Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
(ТУСУР)

Т.А. Ельцова

Математика
3-й семестр
Курс лекций
Учебное пособие

Для специальности
09.03.04 «Программная инженерия»

ТОМСК – 2018

Приведён конспект лекций по дисциплине «Математика». Курс прочитан осенью 2017 года в группах 426-1,2,3 и включает в себя теорию дифференциальных и разностных уравнений, элементы теории устойчивости, теорию числовых и функциональных рядов в комплексной форме, теорию степенных рядов и рядов Тейлора, элементы теории систем ортогональных функций и рядов Фурье.

СОДЕРЖАНИЕ

Элементы теории рядов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1. Общие сведения

Изложенное ниже является введением в круг вопросов и задач, изучаемых в теории дифференциальных уравнений, и не претендует на полноту.

Определение. Уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и некоторое количество её производных, т.е. уравнение вида

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

называется дифференциальным уравнением n – го порядка. Если x – векторная величина, то уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных, а если x – скаляр, то обыкновенным дифференциальным уравнением.

Для многих динамических, то есть меняющихся во времени, процессов и явлений бывает трудно написать закон их поведения в виде конкретной функции времени, а написать этот закон в виде дифференциального уравнения часто значительно легче. Построением дифференциальных уравнений для описания конкретных процессов, то есть построением математических моделей этих процессов, мы заниматься не будем.

Всюду ниже, кроме п.5, будем изучать обыкновенные дифференциальные уравнения. В п.5 рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка.

Самым простым обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение 1-го порядка, то есть уравнение

$$F(x,y,y')=0, \tag{1.2}$$

получающееся из (1.1) при $n=1$. Функция $F(x,y,z)$ в (1.2) предполагается определённой на некотором множестве G из R^3.

Если уравнение (1.2) удается разрешить относительно y' и записать в виде

$$y'=f(x,y), \tag{1.3}$$

то уравнение (1.3) называется уравнением 1-го порядка, разрешенным относительно производной. Иногда уравнение (1.3) удобнее записывать в эквивалентном виде в так называемой дифференциальной форме

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \tag{1.4}$$

Функции $f(x,y)$, $M(x,y)$, $N(x,y)$ предполагаются заданными на некотором множестве D плоскости R^2.

Мы будем пользоваться той записью, которая в данный момент удобнее.

> *Определение*. Функция $\varphi(x)$, заданная на отрезке или интервале (a,b), называется решением дифференциального уравнения в области D, если при подстановке $\varphi(x)$ в уравнение она обращает его в тождество в этой области.

Естественно, чтобы быть решением дифференциального уравнения первого порядка, функция $\varphi(x)$ должна быть дифференцируемой, а, следовательно, и непрерывной. Кроме того, точка $(x,\varphi(x),\varphi'(x))$ должна принадлежать множеству G, если речь идёт о решении уравнения (1.2), а точка $(x,\varphi(x))$ должна принадлежать множеству D, если речь идёт о решении уравнений (1.3) или (1.4). Будем предполагать, что и первая производная функции $\varphi(x)$ непрерывна. Чтобы быть решением дифференциального уравнения n-го порядка, функция $\varphi(x)$ должна иметь n непрерывных производных.

При изучении дифференциальных уравнений выделяют качественную и количественную теории дифференциальных уравнений.

В качественной теории по виду дифференциального уравнения изучают свойства его решений, не находя их.

В количественной теории занимаются разработкой методов нахождения решений дифференциальных уравнений.

Мы, в основном, будем заниматься количественной теорией дифференциальных уравнений.

В количественной теории рассматривают точные и приближенные методы нахождения решений. Займемся пока точными методами.

Решить дифференциальное уравнение означает описать всю совокупность его решений. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения, как и любого другого уравнения, состоит в преобразовании его к такому виду, из которого это решение легко находится. При этом два уравнения $F_1(x,y,y')=0$ и $F_2(x,y,y')=0$ назовём эквивалентными в области D, если решения одного из них являются решениями другого. Идеальным было бы при нахождении решения осуществлять переход к эквивалентным уравнениям. Это не всегда удаётся. Поэтому в процессе преобразований мы должны следить за тем, чтобы не терять решений и не приобретать новых.

1.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Самыми простыми в изучении являются уравнения вида $f_1(x)dx = f_2(y)dy$. Действительно, если $y(x)$ есть решение этого уравнения, то, в силу инвариантности формы первого дифференциала, можем записать $\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy$. Равенство подразумевает, что множество всех первообразных в левой части равно множеству всех первообразных в правой части. Если $\Phi_1(x)$ – какая-нибудь первообразная левой части, а $\Phi_2(y)$ – правой части, то последнее соотношение можно переписать в виде $\Phi_1(x) = \Phi_2(y) + C$, разрешая которое относительно y, получаем всю совокупность решений исходного уравнения. Большинство методов решений дифференциальных уравнений заключается в сведении их к уравнению рассмотренного выше типа.

Следующими по сложности являются уравнения с разделяющимися переменными.

Пусть в выражении (1.3) $f(x,y) = f_1(x) f_2(y),$ то есть уравнение может быть представлено в виде

$$y' = f_1(x) f_2(y), \tag{1.5}$$

или в эквивалентной форме

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0. \tag{1.6}$$

Уравнения (1.5) и (1.6) называются *уравнениями с разделяющимися переменными*.

Если $f_2(y) \neq 0$ для $\forall y \in [c,d]$, то, с учетом того, что $y' = dy/dx$, из (1.5) получаем

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx,$$

откуда, с учетом инвариантности формы дифференциала первого порядка, имеем

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx .$$

Как и ранее, полученное соотношение означает, что множество первообразных в левой части равно множеству всех первообразных в правой части. Если $\Phi_2(y), \Phi_1(x)$ - какие-либо первообразные левой и правой частей соответственно, то его можно переписать в виде $\Phi_2(y) = \Phi_1(x) + C$. Разрешая последнее относительно y, получаем всю совокупность решений исходного уравнения.

Заметим, что если $f_2(y_0)=0$, то мы должны проверить, является ли функция $y=y_0$ решением исходного дифференциального уравнения, чтобы не потерять его в процессе нахождения решения.

Аналогично, для уравнения в форме (1.6), если $M_2(y)\neq 0,\ N_1(x)\neq 0\ \ \forall x\in[a,b],\ \forall y\in[c,d],$ получаем

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=-\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx,$$

или, интегрируя обе части по x,

$$\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=-\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx.$$

Вычисляя полученные интегралы, находим все множество решений (при $M_2(y)\neq 0,\ N_1(x)\neq 0\ \ \forall x\in[a,b],\ \forall y\in[c,d]$) уравнения (1.6).

Пример 1. Для уравнения $y'=e^{x+y}$ имеем $y'=e^x e^y$, откуда $e^{-y}dy=e^x dx$ или, интегрируя обе части по x, $e^{-y}=-e^x+C$ и, наконец, $y=-\ln(-e^x+C)$.

Пример 2. Решить уравнение $xydx+(x+1)dy=0$. В предположении, что $y(x+1)\neq 0,$ получаем $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{xdx}{x+1}$ или, интегрируя, $\ln|y|=-x+\ln|x+1|+\ln|C|$, отсюда $y=C(x+1)e^{-x}$. Решение y = 0 получается при C = 0, а решение $x=-1$ не содержится в нем. Таким образом, решением уравнения являются функции $y=C(x+1)e^{-x}$, $x=-1$.

Пример 3. Решить уравнение $(e^{5x}+9)dy=ye^{5x}dx$. В предположении, что $y\neq 0,$ получаем $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{e^{5x}dx}{e^{5x}+9}$ или, интегрируя, $\ln|y| = \frac{1}{5}\ln(e^{5x}+9) + \ln|C|$, отсюда $y = C\cdot\sqrt[5]{e^{5x}+9}$. Решение $y = 0$ получается при $C = 0$.

С другими примерами, служащими для закрепления навыков решения уравнений с разделяющими переменными, можно познакомиться в п.5.1.2 практикума [6] или в аналогичных разделах других задачников по дифференциальным уравнениям.

1.3. Однородные уравнения

Определение. Функция $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется однородной степени k, если для нее выполнено соотношение $F(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k F(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется однородным, если $f(x, y)$ – однородная функция нулевой степени, то есть $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Однородное дифференциальное уравнение удаётся записать в виде $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Действительно, если $f(x, y)$ – однородная функция нулевой степени, то $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Отметим, что уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ является однородным тогда и только тогда, когда функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции одной и той же степени. В этом случае имеем

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = x^k M\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + x^k N\left(1, \frac{y}{x}\right)dy =$$

$$= x^k\left(M\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right)dy\right) = 0.$$

Разделив на x^k, получаем, что исходное уравнение свелось к уравнению $M\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0$, которое является однородным. Естественно, мы должны проследить, чтобы не потерять решение $x = 0$, если оно есть, исходного уравнения.

Однородное дифференциальное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $y = xu$, или, что то же самое, $u = \frac{y}{x}$, где u – новая искомая функция. Действительно, тогда $y' = u + u'x$ и исходное уравнение может быть переписано в виде $u + u'x = \varphi(u)$, или $u'x = \varphi(u) - u$. Из последнего соотношения, при $\varphi(u) \neq u$ можем записать $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$. Заметим, что в случае $\varphi(u) = u$ исходное уравнение уже является уравнением с разделяющимися переменными.

Пример. Решить уравнение $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$. Это однородное уравнение, так как $y^2 - 2xy$ и x^2 – однородные функции второй степени. Делаем замену $y = xu, dy = udx + xdu$. Подставляя в уравнение, имеем

$$(x^2u^2 - 2x^2u)dx + x^2(udx + xdu) = 0.$$

Раскрывая скобки, приводя подобные и сокращая на x^2, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$(u^2 - u)dx + xdu = 0.$$

Разделяя переменные, получаем $-\frac{du}{u(u-1)} = \frac{dx}{x}$, или, что то же самое, $\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1}\right)du = \frac{dx}{x}$. Интегрируя последнее соотношение, имеем $\ln|u| - \ln|u-1| = \ln|x| + \ln|C|$. Потенцируя (переходя от логарифмической функции к e^x), можем записать $\frac{u}{u-1}=Cx$, или, делая обратную замену $u=\frac{y}{x}$, получаем $\frac{y}{y-x}=Cx$. При сокращении на x^2 мы потеряли решение $x=0$, которое в найденное решение не входит. Кроме того, мы могли потерять решения при делении на $u(u-1)$. Случай $u=0$ даёт решение $y=0$, входящее в найденное при $C=0$. Случай $u=1$ даёт решение $y=x$, которое не входит в найденное. Таким образом, решениями исходного уравнения являются функции $x=0$, $y=x$, $\frac{y}{y-x}=Cx$.

Уравнения вида $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ приводятся к однородным переносом начала координат в точку пересечения прямых $a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0,$ если определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля, и заменой $a_1x+b_1y=z,$ если этот определитель равен нулю.

С другими примерами, служащими для закрепления навыков решения однородных уравнений, можно познакомиться в п.5.1.3 практикума [6] или в аналогичных разделах других задачников по дифференциальным уравнениям.

1.4. Постановка задачи о выделении решений. Теорема существования и единственности

Как мы уже видели, множество решений дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ есть некоторое семейство функций, зависящее от константы. Хотелось бы выяснить условия на функцию $f(x,y)$, при выполнении которых можно выделить конкретное решение этого уравнения, удовлетворяющее заранее заданным требованиям. Для уравнения первого порядка требования формулируются следующим образом.

Найти решения дифференциального уравнения (1.3)

$$y' = f(x, y),$$

удовлетворяющие условиям

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.7}$$

Сформулированные условия называются условиями Коши, а задача о выделении решения, удовлетворяющего условиям Коши, *задачей Коши*.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y в области D, если для любых двух точек $(x, y_1), (x, y_2)$ из этой области выполнено неравенство

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le L \left| y_1 - y_2 \right|, \tag{1.8}$$

где L – некоторая константа, не зависящая от x и y.

Теорема 5.1 (существования и единственности). Пусть в уравнении (1.3) $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$, заданная в области D на плоскости, непрерывна по x и удовлетворяет условию Липшица (1.8) по y. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существуют интервал $(x_0 - \lambda, x_0 + \lambda)$ и функция $y = \varphi(x)$, заданная на этом интервале так, что $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (1.3), удовлетворяющее условию (1.7). Это решение единственно в том смысле, что если $y = \phi(x)$ есть решение уравнения (1.3), определенное на интервале (α, β), включающем в себя точку x_0, и удовлетворяющее условию (1.7), то функции $\varphi(x)$ и $\phi(x)$ совпадают там, где они обе определены.

Доказательство этого результата опустим. Желающие могут ознакомиться с ним в [7, 24, 25].

Множество D назовём выпуклым по y, если для всяких двух точек (x, y_1), (x, y_2) из D этому множеству принадлежат и точки отрезка, их соединяющего, то есть точки вида $(x, \bar{y})$, где $\bar{y}$ – число, лежащее между y_1 и y_2.

Отметим, что если непрерывная на множестве D функция $f(x, y)$ имеет там же непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, множество D – ограничено, замкнуто и выпукло по y, то функция $f(x, y)$ удовлетворяет на множестве D условию Липшица по y. Действительно, по теореме Лагранжа о конечных приращениях можем записать

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| = \left| \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} (y_1 - y_2) \right| = \left| \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \right| \cdot \left| y_1 - y_2 \right| \le$$

$$\le \max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \cdot \left| y_1 - y_2 \right|.$$

Поэтому в теореме существования и единственности вместо требования выполнения условия Липшица по y часто требуют, чтобы функция $f(x, y)$ имела непрерывную частную производную по переменной y. Особенно, если учитывать, что последнее условие проверять легче.

Теорема существования и единственности гарантирует, что при выполнении её условий через точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит только одно решение уравнения (1.3). Если условия теоремы нарушаются в некоторой точке, то через неё может проходить больше, чем одно решение (нарушается единственность), либо не проходить ни одного решения (нарушается существование).

Определение. Семейство $y = \varphi(x, C)$ решений дифференциального уравнения (1.3) назовём его общим решением, если для любого набора начальных данных $(x_0, y_0) \in D$ найдётся константа $\overline{C}$, на которой этот набор реализуется, то есть такая, что для решения $y=\varphi(x,\overline{C})$ выполнены начальные условия $y_0=\varphi(x_0,\overline{C})$.

Если $y=\varphi(x,C)$ – общее решение уравнения (1.3), то, как следует из определения, при любых $(x,y)\in D$ уравнение $y=\varphi(x,C)$ разрешимо относительно C, то есть может быть записано в виде $\psi(x,y)=C$, где $\psi(x,y)$ – некоторая, не обязательно однозначная, функция. Функция $\psi(x,y)$ обладает тем свойством, что на любом частном решении $y(x)$ уравнения (1.3) $\psi(x,y)$ тождественно равна константе, то есть $\psi(x,y(x))\equiv C$. Часто удаётся записать множество решений дифференциального уравнения (1.3) в виде однопараметрического семейства функций $\phi(x,y,C)=0$. Функция $\phi(x,y,C)$ так же обладает свойством, что на любом частном решении $y(x)$ уравнения (1.3) $\phi(x,y,C)$ тождественно равна нулю, то есть $\phi(x,y(x),C)\equiv 0$.

