

Федеральное агентство по образованию
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
(ТУСУР)

Кафедра физики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой физики
_____ Е.М. Окс

Физика

ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
КОЛЕБАНИЙ

Руководство к компьютерной лабораторной работе

Разработчики:

Профессор

Бурдовицин В.А.

Доцент

Троян Л.А.

Томск-2006

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является изучение вынужденных электромагнитных колебаний и явления резонанса в последовательном колебательном контуре.

1 КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. С этой целью в колебательный контур включают источник внешней периодически изменяющейся э.д.с.

Колебания, возникающие под действием периодически изменяющейся э.д.с., называются *вынужденными* колебаниями.

Рассмотрим вынужденные колебания в последовательном контуре (**Рис. 1.1**), состоящем из R , L , C , возникающие под действием внешнего источника, э.д.с. которого изменяется по закону

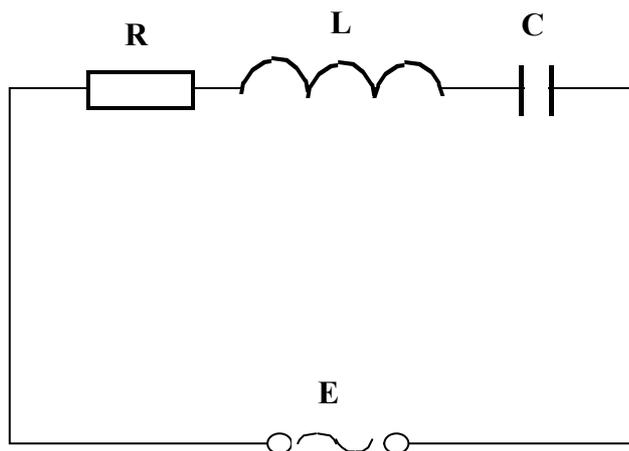


Рисунок 1.1 - Колебательный контур

$$E = E_m \cos \omega t$$

Будем считать, что в контуре протекают квазистационарные токи, так как выполняется условие

$$l \ll \lambda ,$$

где l - размеры контура;

λ - длина волны распространяющихся электромагнитных колебаний.

С учетом выше сказанного, на основании второго правила Кирхгофа можно записать

$$U_L + U_C + U_R = E \quad (1.1)$$

Из уравнения (1.1) получаем:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = E_m \cos \omega t \quad (1.2)$$

Используя соотношение $I = \frac{dq}{dt}$, уравнение (1.2) можно записать

в виде

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = U_m \cos \omega t, \quad (1.3)$$

где $\delta = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания, (1.4)

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - собственная частота контура без затухания, (1.5)

$U_m = \frac{E_m}{L}$ (1.6)

Уравнение (1.3) является дифференциальным уравнением вынужденных электрических колебаний в контуре. Данное уравнение является неоднородным. И, как следует из теории дифференциальных уравнений, решение его равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения q_1 (т.е. уравнения (1.3) без правой части) и частного решения неоднородного уравнения q_2

$$q = q_1 + q_2 \quad (1.7)$$

Общее решение однородного уравнения известно из теории затухающих колебаний и может быть записано в виде

$$q = q_m e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t - \varphi), \quad (1.8)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - частота свободных затухающих колебаний.

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$q_2 = q_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (1.9)$$

где ω - частота изменения внешней э.д.с.;

φ - начальная фаза вынужденного колебания.

Слагаемое (1.8) играет существенную роль в начальной стадии процесса, при установлении колебаний.

Следовательно, вклад (1.8) в установившиеся колебания очень мал, и им можно пренебречь. Поэтому установившиеся вынужден-

ные колебания будут определяться частным решением неоднородного уравнения

$$q=q_2 =q_m \cos(\omega t-\varphi) \quad (1.10)$$

Для нахождения значений q_m и φ найдем производные q' и q''

$$q' =-\omega q_m \sin(\omega t+\varphi)=\omega q_m \cos(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2}) \quad (1.11)$$

$$q''=-\omega^2 q_m \cos(\omega t-\varphi)=\omega^2 q_m \cos(\omega t-\varphi+\pi) \quad (1.12)$$

