывной.

Пример №10

Задание:

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$

Решение:

$$f(x)=\frac{x^2-6x+8}{x-4}$$

$x=4-$точка разрыва функции

Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 4+0}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-4)}=2$$

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-4)}=2$$

Односторонние пределы конечны и равны. Во всех остальных точках функция определяется формулой f(x)=x-2 непрерывна.

Пример №11

Задание:

Исходя из определения, докажите, что функция $f(x)=x^2+4x$ дифференцируема в любой точке x_0 и $f'(x_0)=2x_0+4$.

Решение:

Находим $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$

$\Delta f-$приращение функции при переходе из x_0 в x.

$$x-x_0=\Delta x$$

$$\Delta f=(x_0+\Delta x)^2+4(x_0+\Delta x)-(x_0^2+4x_0)=$$

$$=x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2+4x_0+4\Delta x-x_0^2-4x_0=$$

$$=2x_0\Delta x+\Delta x^2+4\Delta x$$

$$\Delta f=A\Delta x+\alpha(x_0,\Delta x) \qquad A=f'(x_0)$$

$A\Delta x$ обозначают $df-$дифференциал функции

$$A\Delta x=2x_0\Delta x+4\Delta x \qquad \alpha(\Delta x)=\Delta x^2$$

Т.к. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)=0$

то $\alpha(\Delta x)$- бесконечно малая порядка выше первого относительно Δx.

2.2.Задача о непрерывном начислении процентов

Рассмотрим задачу о непрерывном начислении процентов на следующем примере:

Первоначальный вклад в банк составил Q_0 = 100 000 денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно p=7% годовых. Необходимо найти размер вклада через t=10 лет.

Решение:

При 7% годовых размер вклада ежегодно будет увеличиваться в

$\left(1+\dfrac{7}{100}\right)$раз, т.е. $Q_1=Q_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$

$$Q_2=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,\ldots,Q_t=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$$

Если начислять проценты по вкладам не один раз в году, а n раз, то при том же ежегодном приросте $p\%$ процент начисления за $\frac{1}{n}$ – ю часть года составит $\frac{p\%}{n}$, а размер вклада за t лет при nt начисления составит:

$$Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}$$

В зависимости от частоты начисления процентов наращение суммы осуществляется разными темпами, причем с возрастанием частоты накопленная сумма увеличивается:

$$\lim_{n\to\infty} Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt} = Q * e^{\frac{t*p}{100}} = 100\ 000 * e^{\frac{10*7}{100}} = 201375{,}3$$

2.3. Понятие производной. Таблица производных. Производная от суммы, произведения, частного. Сложная производная. Понятие дифференциала функции.

Пусть дана функция $f(x)$, определенная на некотором интервале (a,b) и непрерывна на нем. Дадим аргументу $x \in (a,b)$ приращение Δx, тогда функция получит приращение Δf : $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$. Отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ – функция от Δ и выражает среднюю скорость изменения функции $f(x)$ относительно аргумента x на интервале $(x, x+\Delta)$.

Определение. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последний стремится к нулю, называется **производной** функции $f(x)$ в точке x и обозначается

$$y'_x = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**. Если функция в точке имеет конечную производную, то функция называется **дифференцируемой** в этой точке. Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X, называется **дифференцируемой на этом промежутке.**

Существует определенная зависимость между непрерывностью функции и ее дифференцируемостью, которая выражается следующей теоремой.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Обратное, вообще говоря, неверно, поэтому непрерывность функции – это необходимое, но не недостаточное условие дифференцируемости функции.

Геометрический смысл производной функции $f(x)$ *в точке* x_0 состоит в том, что $f'(x_0)$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику в точке x_0 относительно оси OX.

Как известно, уравнение прямой можно записать в виде: $y - y_0 = k(x - x_0)$, где k – коэффициент наклона прямой относительно оси OX. Тогда уравнение касательной можно переписать, используя вместо k производную:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Производные основных элементарных функций

1. $\left(x^{n}\right)' = n\cdot x^{n-1}$	8. $(tg\ x)' = \dfrac{1}{\cos^{2}x}$
2. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\cdot \ln a$	9. $(ctg\ x)' = -\dfrac{1}{\sin^{2}x}$
3. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$	10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$
4. $(\log_{a}x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	12. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^{2}}$
6. $(\sin x)' = \cos x$	13. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^{2}}$
7. $(\cos x)' = -\sin x$	

При нахождении производных используют следующие **правила дифференцирования.**

1. $(c)' = 0$, где $c - const$
2. $(cf(x))' = c\cdot f'(x)$
3. $(c\cdot x)' = c$
4. $\left(f(x)\pm g(x)\right)' = f'(x)\pm g'(x)$
5. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
6. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^{2}(x)}$ при $g(x)\neq 0$

Пусть переменная y есть функция от переменной $u(y = f(u))$, а переменная u, в свою очередь, есть функция от независимой переменной x, то есть задана **сложная** функция $y = f[\varphi(x)]$.

Теорема. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x:

$$y' = f'(u)\cdot u'.$$

Пусть $y = f(x)$ – дифференцируемая и строго монотонная функция на некотором промежутке X. Если переменную y рассматривать как аргумент, а переменную x как функцию, то новая функция $x = \varphi(y)$ является обратной к данной и, можно доказать, непрерывной на соответствующем промежутке X.

Теорема. Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции, то есть $x'_{y} = \dfrac{1}{y'_{x}}$.

Пример №1

Задание:

Найдите производную данной функции и вычислите значение производной в точке x_0:

а) $y(x)=4x^{\frac{7}{3}}+5x^{\frac{5}{2}}+\sqrt{x}+1$ в точке $x_0=1$

б) $y(x)=\dfrac{3}{x\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{8}{x^2\sqrt[4]{x^3}}+2$ в точке $x_0=1$

в) $y(x)=\left(x^2+2x+2\right)*\mathbf{arcsin}\left(0,5+x\right)$ в точке $x_0=0$

г) $y=x^4*\operatorname{arctg}2x$ в точке $x_0=\dfrac{1}{2}$

д) $y(x)=\left(x^4+3x^2+2x+3\right)^{20}$ в точке $x_0=0$

е) $y(x)=\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{x}\right)^2$ в точке $x_0=0$

Решение:

а) $y(x)=4x^{\frac{7}{3}}+5x^{\frac{5}{2}}+\sqrt{x}+1=4x^{\frac{7}{3}}+5x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+1$

$$y'=4*\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}+5*\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{28\sqrt[3]{x^4}}{3}+\frac{25\sqrt{x^3}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'(1)=\frac{67}{3}$$

б) $y(x)=\dfrac{3}{x\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{8}{x^2\sqrt[4]{x^3}}+2=\dfrac{3}{x*x^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{8}{x^2*x^{\frac{3}{4}}}+2=$

$$=\frac{3}{x^{\frac{5}{3}}}+\frac{8}{x^{\frac{11}{4}}}+2=3x^{-\frac{5}{3}}+8x^{-\frac{11}{4}}+2$$

$$y'=3*\left(-\frac{5}{3}\right)x^{-\frac{8}{3}}+8\left(-\frac{11}{4}\right)x^{-\frac{15}{4}}$$

$$y'(1)=-27$$

в) $y(x)=\left(x^2+2x+2\right)*\mathbf{arcsin}\left(0,5+x\right)$

$$y'=\left(x^2+2x+2\right)'*\mathbf{arcsin}\left(0,5+x\right)+\left(x^2+2x+2\right)*\left(\mathbf{arcsin}\left(0,5+x\right)\right)'=$$

$$=\left(2x+2\right)\mathbf{arcsin}\left(0,5+x\right)+\left(x^2+2x+2\right)\frac{1}{\sqrt{0,75-x-x^2}}$$

$$y'=\left(\mathbf{arcsin}\left(0,5+x\right)\right)'$$

$$t=0,5+x$$

$$\left(\mathbf{arcsin}\,t\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}*t'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(0,5+x\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{0,75-x-x^2}}$$

$$y'(0)=2*\frac{\pi}{6}+2\frac{1}{\sqrt{0,75}}=\frac{\pi}{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}$$

г) $y = x^4 * \operatorname{arctg} 2x$

$$y' = \left(x^4\right)' \operatorname{arctg} 2x + x^4 \left(\operatorname{arctg} 2x\right)' = 4x^3 \operatorname{arctg} 2x + x^4 \frac{2}{1+4x^2}$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 * \frac{1}{8} * \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{32} * \frac{2}{1+4*\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} * \frac{\pi}{4} + \frac{1}{16} * \frac{2}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{16}$$

д) $y(x) = \left(x^4 + 3x^2 + 2x + 3\right)^{20}$

$t = x^4 + 3x^2 + 2x + 3$

$$y' = \left(t^{20}\right)' = 20t^{19} * t' = 20\left(x^4 + 3x^2 + 2x + 3\right)^{19} * \left(4x^3 + 6x + 2\right);$$

$y'(0) = 40 * 3^{19}$

е) $y(x) = \left(\operatorname{arcctg} \sqrt{x}\right)^2$

$t = \operatorname{arcctg} \sqrt{x}$

$$y' = \left(t^2\right)' = 2t * t' = 2 * \operatorname{arcctg} \sqrt{x} * \left(\operatorname{arcctg} \sqrt{x}\right)' = 2 \operatorname{arcctg} \sqrt{x} * \left(-\frac{1}{(1+x)} * \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

Пусть $d = \sqrt{x}$

$$\left(\operatorname{arcctg} d\right)' = -\frac{1}{1+d^2} * d' = -\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} * \left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{1+x} * \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'(1) = -\frac{\pi}{8}$$

Пример №2

Задание:

Найти производную функции:

$$y(x) = \sqrt{x+1} - \ln\left(1 + \sqrt{x+1}\right)$$

Решение:

$$y' = \left(\sqrt{x+1} - \mathbf{ln}\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right)' = \left(\sqrt{x+1}\right)' - \left(\mathbf{ln}\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} * \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$y' = \left(\sqrt{x+1}\right)'$$

$$t = x+1$$

$$\left(\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t}} * t' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$y' = \left(\mathbf{ln}\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right)'$$

$$t = 1+\sqrt{x+1}$$

$$\left(\mathbf{ln}\, t\right)' = \frac{1}{t} * t' = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} * \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Пример №3

Задание:

Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ от следующих функций:

а) $z = \sqrt{x^2 + y^2} + 2xy$

б) $z = x^4 y^3 + 2y\,\mathbf{ln}\, x$

в) $z = \left(\mathbf{sin}\, x\right)^{\mathbf{cos}\, y} + \left(\mathbf{cos}\, y\right)^{\mathbf{sin}\, x}$