Определение. Однопараметрическое семейство функций $\phi(x,y,C)=0$ (или $\psi(x,y)=C$) называется общим интегралом дифференциального уравнения (1.3), если на любом частном решении $y(x)$ уравнения (1.3) $\phi(x,y(x),C)\equiv 0$ ($\psi(x,y(x))\equiv C$).

1.5. Линейные уравнения первого порядка

Уравнение первого порядка вида

$$a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x) \tag{1.9}$$

называется *линейным дифференциальным уравнением*. Если $b(x)\equiv 0,$ то уравнение (1.9) называется линейным однородным, в противном случае – линейным неоднородным. Для линейного дифференциального уравнения теорема существования и единственности имеет более конкретный вид.

Теорема 5.2. Пусть $a_1(x)$, $a_0(x)$, $b(x)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$, $a_1(x)\neq 0$ для $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Тогда для любой точки (x_0,y_0), $x_0\in[a,b]$, существует единственное решение уравнения (1.9), удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$ и определенное на всем интервале $[\alpha,\beta]$.

Эту теорему примем без доказательства.

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение

$$a_1(x)y'+a_0(x)y=0\,. \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому, разделяя переменные, получаем $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}dx$, или, интегрируя обе части, $\ln|y|=-\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}dx+\ln|C|$. Последнее соотношение, с учетом обозначения $\exp(x)=e^x$, записывается в форме

$$y=C\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx\right). \tag{1.11}$$

Заметим, что выбор точки x_0 влияет лишь на вид конкретной первообразной функции $\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$.

Будем искать решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1.9) **методом Лагранжа** или, что то же самое, **методом вариации произвольной постоянной**.

Суть метода заключается в том, что мы пытаемся найти решение уравнения (1.9) в виде (1.11), в котором вместо константы C подставлена функция $C(x)$, то есть в виде

$$y = C(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx\right). \qquad (1.12)$$

Дифференцируя (1.12), имеем

$$y' = C'(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx\right) + C(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx\right)\cdot\left(-\frac{a_0(x)}{a_1(x)}\right).$$

Подставляя найденную производную и (1.12) в (1.9), получаем, после приведения подобных и деления на $a_1(x)$,

$C'(x) = \frac{b(x)}{a_1(x)}\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx\right)$. Интегрируя последнее, имеем

$$C(x) = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{b(x)}{a_1(x)}\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(t)}{a_1(t)}dt\right)\right)dx + C_1,$$

где C_1 – некоторая новая константа. Подставляя полученное выражение для $C(x)$ в (1.12), окончательно получаем общее решение исходного линейного уравнения

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x}\left(\frac{b(x)}{a_1(x)}\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(t)}{a_1(t)}dt\right)\right)dx + C_1\right)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx\right).$$

Пример 1. Решить уравнение $y' + 2y = 4x$. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' + 2y = 0$. Решая его, получаем (при $x_0 = 0$) $y = Ce^{-2x}$. Ищем теперь решение исходного уравнения в виде $y = C(x)e^{-2x}$. Подставляя y и $y' = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x}$ в исходное уравнение, имеем $C'(x) = 4xe^{2x}$, откуда $C(x) = 2xe^{2x} - e^{2x} + C_1$ и, подставляя полученное выражение $C(x)$ в $y(x)$, получаем общее решение исходного уравнения

$y(x) = (2xe^{2x} - e^{2x} + C_1)e^{-2x} = 2x - 1 + C_1e^{-2x}$.

Пример 2. Решить уравнение $y' + 5y = e^{7x}$. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' + 5y = 0$. Решая его, получаем $\frac{dy}{y} = -5\,dx$, $\ln|y| = -5x + \ln|C|$, $y = Ce^{-5x}$. Ищем теперь решение исходного уравнения в виде $y = C(x)e^{-5x}$. Подставляя y и $y' = C'(x)e^{-5x} - 5C(x)e^{-5x}$ в исходное уравнение, имеем $C'(x) = e^{12x}$, откуда $C(x) = \frac{1}{12}e^{12x} + C_1$, и $y(x) = \frac{1}{12}e^{7x} + C_1 e^{-5x}$ – общее решение исходного уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $(4e^{3y} - x)dy = dx$. Вспоминая, что переменные x и y в дифференциальном уравнении равноправны и переписывая его в виде $4e^{3y} - x = \frac{dx}{dy}$ или, что то же самое, в форме $x' + x = 4e^{3y}$, получим, что данное уравнение является линейным относительно x и x'. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $x' + x = 0$. Решая его, получаем $\frac{dx}{x} = -dy$, $\ln|x| = -y + \ln|C|$, $x = Ce^{-y}$. Ищем теперь решение уравнения $x' + x = 4e^{3y}$ в виде $x = C(y)e^{-y}$. Подставляя x и $x' = C'(y)e^{-y} - C(x)e^{-y}$ в него, имеем $C'(y) = 4e^{4y}$, откуда $C(y) = e^{4y} + C_1$, и $y(x) = e^{3y} + C_1 e^{-y}$ – общее решение исходного уравнения.

1.6. Уравнения Бернулли

Дифференциальное уравнение

$$y' + a_0(x)y = b(x)y^n \tag{1.13}$$

называется *уравнением Бернулли*.

Так как при $n = 0$ получается линейное уравнение, а при $n = 1$ – с разделяющимися переменными, то предположим, что $n \neq 0$ и $n \neq 1$. Разделим обе части (1.13) на y^n. Тогда

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{a_0(x)}{y^{n-1}} = b(x). \qquad (1.14)$$

Положив $\frac{1}{y^{n-1}} = z$, имеем $\frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n}$. Подставляя в (1.14), получим $\frac{z'}{1-n} + a_0(x)z = b(x)$, или, что то же самое, $z' + (1-n)a_0(x)z = (1-n)b(x)$. Это линейное уравнение, которое мы решать умеем.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y' + 2xy = 2xy^3$. Это уравнение Бернулли при $n = 3$. Разделив обе части уравнения на y^3, получаем $\frac{y'}{y^3} + \frac{2x}{y^2} = 2x.$ Делаем замену $z = \frac{1}{y^2}$. Тогда $z' = -2\frac{y'}{y^3}$, и поэтому уравнение переписывается в виде $-z' + 4xz = 4x$. Решая это линейное уравнение методом вариации произвольной постоянной, получаем $z(x) = 1 + C_1 e^{2x^2}$, откуда $\frac{1}{y^2} = 1 + C_1 e^{2x^2}$, или, что то же самое, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + C_1 e^{2x^2}}}$. При делении на y^3 мы потеряли решение $y = 0$, которое в полученное решение не входит.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $2yy' - 2xy^2 = x^3$. Это уравнение получено из уравнения Бернулли $2y' - 2xy = x^3 y^{-1}$ при $n = -1$. Делаем замену $z = y^2$. Тогда $z' = 2yy'$, и поэтому уравнение переписывается в виде $z' - 2xz = x^3$. Это линейное уравнение. Решаем вначале соответствующее однородное уравнение. Имеем $z' - 2xz = 0$, $z = Ce^{x^2}$. Находим теперь решение уравнения $z' - 2xz = x^3$ в виде $z = C(x)e^{x^2}$. Подставляя в него z и z', получаем $C'(x) = x^3 e^{-x^2}$, откуда $C(x) = \int x^3 e^{-x^2} dx$. Интегрируя по частям с $U = x^2, dV = x\exp(-x^2)dx$, имеем $C(x) = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + C_1$. Поэтому $z(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + C_1 e^{x^2}$, откуда $y^2 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + C_1 e^{x^2}$, или, что то же самое, $y = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + C_1 e^{x^2}}$.

С другими примерами, служащими для закрепления навыков решения линейных уравнений и уравнений Бернулли, можно познакомиться в п.5.1.4 практикума [6] или в аналогичных разделах других задачников по дифференциальным уравнениям.

1.7. Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{1.15}$$

Если существует функция $u(x, y)$ такая, что

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

то уравнение (1.15) называется *уравнением в полных дифференциалах.*

В этом случае его можно записать в виде $du(x, y) = 0$. Тогда $u(x, y) = C$ есть общий интеграл уравнения (1.15). Если разрешить последнее соотношение относительно y, то получим общее решение уравнения (1.15).

Пример 1. Дифференциальное уравнение $xdy + ydx = 0$ является уравнением в полных дифференциалах, так как

$d(xy)=xdy+ydx$. Поэтому $xy=C$ есть общий интеграл этого уравнения.

Пример 2. Аналогично для уравнения $2xydx+x^2dy=0$ выражение $x^2y=C$ есть общий интеграл, так как левая часть этого уравнения является дифференциалом функции $u(x,y)=x^2y$.

Как видим, уравнения в полных дифференциалах легко решаются, если знать функцию, дифференциалом которой является левая часть уравнения.

В разделе «Интегральное исчисление» нами были рассмотрены потенциальные поля, выявлены условия потенциальности поля, в том числе и плоского, и указан способ восстановления потенциала поля с помощью криволинейного интеграла второго рода. Вспоминая определение потенциальности поля $(M,N)^T$ и сравнивая его с определением уравнения в полных дифференциалах, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 5.3. Уравнение (1.15) есть уравнение в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда поле $(M,N)^T$ потенциально, или, что то же самое, криволинейный интеграл $\int\limits_L M(x,y)dx+N(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования.

Следствие. Если существуют непрерывные в односвязной области $D\subseteq R^2$ производные $\frac{\partial M}{\partial y},\frac{\partial N}{\partial x}$, то уравнение (1.15) есть уравнение в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда в каждой точке этой области выполнено равенство $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

Следствие даёт возможность выяснить, является ли уравнение уравнением в полных дифференциалах или нет. Теорема позволяет найти решение уравнения в случае положительного ответа на предыдущий вопрос.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$. Так как $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x,\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)=2x$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Поэтому, восстанавливая потенциал (подробнее о восстановлении потенциала смотри соответствующий пункт в разделе «Интегральное исчисление»), получаем

$$u(x,y)=\int_0^x(2x\cdot 0)dx+\int_0^y(x^2-y^2)dy=\left(x^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^y=x^2y-\frac{y^3}{3}.$$

Тогда общий интеграл (общее решение) имеет вид $x^2y-\frac{y^3}{3}=C.$

Пример 2. Уравнение $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$ также является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^{-y})=-e^{-y},$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(-2y-xe^{-y})=-e^{-y}.$$

Поэтому, восстанавливая потенциал, имеем

$$u(x,y)=\int_0^x e^{-0}dx-\int_0^y(2y+xe^{-y})dy=x-y^2+xe^{-y}-x=-y^2+xe^{-y}.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения равен

$$-y^2+xe^{-y}=C.$$

Взяв дифференциал некоторой функции двух переменных и приравняв его к нулю, получим уравнение в полных дифференциалах. Сократив на общий множитель (если он есть), мы, скорее всего, получим уравнение, не являющееся уравнением в полных дифференциалах. Поэтому возникает обратная задача: нельзя ли подобрать функцию так, чтобы, умножив на неё уравнение в дифференциальной форме, получить уравнение в полных дифференциалах. Эта задача носит название задачи о нахождении интегрирующего множителя. Оказывается, что найти интегрирующий множитель можно, но соотношения, позволяющие сделать это, часто оказываются более сложными, чем само уравнение.

С другими примерами, служащими для закрепления навыков решения уравнений в полных дифференциалах, можно познакомиться в п.5.1.5 практикума [6] или в аналогичных разделах других задачников по дифференциальным уравнениям.

1.8. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши (1.3), (1.7) для дифференциального уравнения первого порядка: найти решение уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$. Пусть $y(x)$ - решение поставленной задачи Коши. Подставив это решение в уравнение (1.3), получим тождество $y'(x) \equiv f(x, y(x))$. Интегрируя это тождество по x, получаем

$$\int_{x_0}^{x} y'(x)dx = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \,,$$

или, что то же самое,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx. \qquad (1.16)$$

Таким образом, мы показали, что всякое решение задачи Коши (1.3), (1.7) есть решение интегрального уравнения (1.16). С другой стороны, пусть $y(x)$ – непрерывное решение интегрального уравнения (1.16). Тогда $\int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$ есть интеграл как функция верхнего предела и по свойству является дифференцируемой функцией. Дифференцируя (1.16) по x, получаем, что $y(x)$ – решение задачи Коши (1.3), (1.7).

Решение интегрального уравнения (1.16) будем искать с помощью метода последовательных приближений. Положим

$$y_0(x) = y_0, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))dx. \qquad (1.17)$$

Оператор $A: M \to M$, отображающий метрическое пространство M в себя, называют *сжимающим* [11,12], если $\rho(Ax_1, Ax_2) \le \alpha\rho(x_1, x_2)$, где ρ-расстояние в M, $0 < \alpha < 1$.

Сжимающие операторы имеют неподвижную точку, то есть точку, которая оператором A переводится в себя. Если уравнение удаётся записать в виде $x = Ax$, в котором оператор A – сжимающий, то решение этого уравнения можно найти с помощью последовательных приближений $x_{n+1} = Ax_n$, которые сходятся к решению уравнения $x = Ax$.

Таким образом, если оператор

$$(Ay)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \text{ -} \qquad (1.18)$$

сжимающий [26], то последовательные приближения (1.17) сходятся к решению интегрального уравнения (1.16), а следовательно, и дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющему условию $y(x_0) = y_0$. Желающие могут познакомиться с доказательством сжимаемости оператора (1.18) в [9] или в приложении 2.

Пример. Найдём с помощью метода последовательных приближений решение уравнения $y' = y$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$. Подставляя $y(0) = 1$ в (1.17), получаем

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 1 + \int_0^x 1dx = 1 + x, \quad y_2 = 1 + \int_0^x (1 + x)dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \ldots,$$

$$y_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

С другой стороны, решая исходную задачу Коши, имеем $y = e^x$.

Таким образом, нами получено разложение функции e^x в ряд Тейлора в нуле (ряд Маклорена).

Перейдём теперь к изложению численного метода Эйлера решения задачи Коши (1.3), (1.7). Разобьём отрезок $[a, b]$, на котором мы ищем решение, на части точками $x_0 = a < x_1 < \ldots \quad \ldots < x_n = b$. Положим $y_i = y(x_i),\ 0 \le i \le n$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $0 \le i \le n-1$. Так как по определению производной $y'(x_i) = \lim\limits_{h_i \to 0} \dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h_i}$, то, заменяя производную $y'(x_i)$ конечной разностью $\dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h_i} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$ в уравнении (1.3), получаем $\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}=f(x_i,y_i)$, или, что то же самое,

$$y_{i+1}=y_i+h_i\cdot f(x_i,y_i). \qquad (1.19)$$

Соотношение (1.19) является расчётной формулой метода Эйлера численного решения задачи Коши (1.3), (1.7). Вычислив $y_i, i=0,1,...,n,$ получим таблицу значений решения в точках $x_i, i=0,1,...,n$. Для оценки погрешности на одном шаге сетки в методе Эйлера разложим точное решение $y(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_i до членов второго порядка малости

$$y(x_{i+1})=y(x_i+h)=y(x_i)+y'(x_i)h+O(h^2)=y_i+hf(x_i,y_i)+O(h^2).$$

Сравнивая с (1.19), видим, что погрешность формулы (1.19) на одном шаге равна $O(h^2)$. К сожалению, метод Эйлера накапливает ошибку от шага к шагу. Поэтому на практике пользуются либо модификациями метода Эйлера, например методом прогноза и коррекции [23], либо другими методами, в частности методом Рунге-Кутта [23].