Подставив (1.10), (1.11), (1.12) в (1.3), получим уравнение

$$\begin{aligned} \omega^2 q_m \cos(\omega t-\varphi+\pi) &= 2\delta\omega q_m \cos\left(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+ \\ &+ \omega_0^2 q_m \cos(\omega t-\varphi) = U_m \cos \omega t \end{aligned} \quad (1.13)$$

Из (1.13) следует, что постоянные q_m и φ должны иметь такие значения, чтобы гармоническая функция $U_m \cos \omega t$ была равна сумме трех гармонических функций, стоящих в левой части уравнения. Для нахождения значений q_m и φ воспользуемся методом векторных диаграмм, который заключается в том, что гармонически изменяющаяся величина изображается вектором, вращающимся с частотой ω вокруг своего начала против часовой стрелки. Длина этого вектора равна амплитуде колебаний соответствующей физической величины.

Если изобразить функцию $\omega_0^2 q_m \cos(\omega t-\varphi)$ вектором, длина которого $\omega_0 q_m$, направленным вправо, то функция $2\delta\omega q_m \cos(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2})$ изобразится вектором длиной $2\delta\omega q_m$ повернутым относительно вектора $\omega_0^2 q_m$ против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 1.2), а функция $\omega^2 q_m \cos(\omega t-\varphi+\pi)$ - вектором длиной $\omega^2 q_m$, повернутым относительно вектора $\omega_0^2 q_m$ на угол π . Чтобы уравнение (1.13) выполнялось, сумма трех перечислен-

ных векторов должна совпадать с вектором, изображающим функцию $U_m \cos \omega t$.

Такое совпадение возможно, как видно из **рис. 1.2**, если

$$U_m^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 q_m^2 + 4\delta^2 \omega^2 q_m^2 \quad (1.14)$$

Из (1.14) найдем амплитуды

$$q_m = \frac{U_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \quad (1.15)$$

Рис.1.2 позволяет получить значения φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (1.16)$$

Учитывая, что $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$; $\delta = \frac{R}{2L}$; $U_m = \frac{E_m}{L}$,

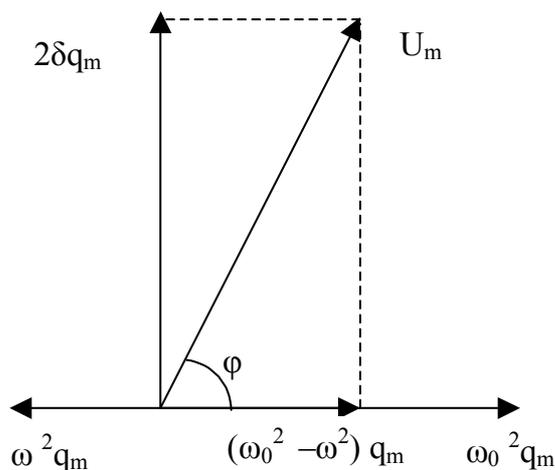


Рисунок 1.2 - Векторная диаграмма

Получаем

$$q_m = \frac{E_m}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (1.17)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{1/\omega C - \omega L} \quad (1.18)$$

Продифференцировав выражение (1.17) по t , найдем силу тока в контуре при установившихся колебаниях:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t - \varphi) = I_m \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}), \quad (1.19)$$

где I_m - амплитудное значение установившегося тока в контуре

$$I_m = \omega q_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (1.20)$$

В соответствии с (1.19) напряжение на резисторе

$$U_R = RI_m \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad (1.21)$$

Разделив выражение (1.10) на емкость, получим напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \varphi) = U_{Cm} \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.22)$$

Здесь

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{E_m}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{I_m}{\omega C} \quad (1.23)$$

Напряжение на индуктивности

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega LI \sin(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) = U_{Lm} \cos(\omega t - \varphi + \pi) \quad (1.24)$$

Сопоставляя выражения (1.21), (1.22), (1.23) видим, напряжение на емкости отстает по фазе от силы тока на $\pi/2$, а напряжение на индуктивности опережает ток на $\pi/2$. Напряжение на активном сопротивлении изменяется в фазе с током.