г) $u(x, y) = \left|\frac{\mathbf{sin}\left(x^2 + y^2\right)}{\mathbf{cos}\left(x^2 + y^2\right)}\right|$

Решение:

а) $z=\sqrt{x^2+y^2}+2xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{y=const}}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x+2\left(x'y+xy'\right)_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}*\left(x^2+y^2\right)'_x+$$

$$+2\left(x'y+xy'\right)_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}*2x+2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_{x=const}}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}*2y+2x$$

б) $z=x^4y^3+2y\,\mathbf{ln}\,x$

$$z'_x=\left(\left(x^4\right)'_x y^3+x^4\left(y^3\right)'_x\right)+2\left(y'_x\,\mathbf{ln}\,x+y\left(\mathbf{ln}\,x\right)'_x\right)=4x^3y^3+\frac{2y}{x}$$

$$z'_y=3x^4y^2+2\,\mathbf{ln}\,x$$

в) $z=\left(\mathbf{sin}\,x\right)^{\mathbf{cos}\,y}+\left(\mathbf{cos}\,y\right)^{\mathbf{sin}\,x}$

$$z'_x=\mathbf{cos}\,y*\left(\mathbf{sin}\,x\right)^{\mathbf{cos}\,y-1}\mathbf{cos}\,x+\mathbf{cos}\,y^{\mathbf{sin}\,x}\,\mathbf{ln}\left(\mathbf{cos}\,y\right)\mathbf{cos}\,x$$

$$z'_y=\mathbf{sin}\,x^{\mathbf{cos}\,y}\,\mathbf{ln}\left(\mathbf{sin}\,x\right)\left(-\mathbf{sin}\,y\right)+\mathbf{sin}\,x*\left(\mathbf{cos}\,y\right)^{\mathbf{sin}\,x-1}\left(-\mathbf{sin}\,y\right)$$

г) $u(x,y)=\begin{vmatrix}\mathbf{sin}\left(x^2+y^2\right)\\ \mathbf{cos}\left(x^2+y^2\right)\end{vmatrix}$

$$U'_{1_x}=\mathbf{cos}\left(x^2+y^2\right)*\left(x^2+y^2\right)'_x=\mathbf{cos}\left(x^2+y^2\right)*2x$$

$$U'_{1_y}=\mathbf{cos}\left(x^2+y^2\right)*2y$$

$$U'_{2_x}=-\mathbf{sin}\left(x^2+y^2\right)*\left(x^2+y^2\right)'_x=-\mathbf{sin}\left(x^2+y^2\right)*2x$$

$$U'_{2_y}=-\mathbf{sin}\left(x^2+y^2\right)*2y$$

Пример №4

Задание:
Найдите частные производные второго порядка и вычислите их значение в указанной точке M_0 от функции:

$$u\left(x,y,z\right)=e^{x^2+2y+3z},\ M_0\left(0,0,0\right)$$

Решение:

$$U'_x=e^{x^2+2y+3z}*\left(x^2+2y+3z\right)'_x=e^{x^2+2y+3z}*2x$$

$$U'_y=e^{x^2+2y+3z}*2 \qquad U'_z=e^{x^2+2y+3z}*3$$

$$U_x''=\left(e^{x^2+2y+3z}\right)*\left(x^2+2y+3z\right)'_x*2x+e^{x^2+2y+3z}*\left(2x\right)'_x=e^{x^2+2y+3z}*2x*2x+2*e^{x^2+2y+3z}$$

$$U_y''=4e^{x^2+2y+3z} \qquad U_z''=9e^{x^2+2y+3z}$$

$M_0\left(0,0,0\right)$, следовательно $U_x''\left(0\right)=2$, $U_y''\left(0\right)=4$, $U_z''\left(0\right)=9$

Пример №5

Задание:
Найти производные функций:

а) $y(x) = \left(\sqrt{x} + 5\right)^4$

б) $y = \sin^2 3x$

в) $y = \ln\left(\operatorname{arctg} 5x\right)$

Решение:

а) $y(x) = \left(\sqrt{x} + 5\right)^4$

$y' = 4\left(\sqrt{x} + 5\right)^3 * \frac{1}{2\sqrt{x}}$

б) $y = \sin^2 3x$

Пусть $t = \sin 3x$ **(т.к. сложная функция)**

$y' = \left(t^2\right)' = 2t * t' = 2 * \sin 3x * \left(\sin 3x\right)' = 2 * \sin 3x * \cos 3x * 3$

$\left(\sin 3x\right)'$ пусть $d = 3x$

$\left(\sin d\right)' = \cos d * d' = \cos 3x * 3$

в) $y = \ln\left(\operatorname{arctg} 5x\right)$

$t = \operatorname{arctg} 5x$ **(т.к. сложная функция)**

$y' = \left(\ln t\right)' = \frac{1}{t} * t' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 5x} * \left(\operatorname{arctg} 5x\right)' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 5x} * \frac{5}{1 + 25x^2}$

$\left(\operatorname{arctg} 5x\right)'$ пусть $p = 5x$

$\left(\operatorname{arctg} p\right)' = \frac{1}{1 + t^2} * t' = \frac{5}{1 + 25x^2}$

Пример №6

Задание:
Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-2,1]$

Решение:

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \quad x(4x^2 - 4) = 0 \qquad x_1 = 0 \;\; x_{2/3} = \pm 1$

Подставляем в исходную функции: $x_1, x_2, x_3 \in [-2,1]$

$f(-2) = (-2)^4 - 2 * (-2)^2 + 3 = 16 - 8 + 3 = 11$

$f(0) = (0)^4 - 2 * (0)^2 + 3 = 3$

$f(-1) = (-1)^4 - 2 * (-1)^2 + 3 = 2$, $f(1) = (1)^4 - 2 * (1)^2 + 3 = 2$

Ответ: при $x = -2$ т.е. $f(-2) = 11$ наибольшее значение

при $x = \pm 1$ т.е. $f(\pm 1) = 2$ наименьшее значение

Пример №7

Задание:

Найти дифференциал функции $y = \sin^5 3x$

Решение:

$$y = \sin^5 3x$$

$$y' = 5(\sin(3x))^4 * (\sin 3x)' = 5(\sin(3x))^4 * 3\cos 3x = 15(\sin 3x)^4 * \cos 3x dx$$

Пример №8

Задание:

Найти предел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$$

Решение:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to k} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{4x^3}{3x^2 + 10x - 6} = \frac{16}{13}$$

Пример №9

Задание:

Найти производную:

а) $y = \frac{\sin x}{x^2}$ б) $y = \frac{\ln x}{x}$

Решение:

а) $y = \frac{\sin x}{x^2}$

$$y' = \frac{(\sin x)' x^2 - \sin x * (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\cos x * x^2 - \sin x * 2x}{x^4} = \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}$$

б) $y = \frac{\ln x}{x}$

$$y' = \frac{(\ln x)' x - \ln x * x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} * x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

2.4.Экономический смысл производной. Использование понятия производной в экономике.

Пример №1

Задание:

Объем продукции лампочек в течение рабочего дня представлен функцией

$$y = -\frac{2}{7}t^3 + \frac{13}{27}t^2 + 300t + 10$$

t – время, часов

Вычислить производительность труда в течение каждого часа работы?

Решение:

Пусть производительность труда y=y(t) выражает количество произведенной продукции лампочек за время t. Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0. За период времени от t_0 до $t_0+\Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $y_0=y(t_0)$ до значения $y_0 + \Delta y = y(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период времени

$$z_{ср}=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Производительность труда в момент времени t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0+\Delta t$ при

$$\Delta t \to 0 \text{ т.е. } z=\lim_{\Delta t\to 0} z_{ср}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=y'(t)$$

Производительность труда = производная объема выпускаемой продукции.

$$y'=-\frac{6}{7}t^2+\frac{26}{27}t+300$$

$$y'(1)=300{,}1 \quad y'(2)=598{,}49 \quad y'(3)=295{,}1 \quad y'(4)=290{,}1$$

Ответ: после второго часа работы наблюдается спад производительности труда(упадок сил, плохо проветренное помещение и т.д.).

Задачи для самостоятельного решения

2) Если $a_n=\frac{2n+8}{4+3n}$, найдите a_2.

3) Пусть последовательность $\{a_n\}$ определена как $a_n=5^n+n$. Последовательность убывающая или возрастающая?

4) Исследовать последовательность на монотонность

$$x_n=\frac{n}{n+1}.$$

5) Исследовать последовательность $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, $n\in N$ на ограниченность.

6) Найдите следующие пределы:

$$\text{а)}\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n-1}{2n^3+n^2-4};\quad \text{б)}\lim_{n\to\infty}\frac{6n^6-3n^2-2}{2n^2+n+5};\quad \text{в)}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^3+8n^2-18}{7n^3-5}\right)^3$$

$$\text{г)}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+5}-\sqrt{n}\right);\quad \text{д)}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^3+n}}{n+1};\quad \text{е)}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n^5+1}{2n^5+3n^3-x};$$

$$\text{ж)}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4-n^2+n}{n^5+2n+5}$$

7) Используя теорему о существовании предела монотонной ограниченной последовательности, докажите существование следующих пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$$

8) Найдите следующие пределы:

$$\text{а)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x};\quad \text{б)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x};\quad \text{в)}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2};$$

$$\text{г)}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x};\quad \text{д)}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x}$$

9) Найдите следующие пределы:

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2};\quad \text{б)}\lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{x}};\quad \text{в)}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}.$$

10) Найдите следующие пределы:

$$а)\lim_{x\to5}\left(\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}\right);\ б)\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}\right);\ в)\lim_{x\to3}\left(\frac{x^3-27}{x-3}\right).$$

11) Исходя из определения, докажите непрерывность функции:

$$f(x)=x^2+3x+1,\ \text{при любом } x.$$

12) Исследовать на непрерывность функцию:

$$y=\frac{x^2}{x-2}.$$

13) Первоначальная сумма вклада равна 7000 ден.ед., период начисления – 2 года, сложная процентная ставка – 12%. Известно, что начисление процентов осуществляется непрерывно. Необходимо найти наращенную сумму вклада.

14) Вкладчик положил в банк 10000 руб. Проценты сложные. Какая сумма будет на счете у вкладчика через три года, если процентная ставка в первый год – 20%, во второй – 30%, в третий – 25%?