2. Дифференциальные уравнения высших порядков

2.1. Общие сведения

Напомним, что дифференциальным уравнением $n-$го порядка мы назвали уравнение (1.1), то есть уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 .$$

Если это уравнение удаётся представить в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}), \qquad (2.1)$$

то его называют дифференциальным уравнением $n-$го порядка, разрешённым относительно старшей производной.

Решением уравнения $n-$го порядка будет семейство функций вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Для того, чтобы из этого семейства выделить конкретное решение, нужно на решение φ наложить некоторые ограничения.

Чаще всего задают начальные условия, то есть условия вида

$$y(x_0) = y_0^0,\ y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \qquad (2.2)$$

В этом случае задача о выделении конкретного решения носит название *задачи Коши*, которая заключается в нахождении решения уравнения (2.1), удовлетворяющего начальным условиям (2.2).

Определение. Будем говорить, что функция $f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным $z_1, z_2, \ldots, z_n$ в области D, если для любых двух точек $(x, z_1^1, z_2^1, ..., z_n^1), (x, z_1^2, z_2^2, ..., z_n^2)$ из этой области выполнено неравенство

$$\left| f(x, z_1^1, z_2^1, ..., z_n^1) - f(x, z_1^2, z_2^2, ..., z_n^2) \right| \le L \sum_{i=1}^{n} \left| z_i^1 - z_i^2 \right|,$$

где L – некоторая константа, не зависящая от x и $z_1, z_2, ..., z_n$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1 (существования и единственности решения задачи Коши). Если функция $f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условиям Липшица по переменным $z_1, z_2, ..., z_n$, то найдётся окрестность точки x_0, в которой решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям (2.2), существует и единственно.

Множество D назовём выпуклым по $z_1, z_2, ..., z_n$, если для всяких двух точек $(x, z_1^1, z_2^1, ..., z_n^1), (x, z_1^2, z_2^2, ..., z_n^2)$ из D этому множеству принадлежат и точки отрезка, их соединяющего, то есть точки вида $(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, ..., \bar{z}_n)$, где $\bar{z}_i$ – числа, лежащие между z_i^1 и z_i^2, $i = 1, 2, ..., n$.

Отметим, что если непрерывная на множестве D функция $f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ имеет там же непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial z_i}$, множество D – ограничено, замкнуто и выпукло по $z_1, z_2, ..., z_n$, то эта функция удовлетворяет на множестве D условию Липшица по $z_1, z_2, ..., z_n$. Действительно, по теореме Лагранжа о конечных приращениях можем записать

$$\left| f(x, z_1^1, z_2^1, ..., z_n^1) - f(x, z_1^2, z_2^2, ..., z_n^2) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, ..., \bar{z}_n)}{\partial z_i} (z_i^1 - z_i^2) \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, ..., \bar{z}_n)}{\partial z_i} \right| \cdot \left| z_i^1 - z_i^2 \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \max_{1 \le i \le n} \left(\max_{(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots \bar{z}_n) \in D} \left| \frac{\partial f(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, ..., \bar{z}_n)}{\partial z_i} \right| \right) \cdot \left| z_i^1 - z_i^2 \right| =$$

$$= \max_{1 \le i \le n} \left(\max_{(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots \bar{z}_n) \in D} \left| \frac{\partial f(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, ..., \bar{z}_n)}{\partial z_i} \right| \right) \sum_{i=1}^{n} \left| z_i^1 - z_i^2 \right| .$$

Поэтому в теореме существования и единственности для уравнения $n-$ го порядка вместо требования выполнения условия Липшица по $z_1, z_2, ..., z_n$ часто требуют, чтобы функция $f(x, z_1, z_2, \mathrm{K}, z_n)$ имела непрерывные частные производные по переменным $z_1, z_2, ..., z_n$.

Теорема существования и единственности гарантирует, что при выполнении её условий через точку $(x_0, y_0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}) \in D \subseteq R^{n+1}$ проходит только одно решение уравнения (2.1). Если условия теоремы нарушаются в некоторой точке, то через неё может проходить больше, чем одно решение (нарушается единственность), либо не проходить ни одного решения (нарушается существование).

В отличие от уравнений первого порядка для уравнений порядка n, кроме постановки задачи Коши, возможны другие постановки задач о выделении решений. Рассмотрим некоторые из них.

Многоточечная задача. Возьмем точки $x_i, 1 \le i \le n$. Положим $y(x_i) = y_i$. Требуется найти решение уравнения (1.1) $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющее условиям

$$\alpha_i^0\, y(x_i) + \alpha_i^1\, y'(x_i) + \ldots + \alpha_i^{n-1} y^{(n-1)}(x_i) = \gamma_i, i = 1,2,\ldots, n.$$

Краевая задача. Для уравнения второго порядка можно поставить задачу о нахождении решения уравнения $F(x, y, y', y'') = 0$, удовлетворяющего условиям

$$\begin{cases} \alpha_0\, y(x_0) + \beta_0\, y'(x_0) = \gamma_0, \\ \alpha_1\, y(x_1) + \beta_1\, y'(x_1) = \gamma_1. \end{cases}$$

Для поставленных задач можно сформулировать и доказать свои теоремы существования, единственности и другие результаты подобного типа о выделении конкретных решений. В частности, весьма интересной является задача Штурма-Лиувилля для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с однородными краевыми условиями, которая подробно рассматривается при разложении функций в обобщённый ряд Фурье по ортогональным системам функций.

Всюду ниже мы подробно рассмотрим задачу Коши.

> *Определение.* Общим решением уравнения (2.1) назовём его решение $y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, содержащее n постоянных, которые можно подобрать так, чтобы удовлетворить любой, заранее выбранный набор начальных условий (2.2).

2.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Выше нами были рассмотрены методы решения некоторых классов уравнений первого порядка. Возникает естественное желание свести уравнение порядка выше первого к уравнению более низкого порядка. В некоторых случаях это удаётся сделать. Рассмотрим их.

1. **Уравнения вида** $y^{(n)} = f(x)$ решаются последовательным интегрированием n раз

$$y^{(n-1)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1\,,\ \ y^{(n-2)} = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx\right)dx + C_1(x-x_0) + C_2\,,\ \ \ldots$$

Пример 1. Решить уравнение $x\,y'' = 1$. Можем записать $y'' = \dfrac{1}{x}$, следовательно, $y' = \ln|x| + C_1$ и, интегрируя ещё раз, окончательно получаем

$$y = \int \ln|x|\,dx + C_1\,x + C_2 = x\ln|x| - x + C_1\,x + C_2\,.$$

2. **В уравнениях вида** $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$**,** $k \ge 1$**, (то есть не содержащих в явном виде неизвестной функции и некоторых её производных)** порядок понижается с помощью замены переменной $y^{(k)} = z(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = z'(x), \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$, и мы получаем уравнение $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0$ порядка $n-k$. Его решением является функция $z = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$, или, вспоминая, что такое z, получаем уравнение $y^{(n-k)} = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$ рассмотренного в случае 1 типа.

Пример 2. Решить уравнение $x^2\,y'' = (y')^2$. Делаем замену $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$. Подставляя в исходное уравнение, получаем $x^2 z' = z^2$. Разделяя переменные, получаем $-\dfrac{dz}{z^2} = -\dfrac{dx}{x^2}$. Интегрируя, имеем $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x} + C_1 = \dfrac{1 + C_1 x}{x}$, или, что то же самое, $z = \dfrac{x}{1 + C_1 x}$. Последнее соотношение записывается в виде $y' = \dfrac{x}{1 + C_1 x}$, откуда $dy = \dfrac{xdx}{1 + C_1 x}$. Интегрируя при $C_1 \ne 0$, окончательно получаем

$y=\frac{1}{C_1}x-\frac{1}{C_1^2}\ln|1+C_1x|+C_2$. Если $C_1=0$, то $z=x,\ y'=x$, и $y=0{,}5x^2+C_3$. Кроме того, при делении на z^2 мы потеряли решение $y'=0$, или, что то же самое, $y=C$.

3. Следующим уравнением, допускающим понижение порядка, является **уравнение вида** $F(y,y',y'',...,y^{(n)})=0$**, не содержащее в явном виде независимой переменной.** Порядок уравнения понижается с помощью замены переменной $y'=p(y)$, где p – новая искомая функция, зависящая от y. Тогда $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p'\cdot p,$

$$y'''=\frac{d}{dx}(p'\cdot p)=\frac{dp'}{dx}\cdot p+p'\frac{dp}{dx}=$$

$=\frac{dp'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot p+p'\cdot\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p''\cdot p^2+(p')^2\cdot p$ и так далее. По индукции имеем $y^{(n)}=\varphi_{n-1}(p,p',...,p^{(n-1)})$. Подставляя в исходное уравнение, понижаем его порядок на единицу.

Пример 3. Решить уравнение $(y')^2+2yy''=0.$ Делаем стандартную замену $y'=p(y)$, тогда $y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p'\cdot p$.

Подставляя в уравнение, получаем $p^2+2y\frac{dp}{dy}\cdot p=0$. Разделяя переменные, при $p\neq 0$, имеем $\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{2y}$. Интегрируя, получаем $\ln|p|=-\frac{1}{2}\ln|y|+\ln|C_1|,$ или, что то же самое,

$p=\frac{C_1}{\sqrt{y}}$. Тогда $y'=\frac{C_1}{\sqrt{y}},$ или $\sqrt{y}\,dy=C_1dx$. Интегрируя последнее равенство, окончательно получаем

$\frac{2}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2$. При разделении переменных мы могли потерять решение $y = C$, которое получается при $p = 0$, или, что то же самое, при $y' = 0$, но оно содержится в полученном выше решении при $C_1 = 0$.

4. Еще одним уравнением, допускающим понижение порядка, является **уравнение вида** $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$**, являющееся однородным относительно искомой функции и всех присутствующих ее производных.** Порядок уравнения понижается с помощью замены переменной $y' = y \cdot z$, где z – новая искомая функция, зависящая от x. Тогда $y'' = \frac{d(y \cdot z)}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot z + y \cdot \frac{dz}{dx} = y' \cdot z + y \cdot z' = y \cdot z^2 + y \cdot z'$,

$$y''' = \frac{d}{dx}(y \cdot z^2 + y \cdot z') = \frac{dy}{dx} \cdot z^2 + y\frac{d(z^2)}{dx} + \frac{dy}{dx} \cdot z' + y\frac{d(z')}{dx} =$$

$$= \frac{dy}{dx} \cdot z^2 + y \cdot 2z\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} \cdot z' + y \cdot z'' = y \cdot z^3 + 3y \cdot z \cdot z' + y \cdot z''$$

и так далее. По индукции имеем $y^{(n)} = \varphi_{n-1}(y, z, z', ..., z^{(n-1)})$. Подставляя в исходное уравнение, понижаем его порядок на единицу.

Пример 4. Решить уравнение $xy''y - x(y')^2 = yy'$. Покажем, что данное уравнение является однородным относительно искомой функции и всех присутствующих ее производных. Имеем:

$$x(ty'')(ty) - x(ty')^2 = (ty)(ty');$$

$$xt^2y''y - xt^2(y')^2 = t^2yy'.$$

Разделив обе части уравнения на t^2, получаем исходное уравнение, что и показывает его однородность.

Делаем стандартную замену $y' = y \cdot z$, тогда $y'' = y \cdot z^2 + y \cdot z'$. Подставляя в уравнение, получаем $xy^2\left(z^2 + z'\right) - xy^2z^2 = y^2z$. Или, преобразовав, $xz' = z$. Разделяя переменные, при $z \neq 0$, имеем $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, получаем $\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|$, или, что то же самое, $z = C_1x$. Тогда $\frac{y'}{y} = C_1x$ или $\frac{dy}{y} = C_1xdx$. Интегрируя последнее равенство, окончательно получаем $\ln|y| = \frac{C_1}{2}x^2 + \ln|C_2|$, или, что то же самое, $y = C_2e^{\frac{C_1}{2}x^2}$. При преобразованиях и разделении переменных мы могли потерять решения:

1) $y = 0$, но оно содержится в полученном выше решении при $C_2 = 0$;

2) $y = C$, которое получается при $z = 0$, или, что то же самое, при $y' = 0$, но оно содержится в полученном выше решении при $C_1 = 0$.

5. **Иногда удаётся подметить особенность, позволяющую понизить порядок уравнения способами, отличными от рассмотренных выше.** Покажем это на примерах.

Пример 5. Если обе части уравнения $yy''' = y'y''$ разделить на $yy'' \neq 0$, то получим уравнение $\frac{y'''}{y''} = \frac{y'}{y}$, которое можно переписать в виде $(\ln|y''|)' = (\ln|y|)'$. Из последнего соотношения следует, что $\ln|y''| = \ln|y| + \ln|C|$, или, что то же самое, $y'' = Cy$. Получилось уравнение на порядок ниже и рассмотренного ранее типа.

Пример 6. Аналогично для уравнения $yy'' = y'(y'+1)$ имеем $\dfrac{y''}{y'+1} = \dfrac{y'}{y}$, или $(\ln|y'+1|)' = (\ln|y|)'$. Из последнего соотношения следует, что $\ln|y'+1| = \ln|y| + \ln|C_1|$, или $y' = C_1 y - 1$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем, $ln|C_1 y - 1| = C_1 x + C_2$. При делении $y(y'+1)$ мы потеряли решения $y = 0$ и $y = -x + C$, которые в ранее найденное решение не входят.

С другими примерами, служащими для закрепления навыков решения уравнений, допускающих понижение порядка, можно познакомиться в п.5.2.1 практикума [6] или в аналогичных разделах других задачников по дифференциальным уравнениям.

2.3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Рассмотрим множество $M[a,b]$ всех определённых на отрезке $[a,b]$ функций. На этом множестве введём операции:

1) сложения элементов $f_1, f_2 \in M[a,b]$ по правилу $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ для $\forall x \in [a,b]$;

2) умножения элемента $f \in M[a,b]$ на скаляр $\alpha \in R$ по закону $(\alpha\, f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ для $\forall x \in [a,b]$.

Относительно введённых операций $M[a,b]$ является линейным пространством, так как выполнены все аксиомы линейного пространства [1,2,11].

Рассмотрим два подмножества множества $M[a,b]$:

$C[a,b]$ – множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций;

$C^n[a,b]$ – множество n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций.