Таким образом, изменения I , q , U_C , U_L , U_R - представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте внешней э.д.с. Для данной колебательной системы **амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей э.д.с. ω** и при определенных значениях ее достигает максимального значения. Это явление называется *резонансом*, а соответствующая частота *резонансной частотой*.

Чтобы определить резонансную частоту ω_{PE3} любой из выше перечисленных гармонически изменяющихся величин, нужно ис-

следовать функцию, определяющую данную величину, на максимум. Так из (1.15) видно, что максимальное значение q_m будет при минимальном значении подкоренного значения знаменателя. Продифференцировав подкоренное выражение по ω и приравняв нулю, получим условие, определяющее $\omega_{рез}$:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\delta^2\omega = 0$$

Данное уравнение имеет три решения $\omega=0$ и $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$.

Решение $\omega=0$ соответствует максимальному значению знаменателя, а отрицательное значение не имеет смысла. Т.о. резонансная частота для q и напряжение U_c определяются выражением:

$$\omega_{рез} = \omega_{Uрез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0 \quad (1.25)$$

На рис 1.3 приведены резонансные кривые для U_c . Отдельные кривые на графике соответствуют различным значениям коэффициента затухания δ . Чем меньше δ , тем выше и правее лежит максимум кривой. При большом затухании, когда $2\delta^2 > \omega_0^2$, резонанс не наблюдается, с увеличением частоты амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает (см. нижнюю кривую при δ_4). При стремлении ω к нулю резонансные кривые сходятся в одной точке с ординатой $U_{Cm} = U_m$. Величина U_m равна напряжению, которое возникает на конденсаторе при подключении его к источнику постоянного напряжения U_m . При малом затухании ($\delta^2 \ll \omega_0^2$) резонансную частоту можно брать равной $\omega_{рез} = \omega_0$.

Резонансные кривые для силы тока приведены на рис. 1.4. Как видно из выражения (1.20), амплитуда тока будет иметь максимальное значение при

$$\omega_{Iрез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.26)$$

При $\omega=0$, ток в цепи равен нулю, т.к. при постоянном напряжении ток в цепи с конденсатором протекать не может. При таком соединении элементов как на