15) Вычислить производные следующих функций:

$$а)\ y=x^2(x^3-1);\ \ б)\ y=\frac{x^2+1}{x^2-x+1};\ в)\ y=\sqrt[3]{x};\ г)\ y=x^2\sin(2x)+2x\cos(3x);$$

$$д)\ y=\arccos\left(\frac{1}{x}\right);\ е)\ y=x^5-4x^3+2x;\ ж)\ y=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x;\ з)\ y=\frac{e^x}{x^2};$$

$$и)\ y=(x^2-2x+2)e^x;\ к)\ y=\frac{2x+3}{x^2-5x+5};\ л)\ y=\arcsin x+\arccos x.$$

16) Найти производную:

$$1)\ y=x^2;\ 2)\ y=\sqrt{x};\ 3)\ y=\frac{1}{x^2};\ 4)\ y=\sin\frac{2x}{3};$$

$$5)\ y=\sqrt{1+3x};\ \ 6)\ y=x\sqrt{x};\ \ 7)\ y=x^4+3x^2-2x+1;$$

$$8)\ y=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+4;\ \ 9)\ y=4x^5-3\sin x+5\operatorname{ctg}x;$$

$$10)\ y=\log_2 x+3\log_3 x;\ \ 11)\ y=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arcctg}x;$$

$$12)\ y=5^x+6^x+\left(\frac{1}{7}\right)^x;\ \ 13)\ y=x^2\log_3 x;\ 14)\ y=\frac{x^2-1}{x^2+1};$$

$$15)\ y=\frac{\cos x}{1+2\sin x};\ 16)\ y=\frac{\operatorname{ctg}x}{\sqrt{x}};\ 17)\ y=\frac{1+e^x}{1-e^x};\ 18)\ y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

17) Найти производные сложных функций:

$1) y=\sin 3x;\quad 2) y=\sqrt{1-x^2};\ 3) y=\sin(x^2+5x+2);\quad 4) y=\sqrt{1+5\cos x};$

$5) y=\sqrt{2x-\sin 2x};\quad 6) y=\sin^3 x;\ 7) y=\ln\cos x;\quad 8) y=\ln(1+\cos x);$

$9) y=\ln(x^2-3x+7);\ 10) y=\sin^2 x;\ 11) y=e^{tgx};\ 12) y=\ln tg5x;$

$13) y=tg(x^2+3);\quad 14) y=\frac{1}{6}\ln\frac{x-3}{x+3};\ 15) y=\sin^4 x+\cos^4 x;\quad 16) y=\frac{1}{(1+\cos 4x)^5};$

$17) y=2^{3x}+x^5+e^{-x^2}+\frac{1}{x};\quad 18) y=e^{\frac{x}{3}}\cos\left(\frac{x}{3}\right);\ 19) y=\log_5\cos 7x;\quad 20) y=arctg\frac{x+3}{x-3}.$

18) Найти дифференциал функции:

$1) y=x^5;\ 2) y=tgx;$

$3) y=\sin^3 2x;\ 4) y=\ln x;$

$5) y=\ln(\sin\sqrt{x});\ 6) y=2^{-x^2}.$

19) Найти дифференциал функции в точке x_0:

$1) y=x^{-4},\ x_0=-1;\ 2) y=x^3-3x^2+3x,\ x_0=0.$

20) Найти наибольшее и наименьшее значения данных функций на указанных отрезках и в указанных интервалах:

$1) y=x^4-2x^2+5, x\in[-2;2];$

$2) y=x^5-5x^4+5x^3+1, x\in[-1;2];$

$3) y=x+2\sqrt{x},\ x\in[0;4].$

21) Показать, что функция $y=2x^3+3x^2-12x+1$ убывает в интервале (-2;1).

22) Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя:

$1) \lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{2\sin x-1}{\cos 3x};\ 2) \lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\cos 3x};\ 3) \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2};$

$4) \lim\limits_{x\to 1}\frac{2^x x-2}{x^2-1};\ 5) \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2};\ 6) \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{\ln(5-2x)}.$

23) Найти объем производства, при котором фирма, действующая на рынке совершенной конкуренции, будет получать максимальную прибыль, если

$$p=82,\ TC(q)=q^3+7q.$$

24) Найти оптимальный объем производства фирмы, функция прибыли которой задана таким образом:

$$П(q)=TR(q)-TC(q)=q^2-16q+19$$

25) Объем продукции u цеха в течение рабочего дня представляет функции

$$u=-t^3-14t^2+34t+367$$

где t-время(ч). Найти производительность труда через 2 часа после начала работы.

Лабораторная работа №3
Интегральное исчисление. Первообразная функции и неопределенный интеграл.

Цель работы: научиться вычислять определенные и неопределенные интегралы.

Задача интегрирования является обратной по отношению к задаче дифференцирования функции, а именно по функции $f(x)$, являющейся производной некоторой функции $F(x)$, требуется найти эту функцию $F(x)$.

Определение. Функция $F(x)$, определенная в промежутке (a,b), называется первообразной данной функции $f(x)$ в этом промежутке, если для любого значения $x \in (a,b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Так, функция $F(x) = x^4$ – первообразная функции $f(x) = 4x^3$ в интервале $(-\infty,+\infty)$, т.к. $\left(x^4\right)' = 4x^3$ для всех x.

Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также является ее первообразной, т.к.

$$(\Phi(x))' = (F(x)+C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Обратно, если $\Phi(x)$ и $F(x)$ – две первообразные функции $f(x)$, то они отличаются произвольным слагаемым: $\Phi(x) - F(x) = C, \Phi(x) = F(x) + C$.

Определение. **Неопределенным интегралом** от данной функции $f(x)$ называется множество всех ее первообразных: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$. Знак $\int$ называется знаком неопределенного интеграла; функция $f(x)$ – подынтегральной функцией; выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Свойства интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C$
4. $\int (k \cdot f(x))dx = k \cdot \int f(x)dx$, где $k - const$
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

Основные неопределенные интегралы

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
2. $\int dx = x + C$
3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = arctgx + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$
12. $\int e^x dx = e^x + C$
13. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C$
14. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Интегрирование **методом замены переменной.**

Пример **.** Вычислить $\int \sin(2-3x)dx$ методом замены переменной.

Решение. Введем новую переменную $t=2-3x$, тогда $x=\frac{2-t}{3}$, $dx=-\frac{dt}{3}$, и интеграл можно выразить: $\int \sin(2-3x)dx=\int \sin t\cdot\left(-\frac{dt}{3}\right)=-\frac{1}{3}\int \sin tdt=\frac{1}{3}\cos t+C=$ $\frac{1}{3}\cos(2-3x)+C$.

Ответ: $\int \sin(2-3x)dx==\frac{1}{3}\cos(2-3x)+C$.

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции. По свойствам дифференциала имеем: $d(uv)=v\cdot du+u\cdot dv$, или $u\cdot dv=d(uv)-v\cdot du$.

Интегрируя левую и правую части полученного равенства и учитывая свойства интегралов, получаем формулу **интегрирования по частям**:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Определение. **Определенным интегралом** обозначают выражение вида: $\int\limits_a^b f(x)dx$, где значение a называется нижним пределом интегрирования, b – верхним пределом интегрирования, $f(x)$ – подинтегральная функция, непрерывная на интервале (a,b).

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b kf(x)dx=k\int\limits_a^b f(x)dx$, где $k-const$
2. $\int\limits_a^b (f_1(x)\pm f_2(x))dx=\int\limits_a^b f_1(x)dx\pm\int\limits_a^b f_2(x)dx$
3. $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$, где $c\in(a,b)$.

Связь между определенным и неопределенным интегралом выражается **формулой Ньютона-Лейбница**:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

При вычислении определенных интегралов так же, как и неопределенных, можно использовать **метод замены переменной.**

Теорема. Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu,$$

где $uv\Big|_a^b=u(b)v(b)-u(a)v(a)$.

Данная формула называется **формулой интегрирования по частям для определенного интеграла**.

Пример №1

Задание:

Найти неопределенный интеграл по методу разложения:

а) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$ б) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$ в) $\int tg^2xdx$

Решение:

$$а)\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx=\int \frac{1-2x+x^2}{x\sqrt{x}}dx=\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{2x}{x\sqrt{x}}+\frac{x^2}{x\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=\int \left(x^{-\frac{3}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\int x^{-\frac{3}{2}}dx-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}-2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=$$

$$=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=-2x^{-\frac{1}{2}}-4^{\frac{1}{2}}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C;$$

$$б)\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx=\int \left(\frac{\sqrt{x}}{x^3}-\frac{x^3e^x}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}\right)dx=\int x^{-\frac{5}{2}}dx-\int e^xdx+\int \frac{1}{x}dx=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+\mathbf{ln}\,|\,x\,|+C;$$

$$в)\int tg^2xdx=\int \frac{\mathbf{sin}^2 x}{\mathbf{cos}^2 x}dx=\int \frac{1-\mathbf{cos}^2 x}{\mathbf{cos}^2 x}dx=\int \frac{1}{\mathbf{cos}^2 x}dx-\int 1dx=tgx-x+C.$$

Пример №2

Задание:

Найти неопределенный интеграл по методу замены переменной:

а) $\int \frac{dx}{(2x-5)^5}$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$ в) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{9+x^2}}$

г) $\int \frac{\mathbf{cos}\,x}{\sqrt[3]{\mathbf{sin}^2 x}}$ д) $\int (2x+1)e^{x^2+x+3}dx$ е) $\int \frac{\sqrt[3]{\mathbf{ln}\,x}}{x}dx$

Решение:

а) $\int \frac{dx}{(2x-5)^5} = \int \frac{2dx}{2(2x-5)^5} = \int \frac{du}{2u^5} = \frac{1}{2}\int u^{-5}du = \frac{1}{2}\frac{u^{-4}}{-4} + C =$

$= -\frac{1}{8}(2x-5)^{-4} + C$

Пусть $u = 2x-5$, тогда $du = 2dx$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+3}} = \int \frac{4dx}{4\sqrt{4x+3}} = \int \frac{du}{4u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4} * \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2}\sqrt{4x+3}$

$u = 4x+3$

$du = 4dx$

в) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{2x * x^2dx}{2\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{du(u-9)}{2u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{1}{2}} - 9u^{-\frac{1}{2}}\right)du =$

$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} - 9u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - 9(9+x^2)^{\frac{1}{2}} + C$

$u = 9+x^2$

$du = 2xdx$

$x^2 = u-9$

г) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{du}{u^{\frac{2}{3}}} = \int u^{-\frac{2}{3}}du = 3u^{\frac{1}{3}} + C = 3(\sin x)^{\frac{1}{3}} + C$