Отметим, что имеет место поэлементное включение $C^n[a,b]\subset C[a,b]\subset M[a,b]$. Так как введённые линейные операции не выводят за пределы множеств $C[a,b]$ и $C^n[a,b]$ соответственно, то они являются линейными подпространствами пространства $M[a,b]$. Следовательно, как самостоятельные объекты, $C[a,b]$ и $C^n[a,b]$ являются линейными пространствами. В отличие от рассмотренных в линейной алгебре пространств, введённые пространства бесконечномерны.

Определим оператор $L:\ C^n[a,b]\to C[a,b]$ следующим образом:

$$L(y)=a_n(x)\,y^{(n)}+a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_0(x)\,y=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\,y^{(k)}\,,$$

где $a_k(x), k=0,1,\ldots,n$ – непрерывные функции, $y^{(0)}(x)=y(x)$.

Докажем, что оператор L линеен. Действительно, так как для любых производных порядка k выполняется равенство

$$\frac{d^k}{dx^k}(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)=\alpha_1\frac{d^ky_1}{dx^k}+\alpha_2\frac{d^ky_2}{dx^k}\,,$$

то можно записать

$$L(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)=$$

$$=\alpha_1\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\frac{d^ky_1}{dx^k}+\alpha_2\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\frac{d^ky_2}{dx^k}=\alpha_1L(y_1)+\alpha_2L(y_2)\,.$$

Сравнивая крайние части этого равенства, убеждаемся в справедливости высказанного утверждения.

Уравнение вида $L(y)=b(x)$, где $b(x)$ – некоторая функция, а $L(y)$ – введённый выше оператор, называется *линейным дифференциальным уравнением n – го порядка*. Иногда будем пользоваться подробными записями этого уравнения

$$a_n(x)\,y^{(n)}+a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=b(x), \quad (2.3)$$

или

$$\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\,y^{(k)}=b(x). \quad (2.3a)$$

Так же как и для уравнений первого порядка, для линейных уравнений порядка n теорема существования и единственности имеет более конкретный вид.

Теорема 2.2. Пусть функции $a_k(x),\ 0\le k\le n$, и $b(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$, $a_n(x)\ne 0$ для всякого x из $[\alpha,\beta]$ и пусть x_0 – некоторая точка этого отрезка. Тогда для любого набора начальных данных (2.2) $\left(y(x_0)=y_0^0,\ y'(x_0)=y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1}\right)$ существует единственное решение уравнения (2.3), определённое на всём отрезке $[\alpha,\beta]$.

Доказательство этого результата опустим.

Отметим, что свойства решений линейных дифференциальных уравнений $L(y)=b(x)$ и $L(y)=0$ подобны свойствам решений систем линейных алгебраических уравнений $Ax=B$ и $Ax=0$. Приведём эти свойства.

Теорема 2.3 (о наложении решений). Если y_1, y_2 - решения уравнений $L(y)=b_1$ и $L(y)=b_2$ соответственно, то линейная комбинация $\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2$ есть решение уравнения $L(y)=\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2$.

Доказательство. В силу линейности оператора L имеем $L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если y_1 – решение уравнения $L(y) = b_1$, y_2 – решение уравнения $L(y) = 0$, то для всякого числа α функция $y_1 + \alpha\, y_2$ – решение уравнения $L(y) = b_1$.

Следствие 2. Любая линейная комбинация решений уравнения $L(y) = 0$ снова есть решение этого уравнения.

Доказательство. Пусть $y_1, y_2, ..., y_m$ есть решения уравнения $L(y) = 0$. Тогда $L\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j L(y_j) = 0$.

Следствие доказано.

Следствие 3. Множество всех решений уравнения $L(y) = 0$ образует линейное подпространство пространства $C^n[a,b]$.

Доказательство. По предыдущему следствию линейные операции над решениями уравнения $L(y) = 0$ не выводят за пределы множества решений этого уравнения, что и доказывает следствие.

Напомним некоторые понятия линейной алгебры, которые нам потребуются в дальнейшем.

Определение. Система функций $y_1, y_2, ..., y_m$ называется линейно зависимой на отрезке $[a,b]$, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, не все из которых равны нулю, такие, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_m y_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i = 0$$

всюду на $[a,b]$, и линейно независимой, если такого ненулевого набора не существует.

Так же как и для систем векторов, для систем функций справедливы следующие ниже свойства.

1. Система функций $y_1, y_2, ..., y_m$ линейно зависима на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда одна из них есть линейная комбинация остальных.
2. Всякая система функций, содержащая функцию, тождественно равную нулю на отрезке $[a,b]$, линейно зависима на $[a,b]$.
3. Всякая система функций, содержащая линейно зависимую на отрезке $[a,b]$ подсистему функций, линейно зависима на $[a,b]$.

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для систем векторов и предлагаются в качестве упражнений.

Приведём примеры линейно зависимых и линейно независимых систем функций.

Пример 1. Система функций $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ - линейно зависима на всей числовой оси, так как по основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Пример 2. Функции $1, x, x^2, ..., x^n$ образуют линейно независимую систему на любом отрезке числовой прямой, так как по основной теореме алгебры [20], полином (многочлен) степени n, у которого хотя бы один коэффициент отличен от нуля, не может обращаться в нуль более чем в n точках вещественной прямой.

Пример 3. Для доказательства линейной независимости системы функций $1, \cos x, \sin x$ требуется показать, что при любом ненулевом наборе констант $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ выражение $\alpha_1 + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \sin x$ не может тождественно равняться нулю.

Не всегда удаётся легко показать линейную зависимость или линейную независимость систем функций, пользуясь только определением. Для выяснения этого вопроса служит построенный ниже определитель.

Рассмотрим совокупность $m-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $y_1, y_2, ..., y_m$. Определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_m' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \ldots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского или вронскианом системы функций $y_1, y_2, ..., y_m$.

Определитель Вронского служит индикатором линейной зависимости системы функций.

Теорема 2.4. Если система функций линейно зависима на $[\alpha, \beta]$, то её определитель Вронского $W(x)$ равен нулю во всякой точке отрезка $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Пусть система функций $y_1, y_2, ..., y_m$ линейно зависима. Тогда, по свойству 1, одну из них можно представить в виде линейной комбинации остальных. Подставляя эту линейную комбинацию в определитель Вронского, получаем, что при любом фиксированном x соответствующий столбец есть линейная комбинация остальных. Следовательно, по свойствам определителя, он равен нулю для всех $x \in [\alpha, \beta]$. Теорема доказана.

Теорема 2.5. Если $y_1, y_2, ..., y_n$ – линейно независимая система решений линейного однородного уравнения n–го порядка $L(y) = 0$ с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ коэффициентами и $a_n(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$, то её определитель Вронского $W(x)$ отличен от нуля для всех $x \in [\alpha, \beta]$.

Доказательство. Предположим, что существует точка $x_0 \in [\alpha, \beta]$, в которой определитель Вронского $W(x_0)$ равен нулю. Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^{(k)}(x_0) = 0,\ k = 0,1,\dots, n-1.$ Её определитель есть определитель Вронского $W(x_0)$ и так как по предположению $W(x_0) = 0$, то система имеет нетривиальное решение $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ (хотя бы одно из α_j не равно нулю). Рассмотрим функцию $y(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x),$ где α_j – компоненты вектора α. Эта функция является решением уравнения $L(y) = 0$ по следствию 2 теоремы о наложении решений. С другой стороны, имеем

$$y(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x_0) = 0,$$

$$y'(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y'_j(x_0) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Таким образом, мы показали, что функция $y(x)$ удовлетворяет в точке x_0 системе нулевых начальных данных и по теореме существования и единственности $y(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. Это противоречит линейной независимости системы функций $y_1, y_2, \dots, y_n$. Теорема доказана.

Займёмся выяснением размерности пространства решений однородного линейного уравнения $L(y)=0$ и построением базиса в этом пространстве.

Теорема 2.6. Для любого линейного однородного дифференциального уравнения $L(y)=0$ порядка n существует система, состоящая из n линейно независимых решений этого уравнения.

Доказательство. Возьмём матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

с определителем, отличным от нуля. Тогда строки и столбцы этой матрицы линейно независимы. Найдём такие решения $y_j(x), j=1,2,\dots n,$ уравнения $L(y)=0$, чтобы выполнялись соотношения $y_j^{(k)}(x_0)=a_j^{k+1}, k=0,1,\dots,n-1$. По теореме существования и единственности такой набор решений существует. Найденная система решений линейно независима, так как её определитель Вронского в точке x_0 совпадает с определителем матрицы (2.4). Теорема доказана.

Матрицу (2.4) можно взять единичную.

Теорема 2.7 (о виде общего решения линейного однородного дифференциального уравнения). Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ – линейно независимая система решений линейного однородного уравнения $n-$го порядка $L(y)=0$, то любое его решение есть линейная комбинация этих решений, то есть

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x), \tag{2.5}$$

и, следовательно, $y_1, y_2, ..., y_n$ – базис пространства решений уравнения $L(y)=0$.

Доказательство. Нам нужно показать, что любое частное решение уравнения $L(y)=0$ получается из (2.5), то есть для любого набора начальных данных (2.2) ($y(x_0)=y_0^0,\quad y'(x_0)=y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1}$) существует набор чисел $C_1, C_2, ..., C_n$ такой, что соответствующее решение (2.5) удовлетворяет (2.2). Потребовав, чтобы решение (2.5) удовлетворяло условиям (2.2), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_j^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0) = y_0^k,\ k=0,1,...,n-1,$$

определитель которой $W(x_0)\neq 0$, и поэтому существует единственное решение этой системы.

Таким образом, нами показано, что хотя само пространство $C^n[a,b]$ бесконечномерно, подпространство решений линейного однородного дифференциального уравнения конечномерно и имеет размерность n. Следовательно в нём существует базис состоящий из n функций.

Определение. Любой базис пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Так же, как и в линейной алгебре, имеет место следующий результат.

Теорема 2.8 (о виде общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения). Общее решение $y_{\text{он}}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения $L(y)=b$ есть сумма общего решения $y_{\text{оо}}$ соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения $y_{\text{чн}}$ неоднородного уравнения, то есть $y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x)$.

Доказательство. Пусть $y_{\text{чн}}(x)$ – какое-нибудь фиксированное частное решение неоднородного линейного уравнения $L(y) = b$. Нам нужно показать, что для любого набора начальных данных $y(x_0) = y_0^0$, $y'(x_0) = y_0^1$, K, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$ существует набор чисел $C_1, C_2, ..., C_n$ такой, что решение $y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x) + y_{\text{чн}}(x)$, где $y_1, y_2, ..., y_n$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$, удовлетворяет этому набору начальных данных. Потребовав, чтобы данное решение удовлетворяло начальным условиям, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_j^{(k)}(x_0) + y_{\text{чн}}^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0) = y_0^k,\ k = 0, 1, \dots, n-1,$$

или, что то же самое,

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_j^{(k)}(x_0) = y_0^k - y_{\text{чн}}^{(k)}(x_0),\ k = 0, 1, \dots, n-1,$$

определитель которой $W(x_0) \neq 0$, и поэтому существует единственное решение этой системы. Теорема доказана.

2.4. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Поиск фундаментальной системы решений в общем случае является достаточно трудной задачей. Тем не менее, есть класс уравнений, для которого эта задача достаточно легко решается. К изучению этого класса мы и приступаем.

Линейное дифференциальное уравнение (2.3) назовём уравнением с постоянными коэффициентами, если в этом уравнении коэффициенты постоянны, то есть $a_i(x) = \mathrm{const}$. Тогда соответствующее однородное уравнение $L(y) = 0$ будет иметь вид

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (2.6)$$

Решение уравнения (2.6) будем искать в виде $y = e^{rx}$. Тогда $y' = r \cdot e^{rx}$, $y'' = r^2 \cdot e^{rx}, \ldots,$ $y^{(n)} = r^n \cdot e^{rx}$. Подставляя в (2.6), получаем

$$L(e^{rx}) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{rx} = e^{rx} \sum_{k=0}^{n} a_k r^k = e^{rx}(a_n r^n + \ldots + a_1 r + a_0) = 0.$$

Так как e^{rx} нигде в нуль не обращается, то

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k = 0. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

> **Теорема 2.9.** Функция $y = e^{rx}$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (2.6) тогда и только тогда, когда r есть корень характеристического уравнения (2.7).

Возможны нижеследующие случаи.

1. Все корни характеристического многочлена вещественны и различны. Обозначим их $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Тогда получим n различных решений

$$y_1 = e^{r_1 x}, \; y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, \; y_n = e^{r_n x} \tag{2.8}$$

уравнения (2.6). Докажем, что полученная система решений линейно независима. Рассмотрим её определитель Вронского

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \ldots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \ldots & r_n e^{r_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \ldots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Множитель $e^{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)x}$ в правой части $W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x})$ нигде в нуль не обращается. Поэтому осталось показать, что второй сомножитель (определитель) не равен нулю. Допустим, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда строки этого определителя линейно зависимы, т. е. существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot r_1^{k-1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot r_2^{k-1} = 0, \; \ldots, \; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot r_n^{k-1} = 0.$$

Таким образом, мы получили, что $r_i, \; i = 1,2,\ldots, n,$ есть n различных корней полинома $(n-1)-$ й степени, что невозможно. Следовательно, определитель в правой части $W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x})$ не равен нулю и система функций (2.8) образует фундаментальную систему решений уравнения (2.6) в случае, когда корни характеристического уравнения различны.