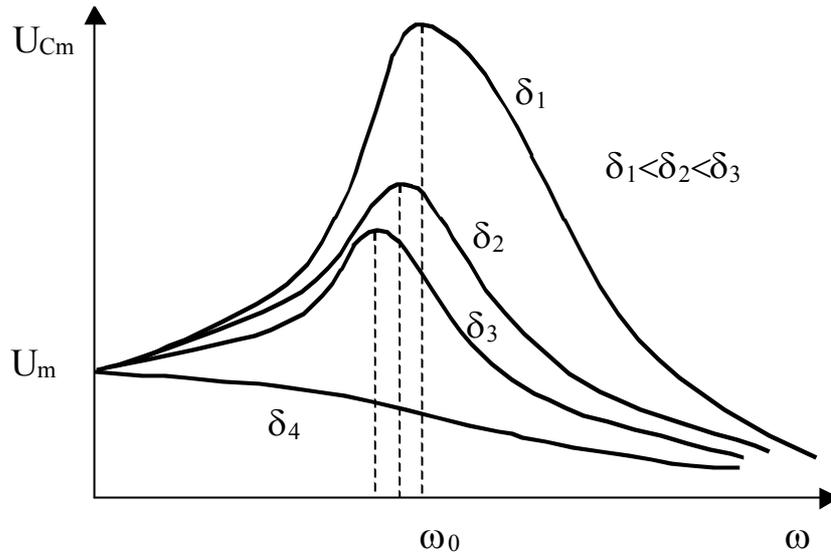


Рисунок 1.3 - Резонансные кривые для напряжения U_C

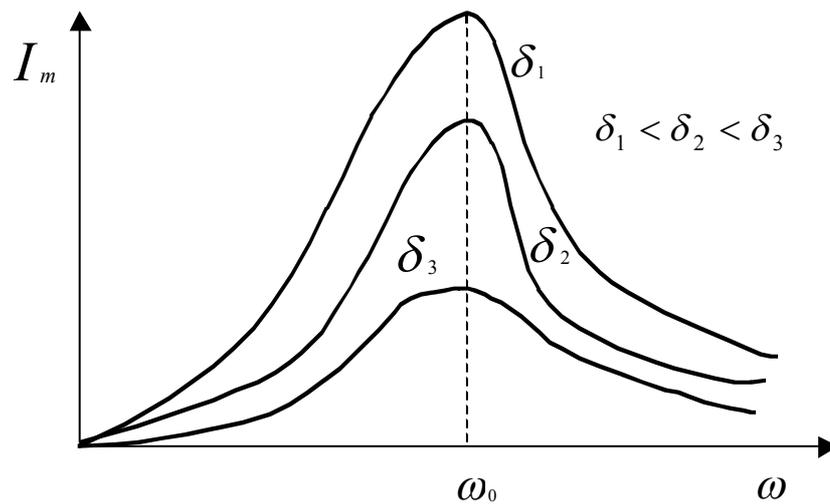


Рисунок 1.4 - Резонансные кривые для силы тока

рис. 1.1, когда $\omega_{PE3} \leq \omega_0$, амплитуда силы тока $I = \frac{E_m}{R}$, а разность фаз $\varphi = 0$, т.е. в цепи как бы нет ни емкости, ни индуктивности. Иначе говоря, при этой частоте напряжения на емкости и индуктивности полностью компенсируют друг друга, будучи равными по величине и противоположными по фазе. При этом напряжения U_L и U_C могут значительно превышать напряжение E_m , приложенное к цепи. Поэтому этот резонанс, наблюдаемый в цепи переменного

тока, содержащей последовательно включенные L , C , R и источник э.д.с., называют *резонансом напряжений*.

При вынужденных колебаниях весь процесс характеризуют несколько параметров: собственная частота ω_0 , логарифмический декремент затухания:

$$\Theta = \delta T = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi R}{L\omega_0} \quad (1.27)$$

и добротность Q . Добротность с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной в колебательной системе в данный момент $W_{зап}$ к убыли этой энергии за период колебаний ΔW

$$Q = 2\pi \frac{W_{зап}}{\Delta W} \quad (1.28)$$

Поскольку энергия W пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, а амплитуда свободных колебаний изменяется в реальном колебательном контуре по закону

$$A(t) = A_m e^{-\delta t}, \text{ то}$$

$$Q = \frac{2\pi A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}}.$$

При малом затухании, когда $\delta^2 \ll \omega_0^2$

$$1 - e^{-2\delta T} \approx 2\delta T = 2\Theta$$

С учетом этого

$$Q = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{2\pi L}{RT} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.29)$$

Отсюда видно, что чем меньше затухание колебаний, тем больше добротность, а чем больше добротность, тем больше амплитуда резонансного напряжения на конденсаторе $U_{срез}$ в сравнении с амплитудой внешнего напряжения E_m . Убедимся в этом, для чего найдем отношение амплитуд с учетом (1.23)

$$\frac{U_{CmPE3}}{E_m} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \quad (1.30)$$

Таким образом, добротность контура определяет также остроту резонансных кривых. Чем больше Q , тем уже резонансная кривая.

Если резонансную кривую нормировать относительно максимального значения и построить зависимость $\frac{I_m}{I_{mPE3}} = f(\omega)$, то

$\omega_{PE3} = \Delta\omega Q$, где $\Delta\omega$ - ширина резонансной кривой

$\frac{I_m}{I_{mPE3}} = f(\omega)$, взятая на высоте 0,7. Обозначим отношение токов

$\frac{I_m}{I_{mPE3}}$ через σ и, помня, что

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad (1.31)$$

можно записать, что

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/R^2 (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (1.32)$$

Для удобства использования соотношения (1.32) возведем левую и правую части уравнения в квадрат

$$\sigma^2 = \frac{1}{1 + 1/R^2 (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (1.33)$$

Соотношение (1.33) есть уравнение резонансной кривой в безразмерной форме.