$u = \sin x \quad du = \cos x dx$

д) $\int (2x+1)e^{x^2+x+3}dx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2+x+3} + C$;

$u = x^2 + x + 3$

$du = 2x+1$

е) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx = \int \sqrt[3]{u}du = \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{\ln x^{\frac{4}{3}} * 3}{4} + C.$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}dx$

Пример №3

Задание:

Найти неопределенный интеграл по методу интегрирования по частям:

$$\int x * \operatorname{arctg} x \, dx$$

Решение:

$$\int x*\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\left(x-\operatorname{arctg}x\right)+C$$

$u=\operatorname{arctg}x \qquad dv=xdx$

$du=\frac{1}{1+x^2}dx \qquad v=\int xdx=\frac{x^2}{2}dx$

$$\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{x^2+1}{1+x^2}dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx\right)=\frac{1}{2}\left(x-\operatorname{arctg}x+C\right)$$

Задачи для самостоятельного решения

1) Путем преобразования подынтегрального выражения найти следующие интегралы:

   1)$\int\frac{7x^4-3\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}}dx$; 2)$\int\frac{dx}{2x-1}$; 3)$\int\frac{xdx}{4+x^4}$; 4)$\int\frac{xdx}{(1+x^2)^2}$

   5)$\int\frac{dx}{(2x-3)^5}$; 6)$\int(x+1)^{15}dx$; 7)$\int\frac{x^3dx}{x^4-2}$

   8)$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$; 9)$\int(e^x+1)^3dx$; 10)$\int\frac{\ln^2x}{x}dx$

   11)$\int\frac{dx}{1+9x^2}$; 12)$\int\frac{dx}{9+2x^2}$; 13)$\int\sqrt{8-2x}dx$;

   14)$\int\cos 2x\,dx$; 15)$\int\sin^2 xdx$.

2) Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

   1)$\int\ln xdx$; 2)$\int x^4\ln xdx$; 3)$\int\sqrt{x}\ln^2 xdx$;

   4)$\int xe^{-x}dx$; 5)$\int x^2e^{-2x}dx$; 6)$\int x\cos xdx$;

   7)$\int x^2\sin 2xdx$; 8)$\int\operatorname{arctg}x\,dx$; 9)$\int x^2\arccos x\,dx$;

   10)$\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$; 11)$\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$.

3) Применяя подходящие подстановки, найти следующие интегралы:

   1)$\int\sin^4 x\,dx$; 2)$\int\cos^6 x\,dx$; 3)$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$;

   4)$\int\frac{dx}{\cos^5 x}$; 5)$\int\sin^4 x\cos^2 xdx$; 6)$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

4) Найти неопределенный интеграл:

   1)$\int\frac{x^3}{5+3x^4}dx$; 2)$\int\frac{e^{2x}dx}{3+e^{2x}}$; 3)$\int\frac{x^2dx}{25+16x^3}$;

   4)$\int\frac{xdx}{3+5x^2}$; 5)$\int\frac{x^3dx}{1+4x^8}$; 6)$\int\frac{dx}{49+9x^2}$;

   7)$\int x^2e^{x^3}dx$; 8)$\int x^2e^{5x^3+4}$; 9)$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$;

   10)$\int\frac{x+3}{2x-3}dx$; 11)$\int\sin^2 5x\,dx$; 12)$\int(x^2+3x)\sin 2xdx$;

   13)$\int x\operatorname{arctg}x\,dx$.

Лабораторная работа №4
Основные сведения о матрицах. Действия над матрицами. Свойства определителя. Решения систем линейных уравнений. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.

Цель работы: получение навыков обработки матриц и решения систем линейных уравнений.

Определение. **Матрицей** размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из n строк и m столбцов. Числа, из которых состоит матрица, называются ее **элементами** и нумеруются двумя **индексами**, обозначающими соответственно номер строки и номер столбца, в которых расположен этот элемент.

В общем виде матрица обозначается так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

или кратко одной буквой A, или $\|a_{ij}\| = [a_{ij}], (i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,m)$, где первый индекс: i – индекс, обозначающий номер строки, второй индекс: j – номер столбца, в котором расположен элемент a_{ij}.

В частности, если матрица содержит одну строку и несколько столбцов $(n = 1, m > 1)$ матрица называется **матрицей-строкой** (или **вектор-строка**): $A = (a_1,\dots,a_m)$.

Если же матрица содержит несколько строк и один столбец $(n > 1, m = 1)$, то матрица называется **матрицей-столбцом** (или **вектором-столбцом**): $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$. Если $m = n$, то матрицу называют **квадратной** порядка n.

Определение. Две матрицы называются **равными**, если они имеют одинаковую размерность и числа, стоящие на соответствующих местах этих матриц, равны.

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается как O.

Определение. **Единичной** называют матрицу, у которой по главной диагонали расположены единицы, а все остальные элементы равны нулю: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Определение. Матрица A^T, полученная из матрицы A заменой строк столбцами с теми же номерами и наоборот, называется **транспонированной** по отношению к матрице A:

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$.

Определение. **Треугольной** называется матрица, у которой все элементы, расположенные ниже (или выше) элементов главной диагонали, равны нулю. Например, A и B – две треугольные матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. **Диагональной** называется матрица, у которой все элементы, кроме расположенных на главной диагонали, равны нулю:

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Основные операции над матрицами

Определение. **Суммой** матриц A и B одинаковой размерности называется матрица C такой же размерности, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

Обозначают операцию сложения как $C=A+B$.

Определение. **Результатом умножения матрицы** A **на число** λ является матрица C (такой же размерности, что и исходная), у которой элементы равны соответствующим элементам исходной матрицы, умноженным на это число: $C=\lambda\cdot A$ или $c_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$

Определение. **Разность** матриц A и B определяется через введенные выше операции: $C=B-A=A+(-1)\cdot B$.

Определение. Пусть даны две матрицы $A=\|a_{ik}\|$ $(i=1,2,...n, k=1,2,...p)$ и $B=\|b_{kj}\|$ $(k=1,2,..., p,\ j=1,2,...,m)$, причем число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. **Произведением** A на B называется матрица C, элементы которой находятся по формуле: $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\cdot b_{kj}$, $(i=1,...,n;\ j=1,...,m)$.

Перечислим **свойства** операций над матрицами:

1) $A+B=B+A$
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$
3) $A+O=O+A$
4) Для матрицы $-A=(-1)A$: $A+(-A)=(-A)+A=O$
5) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$
6) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
7) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
8) $O\cdot A=O$; $\lambda\cdot O=O$
9) $1\cdot A=A$; $(-\lambda)A=-\lambda A$
10) $A\cdot B\neq B\cdot A$
11) $\lambda(A\cdot B)=(\lambda\cdot A)\cdot B=A(\lambda B)$
12) $A(BC)=(AB)C$
13) $(A+B)C=AC+BC$; $C(A+B)=CA+CB$.
14) $(\lambda A+\mu B)^T=\lambda A^T+\mu B^T$
15) $(AB)^T=B^TA^T$
16) Для любой квадратной матрицы $AE=EA=A$.

Замечание. Относительно свойств 12) и 13) заметим, что если действия, указанные по одну сторону равенств, возможны, то возможны и действия, указанные по другую сторону равенства, и результаты в обеих частях одинаковы.

Определитель матрицы. Необходимость во введение понятия определителя связано с решением систем линейных уравнений. Обозначается определитель как Δ, или $|A|$, или $\det A$.

Определение. **Определителем матрицы первого порядка** $A=(a_{11})$, или определителем первого порядка называется элемент a_{11}: $\Delta_1 = a_{11}$.

Определение. Определителем матрицы второго порядка $A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ называется число, определяемое как разность между произведением элементов главной диагонали и произведением элементов побочной диагонали: $\Delta_2 = (a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21})$.

Определение. Определителем матрицы третьего порядка называется число, определяемое по формуле:

$$\Delta_3 = \det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} -$$
$$- a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}.$$

В данное выражение входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Можно не запоминать данное выражение, так как в дальнейшем выведем более простое правило нахождения определителя любого порядка n.

Определение. **Минором произвольного элемента** a_{ij} матрицы называется определитель M_{ij}, который получается вычеркиванием i-той строки и j-того столбца, на пересечении которых расположен данный элемент.

Определение. **Алгебраическим дополнением элемента** a_{ij} определителя матрицы называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение обозначается как A_{ij}, следовательно: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Вычисление определителя квадратной матрицы произвольного порядка осуществляется согласно следующей теореме.

Теорема Лапласа. Определитель Δ матрицы A равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) на их алгебраические дополнения: $\Delta = \det A = a_{i_0 1}A_{i_0 1} + a_{i_0 2}A_{i_0 2} + \ldots + a_{i_0 n}A_{i_0 n}$, где i_0 - фиксировано. Данное выражение еще называют **разложением** определителя D по элементам строки с номером i_0. Аналогично можно записать разложение определителя по элементам фиксированного столбца:

$$\Delta = a_{1j_0}A_{1j_0} + a_{2j_0}A_{2j_0} + \ldots + a_{mj_0}A_{mj_0}.$$

Таким образом, вычисление определителя 3-го порядка сводится к вычислению трех определителей второго порядка. Вычисление определителя 4-го порядка сводится к вычислению четырех определителей третьего порядка и т.д. Можно сказать, что вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению определителей меньшего порядка, но при этом, число этих определителей увеличивается. Такой способ является неэффективным.

Приведем ряд **свойств**, которые позволяют определить другой способ вычисления определителя n-го порядка.

1) Определитель равен нулю, если содержит две одинаковые строки (или два одинаковых столбца) или нулевую строку (нулевой столбец).

2) Определитель меняет знак при перестановке двух строк (столбцов).

3) При умножении строки (столбца) на число определитель умножается на это число.

4) Определитель не меняется, если к строке (столбцу) прибавить любую другую строку (столбец), умноженный на произвольное число.

5) Определитель квадратной транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

6) Определитель единичной матрицы равен единице: $\det E = 1$.

7) Определитель произведения матриц равен произведению определителей: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Исходя из этих свойств, можно упростить вычисление определителя n-го порядка, а именно, с их помощью определитель последовательно преобразуют к такому виду, чтобы в какой-нибудь строке (столбце) все элементы, кроме одного, стали нулевыми. Затем вычисляют определитель разложением по этой строке (столбцу).

Определение. Квадратная матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если для этих матриц выполняются следующие условия: $A \cdot A^{-1} = E$, $A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица.