Пример 1. Для уравнения $y''-3y'+2y=0$ корни характеристического уравнения $r^2-3r+2=0$ равны $r_1=1$, $r_2=2$. Следовательно, фундаментальную систему решений составляют функции $y_1=e^x, y_2=e^{2x}$, а общее решение записывается в виде $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

2. Среди действительных корней характеристического уравнения есть кратные. Предположим, что r_1 имеет кратность α, а все остальные различны. Рассмотрим вначале случай $r_1=0$. Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+...+a_\alpha r^\alpha=0,$$

так как в противном случае r_1 не являлось бы корнем кратности α. Следовательно, дифференциальное уравнение имеет вид

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_\alpha y^{(\alpha)}=0,$$

то есть не содержит производных порядка ниже α. Этому уравнению удовлетворяют все функции, у которых производные порядка α и выше равны нулю. В частности, таковыми являются все полиномы степени не выше $\alpha-1$, например,

$$1, x, x^2,..., x^{\alpha-1}. \tag{2.9}$$

Покажем, что данная система линейно независима. Составив определитель Вронского этой системы функций, получим

$$W\left(1,\ x,\ x^2,\ldots,\ x^{\alpha-1}\right)=\begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^{\alpha-1} \\ 0 & 1 & \ldots & (\alpha-1)x^{\alpha-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & (\alpha-1)! \end{vmatrix}.$$

Это определитель треугольного вида с отличными от нуля элементами, стоящими на главной диагонали. Поэтому он отличен от нуля, что и доказывает линейную независимость системы функций (2.9). Заметим, что в одном из примеров предыдущего параграфа мы доказывали линейную независимость системы функций (2.9) другим способом. Пусть теперь корнем характеристического уравнения кратности α является число $r_1 \neq 0$. Произведём в уравнении (2.6) $L(y)=0$ замену $y = ze^{r_1 x} = z\exp(r_1 x)$. Тогда

$$y' = (z' + r_1 z)e^{r_1 x},\quad y'' = (z'' + 2r_1 z' + r_1^2 z)e^{r_1 x}$$

и так далее. Подставляя полученные значения производных в исходное уравнение, снова получим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L_1(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^{(k)} = b_n z^{(n)} + b_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + b_1 z' + b_0 z = 0 \qquad (2.10)$$

с характеристическим уравнением

$$b_n k^n + b_{n-1} k^{n-1} + \ldots + b_1 k + b_0 = \sum_{j=0}^{n} b_j k^j = 0. \qquad (2.11)$$

Отметим, что если k – корень характеристического уравнения (2.11), то $z = e^{kx}$ – решение уравнения (2.10), а $y = ze^{r_1 x} = e^{(k+r_1)x}$ является решением уравнения (2.6). Тогда $r = k + r_1$ – корень характеристического уравнения (2.7). С другой стороны, уравнение (2.6) может быть получено из уравнения (2.10) обратной заменой $z = ye^{-r_1 x}$,и поэтому каждому корню характеристического уравнения (2.7) соответствует корень $k = r - r_1$ характеристического уравнения

(2.11). Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между корнями характеристических уравнений (2.7) и (2.11), причём различным корням одного уравнения соответствуют различные корни другого. Так как $r = r_1$ – корень кратности α уравнения (2.7), то уравнение (2.11) имеет $k = 0$ корнем кратности α. По доказанному ранее уравнение (2.10) имеет α линейно независимых решений

$$z_1 = 1, z_2 = x, z_3 = x^2, ..., z_\alpha = x^{\alpha-1},$$

которым соответствует α линейно независимых решений

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = xe^{r_1 x}, y_3 = x^2 e^{r_1 x}, ..., y_\alpha = e^{r_1 x}\ x^{\alpha-1} \qquad (2.12)$$

уравнения (2.6). Присоединяя полученную систему решений (2.12) к $n - \alpha$ решениям, соответствующим остальным корням характеристического уравнения, получим фундаментальную систему решений для линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае наличия действительных кратных корней.

Пример 2. Для уравнения $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = 0$ характеристическое уравнение $r^5 - 2r^4 + r^3 = 0$ имеет корни $r = 0$ кратности 3 и $r = 1$ кратности 2, так как $r^5 - 2r^4 + r^3 = r^3(r-1)^2$. Поэтому фундаментальной системой решений исходного уравнения является система функций $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2,\ y_4 = e^x,\ y_5 = xe^x$, а общее решение имеет вид $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 xe^x$.

3. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные корни. Можно рассматривать комплексные решения, но для уравнений с действительными коэффициентами это не очень удобно. Найдём действительные решения, соответствующие комплексным корням. Так как мы рассматриваем уравнение с действительными коэффициентами, то для каждого комплексного корня

$r_j = a + bi$ кратности α характеристического уравнения комплексно сопряжённое ему число $r_k = a - bi$ также является корнем кратности α этого уравнения. Соответствующими этим корням парами решений являются функции $y_1^l = x^l e^{(a+bi)x}$ и $y_2^l = x^l e^{(a-bi)x}$, $l = 0,1,..., \alpha - 1$. Вместо этих решений рассмотрим их линейные комбинации

$$\tilde{y}_1^l = \frac{y_1^l + y_2^l}{2} = x^l e^{ax} \cos bx, \ \tilde{y}_2^l = \frac{y_1^l - y_2^l}{2i} = x^l e^{ax} \sin bx,$$

$l = 0,1,..., \alpha - 1$, которые также являются решениями уравнения $L(y) = 0$. Так как преобразование, осуществляющее переход от y_1^l, y_2^l к $\tilde{y}_1^l, \tilde{y}_2^l, l = 0,1,..., \alpha - 1$, невырожденное (с отличным от нуля определителем), то оно переводит линейно независимую систему решений в линейно независимую.

Пример 3. Для уравнения $y''' - 4y'' + 13y' = 0$ корни характеристического уравнения $r^3 - 4r^2 + 13r = 0$ равны $r_1 = 0,$ $r_{2,3} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \ = 2 \pm 3i$, и фундаментальная система решений состоит из функций $y_1 = 1,\ y_2 = e^{2x} \cos 3x,$ $y_3 = e^{2x} \sin 3x,$ а общее решение имеет вид $y = C_1 + C_2 e^{2x} \cos 3x + C_3 e^{2x} \sin 3x.$

Пример 4. Для уравнения $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$ характеристическое уравнение $r^4 + 8r^2 + 16 = 0$ имеет корни $r = \pm 2i$ кратности 2, так как $r^4 + 8r^2 + 16 = (r^2 + 4)^2$. Поэтому фундаментальной системой решений исходного уравнения является система функций $y_1 = \cos 2x, y_2 = \sin 2x, y_3 = x \cos 2x, y_4 = x \sin 2x$, а общее решение имеет вид $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x.$

С другими примерами нахождения фундаментальной системы решений и общего решения линейных однородных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами можно познакомиться в п. 5.2.2 практикума [6] и других книгах по дифференциальным уравнениям.

2.5. Метод вариации произвольных постоянных решения линейных неоднородных уравнений

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение (2.3)

$$L(y)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)y^{(k)}=b(x).$$

Пусть $y_1, y_2,..., y_n$ - фундаментальная система решений, а $y=\sum_{j=1}^{n}C_j y_j$ - общее решение соответствующего однородного уравнения $L(y)=0$. Аналогично случаю уравнений первого порядка, будем искать решение уравнения (2.3) в виде

$$y=\sum_{j=1}^{n}C_j(x)y_j\,. \tag{2.13}$$

Убедимся в том, что решение в таком виде существует. Для этого подставим функцию в уравнение. Для подстановки этой функции в уравнение найдём её производные. Первая производная равна

$$y'=\sum_{j=1}^{n}C'_j(x)y_j+\sum_{j=1}^{n}C_j(x)y'_j\,. \tag{2.14}$$

При вычислении второй производной в правой части (2.14) появится четыре слагаемых, при вычислении третьей производной – восемь слагаемых и так далее. Так как при подстановке решения (2.13) в уравнение (2.3) получается одно соотношение на n неизвестных функций, то остальные $n-1$ находятся в нашей власти. Поэтому первое слагаемое в (2.14) полагают равным нулю. С учётом этого, вторая производная равна

$$y'' = \sum_{j=1}^{n} C'_j(x) y'_j + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y''_j \,. \tag{2.15}$$

По тем же, что и раньше, соображениям, в (2.15) также полагаем первое слагаемое равным нулю. Наконец, $n-$ я производная равна

$$y^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} C'_j(x) y_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_j^{(n)} \,. \tag{2.16}$$

Подставляя полученные значения производных в исходное уравнение, имеем

$$a_n(x) \cdot \sum_{j=1}^{n} C'_j(x) y_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) L(y_j) = b(x) \,. \tag{2.17}$$

Второе слагаемое в (2.17) равно нулю, так как функции y_j, $j = 1,2,..., n,$ являются решениями соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$. Объединяя (2.17) с полученными при вычислении производных условиями, получаем систему алгебраических уравнений для нахождения функций $C'_j(x)$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} C'_j(x) y_j = 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C'_j(x) y'_j = 0, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C'_j(x) y_j^{(n-1)} = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}, \;\; a_n(x) \neq 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского фундаментальной системы решений $y_1, y_2,..., y_n$ соответствующего однородного уравнения $L(y)=0$ и поэтому не равен нулю. Следовательно, существует единственное решение системы (2.18). Найдя его, получим функции $C'_j(x),\ j=1,2,...,n,$ а следовательно, после интегрирования, и $C_j(x),\ j=1,2,...,n$. Подставляя эти значения в (2.13), получаем решение линейного неоднородного уравнения.

Для $n=2$, то есть для уравнения второго порядка, система уравнений (2.18) приобретает вид

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0, \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = \dfrac{b(x)}{a_2(x)}, \end{cases}$$

а для $n=3$ система (2.18) записывается в виде

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + C'_3 y_3 = 0, \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C'_3 y'_3 = 0, \\ C'_1 y''_1 + C'_2 y''_2 + C'_3 y''_3 = \dfrac{b(x)}{a_3(x)}. \end{cases}$$

Изложенный метод называется методом вариации произвольной постоянной или методом Лагранжа.

Пример 1. Найдём общее решение уравнения $y'' + 4y' + 3y = \dfrac{2}{e^{2x}+4}$. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y'' + 4y' + 3y = 0$. Корни его характеристического уравнения $r^2 + 4r + 3 = 0$ равны -1 и -3. Поэтому фундаментальная система решений однородного уравнения состоит из функций $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = e^{-3x}$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-3x}$. Для нахождения производных C'_1, C'_2 составляем систему уравнений (2.18)

$$\begin{cases} C_1'e^{-x} + C_2'e^{-3x} = 0, \\ -C_1'e^{-x} - 3C_2'e^{-3x} = \dfrac{2}{e^{2x}+4}, \end{cases}$$

решая которую, находим $C_1' = \dfrac{e^x}{e^{2x}+4}$, $C_2' = -\dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+4}$. Интегрируя полученные функции, имеем $C_1 = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{e^x}{2} + \tilde{C}_1$, $C_2 = -e^x + 2\operatorname{arctg}\dfrac{e^x}{2} + \tilde{C}_2$. Подставляя C_1 и C_2 в выражение для y, окончательно находим

$$y = -e^{-2x} + 2e^{-3x}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2} + \frac{1}{2}e^{-x}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2} + \tilde{C}_1 e^{-x} + \tilde{C}_2 e^{-3x}.$$

Пример 2. Найдём общее решение уравнения $y''' - 7y' - 6y = e^{5x}$. Корни характеристического полинома $r^3 - 7r - 6$ соответствующего однородного уравнения равны -2, -1, 3. Поэтому фундаментальная система решений однородного уравнения состоит из функций $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{3x}$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-x} + C_3(x)e^{3x}$. Для нахождения производных C_1', C_2', C_3' составляем систему уравнений (2.18)

$$\begin{cases} C_1'e^{-2x} + C_2'e^{-x} + C_3'e^{3x} = 0, \\ -2C_1'e^{-2x} - C_2'e^{-x} + 3C_3'e^{3x} = 0, \\ 4C_1'e^{-2x} + C_2'e^{-x} + 9C_3'e^{3x} = e^{5x}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $C_1' = \dfrac{1}{5}e^{7x}$, $C_2' = -\dfrac{1}{4}e^{6x}$, $C_3' = \dfrac{1}{20}e^{2x}$. Интегрируя полученные функции, имеем

$C_1 = \frac{1}{35} e^{7x} + \tilde{C}_1$, $C_2 = -\frac{1}{24} e^{6x} + \tilde{C}_2$, $C_3 = \frac{1}{40} e^{2x} + \tilde{C}_3$. Подставляя C_1, C_2, C_3 в выражение для y, окончательно находим $y = \frac{1}{84} e^{5x} + \tilde{C}_1 e^{-2x} + \tilde{C}_2 e^{-x} + \tilde{C}_3 e^{3x}$.

С другими примерами нахождения общего решения линейных неоднородных уравнений высших порядков можно познакомиться в п. 5.2.3 практикума [6] и других книгах по дифференциальным уравнениям.

2.6. Уравнения с правой частью специального вида

Как было показано ранее, общее решение $y_{\text{он}}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения $L(y) = b(x)$ есть сумма общего решения $y_{\text{оо}}$ соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$ и какого-либо частного решения $y_{\text{чн}}$ исходного неоднородного уравнения. Для уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида это частное решение может быть найдено достаточно просто. Займёмся этим вопросом.

Функцию $b(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} P_j(x) e^{\lambda_j x}$, где $P_j(x)$ – некоторые полиномы (многочлены), назовём квазиполиномом. По теореме о наложении решений, если $y_j,\ j = 1, 2, ..., m,$ - решения уравнений $L(y) = b_j(x)$, то $y = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$ есть решение уравнения $L(y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j b_j(x)$. Поэтому, не умаляя общности, будем считать, что правая часть уравнения $L(y) = b(x)$ с постоянными коэффициентами имеет вид $b(x) = P(x) e^{\lambda x}$. В частности, если $\lambda = \alpha + \beta i$ – комплексное число, то наиболее общей правой частью указанного типа является функция

$$b(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x) \ , \qquad (2.19)$$

у которой $P(x)$ и $Q(x)$ – некоторые полиномы. Справедлив следующий результат.

Теорема 2.10. Линейное дифференциальное уравнение

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

с постоянными коэффициентами и правой частью вида (2.19) имеет частное решение

$$y(x) = x^k e^{\alpha x}(R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x),$$

где $R(x), S(x)$ – полиномы, подлежащие определению, степень которых равна максимальной степени полиномов $P(x), Q(x)$, k – число, равное кратности корня $\alpha + \beta i$ характеристического полинома соответствующего однородного уравнения, если $\alpha + \beta i$ – корень этого полинома и $k = 0$, если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического полинома.

Доказательство этого результата опустим.

Пример 1. Для уравнения $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$ корнями характеристического уравнения $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$ являются $r = 2$ кратности 1 и $r = 1$ кратности 2. Так как правая часть данного уравнения может быть записана в виде $(2x + 3)\left(e^{0 \cdot x}(\cos(0 \cdot x) + \sin(0 \cdot x)\right)$, то $\alpha = 0, \beta = 0$. Следовательно, $\alpha + \beta i = 0$. Число $r = 0$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому $k = 0$ и частное решение ищем в виде $y = cx + d$. Так как $y' = c,\ y'' = 0,\ y''' = 0$, то, подставляя в уравнение, получаем $5c - 2cx - 2d = 2x + 3$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем $-2c=2,\ 5c-2d=3$. Следовательно, $c=-1,\ d=-4$ и $y=-x-4$ – частное, а $y=-x-4+C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{2x}$ – общее решения уравнения.

Пример 2. Для уравнения $y'''-4y''+5y'-2y=(2x+3)e^{2x}$ правая часть может быть записана в виде $(2x+3)\left(e^{2x}(\cos(0\cdot x)+\sin(0\cdot x)\right)$. Поэтому $\alpha=2,\beta=0$. Следовательно $\alpha+\beta i=2$. Число $r=2$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение ищем в виде $y=x(cx+d)e^{2x}$.

Пример 3. Для уравнения $y''+y=\cos x$ корнями характеристического полинома r^2+1 являются числа $r=\pm i$ кратности 1. Поэтому частное решение ищем в виде $y=x(a_1\cos x+a_2\sin x)$. Тогда

$$y'=(a_1+a_2x)\cos x+(a_2-a_1x)\sin x,$$

$$y''=(2a_2-a_1x)\cos x+(-2a_1-a_2x)\sin x\ .$$

Подставляя в исходное уравнение и приводя подобные, получаем $2a_2\cos x-2a_1\sin x=\cos x$, откуда $a_1=0,a_2=0{,}5$. Следовательно, $y=0{,}5x\sin x$ – частное, $y=0{,}5x\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x$ – общее решения уравнения.

С другими примерами нахождения частного решения линейных неоднородных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами по виду правой части можно познакомиться в п. 5.2.4 практикума [6] и других книгах по дифференциальным уравнениям.