Преобразуем (1.33), вынося за скобку, стоящую под знаком корня, множитель $\frac{L}{C}$:

$$\sigma^2 = \frac{1}{1 + \frac{L}{R^2 C} \left[\sqrt{\frac{C}{L}} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]^2} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R^2 C} \left[\left(\omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \right) \right]^2} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{L}{R^2 C} \left(\frac{\omega}{\omega_{рез}} - \frac{\omega_{рез}}{\omega} \right)^2}. \quad (1.34)$$

Введем обозначение $\gamma = \frac{\omega_{рез}}{\omega}$, тогда получим

$$\sigma^2 = \frac{1}{1 + \frac{L}{R^2 C} \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R^2 C} \left(\frac{1 - \gamma^2}{\gamma} \right)^2}. \quad (1.35)$$

Или с учетом (1.29)

$$\sigma^2 = \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{1 - \gamma^2}{\gamma} \right)^2}. \quad (1.36)$$

Для удобства использования возведем обе части (1.36) в степень -1. Получим

$$\frac{1}{\sigma^2} = 1 + Q^2 \left(\frac{1 - \gamma^2}{\gamma} \right)^2. \quad (1.37)$$

Для данной лабораторной работы выражение 1.37 является рабочей формулой. Оно позволяет представить резонансную кривую в виде линеаризованной зависимости.

2 ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Принципиальная схема устройства приведена на рис. 2.1. Здесь **G** и **N** генератор и осциллограф, соответственно. Переменный резистор **RP** служит для изменения добротности контура. Резистор **r** сопротивлением 1 Ом играет роль сигнального, т.е. элемента, с которого снимается сигнал, пропорциональный току в контуре. Конструктивно установка оформлена в настольном лабораторном макете. На лицевую панель выведены гнезда для подключения генератора и осциллографа, а также рукоятка управления резистором.

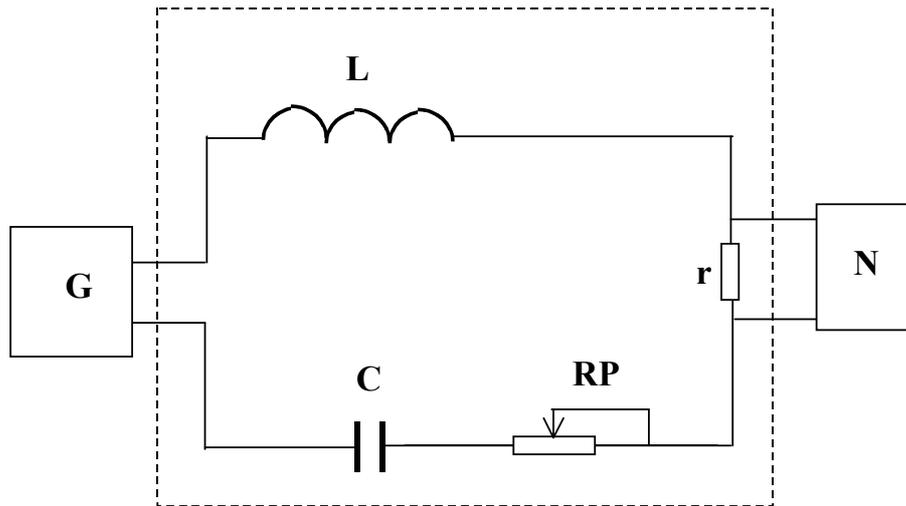


Рисунок 2.1 – Принципиальная схема установки

3 ЗАДАНИЕ

3.1 Изучить теорию вынужденных колебаний и явления резонанса в последовательном колебательном контуре.

3.2 Осуществить экспериментальное наблюдение явления резонанса.

3.3 Экспериментально исследовать влияние величины активного сопротивления в контуре на вид резонансных кривых.

3.4 Экспериментальным путем проверить применимость уравнения (1.37) для описания резонансной кривой.

3.5 Используя данные эксперимента, рассчитать индуктивность L и емкость C контура, а также активное сопротивление катушки.

4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

4.1 Включить лабораторный макет кнопкой на панели.

4.2 Войти в «среду» «Реально-виртуальная лаборатория».

4.2.1 На экране монитора установить указатель мыши на значок «Лаборатория» и нажать дважды на левую кнопку. При этом открывается меню с перечнем работ, среди которых найти «Вынужденные колебания» и активизировать ее с помощью мыши. На экране появится рабочий стенд, включающий экран осциллографа, рукоятку регулировки частоты генератора, а также таблицу для записи результатов измерений.