Обратную матрицу имеет только квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля. Причем, определители прямой и обратной матриц связаны соотношением: $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$, что следует из определения обратной матрицы.

Если у матрицы не существует обратной (определитель равен нулю), то матрица называется **вырожденной**.

Обратная матрица обладает **свойствами**:

1) Если обратная матрица существует, то она единственна.

2) Если матрица A^{-1} является обратной для матрицы A, то и матрица A является обратной для матрицы A^{-1}: $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

3) Если у квадратных матриц A и B существуют обратные им матрицы, то и у их произведения также существует обратная матрица, для которой справедливо соотношение: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Элементы обратной матрицы определяются следующим образом:

Находится определитель прямой матрицы A.

Записывается транспонированная матрица A^T.

Находятся алгебраические дополнения для каждого элемента транспонированной матрицы и записываются в транспонированную матрицу вместо ее элементов: $a_{ij} = A_{ij}$.

Каждый элемент полученной матрицы делится на определитель прямой матрицы A.

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Пусть имеется n различных отраслей, каждая из которых производит свой продукт. В процессе производства своего продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Анализ проводим в заданном промежутке времени (обычно таким промежутком служит плановый год). Ниже приведем следующие обозначения:
xi – объем продукции отрасли i за данный промежуток времени – так называемый валовой выпуск отрасли i;
xij – объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью j в процессе своего производства;
yi – объем продукции отрасли i, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере – объем конечного потребления. Этот объем составляет обычно более 75% всей произведенной продукции. В него входят создаваемые в хозяйстве запасы, личное потребление граждан, обеспечение общественных потребностей (образование, наука, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т. д.), поставки на экспорт.
Очевидно, что при i= 1,..., n должно выполняться соотношение
xi = xi1 + xi2 +...+ xin + yi, (1.2.1)

означающее, что валовой выпуск xi расходуется на производственное потребление, равное xi1 + xi2 +...+ xin и непроизводственное потребление, равное yi. Будем называть (1.2.1) соотношениями баланса.

Единицы измерения всех указанных величин могут быть или натуральными (штуки, киловатт-часы и т. п.), или стоимостными. В зависимости от этого различают натуральный и стоимостной межотраслевой балансы. Далее рассматриваем пример расчета стоимостного баланса.

В модели Леонтьева материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции. Принцип линейности распространяется и на другие виды издержек, например, на оплату труда, а также на нормативную прибыль.

Коэффициенты aij называют коэффициентами прямых затрат.

В предположении линейности соотношения (1.2.1) принимают вид:

x1 = a11 x1 + a12 x2 +...+ a1n xn + y1 ,

x2 = a21 x1 + a22 x2 +...+ a2n xn + y2,

…………………………..

xn = an1 x1 + an2 x2 +...+ ann xn + yn,

или, в матричной записи, x=Ax+y, (1.2.2)

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов прямых затрат;

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ – столбец неизвестных объемов валового выпуска;

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$ – столбец объемов конечного потребления.

Соотношение (1.2.2) называется уравнением линейного межотраслевого баланса. Вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов x и y это соотношение называют также моделью Леонтьева.

Уравнения межотраслевого баланса можно использовать для целей планирования. В этом случае задача ставится так: для предстоящего планового периода задается вектор y конечного потребления. Требуется определить вектор x валового выпуска. Проще говоря, нужно решить задачу: сколько следует произвести продукции различных видов, чтобы обеспечить заданный уровень конечного потребления? В этом случае необходимо решить систему линейных уравнений, соответствующую матричному уравнению (1.2.2) с неизвестным вектором x при заданных матрице A и векторе y.

Если обратная матрица (E – A)-1 существует, то решение находится в виде

x = (E – A)-1y. (1.2.3) Добавить пример.

Задачи для самостоятельного решения

1) Найти линейные комбинации заданных матриц:

$A - \lambda E,\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

$4A - 5B,\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$

$3A + 4B,\ A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 4 \\ 8 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Найти произведения AB и BA (если это возможно).

2) Найти произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислить определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

4) Вычислить определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

5) Найти матрицу, обратную к матрице:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 9 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

Лабораторная работа №5
Линейные, квадратичные, степенные, дробно-рациональные функции. Показательные функции. Логарифмические функции. Непрерывность и дифференцируемость.

Цель работы: получить навыки исследования функций.

Основные классы функций и методы их исследования были рассмотрены в практической работе №1. Далее на примерах рассмотрим более подробное исследование функций.

Пример №1

Задание:

Исследовать на непрерывность функцию:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}12x^2, & -3\le x<7\\ 13x+7, & 7\le x\le 10\end{cases}$$

Решение:

Пусть функция f(x) определена в окрестности точки x_0. Она называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$$

$f(x)$ непрерывна в точке x_0 <=> $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$

Функцию f определенную на промежутке $\left[a, x_0\right)$ называется непрерывной слева в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$

Функцию f определенную на промежутке $\left[x_0, b\right)$ называется непрерывной справа в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$

Односторонние пределы функции $f(x)$ в этой точке:

$$f\left(7-0\right)=\lim_{x\to 7-}12x^2=588$$

$$f\left(7-0\right)=\lim_{x\to 7+}13x+7=98$$

Функция непрерывна, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$

Следовательно, $x_0=7$ – точка разрыва $1^{го}$ рода.

Пример №2

Задание:

Исследовать на непрерывность в точке $x_0 = 0$ функцию $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$. Указать в ответе односторонние пределы функции в этой точке.

Решение:

$x_0 = 0$ точка разрыва функции в которой функция не определена т.к. 1-cos 0 = 0

Односторонние пределы:

$x\to 0\ \ x>0\ \ \sin^2 x>0$

$$\lim_{x\to +0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to +0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to +0}\frac{\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)}{\left(1-\cos x\right)}=\lim_{x\to +0}\left(1+\cos x\right)=2$$

$x\to 0\ \ x<0\ \ \sin^2 x>0\qquad \lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}=2$

$f\left(+0\right)$ и $f\left(-0\right)$ конечны и равны, следовательно $x_1=0$ точка устранимого разрыва

Пример №3

Задание:

Исследовать функцию на непрерывность:

$$y=\frac{x}{x^2+x-6}$$

Решение:

$$y = \frac{x}{x^2 + x - 6} = \frac{x}{(x-2)(x+3)}$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$D = 25 \quad x_{1/2} = 2;\ -3$$

$x_{1/2}$ – точки разрыва функции

Односторонние пределы:

$x \to 2$

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x}{(x-2)(x+3)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x}{(x-2)(x+3)} = -\infty$$

$x \to -3$

$$\lim_{x \to -3+0} \frac{x}{(x-2)(x+3)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -3-0} \frac{x}{(x-2)(x+3)} = -\infty$$

$x_{1/2}$ – точки разрыва $2^{\text{го}}$ рода

Пример №4

Задание:

Исследовать функцию на непрерывность:

$$y = 3^{\frac{x}{1-x^2}}$$

Решение:

$y = 3^{\frac{x}{1-x^2}}$

$x_1 = -1 \quad x_2 = 1$

$x_{1/2}$ – точки разрыва функции

Односторонние пределы:

$x \to -1$

$\lim\limits_{x \to -1+0} 3^{\frac{x}{1-x^2}} = 3^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to -1-0} 3^{\frac{x}{1-x^2}} = 3^{\infty} = \infty$

$x \to 1$

$\lim\limits_{x \to 1+0} 3^{\frac{x}{1-x^2}} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1-0} 3^{\frac{x}{1-x^2}} = \infty$

$x_{1/2}$ – точки разрыва $2^{\text{го}}$ рода

Пример № 5

Задание:

Исследовать функцию на непрерывность:

$$y = \mathbf{lg}(x-1)^2$$

Решение:

$y = \mathbf{lg}(x-1)^2$

$x = 1$ – точка разрыва функции

Логарифм функция монотонна определена в интервале при $a > 1 \quad x \in (0; +\infty)$

$f(x_0) = (-\infty; +\infty)$ непрерывна за исключением точки $x = 1$

Односторонние пределы:

$x \to -1$

$\lim\limits_{x \to 1+0} \mathbf{lg}(x-1)^2 = 3^{-\infty} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 1-0} \mathbf{lg}(x-1)^2 = \infty$

$x = 1$ – точка разрыва $2^{\text{го}}$ рода

Задачи для самостоятельного решения:

1) Определить точки разрыва функций и исследовать характер этих точек, если:

$$1)\, y = \frac{x}{(1+x)^2};\ 2)\, y = \mathbf{cos}^2 \frac{1}{x};$$

$$3)\, y = \sqrt{x}\, \text{arctg} \frac{1}{x};\ 4)\, y = e^{x+\frac{1}{x}}.$$

2) Доказать, что функция y(x) непрерывна в каждой точке своей области определения, если:

$$1)y = 2x - 1;\ \ 2)y = x^2;\ 3)y = \sqrt{x};$$

$$4)y = \frac{1}{x};\qquad 5)y = |x|;\ 6)y = \frac{1}{x^2}.$$

3) Доказать непрерывность функции в каждой точке ее области определения:

$$1)y = 3x^5 + \frac{1}{x^3};\quad 2)y = \frac{\sin x^2}{x^4 + 2x^2}.$$

4) Найти точки разрыва функции:

$$1)y = \frac{x}{x^2 + x - 6};\ 2)y = \frac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x};\ 3)y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$4)y = \frac{1 + x}{1 + x^3};\ 5)y = \frac{2x - 1}{2x^2 + 3x - 2};\ 6)y = \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2 - 1}.$$

5) Найти точки разрыва функции:

$$1)y = \frac{x}{\cos x};\quad 2)y = \frac{2}{1 - 2^x};\quad 3)y = \frac{1}{\lg x};$$

$$4)y = 2^{\frac{1}{x}};\ 5)y = \operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{x^2}\right);\ 6)y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{(x-1)}}};$$

$$7)y = \frac{x + 1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)};\ 8)y = \frac{x}{x + 2};\ 9)y = \frac{x^2 - 5x + 5}{x^2 - 3x + 2};$$

$$10)y = 2^{\frac{-1}{x}};\quad 11)y = e^{\operatorname{tg}x};\quad 12)y = \operatorname{tg}x.$$

6) Найдите производные функций:

$$1)\ y = \frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 5;\quad 2)y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5};$$

$$3)y = x^2\cos x;\ 4)y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x};\ 5)y = x^3\ln x - \frac{x^3}{3};$$

$$6)y = \frac{(1 + x^2)\operatorname{arctg}x - x}{x};\ 7)y = \sin\frac{x}{2};\ 8)y = \cos(3 - 4x);$$

$$9)y = \cos^3 x;\ 10)y = \sin^4 x + \cos^4 x;\ 11)y = \sqrt{x^4 + 2x + 3};$$

$$12)y = (2x^2 - 7)^3;\ 13)y = -\operatorname{ctg}^3 x + 3\operatorname{ctg}x + 3x;\ 14)y = \frac{\sin^2 x}{\cos x};$$

$$15)y = \cos^2 x^2;\ 16)y = \ln(x^2 + 5x + 6);\ 17)y = e^{\cos^2 x};$$

$$18)y = \arcsin 2x;\ 19)y = \arccos\sqrt{x};\ 20)y = \operatorname{tg}^2 5x;$$

$$21)y = (\cos x)^{\sin x};\ 22)y = \left(\operatorname{arctg}x\right)^x.$$

Лабораторная работа №6
Основы векторной алгебры

Цель работы: получить навыки решения задач векторной алгебры.