3. Системы дифференциальных уравнений

3.1. Общая теория

Система уравнений, связывающая независимую переменную, искомые функции и некоторое количество их производных, то есть система уравнений вида

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_k, y_k', ..., y_k^{(n_k)}) = 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_k, y_k', ..., y_k^{(n_k)}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_k(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_k, y_k', ..., y_k^{(n_k)}) = 0, \end{cases}$$

называется системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Если эта система разрешена относительно старших производных $y_1^{(n_1)},\ y_2^{(n_2)},\ \dots, y_k^{(n_k)}$, то она называется системой в канонической форме и имеет вид

$$y_l^{(n_l)} = \varphi_l(x, y_1, ..., y_1^{(n_1-1)}, y_2, ..., y_2^{(n_2-1)}, ..., y_k, ..., y_k^{(n_k-1)}), l = \overline{1, k}.$$

Эту систему путём введения новых неизвестных функций [7, 8, 9, 10, 13, 14] можно привести к виду

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \tag{3.1}$$

В этом случае система называется системой обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме или системой обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши.

Покажем, как это можно сделать для одного уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ n – го порядка. Полагаем $y = z_1$,

$z_2 = z_1' = y'$, $z_n = z_{n-1}' = y^{(n-1)}$. В результате можем составить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = z_3, \\ \dots\dots\dots . \\ z_{n-1}' = z_n, \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n). \end{cases}$$

Если ввести в рассмотрение векторы $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ и вспомнить [3], что производная вектор-функции по скалярному аргументу вычисляется по формуле $y' = (y_1', y_2', \dots, y_n')^T$, то систему (3.1) можно записать в векторной форме

$$y' = f(x, y), \tag{3.1a}$$

которая по виду совпадает с записью дифференциального уравнения первого порядка.

Если функции $f_i,\ i = \overline{1, n},$ не зависят от x, то система (3.1) называется автономной. В этом случае обычно вместо x пишут t и систему записывают в виде

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n),\ i = 1, 2, \dots, n,$$

или в векторной форме

$$y' = f(y).$$

Если трактовать независимую переменную как время, то автономные системы отличаются тем, что их поведение не зависит от начала отсчёта переменной t, а зависит от начальной точки и времени, прошедшего с начала процесса. Действительно, сделав замену переменных $\tau = t - t_0$, получим

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt} = f(y(\tau)).$$

Более подробно с автономными системами можно ознакомиться в [10, 14].

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.1) можно поставить задачу Коши: *найти решение* $(y_1, y_2, ..., y_n)^T$ *системы* (3.1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0))^T = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^T. \quad (3.2)$$

В векторной форме условия (3.2) имеют вид

$$y(x_0) = y^0.$$

Так же, как и для дифференциальных уравнений, для систем дифференциальных уравнений справедлива теорема существования и единственности.

Теорема 3.1. Пусть в системе уравнений (3.1)

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

все функции $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = \overline{1, n}$, непрерывны по совокупности переменных $x, y_1, y_2, ..., y_n$ в области D и удовлетворяют условию Липшица по переменным $y_1, y_2, ..., y_n$. Тогда найдётся окрестность точки x_0, в которой решение системы уравнений (3.1), удовлетворяющее начальным данным (3.2), существует и единственно.

Доказательство этого результата опустим.

Определение. Семейство

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), \; i = 1, 2, ..., n, \quad (3.3)$$

решений системы дифференциальных уравнений (3.1) назовём её общим решением, если для любого набора начальных данных $(x_0, y^0) = (x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0) \in D$ найдутся константы $\overline{C}_1, \overline{C}_2, ..., \overline{C}_n$, на которых этот набор реализуется, то есть такие, что для решений $y_i = \varphi_i(x, \overline{C}_1, \overline{C}_2, ..., \overline{C}_n), i = 1,2,..., n,$ выполнены начальные условия $y_i^0 = \varphi_i(x_0, \overline{C}_1, \overline{C}_2, ..., \overline{C}_n), i = 1,2,..., n$.

Если $y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), i = 1,2,..., n,$ – общее решение системы уравнений (3.1), то, как следует из определения, при любых $x, y_1, y_2, ..., y_n$ из области D система уравнений $y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), i = 1,2,..., n,$ разрешима относительно $C_1, C_2, ..., C_n$, то есть может быть записана в виде

$$\psi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C_i, \ i = 1,2,..., n, \tag{3.4}$$

где $\psi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = 1,2,..., n$, – некоторые, не обязательно однозначные, функции. Каждая из функций $\psi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = 1,2,..., n$ обладает тем свойством, что на любом частном решении $y(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))^T$ системы уравнений (3.1) $\psi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = 1,2,..., n$ тождественно равна константе, то есть $\psi_i(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \equiv C$, $i = 1,2,..., n$.

Определение. Функцию $\psi(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ назовём интегралом системы дифференциальных уравнений (3.1), если на любом частном решении $y(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))^T$ системы уравнений (3.1) эта функция обращается в константу, то есть $\psi(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \equiv C$.

Определение. Соотношение

$$\psi(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C,$$

где $\psi(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ – интеграл системы дифференциальных уравнений (3.1), назовём первым интегралом этой системы.

Таким образом, соотношения (3.4) есть совокупность n первых интегралов системы дифференциальных уравнений (3.1). Имеет место следующий результат.

Теорема 3.2. Система первых интегралов (3.4) системы дифференциальных уравнений (3.1), полученная из общего решения (3.3) независима.

Доказательство теоремы опустим.

В теореме 3.2 утверждается, что для системы (3.4) первых интегралов системы дифференциальных уравнений (3.1) нельзя подобрать функцию $\phi(z_1, z_2,..., z_n)$ такую, чтобы выполнялось соотношение

$$\phi(\psi_1(x, y_1, y_2,..., y_n), \psi_2(x, y_1, y_2,..., y_n),..., \psi_n(x, y_1, y_2,..., y_n)) = 0 .$$

Отметим следующий факт.

Теорема 3.3. Если $\psi_i(x, y_1, y_2,..., y_n) = C_i$, $i = 1,2,..., m$, некоторая совокупность первых интегралов системы дифференциальных уравнений (3.1) и $\phi(z_1, z_2,..., z_m)$ – некоторая функция, то $\phi(\psi_1, \psi_2,..., \psi_m)$ есть интеграл системы дифференциальных уравнений (3.1).

Доказательство. Пусть $y(x) = (y_1(x), y_2(x),..., y_n(x))^T$ – частное решение системы уравнений (3.1). Тогда $\psi_i(x, y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)) \equiv C_i$, $i = 1,2,..., m$. Подставляя эти соотношения в $\phi(\psi_1, \psi_2,..., \psi_m)$, получаем константу $\phi(C_1, C_2,..., C_m)$.

С другой стороны, справедлива теорема.

Теорема 3.4. Любая совокупность, состоящая из $n+1$ первого интеграла системы дифференциальных уравнений (3.1) зависима.

Доказательство этого результата опустим.

В теореме 3.4 утверждается, что, если $\psi_i(x, y_1, y_2,..., y_n) = C_i$, $i = 1,2,..., n+1$ – совокупность первых интегралов системы дифференциальных уравнений (3.1), то существует функция $\phi(z_1, z_2, ..., z_{n+1})$ такая, что выполняется соотношение

$$\phi(\psi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \psi_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), ..., \psi_{n+1}(x, y_1, y_2, ..., y_n)) = 0 .$$

Из теорем 3.2, 3.3 и 3.4 следует, что для построения любого интеграла системы дифференциальных уравнений (3.1) достаточно знать n независимых первых интегралов этой системы дифференциальных уравнений. Общего метода нахождения n независимых первых интегралов системы дифференциальных уравнений (3.1) нет. Часть из них, а иногда и все, может быть найдена с помощью метода интегрируемых комбинаций, рассмотренного ниже.

Для проверки независимости некоторой системы первых интегралов полезен следующий факт.

Теорема 3.5. Система первых интегралов $\psi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C_i$, $i = 1,2,..., m$, независима тогда и только тогда, когда ранг функциональной матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_m}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_m}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

равен m, или, что то же самое, хотя бы один из миноров порядка m этой матрицы был отличен от нуля.

Доказательство этого результата опустим.

В общем случае для решения систем имеются методы исключения неизвестных и интегрируемых комбинаций. Как указывалось ранее, любое уравнение порядка n можно свести к системе n уравнений в нормальной форме. Возможна и обратная процедура. На этой идее и основан метод исключения неизвестных. Разберём его на примере.

Пример. Для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \sin t, \\ x' + y = \cos t, \end{cases}$$

выражая y из второго уравнения, имеем $y = -x' + \cos t$, $y' = -x'' - \sin t$. Подставляя в первое уравнение и приводя подобные, получаем уравнение $x'' + 4x' + 3x = 0$. Это линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Корни его характеристического уравнения $r^2 + 4r + 3 = 0$ равны $r_1 = -3,\ r_2 = -1$. Поэтому $x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t}$. Подставляя в выражение для y, получаем $y = 3C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t} + \cos t$. В векторной форме то же самое будет иметь вид $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 3e^{-3t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$.

3.2. Системы дифференциальных уравнений в симметричной форме

Рассмотрим систему (3.1) дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

В этой системе переменные x и $y_1, y_2, ..., y_n$ неравноправны (x – независимая переменная, $y_1, y_2, ..., y_n$ – искомые функции). Каждое из уравнений $y_i' = \dfrac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = 1,2,..., n$, можно переписать в виде $\dfrac{dy_i}{f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = \dfrac{dx}{1}$, $i = 1,2,..., n$. Так как правые части полученных соотношений равны, то, приравнивая левые части, получаем

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = ... =$$
$$= \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = \frac{dx}{1}. \tag{3.5}$$

Умножим, при необходимости, знаменатели на одну и ту же функцию $\varphi(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, например, если $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = 1,2,..., n$, – дроби, то на общий знаменатель этих дробей. Положим $\varphi(x, y_1, y_2, ..., y_n) = F_{n+1}(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)\varphi(x, y_1, y_2, ..., y_n) = F_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = 1,2,..., n$. Вводя новые переменные $x_{n+1} = x, x_i = y_i$, $i = 1,2,..., n$, систему (3.5) можем переписать в виде

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1, x_2, ..., x_{n+1})} = \frac{dx_2}{F_2(x_1, x_2, ..., x_{n+1})} = ... = \frac{dx_{n+1}}{F_{n+1}(x_1, x_2, ..., x_{n+1})}. \tag{3.6}$$

Система уравнений (3.6) называется системой дифференциальных уравнений в симметричной форме.

С другой стороны, возможен и обратный переход от системы дифференциальных уравнений в симметричной форме (3.6) к эквивалентной ей системе дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши (3.1).

Действительно, из (3.6) имеем

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_{n+1}} = \dfrac{F_1(x_1, x_2, ..., x_{n+1})}{F_{n+1}(x_1, x_2, ..., x_{n+1})}, \\ \dfrac{dx_2}{dx_{n+1}} = \dfrac{F_2(x_1, x_2, ..., x_{n+1})}{F_{n+1}(x_1, x_2, ..., x_{n+1})}, \\ .... \; .... \; .... \; .... \\ \dfrac{dx_n}{dx_{n+1}} = \dfrac{F_n(x_1, x_2, ..., x_{n+1})}{F_{n+1}(x_1, x_2, ..., x_{n+1})}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Эта запись отличается от (3.1) лишь обозначениями. Сказанное выше позволяет дать следующее определение.

Определение. Интеграл и первый интеграл системы дифференциальных уравнений (3.7) назовём, соответственно, интегралом и первым интегралом системы дифференциальных уравнений (3.6).

3.3. Метод интегрируемых комбинаций

Система дифференциальных уравнений в симметричной форме (3.6) позволяет иногда получать первые интегралы с помощью так называемого метода интегрируемых комбинаций.

Интегрируемой комбинацией будем называть дифференциальное уравнение, которое легко решается. Например, для уравнения $\frac{dx+2ydy}{x+y^2}=\frac{dx}{x}$, так как $dx+2ydy=d\left(x+y^2\right)$, можем написать $\frac{d\left(x+y^2\right)}{x+y^2}=\frac{dx}{x}$, или, что то же самое, $d\ln\left|x+y^2\right|=d\ln|x|$. Так как дифференциалы равны, то сами функции отличаются на константу. Поэтому из последнего соотношения имеем $\ln\left|x+y^2\right|=\ln|x|+\ln|C|$, или, потенцируя (переходя от $\ln a$ к $e^{\ln a}$), получаем $\frac{x+y^2}{x}=C$. Заметим, что полученное выражение является первым интегралом исходного дифференциального уравнения.

Простейшей интегрируемой комбинацией является соотношение $d\psi=d\varphi$, из которого имеем $\psi=\varphi+C$ или $\psi-\varphi=C$. Частным случаем приведённой интегрируемой комбинации является соотношение $\frac{d\psi}{\varphi}=0$ или, что то же самое, $d\psi=0$ и, следовательно, $\psi=C$. Общего метода нахождения интегрируемых комбинаций нет. Различные интегрируемые комбинации можно получить с помощью известного свойства пропорций

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k b_k}, \qquad (3.8)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – некоторые числа. Иногда сравнительно просто удаётся найти лишь $k<n$ первых интегралов

$$\psi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)=C_i,\ i=1,2,...,k, \qquad (3.9)$$

системы дифференциальных уравнений. Тогда, выражая из (3.9) k переменных и подставляя полученные соотношения в систему дифференциальных уравнений, понижаем порядок системы до порядка $n-k$. Решение систем дифференциальных уравнений с помощью метода интегрируемых комбинаций покажем на примерах.

Пример 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\frac{dx}{2y-z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$. Первую интегрируемую комбинацию $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$ видно сразу. Следовательно, $\ln|y|=\ln|z|+\ln|C_1|$. Потенцируя, получаем $y=C_1 z$, или, что то же самое, $\frac{y}{z}=C_1$. Умножая числитель и знаменатель второй дроби на 2, получаем $\frac{dx}{2y-z}=\frac{2dy}{2y}=\frac{dz}{z}$. Используя соотношение (3.8) с $\alpha_1=\alpha_3=1, \alpha_2=-1$, получаем $\frac{dx-2dy+dz}{2y-z-2y-z}=\frac{dz}{z}$, или, что то же самое, $\frac{dx-2dy+dz}{0}=\frac{dz}{z}$. Это возможно лишь при $dx-2dy+dz=0$. Переписывая полученное равенство в виде $d(x-2y+z)=0$, имеем второй первый интеграл $x-2y+z=C_2$. Нетрудно показать, что найденные первые интегралы независимы.