4.2.2 Включить питание стенда, для чего активизировать мышью кнопку . При этом на экране появится сигнал.

4.3 Установить рукоятку управления резистором **RP** на отметку 40%.

4.4 Вращая мышью рукоятку «Частота» на экране монитора, убедиться в наличии резонанса. Снять зависимость амплитуды I_m сигнала от частоты в интервале частот больших и меньших резонансной. Для этого, установив частоту, взять мышью измерительные скобки, находящиеся в левых верхнем и нижнем углах экрана осциллографа, и подвести их к верхнему и нижнему максимумам синусоиды. После этого нажать мышью кнопку для передачи данных в таблицу. Обязательно зафиксировать резонансную частоту $\nu_{рез}$ и соответствующую амплитуду $I_{mрез}$ сигнала. Данные из таблицы либо занести в рабочую тетрадь, либо кнопкой переслать в **Excel**. Для очистки таблицы следует нажать правую кнопку мыши и выбрать команду из появившегося меню.

4.5 Рукоятку **RP** на макете перевести в положение 80% и повторить измерения по п. 4.4.

4.6 По измеренным данным рассчитать значения $\sigma = I_m / I_{mрез}$ и $\gamma = \nu_{рез} / \nu$. Результаты расчета занести в таблицу 4.1.

4.7 Нанести рассчитанные значения на график в координатах σ, ν и построить резонансные кривые.

4.8 Для сравнения полученных зависимостей с теоретическими с использованием метода линеаризации рассчитать и занести в таблицу 4.1 величины $1/\sigma^2$ и $\left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma}\right)^2$. Нанести полученные значения на график в этих же координатах и убедиться в наличии линейной зависимости между величинами.

4.9 По угловым коэффициентам определить добротности Q_1, Q_2 .

Таблица 4.1 Результаты измерений

Но мер опы та	RP = 0,4 кОм						RP = 0,8 кОм					
	ν , Гц	I_m , мм	σ	$1/\sigma^2$	γ	$\left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma}\right)^2$	ν , Гц	I_m , мм	σ	$1/\sigma^2$	γ	$\left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma}\right)^2$
1												
2												
.												

4.10 Рассчитать индуктивность **L** и емкость **C** контура, а также активное сопротивление катушки, используя выражения (1.5) и

(1.29), а также учитывая, что в (1.29) величина R представляет собой сумму сопротивлений RP , активного сопротивления катушки и измерительного резистора r (рис. 3.1).

4.11 Выключить устройство, нажав мышью кнопку **STOP**, и закрыть экран, нажав кнопку в его правом верхнем углу. Выключить **СЕТЬ** кнопкой на макете.

5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

5.1 В чем состоит цель работы?

5.2 Какие колебания называются вынужденными?

5.3 Какова частота вынужденных колебаний?

5.4 Какими параметрами характеризуются вынужденные колебания?

5.5 Как определяется добротность контура в настоящей работе?

5.6 Из чего складывается полное активное сопротивление контура?

5.7 Из чего складывается полное сопротивление контура?

5.8 Изобразите резонансные кривые тока для разных добротностей контура.

5.9 Изобразите резонансные кривые напряжения на конденсаторе для разных добротностей контура.

5.10 Возможно ли получение на отдельных элементах контура напряжения, во много раз большего приложенного напряжения?

5.11 Чем определяется разность фаз между током и приложенным напряжением?

5.12 В чем физический смысл добротности?

5.13 Что происходит на частоте резонанса в контуре, если R стремится к нулю?

5.14 Известно, что в цепи переменного тока, состоящей из L , R , C , полное сопротивление имеет активную и реактивную составляющие. В каком случае ток в цепи определяется только активной составляющей сопротивления?

5.15 В чем состоит физическая причина возникновения разности фаз между I и U_L . Почему U_L имеет максимальное значение, когда ток I равен нулю?

Замечания

Номиналы резисторов

Номера ссылок на рисунки.

Формула (1.13) – знак.

Рис. 1.2 обозначения на осях.