Определение. Пусть даны две точки на плоскости A и B. **Вектором** называется направленный отрезок, идущий из точки A в точку B. Точка A называется **началом** вектора, точка B – **концом**.

Рис.1. Направленный отрезок – вектор

Вектор обозначают строчной латинской буквой со стрелкой – $\vec{a}$ или прописными буквами, обозначающими начало и конец вектора – $\overrightarrow{AB}$.

Определение. Величину, не имеющую направления, называют **скалярной** или **скаляром**.

Определение. Расстояние между началом и концом вектора называется его **длиной** и обозначается как $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = AB$ (читается как «модуль вектора a» или «модуль вектора AB»).

Когда начало и конец вектора совпадают, то говорят о **нулевом векторе**, который обозначают как $\vec{0}$. Длина нулевого вектора равна нулю.

Определение. Вектор, модуль которого равен единице, называется **единичным вектором** или **ортом**.

Определение. Два вектора называют **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых и обозначают как $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной (или в параллельных) плоскостях.

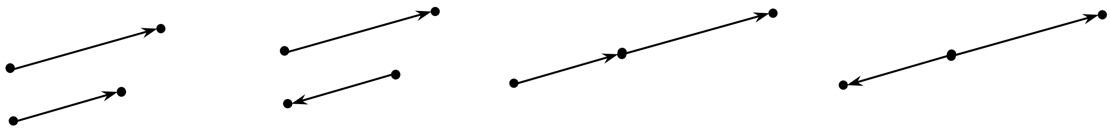


Рис.2. Взаимное расположение коллинеарных векторов

Определение. Два вектора называют **равными**, если они коллениарны, одинаково направлены и их длины совпадают: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Условие сонаправленности в данном определении очень важно, так как вектора, имеющие одинаковую длину, но направленные в разные стороны, уже не являются равными.

Операции над векторами

Над векторами возможны следующие операции: сложения, вычитания, умножение вектора на число.

Определение. Операции сложения, вычитания векторов и операция умножения вектора на скаляр называются **линейными** операциями.

Сложение векторов. Сумма двух векторов $\vec{a} + \vec{b}$ строится как вектор, идущий от начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$, если вектор $\vec{b}$ приложен к вектору $\vec{a}$.

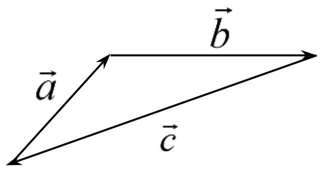


Рис.3. Сумма двух векторов

Для построения сумму двух векторов нужно (**«правило параллелограмма»):** приложить два вектора к одной точке и достроить до параллелограмма. Диагональ параллелограмма, идущая из точки приложения векторов и есть их сумма.

Для построения суммы произвольного числа векторов нужно приложить второй вектор к концу первого, третий к концу второго и т.д., сумма находится как вектор, идущий из начала первого к концу последнего.

Свойства операции сложения векторов:

1) коммутативность $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2) ассоциативность: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

3) для любого вектора $\vec{a}$: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

4) для любого вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ справедливо:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}.$$

Вектор $\overrightarrow{BA}$ называют **противоположным** вектору $\overrightarrow{AB}$ и обозначают как $-\vec{a}$.

Вычитание векторов. Вектор, являющийся результатом **вычитания** двух векторов строится также, по правилу параллелограмма, но является второй диагональю в нем:

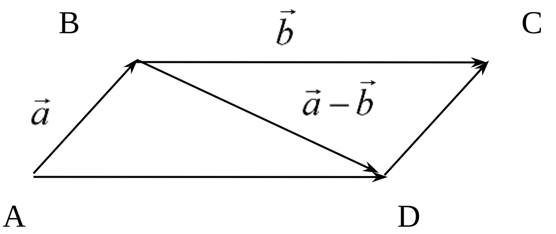


Рис. 4. Вычитание векторов по правилу параллелограмма

Умножение вектора на число (скаляр). **Произведением** вектора $\vec{a}$ на скаляр является λ вектор $\lambda\vec{a}$, удовлетворяющий условиям:

1) вектор $\lambda\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

2) имеет длину $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;

3) сонаправленный $\vec{a}$ при $\lambda>0$ и антинаправленный при $\lambda<0$.

Свойства операции умножения вектора на скаляр:

1) ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число λ такое, что $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$;

2) умножение вектора на скаляр ассоциативно относительно умножения скаляров: $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;

3) умножение вектора на скаляр дистрибутивно относительно сложения чисел: $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

4) умножение вектора на скаляр дистрибутивно относительно сложения векторов: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

5) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, $(-\lambda)\vec{a}=-(\lambda\vec{a})$.

Из свойств произведения скаляра на вектор следует, в частности, что при умножении нуля на вектор получается нулевой вектор $\vec{0}$.

Свойства операций над векторами позволяют обращаться с ними, как с обычными числами: переносить их из одной части равенства в другую с противоположным знаком, делить обе части на ненулевое число, приводить подобные члены и т.п.

Базис и разложение векторов

Определение. **Линейной комбинацией векторов** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется вектор $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$, а числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - **коэффициентами** линейной комбинации.

Определение. Совокупность векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется **линейно независимой***,* если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$; если же для заданных векторов равенство выполняется только тогда, когда все $\lambda_i = 0 \ \ (i = 1,2,...,n)$, то вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называют **линейно зависимыми**.

Теорема. Пусть даны два ненулевых и неколлениарных вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Тогда любой вектор $\vec{x}$ можно представить в виде: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ и притом, единственным образом.

Такое представление вектора называют **разложением вектора по базису**, набор $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – **базисом**, а коэффициенты при базисе: x_1, x_2 – **координатами** разложения.

С базисом на плоскости можно связать **систему координат**. Для этого на плоскости зафиксируется начало координат – точку *O* и тогда каждой точке *A* на плоскости соответствует вектор $\overrightarrow{OA}$, который называется **радиус-вектором** точки. Координаты радиуса-вектора при разложении по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ называются **координатами точки** в построенной системе координат: x_1, x_2.

Самая распространенная система координат образуется двумя взаимно перпендикулярными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, длина которых равна единице: $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$. Такая система координат называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Обычно векторы декартового базиса обозначают как $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а координаты вектора $\vec{a}$ относительно декартова базиса как x, y, z.

В декартовой системе координат справедливо **свойство**: длина вектора $\vec{a} = \{x, y\}$ равна: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Кроме декартовой системы координат существует полярная и криволинейная система координат.

В общем случае введенный в пространстве базис называют **аффинным**, и, соответственно, систему координат, состоящую из произвольной точки O и векторного аффинного базиса пространства называют **аффинной системой координат** этого пространства. Точка O - **начало** аффинной системы координат.

Для любой системы координат (не только декартовой) справедливы следующие свойства:

1) линейные операции над векторами сводятся к таким же операциям над их соответствующими координатами;

2) координаты вектора равны разностям соответствующих координат его начала и конца;

векторы $\vec{a} = \{x_1, x_2\}$ и $\vec{b} = \{y_1, y_2\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны: $x_1y_2 = x_2y_1$

Скалярное произведение векторов

***Определение*.** **Углом** между двумя векторами называется часть плоскости между их лучами, если вектора приложить к одной точке (Рис.). Угол между векторами обозначается как $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$ или строчными греческими буквами (например, φ).

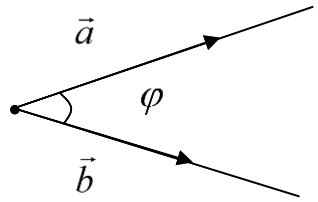


Рис. 5. Угол между двумя векторами

Как известно из школьного курса, *осью* называется направленная прямая. Как правило, ось определяется единичным вектором, имеющим общее с ней направление и задающим положительную направленность оси. Чтобы получить проекцию точки, требуется опустить на ось перпендикуляр из этой точки.

Определение. **Проекцией** вектора $\vec{a}$ на ось (или вектор) $\vec{b}$ называется вектор, началом которого служит проекция начала вектора $\vec{a}$, а концом – проекция конца вектора $\vec{a}$ на ось (или вектор

Приведем **свойства** проекции:

1) $\left|pr_{\vec{b}}\vec{a}\right| = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$, где $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$;

2) $pr_{\vec{c}}(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \lambda\, pr_{\vec{c}}\vec{a} + \mu\, pr_{\vec{c}}\vec{b}$, где λ и μ - любые числа;

3) равные вектора имеют равные проекции.

Определение. **Скалярным произведением векторов** называется число (скаляр), равное произведению их длин и косинуса угла между ними; обозначают скалярное произведение как $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$: $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi$, где $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

Следующие **свойства** скалярного произведения векторов вытекают прямо из определения:

1) $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{b},\vec{a}\right)$;

2) $\left(\lambda\vec{a},\vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, где λ - любое число;

3) $\left(\vec{a},\vec{a}\right) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$;

4) если $|\vec{e}| = 1$, то $(\lambda\vec{e}, \mu\vec{e}) = \lambda\mu$, где λ и μ - любые числа;

5) $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны или один из них равен нулю;

6) $\left(\vec{a} + \vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{a},\vec{c}\right) + \left(\vec{b},\vec{c}\right)$;

7) для декартовой системы координат справедливо следующее свойство: если $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 .$$

Введем для определенности обозначения: пусть координаты векторов $\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$. С помощью скалярного произведения решаются следующие **задачи**:

1. определение длины вектора:

а) для декартового базиса: $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$;

б) для любого базиса: $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\vec{a},\vec{a}\right)}$.