Пример 2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$. Умножая числитель и знаменатель первой дроби на x, получаем $\frac{xdx}{xz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$. Используя соотношение (3.8) с $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0$, получаем $\frac{xdx - dy}{0} = \frac{dz}{y}$. Это возможно лишь при $xdx - dy = 0$, или, умножая на 2, $2xdx - 2dy = 0$. Переписывая полученное равенство в виде $d(x^2 - 2y) = 0$, имеем первый интеграл $x^2 - 2y = C_1$. Второй первый интеграл найдём исключая переменную y из системы дифференциальных уравнений. Для этого запишем систему в нормальной форме. Разделив в исходной системе все знаменатели на переменную z, получаем $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{(y/z)}$. Поэтому система дифференциальных уравнений в нормальной форме запишется в виде $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{y}{z}. \end{cases}$ Выражая из полученного выше первого интеграла y и подставляя его во второе уравнение, имеем $\frac{dz}{dx} = \frac{x^2 - C_1}{2z}$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получаем $2zdz = \left(x^2 - C_1\right)dx$. Проинтегрировав, имеем $z^2 = \frac{x^3}{3} - C_1 x + C_2$ или $z^2 - \frac{x^3}{3} + C_1 x = C_2$. Подставляя C_1 из найденного ранее первого интеграла, получаем второй первый интеграл

$z^2 - \frac{x^3}{3} + \left(x^2 - 2y\right)x = C_2$. Нетрудно показать, что найденные первые интегралы независимы.

3.4. Системы линейных уравнений

Если в системе (3.1) все функции f_i линейны по переменным $y_1, y_2, ..., y_n$, то она называется линейной. В этом случае её можно переписать в виде

$$\begin{cases} y_1' = a_1^1(x)y_1 + a_2^1(x)y_2 + ... + a_n^1(x)y_n + b_1(x), \\ y_2' = a_1^2(x)y_1 + a_2^2(x)y_2 + ... + a_n^2(x)y_n + b_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = a_1^n(x)y_1 + a_2^n(x)y_2 + ... + a_n^n(x)y_n + b_n(x). \end{cases} \quad (3.10)$$

Обозначая $\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)^T$ через y, матрицу системы через $A(x)$, а вектор $(b_1(x), b_2(x), ..., b_n(x))^T$ через $b(x)$, систему (3.10) можем переписать в матричной форме

$$y' = A(x)y + b(x), \quad (3.10а)$$

или в эквивалентном виде

$$y' - A(x)y = b(x), \quad (3.10б)$$

Будем по возможности пользоваться одной из форм (3.10а) или 3.10б) матричной записи. Если $b(x) = 0$, то получаем соответствующую систему однородных уравнений

$$y' = A(x)y, \quad (3.11)$$

или, что то же самое,

$$y' - A(x)y = 0. \quad (3.11а)$$

Для систем линейных уравнений строится теория, полностью эквивалентная теории линейных уравнений порядка n. В частности, справедлива теорема о наложении решений и её следствия. В том числе и теорема о том, что множество решений однородной системы (3.11) образует линейное подпространство в пространстве дифференцируемых вектор-функций. Сформулируем и по возможности докажем эти результаты.

Так же как и в п. 2.3 мы рассматривали множество $M[a,b]$ всех определённых на отрезке $[a,b]$ скалярных функций, рассмотрим множество $M_n[a,b]$ всех заданных на отрезке $[a,b]$ вектор-функций $f(x)=\left(f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)\right)^T$. На этом множестве введём операции:

1) сложения элементов $f, g \in M_n[a,b]$ по правилу

$$(f+g)(x)=\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}\right)(x)=\begin{pmatrix} f_1(x)+g_1(x) \\ f_2(x)+g_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x)+g_n(x) \end{pmatrix}=f(x)+g(x)$$

для $\forall x \in [a,b]$;

2) умножения элемента $f \in M_n[a,b]$ на скаляр $\alpha \in R$ по закону

$$(\alpha f)(x)=\begin{pmatrix} \alpha f_1(x) \\ \alpha f_2(x) \\ \vdots \\ \alpha f_n(x) \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}=\alpha \cdot f(x) \text{ для } \forall x \in [a,b].$$

Так же как и соответствующее пространство $M[a,b]$ скалярных функций скалярного аргумента, пространство $M_n[a,b]$ относительно введённых операций является линейным пространством, так как выполнены все аксиомы линейного пространства [1, 2, 11].

Рассмотрим два подмножества множества $M_n[a,b]$:

$C_n[a,b]$ – множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ вектор-функций;

$C_n^k[a,b]$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ вектор-функций.

Отметим, что имеет место поэлементное включение $C_n^k[a,b] \subset C_n[a,b] \subset M_n[a,b]$. Так как введённые линейные операции не выводят за пределы множеств $C_n[a,b]$ и $C_n^k[a,b]$ соответственно, то они являются линейными подпространствами пространства $M_n[a,b]$. Следовательно, как самостоятельные объекты, $C_n[a,b]$ и $C_n^k[a,b]$ являются линейными пространствами. В отличие от рассмотренных в линейной алгебре пространств, введённые пространства, так же как и рассмотренные в п.2.3 соответствующие пространства $M[a,b]$, $C[a,b]$ и $C^k[a,b]$ скалярных функций скалярного аргумента, бесконечномерны.

Отметим, что свойства решений систем линейных дифференциальных уравнений $y' - A(x)y = b(x)$ и $y' - A(x)y = 0$ подобны свойствам решений линейных дифференциальных уравнений $L(y) = b(x)$ и $L(y) = 0$ и систем линейных алгебраических уравнений $Ax = B$ и $Ax = 0$. Приведём эти свойства.

Теорема 3.6 (о наложении решений). Если $y^1 = \left(y_1^1, y_2^1, ..., y_n^1\right)^T$, $y^2 = \left(y_1^2, y_2^2, ..., y_n^2\right)^T$ – решения систем дифференциальных уравнений $y' - A(x)y = b^1(x)$ и $y' - A(x)y = b^2(x)$ соответственно, то линейная комбинация $\alpha_1 y^1 + \alpha_2 y^2$ есть решение уравнения $y' - A(x)y = \alpha_1 b^1(x) + \alpha_2 b^2(x)$.

Доказательство. Можно воспользоваться линейностью оператора $L(y) = y' - A(x)y$ и повторить соответствующее доказательство теоремы 2.3 о наложении решений для линейных дифференциальных уравнений. Предлагаем читателю проделать это самостоятельно. А можно доказать непосредственно, воспользовавшись свойствами умножения матрицы на вектор и правилом дифференцирования суммы вектор-функций $\left(y^1+y^2\right)'=\left(y^1\right)'+\left(y^2\right)'$. Действительно, имеем

$$\left(y^1+y^2\right)'-A(x)\left(y^1+y^2\right)=\left(y^1\right)'+\left(y^2\right)'-A(x)y^1-A(x)y^2=$$
$$=\left(\left(y^1\right)'-A(x)y^1\right)+\left(\left(y^1\right)'-A(x)y^2\right)=\alpha_1 b^1(x)+\alpha_2 b^2(x).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Если $y^1=\left(y_1^1,y_2^1,...,y_n^1\right)^T$, $y^2=\left(y_1^2,y_2^2,...,y_n^2\right)^T$ – решения систем дифференциальных уравнений $y'-A(x)y=b^1(x)$ и $y'-A(x)y=0$ соответственно, то для всякого числа α функция $y^1+\alpha y^2$ – решение системы дифференциальных уравнений $y'-A(x)y=b^1(x)$.

Следствие 2. Любая линейная комбинация решений системы дифференциальных уравнений $y'-A(x)y=0$ снова есть решение этой системы дифференциальных уравнений.

Доказательство. Пусть $y^1,y^2,...,y^m$ есть решения системы дифференциальных уравнений $y'-A(x)y=0$. Тогда

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j y^j\right)'-A(x)\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j y^j\right)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\left(\left(y^j\right)'-A(x)y^j\right)=0.$$

Следствие доказано.

Следствие 3. Множество всех решений системы дифференциальных уравнений $y'-A(x)y=0$ образует линейное подпространство пространства $C_n^1[a,b]$.

Доказательство. По предыдущему следствию линейные операции над решениями системы дифференциальных уравнений $y'-A(x)y=0$ не выводят за пределы множества решений этой системы уравнений, что и доказывает следствие.

Напомним некоторые понятия линейной алгебры, которые нам потребуются в дальнейшем.

Так же, как для векторов [1, 2] и систем скалярных функций, для систем вектор-функций вводятся понятия их линейной зависимости и линейной независимости.

Определение. Система вектор-функций $y^1, y^2, ..., y^m$ называется линейно зависимой на отрезке $[a,b]$, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, не все из которых равны нулю, такие, что

$$\alpha_1 y^1 + \alpha_2 y^2 + ... + \alpha_m y^m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y^m = 0$$

всюду на $[a,b]$, и линейно независимой, если такого ненулевого набора не существует.

Так же как и для систем векторов, для систем функций справедливы следующие ниже свойства.

1. Система вектор-функций $y^1, y^2, ..., y^m$ линейно зависима на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда одна из них есть линейная комбинация остальных.
2. Всякая система вектор-функций, содержащая функцию, тождественно равную нулю на отрезке $[a,b]$, линейно зависима на $[a,b]$.
3. Всякая система вектор-функций, содержащая линейно зависимую на отрезке $[a,b]$ подсистему вектор-функций, линейно зависима на $[a,b]$.

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для систем векторов и предлагаются в качестве упражнений.

Рассмотрим совокупность вектор-функций $y^1, y^2, ..., y^n$.
Определитель, составленный из их координат,

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1^1 & y_2^1 & K & y_n^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & K & y_n^2 \\ K & K & K & K \\ y_1^n & y_2^n & K & y_n^n \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского или вронскианом системы вектор-функций $y^1, y^2, ..., y^n$.

Так же, как и для систем скалярных функций, определитель Вронского системы вектор-функций служит индикатором её линейной зависимости или линейной независимости.

Теорема 3.7. Если система вектор-функций линейно зависима, то её определитель Вронского $W(x)$ равен нулю.

Доказательство аналогично соответствующему доказательству для систем векторов [1, 2] и систем скалярных функций, приведённому в п. 2.3. Предлагается сделать это самостоятельно.

Теорема 3.8. Если $y^1, y^2, ..., y^n$ – линейно независимая совокупность решений однородной системы уравнений $y' - A(x)y = 0$ с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ элементами матрицы $A(x)$ и $A(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$, то её определитель Вронского $W(x)$ отличен от нуля для всех $x \in [\alpha, \beta]$.

Доказательство аналогично соответствующему доказательству для систем скалярных функций, приведённому в п. 2.3. Предлагается доказать эту теорему самостоятельно.

Займёмся выяснением размерности пространства решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений $y' - A(x)y = 0$ и построением базиса в этом пространстве.

Теорема 3.9. Для любой однородной системы линейных дифференциальных уравнений $y' = A(x)y$ порядка n с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ элементами матрицы $A(x)$ и $A(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$ существует система n линейно независимых решений этой системы уравнений.

Доказательство. Возьмём матрицу

$$\begin{pmatrix} q_1^1 & q_2^1 & \dots & q_n^1 \\ q_1^2 & q_2^2 & \dots & q_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^n & q_2^n & \dots & q_n^n \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

с определителем, отличным от нуля. Тогда строки и столбцы этой матрицы линейно независимы. Найдём такие решения $y^j(x), j = 1,2,...n,$ системы уравнений $y' - A(x)y = 0$, чтобы выполнялись соотношения $y_k^j(x_0) = q_k^j, k = 1,2,...n$. По теореме существования и единственности решений такой набор решений существует. Найденная система решений линейно независима, так как её определитель Вронского в точке x_0 совпадает с определителем матрицы (3.12). Теорема доказана.

Матрицу (3.12) можно взять единичную.

Теорема 3.10 (о виде общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений). Если $y^1, y^2, ..., y^n$ - линейно независимая совокупность решений однородной системы уравнений $y' - A(x)y = 0$ с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ элементами матрицы $A(x)$ и $A(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$, то любое решение этой системы есть линейная комбинация решений $y^1, y^2, ..., y^n$, то есть

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}C_j y^j(x)$$

и, следовательно, $y^1, y^2,..., y^n$ - базис пространства решений системы уравнений $y' - A(x)y = 0$.

Доказательство. Нам нужно доказать, что для любого набора начальных данных (3.2) $(y_1(x_0), y_2(x_0),..., y_n(x_0))^T =$ $=(y_1^0, y_2^0,..., y_n^0)^T$ можно подобрать константы $C_j, j=1,2,..., n,$ так, что соответствующее решение $y(x)$ удовлетворяет (3.2). Потребовав, чтобы решение $y(x)$ удовлетворяло условиям (3.2), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}C_j y_k^j(x_0) = y_k(x_0) = y_k^0,\ k=1,2,\ldots,n,$$

определитель которой $W(x_0)\neq 0$ и поэтому существует единственное решение этой системы.

Таким образом, нами показано, что хотя само пространство $C_n^1[a,b]$ бесконечномерно, подпространство решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений конечномерно и имеет размерность n. Следовательно в нём существует базис состоящий из n функций.

Определение. Любой базис пространства решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка называется фундаментальной системой решений этой системы уравнений.

Так же, как и в линейной алгебре, имеет место следующий результат.

Теорема 3.11 (о виде общего решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений). Общее решение $y_{\text{он}}$ линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений

$y' = A(x)y + b(x)$ с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ элементами матрицы $A(x)$ и компонентами вектора $b(x)$, $A(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$, есть сумма общего решения $y_{\text{оо}}$ соответствующей однородной системы уравнений $y' = A(x)y$ и какого либо частного решения $y_{\text{чн}}$ неоднородной системы уравнений, то есть $y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x)$.

Доказательство. Пусть $y_{\text{чн}}(x)$ какое-нибудь фиксированное частное решение неоднородной системы линейных уравнений $y' = A(x)y + b(x)$. Нам нужно показать, что для любого набора начальных данных $(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0))^T = \; = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^T$ можно подобрать константы $C_j, j = 1, 2, \ldots, n,$ так, что решение $y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y^j(x) + y_{\text{чн}}(x)$, где $y^1, y^2, \ldots, y^n$ - фундаментальная система решений соответствующей однородной системы уравнений $y' = A(x)y$, удовлетворяет этому набору начальных данных. Потребовав, чтобы данное решение удовлетворяло начальным условиям, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_k^j(x_0) + (y_{чн})_k(x_0) = y_k(x_0) = y_k^0, \; k = 1, 2, \ldots, n,$$

или, что то же самое,

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_k^j(x_0) = y_k^0 - (y_{чн})_k(x_0), \; k = 1, 2, \ldots, n,$$

определитель которой $W(x_0) \neq 0$, и поэтому существует единственное решение этой системы. Теорема доказана.