2. определение расстояния между точками A и B:

$d = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ по вышеприведенным формулам (в зависимости от базиса).

3. определение проекции одного вектора на направление другого:

$$pr_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}$$

4. определение косинуса угла между векторами:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

5. определение для декартового базиса косинусов углов, образуемых вектором с осями координат:

$$\cos\alpha = \frac{x_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}}; \quad \cos\beta = \frac{y_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{z_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}},$$

где α – угол вектора с осью x, β – угол вектора с осью y, γ – угол вектора с осью z.

Определение. **Векторным произведением** двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый как $[\vec{a},\vec{b}]$, удовлетворяющий условиям:

- вектор $[\vec{a},\vec{b}]$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

- длина $[\vec{a},\vec{b}]$ равна $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$;

- векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{a},\vec{b}]$ образуют правую тройку, то есть если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{a},\vec{b}]$ приведены к общему началу, то из конца $[\vec{a},\vec{b}]$ поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ на меньший угол происходит против часовой стрелки.

Векторное произведение обладает **свойствами**:

1) векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тгда и только тогда, когда они коллинеарны, в частности $[\vec{a},\vec{a}] = 0$;

2) $[\lambda\vec{a},\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$, где λ – скаляр;

3) $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$;

4) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$;

5) длина $[\vec{a},\vec{b}]$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к одной точке;

6) если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ известны в декартовом базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ как $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$, то их векторное произведение можно представить в виде:

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

Определение. **Смешанным произведением** трех ненулевых некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $[\vec{a},\vec{b}]$ и $\vec{c}$.

Обозначается смешанное произведение как $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$ или $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Смешанное произведение обладает следующими **свойствами**:

1) геометрически смешанное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах и взятого со знаком «+», если $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ – правая тройка и со знаком «–», если $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ – левая тройка;

2) в смешанном произведении неважно, в каком порядке брать векторное и скалярное произведение: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}])$,

но при перестановке двух сомножителей меняется знак: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a},)=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$;

3) три вектора компланарны, тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю;

4) если координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ известны в декартовом базисе $\vec{i}$, $\vec{j}, \vec{k}$ как $\vec{a}=(x_a, y_a, z_a)$, $\vec{b}=(x_b, y_b, z_b)$ и $\vec{c}=(x_c, y_c, z_c)$, то их векторное произведение можно представить в виде:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Пример №1

Задание:

Даны точки A(7;-3;1) и B(4;-1;-3). Найдите координаты векторов AB и BA.

Решение:

$A(\overset{x_1}{7};\ \overset{y_1}{-3};\ \overset{z_1}{1})\ B(\overset{x_2}{4};\ \overset{y_2}{-1};\ \overset{z_2}{-3})$

$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)=(4-7;-1-(-3);-3-1)=(-3;2;-4)$

A – начало вектора

B – конец вектора

$\overrightarrow{BA}=(7-4;-3-(-1);1-(-3))=(3;-2;4)$

B – начало вектора

A – конец вектора

Пример №2

Задание:

Даны векторы $\vec{a}=(1;\ 2;-2)$, $\vec{b}=(0;-1;3)$, $\vec{c}=(-2;3;-4)$.

Найдите координаты вектора $\vec{d}=2\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c}$

Решение:

$\vec{a}=(1;2;-2)$ $\vec{b}=(0;-1;3)$ $\vec{c}=(-2;3;-4)$ $\vec{d}=2\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c}$

$\overrightarrow{d_1}=2*1+4*0-3*(-2)=2+0+6=8$

$\overrightarrow{d_2}=2*2+4*(-1)-3*3=-9$

$\overrightarrow{d_3}=20$

Пример №3

Задание:

Найдите координаты векторного произведения векторов:

$\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$

Решение:

$\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(-15+2\right) - \vec{j}\left(-5+6\right) + \vec{k}\left(1-9\right) = -13\vec{i} - \vec{j} - 8\vec{k}$$

Пример №4

Задание:

Найдите косинус угла между векторами:

$\vec{a} = \left(3;3;1\right)$ и $\vec{b} = \left(3;1;-3\right)$

Решение:

$\vec{a} = \left(3;3;1\right)$ и $\vec{b} = \left(3;1;-3\right)$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{19}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + \left(-3\right)^2} = \sqrt{19}$$

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\mathbf{cos}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{9}{\sqrt{19}}$$

Пример №5

Задание:

Даны 2 вектора:

$\vec{a} = \{1,2\}$ $\vec{b} = \{-1,3\}$

Найти координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$

Решение:

$\vec{a} = \{1,2\}$ $\vec{b} = \{-1,3\}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \{1 + (-1); 2 + 3\} = \{0;5\}$$

Пример №6

Задание:

Определить скалярное произведение $\vec{c} = \left(\vec{a},\vec{b}\right)$, если $\vec{a} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

$\left|\overrightarrow{e_1}\right| = 1$ $\left|\overrightarrow{e_2}\right| = 2$ $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \dfrac{\pi}{6}$

Решение:

$\vec{c} = \left(\vec{a},\vec{b}\right)$, если $\vec{a} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ $\left|\overrightarrow{e_1}\right| = 1$ $\left|\overrightarrow{e_2}\right| = 2$ $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \dfrac{\pi}{6}$

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2\right) = \left(\vec{e}_1, 2\vec{e}_1\right) + \left(\vec{e}_1, -\vec{e}_2\right) + \left(3\vec{e}_2, 2\vec{e}_1\right) + \left(3\vec{e}_2, -\vec{e}_2\right) = 2\vec{e}_1^{\,2} + 5\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right) - 3\vec{e}_2^{\,2} =$$

$$= 2*1^2 + 5*1*2\,\mathbf{cos}\frac{\pi}{6} - 3*2^2 = 2 + 10\frac{\sqrt{3}}{2} - 12 = -10 + 5\sqrt{3}$$

Пример №7

Задание:

Определить векторное произведение $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, если $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ $\vec{b} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$

$|\vec{e_1}| = 1$ $|\vec{e_2}| = 1$ $\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \frac{\pi}{3}$

Решение:

$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, если $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ $\vec{b} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ $|\vec{e_1}| = 1$ $|\vec{e_2}| = 1$ $\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \frac{\pi}{3}$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2] = [3\vec{e}_1, \vec{e}_1] + [3\vec{e}_1, \vec{e}_2] + [-2\vec{e}_2, \vec{e}_1] + [-2\vec{e}_2, \vec{e}_2] =$$

$$= 5*1*1*\sin\frac{\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Задачи для самостоятельного решения

1) Даны две точки A(3;-4;1) и B(4;6;-3). Найти координаты вектора $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$.
2) Найти скалярное произведение векторов: $\bar{a} = (3, -4, 1)$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 4\bar{k}$.
3) Разложить вектор $\bar{x}$ по базису, образованному векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:
   а) $\bar{x} = -9\bar{i} - 8\bar{j} - 4\bar{k}$; $\bar{e}_1 = (3, -1, 2), \bar{e}_2 = (-2, 5, -1), \bar{e}_3 = (0, 2, 3)$;
   б) $\bar{x} = (8, 4, -1)$; $\bar{e}_1 = (1, 5, 4), \bar{e}_2 = (3, 0, 1), \bar{e}_3 = (2, -2, -3)$.
4) Найти скалярное произведение векторов $\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + 2\bar{b}$, если известно, что $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3$, угол между векторами составляет 120^0.
5) Найти векторное произведение векторов $\bar{p} = 5i - 2j + k, \bar{q} = 3i + j + 4k$.

Лабораторная работа №7
Исследование функций

Пример 1

Задание:

Исследовать функцию

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Решение:

1)$D=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$

2)Точки пересечения с осью Ox и Oy

Ox:

Пусть $y=0 \Rightarrow x=0$

Oy:

Пусть $x=0 \Rightarrow y=0$

3)четность / нечетность

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\frac{-x^3}{x^2-1}$$

$$-f(x)=-\frac{x^3}{x^2-1}$$

$f(-x)=-f(x)$ нечетная

4)Асимптоты

Знаменатель обращается в нолу при $x=\pm1$ – точка разрыва функции

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=3^{-\infty}=\infty$$

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=3^{-\infty}=\infty$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty$$

Точки $x_{1/2}$ – точки разрыва $2^{го}$ рода

Вывод: односторонние пределы бесконечны, значит прямая $x_{1/2}=\pm1$

является вертикальной асимптотой графика функции

5)Интервалы возрастания / убывания, точки экстремума:

$$y'=\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$y'=0$

$x_1=0 \quad x_{2/3}=\pm\sqrt{3}$ – критические точки

$\left(x^2-1\right)^2 \neq 0 \quad x_{1/2} \neq \pm 1$

Определим знак производной на полученных интервалах:

$f'(-2) > 0 \quad \left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$

$f'(-1,5) < 0 \quad \left(-\sqrt{3}; -1\right)$

$f'(-0,5) < 0 \quad \left(-1; 0\right)$

$f'(0,5) < 0 \quad \left(0; 1\right)$

$f'(1,5) < 0 \quad \left(1; \sqrt{3}\right)$

$f'(2) > 0 \quad \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$

$y_{\mathbf{max}} = y\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2} \approx -2,6$

$y_{\mathbf{min}} = y\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6$

6)Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика:

$f'' = -\dfrac{4x\left(x^4-3x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^3} + \dfrac{4x^3-6x}{\left(x^2-1\right)^2}$

$f'' = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$

Определим знак производной на полученных интервалах:

$f''(x) < 0 \quad \left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$ функция выпукла вверх

$f''(x) > 0 \quad \left(-\sqrt{3}; 0\right)$ вниз

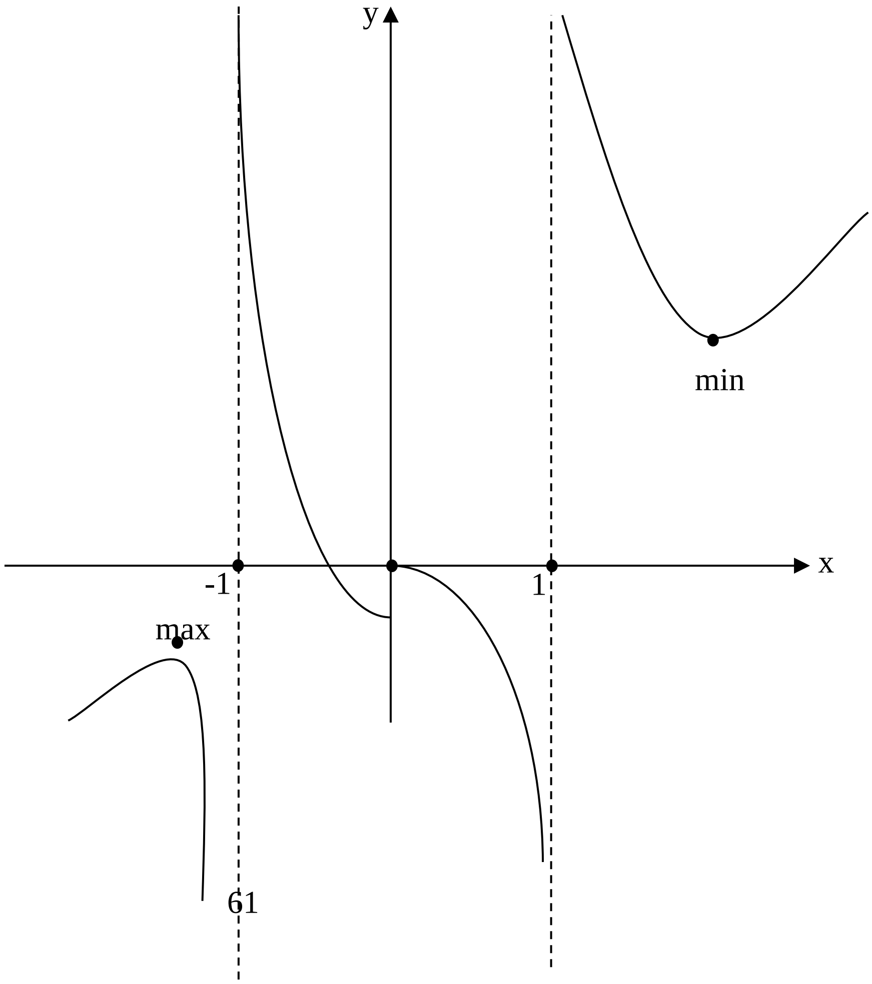
$f''(x) < 0 \quad \left(0; \sqrt{3}\right)$ вверх

$f''(x) > 0 \quad \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ вниз

$y_{\mathbf{min}} = y\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2} \approx -2,6$

$y_{\mathbf{min}} = y\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6$

$y(0) = 0$ – точка перегиба



Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать функцию $y(x)=\frac{x^3-1}{4x^2}$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$ с помощью производных и построить график.
3. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график: $y(x)=-\frac{1}{4}\left(x^3-3x^2+4\right)$

Лабораторная работа №8
Логарифмическая функция

Цель работы: получить навыки исследования логарифмической функции.

Логарифмическая функция

Функцию вида $y = \log_a(x)$, где a - любое положительное число не равное единице, называют логарифмической функцией с основанием a. Здесь и далее для обозначения логарифма мы будем использовать следующую нотацию: $\log_a(b)$ - данная запись будет обозначать логарифм b по основанию a.

Основные свойства логарифмической функции:

1. Областью определения логарифмической функции будет являться все множество положительных вещественных чисел. Для краткости его еще обозначают **R+**. Очевидное свойство, так как каждое положительное число имеет логарифм по основанию a.

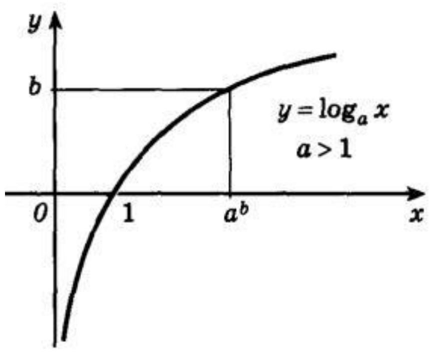
2. Областью значения логарифмической функции будет являться все множество вещественных чисел.

3. Если основание логарифмической функции a>1, то на всей области определения функции возрастает. Если для основания логарифмической функции выполняется следующее неравенство 0<a

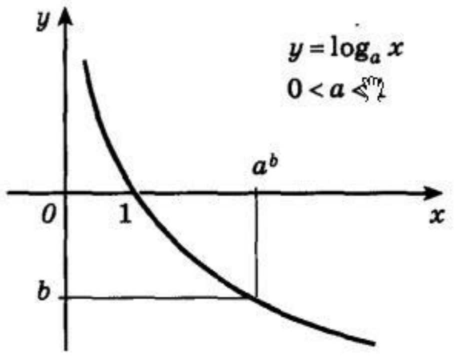
4. График логарифмической функции всегда проходит через точку (1;0).

5. Возрастающая логарифмическая функция, будет положительной при x>1, и отрицательной при 0<x<1.

6. Убывающая логарифмическая функция, будет отрицательной при x>1, и положительной при 0<x<1:

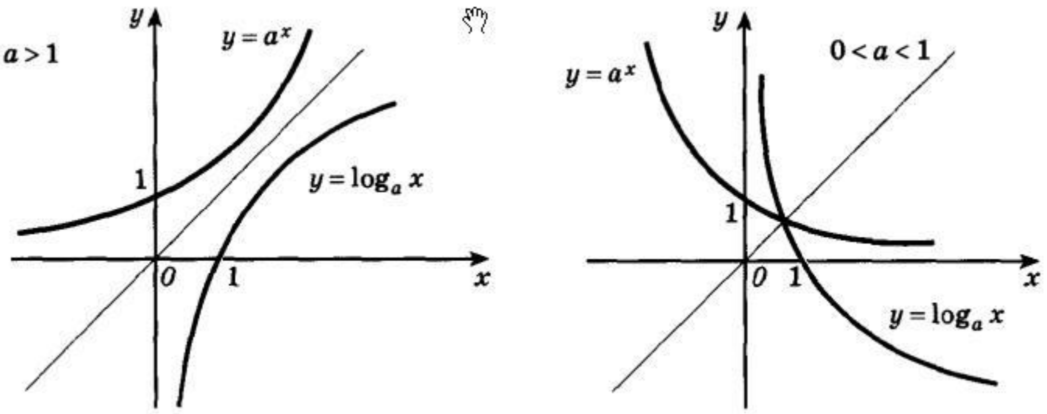


На следующем рисунке представлен график убывающей логарифмической функции - (0<a<1):



7. Функция не является четной или нечетной. Логарифмическая функция – функция общего вид.
8. Функция не имеет точек максимума и минимума.

Если построить в одной оси координат показательную и логарифмическую функции с одинаковыми основаниями, то графики этих функций будут симметричны относительно прямой y = x. Данное утверждение показано на следующем рисунке.



Изложенное выше утверждение будет справедливо, как для возрастающих, так и для убывающих логарифмических и показательных функций.

Пример

Задание. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y = \ln\frac{x+1}{x+2}$$

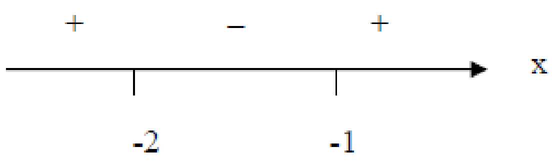
Решение:

Область определения функции

$$\frac{x+1}{x+2} > 0,$$

$$(x+1)(x+2) > 0,$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = -2.$$



То есть $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

Вычислим односторонние пределы

$$\lim_{x\to -2-0} \ln\frac{x+1}{x+2} = \ln\left(\frac{-1}{-0}\right) = \infty,$$

$$\lim_{x\to -1+0} \ln\frac{x+1}{x+2} = \ln\left(\frac{+0}{1}\right) = -\infty.$$

Получаем, что $x=-1$ и $x=-2$ - вертикальные асимптоты.

2) Точки пересечения с осями координат:

Ox: $y=\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)=0, \Rightarrow \dfrac{x+1}{x+2}=1, \; x+1=x+2$, нет решений.

Oy: $x=0, \Rightarrow y=\ln\left(\dfrac{0+1}{0+2}\right)=-\ln 2\approx -0,69.$ Точка (0, -0,69).

3) Функция общего вида, так как

$$y(-x)=\ln\frac{-x+1}{-x+2}=\ln\frac{x-1}{x-2}\neq \pm y(x)$$

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x)=\left(\ln\frac{x+1}{x+2}\right)'=\frac{x+2}{x+1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)'=\frac{x+2}{x+1}\frac{x+2-(x+1)}{(x+2)^2}=\frac{1}{x+1}\frac{x+2-x-1}{(x+2)}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

Находим критические точки: $x_1=-1, \; x_2=-2$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.

Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-2), (-1;+\infty)$. Экстремумов нет.

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x)=\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right)'=-\frac{x+1+x+2}{(x+1)^2(x+2)^2}=-\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}.$$

Находим критические точки: $x_1=-1, \; x_2=-2, \; x_3=-1,5$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.

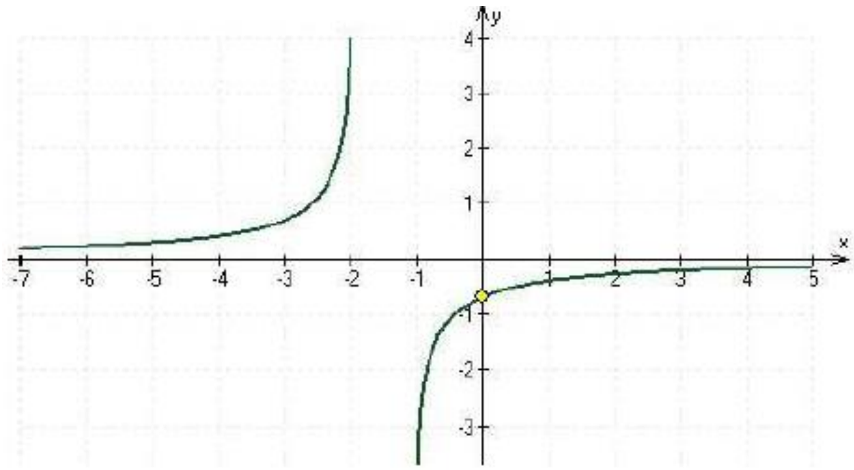
Функция выпукла вниз на $(-\infty;-2)$, выпукла вверх на $(-1;+\infty)$.

6) Горизонтальная асимптота:

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{1+1/x}{1+2/x}=0,$$

Асимптота $y=0$.

7) Строим график функции, отметим ключевые точки:



Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать логарифмическую функцию:

$$f(x) = \log_2\left(\frac{x+1}{5}\right)$$

Раздел 2. Самостоятельная работа

3.1. Проработка лекционного материала.

3.2. Подготовка к практическим занятиям согласно разделу 1.