3.5. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Как и в случае линейных уравнений высших порядков, наиболее полно разработаны вопросы нахождения фундаментальной системы решений для однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} y_1' = a_1^1 y_1 + a_2^1 y_2 + \ldots + a_n^1 y_n, \\ y_2' = a_1^2 y_1 + a_2^2 y_2 + \ldots + a_n^2 y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_1^n y_1 + a_2^n y_2 + \ldots + a_n^n y_n. \end{cases} \tag{3.13}$$

Пусть A – матрица системы, $y=(y_1, y_2,..., y_n)^T$. Учитывая, что $y'=(y_1', y_2',..., y_n')^T$, систему (3.13) можем переписать в матричной форме

$$y' = Ay, \tag{3.13а}$$

или, что то же самое, в виде

$$y' - Ay = 0, \tag{3.13б}$$

Будем искать ненулевое решение системы (3.13) в виде

$$y = \boldsymbol{\alpha} e^{rt} = (\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n)^T e^{rt} = (\alpha_1 e^{rt}, \alpha_2 e^{rt},..., \alpha_n e^{rt})^T. \tag{3.14}$$

Вычисляя производную, имеем

$$y' = (\alpha_1 r e^{rt}, \alpha_2 r e^{rt},..., r\alpha_n e^{rt})^T = (\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n)^T r e^{rt} = \boldsymbol{\alpha} r e^{rt}$$

(3.15)

Подставив (3.14) и (3.15) в (3.13), получаем равенство $\boldsymbol{\alpha} r e^{rt} = A\boldsymbol{\alpha} e^{rt}$, откуда, сокращая на e^{rt}, можем записать $\boldsymbol{\alpha} r = A\boldsymbol{\alpha}$ или $A\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} r = A\boldsymbol{\alpha} - E\boldsymbol{\alpha} r = (A - rE)\boldsymbol{\alpha} = 0$. Последнее соотношение $(A - rE)\boldsymbol{\alpha} = 0$ есть система линейных алгебраических уравнений для нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы A. С другой стороны, если

r – собственное число, а $\boldsymbol{\alpha}$ – соответствующий ему собственный вектор матрицы A, то подставляя $y = \boldsymbol{\alpha} e^{rt}$, $y' = \boldsymbol{\alpha} r e^{rt}$ в (3.13) получаем, с учётом $(A - rE)\boldsymbol{\alpha} = 0$, что $y = \boldsymbol{\alpha} e^{rt}$ есть решение системы (3.13). Таким образом, нами доказан следующий результат.

> **Теорема 3.12.** Вектор-функция $y = \boldsymbol{\alpha} e^{rt}$ является решением однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (3.13) тогда и только тогда, когда r – собственное число, а $\boldsymbol{\alpha}$ – соответствующий ему собственный вектор матрицы A.

Подробнее об определении и нахождении собственных векторов и собственных чисел смотри в книгах по линейной алгебре, в частности, в [1] и [2].

Возможны два случая:

1) все собственные числа различны;

2) есть кратные собственные числа.

Разберём эти возможности по отдельности.

В первом случае имеем n решений

$$y^1 = \boldsymbol{\alpha}^1 e^{r_1 t},\ y^2 = \boldsymbol{\alpha}^2 e^{r_2 t}, \ldots,\ y^n = \boldsymbol{\alpha}^n e^{r_n t}.$$

Эта система функций линейно независима, так как её определитель Вронского отличен от нуля. Действительно,

$$W(x) = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 e^{r_1 t} & \alpha_2^1 e^{r_2 t} & \ldots & \alpha_n^1 e^{r_n t} \\ \alpha_1^2 e^{r_1 t} & \alpha_2^2 e^{r_2 t} & \ldots & \alpha_n^2 e^{r_n t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n e^{r_1 t} & \alpha_2^n e^{r_2 t} & \ldots & \alpha_n^n e^{r_n t} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + \ldots + r_n)t} \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

Первый сомножитель $e^{(r_1 + \ldots + r_n)t}$ в полученном соотношении отличен от нуля. Второй сомножитель есть определитель, в строках которого стоят компоненты собственных векторов $\boldsymbol{\alpha}^1, \boldsymbol{\alpha}^2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^n$ матрицы A. Так как система векторов

$\boldsymbol{\alpha}^1, \boldsymbol{\alpha}^2, ..., \boldsymbol{\alpha}^n$ есть система, отвечающая разным собственным числам, то она линейно независима [1] и, следовательно, определитель отличен от нуля. Таким образом, мы получили n линейно независимых решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений.

Во втором случае возможны два варианта. Пусть для собственного числа r_j кратности k имеется k линейно независимых собственных векторов $\boldsymbol{\alpha}^{j_1}, \boldsymbol{\alpha}^{j_2}, ..., \boldsymbol{\alpha}^{j_k}$. Этот вариант ничем не отличается от предыдущего случая. Во втором варианте для собственного числа r_j кратности k имеется меньше чем k линейно независимых собственных векторов. Имеется два способа получения совокупности n линейно независимых решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений. Первый основан на приведении матрицы к жордановой форме и изложен в [8, 15]. Второй называется методом Эйлера и заключается в том, что для собственного числа r_j соответствующие решения находятся в виде $y = P_{k-1}(t)e^{r_j t}$, где $P_{k-1}(t)$ - вектор-функция, каждая координата которой есть полином степени не выше $k-1$ с неопределёнными коэффициентами, подлежащими определению. Подставляя это решение в (3.13), получаем соотношения для определения коэффициентов вектор-функции $P_{k-1}(t)$.

Пример 1. Для линейной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -2x + y - 2z, \\ y' = x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 5z \end{cases}$ матрица $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет собственные числа $\lambda_1 = 3$ с соответствующим собственным вектором $p_1 = (-1,1,3)^T$ и $\lambda_{2,3} = -1$ кратности 2 с собственными векторами $p_2 = (1,1,0)^T$ и $p_3 = (2,0,-1)^T$. Поэтому фундаментальная система решений состоит из функций $p_1e^{3t}, p_2e^{-t}, p_3e^{-t}$, а общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -e^{3t} \\ e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Для системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -x + y - 2z, \\ y' = 4x + y, \\ z' = 2x + y - z \end{cases}$ матрица $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ имеет собственные числа $\lambda_1 = 1$ с соответствующим собственным вектором $p_1 = (0,2,1)^T$ и $\lambda_{2,3} = -1$ кратности 2, которому соответствует только один собственный вектор $p_2 = (-1,2,1)^T$. Поэтому линейно независимые решения, соответствующие собственному числу $\lambda_{2,3} = -1$, ищем в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bt \\ q + nt \\ s + rt \end{pmatrix} \cdot e^{-t} = \begin{pmatrix} (a + bt)e^{-t} \\ (q + nt)e^{-t} \\ (s + rt)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти соотношения в исходную систему и приводя подобные, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} n - 2r = 0, \\ 4b + 2n = 0, \\ 2b + n = 0, \\ b - q + 2s = 0, \\ 4a - n + 2q = 0, \\ 2a + q - r = 0 \end{cases}$$

для нахождения чисел a, b, q, n, s, r. Решая эту систему, имеем $b = -r,\ q = r - 2a,\ n = 2r,\ s = r - a$. Придавая свободным неизвестным значения $a = C_2$, $r = C_3$, получаем общее решение исходной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -te^{-t} \\ (1+2t)e^{-t} \\ (1+t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Для линейной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 4x - y \end{cases}$ матрица $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ имеет собственные числа $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Собственный вектор, отвечающий собственному числу $1+2i$, равен $p_1 = (1, 1-i)^T$. Для собственного числа $1-2i$ можно найти собственный вектор, а можно воспользоваться тем, что действительная и мнимая части решения $p_1 e^{(1+2i)t}$ являются линейно независимыми решениями системы. Поэтому общее решение системы можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ e^t (\cos 2t + \sin 2t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^t \sin 2t \\ e^t (\sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}.$$

С другими примерами нахождения фундаментальной системы решений и общего решения линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно познакомиться в п. 5.3.2 практикума [6] и других книгах по дифференциальным уравнениям.

3.6. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений (3.10а) $y' = A(x)y + b(x)$ или, что то же самое, (3.10б) $y' - A(x)y = b(x)$.

Пусть имеется фундаментальная система решений $y^1, y^2, ..., y^n$ системы (3.11) $y' = A(x)y$. Тогда общее решение системы (3.11) записывается в форме $\sum_{j=1}^{n} C_j y^j$. Будем искать частное решение неоднородной системы уравнений (3.10) в виде

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y^j, \tag{3.16}$$

где $C_j(x)$ – функции, подлежащие определению. Дифференцируя вектор-функцию (3.16), получаем

$$y' = \sum_{j=1}^{n} C'_j(x) y^j + \sum_{j=1}^{n} C_j(x)(y^j)'. \tag{3.17}$$

Подставляя вектор-функцию (3.16) и её производную (3.17) в систему уравнений (5.64), получаем

$$\sum_{j=1}^{n} C'_j(x) y^j + \sum_{j=1}^{n} C_j(x)(y^j)' - A(x)\left(\sum_{j=1}^{n} C_j(x) y^j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} C'_j(x) y^j + \sum_{j=1}^{n} C_j(x)\Big((y^j)' - A(x) y^j\Big) = b(x). \tag{3.18}$$

В этом соотношении слагаемое $\sum_{j=1}^{n} C_j(x)\Big((y^j)' - A(x) y^j\Big)$ равно нулю в силу того, что $y^1, y^2, ..., y^n$ – решения однородной системы уравнений (3.11) $y' = A(x)y$.

Поэтому правая часть в (3.18) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^{n} C'_j(x) y^j = b(x) \tag{3.19}$$

или в координатной форме

$$\sum_{j=1}^{n} C'_j(x) y_k^j = b_k(x),\ k = 1,2,..., n. \tag{3.19a}$$

Так как определитель системы (3.19) есть определитель Вронского для фундаментальной системы решений $y^1, y^2,..., y^n$ однородной системы уравнений (3.11) $y' = A(x)y$, то он отличен от нуля, и поэтому система (3.19) имеет единственное решение $C'_j(x),\ j = 1,2,..., n,$ которое можно найти по формулам Крамера

$$C'_j(x) = \frac{W_j(x)}{W(x)},\ j = 1,2,..., n.,$$

где $W_j(x)$ –определитель, полученный из определителя $W(x)$ заменой столбца с номером j на столбец $b(x)$. Интегрируя последние равенства, окончательно получаем

$$C_j(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_j(x)}{W(x)} dx + \tilde{C}_j,\ j = 1,2,..., n.$$

Подставляя полученные значения $C_j(x)$ в (3.16), получаем общее решение $y(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j(x) y^j(x) + \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{C}_j y^j(x)$ системы уравнений (3.10).

Пример. Для системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -3x + 4y + e^{3t} + 2 \end{cases}$ соответствующая однородная система уравнений имеет вид $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -3x + 4y. \end{cases}$ Собственные числа её матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ равны $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Собственные векторы, отвечающие этим собственным числам, равны соответственно $(1,1)^T$ и $(2,3)^T$. Тогда фундаментальная система решений состоит из функций $(e^t, e^t)^T$ и $(2e^{2t}, 3e^{2t})^T$. Решение исходной системы ищем в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1(t)\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2(t)\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем систему

$$C_1'(t)\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2'(t)\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} + 2 \end{pmatrix}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + 2C_2'(t)e^{2t} = 0, \\ C_1'(t)e^t + 3C_2'(t)e^{2t} = e^{3t} + 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $C_1' = -2e^{2t} - 4e^{-t}$, $C_2' = e^t + 2e^{-2t}$. Проинтегрировав, имеем $C_1(t) = -e^{2t} + 4e^{-t} + \tilde{C}_1$, $C_2 = e^t - e^{-2t} + \tilde{C}_2$. Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{C}_1\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \tilde{C}_2\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{3t} + 2 \\ 2e^{3t} + 1 \end{pmatrix}.$$

С другими примерами применения метода вариации произвольных постоянных для нахождения общего решения линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений можно познакомиться в п. 5.3.3 практикума [6] и других книгах по дифференциальным уравнениям.

4. Элементы теории устойчивости

4.1. Зависимость решения от параметров и начальных данных

Поведение динамических (изменяющих своё состояние во времени) объектов описывается дифференциальными или интегральными уравнениями. Уравнение, описывающее поведение объекта будем называть математической моделью объекта.

Пусть поведение объекта описывается дифференциальным уравнением $y' = f(x, y)$ с начальными данными $y(x_0) = y_0$ (задача Коши). Математическая модель объекта строится путём идеализации движения или процесса, следовательно, правые части дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в зависимости от допущений при идеализации, могут различаться. Если начальные данные получены путём измерения положения реального объекта, то они всегда получаются с ошибкой (ошибки прибора, метода измерения, органов восприятия информации измеряющего).

Определение. Назовём задачу корректно поставленной, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|x_1 - x_0| < \delta$, $|y_1 - y_0| < \delta$, $|f_1(x, y) - f(x, y)| < \delta$ для решения $y_0(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определённого на отрезке $[\alpha, \beta]$ и проходящего через точку (x_0, y_0) ($x_0 \in (\alpha, \beta)$), существует решение $y_1(x)$ уравнения $y' = f_1(x, y)$, определённое на отрезке $[\alpha, \beta]$ и проходящее через точку (x_1, y_1), такое, что $\sup\limits_{x \in [\alpha, \beta]} |y_1(x) - y(x)| < \varepsilon$, то есть при малом изменении правых частей дифференциального уравнения и начальных данных решение задачи Коши изменяется мало. В противном случае задачу будем считать некорректно поставленной.

Имеется литература, посвящённая изучению некорректно поставленных задач [16, 17]. В данном разделе мы будем заниматься корректно поставленными задачами.

Теорема 4.1. Пусть функция $f(x,y)$ определена, непрерывна и ограничена в некоторой области G. Тогда задача Коши для уравнения $y'=f(x,y)$ поставлена корректно.

При более жестких предположениях теорема будет доказана позже. С непосредственным доказательством желающие могут ознакомиться в [14].

Пусть $G\subset R^2$ – замкнутое множество, $P\subset R^n$ – n-мерный параллелепипед $P=\prod_{i=1}^{n}[-a_i,a_i]$, точка $(x,y)\in G$, а точка $\mu=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)\in P$, $f(x,y,\mu)=f(x,y,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)$ – заданная на множестве $G\times P$ функция. Имеет место следующий результат.

Теорема 4.2. Если функция

$$f(x,y,\mu)=f(x,y,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)$$

непрерывна в $G\times P$ по совокупности аргументов, ограничена и удовлетворяет условию Липшица по y

$$|f(x,y_2,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)-f(x,y_1,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)|\le L|y_2-y_1|,$$

то для каждой точки (x_0,y_0), лежащей внутри G можно указать на оси OX такой отрезок $[\alpha,\beta]$, включающий точку x_0, на котором решение уравнения $y'=f(x,y,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)$ с начальными условиями $y(x_0)=y_0$ (решение задачи Коши) непрерывно по совокупности переменных $x,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n$. Кроме того, если функция $f(x,y,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)$ и её производные по $y,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n$ до порядка $p>0$ включительно внутри $G \times P$ непрерывны по $x, y, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ и ограничены, то решение $y(x, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ будет иметь по $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in P$ непрерывные по $x, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ производные до порядка p в области $[\alpha, \beta] \times P$.

Доказательство. Рассмотрим случай $n = 1$. В общем случае доказательство аналогично. Будем искать решение задачи Коши $y' = f(x, y, \mu), y(x_0, \mu) = y_0$ методом последовательных приближений. Положим

$$\varphi_0(x, \mu) = y_0,$$

$$\varphi_1(x, \mu) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_0(x, \mu), \mu) dt,$$

$$\varphi_2(x, \mu) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_1(x, \mu), \mu) dt$$

И так далее. По теореме о сжимающем операторе (см. приложение 2), эта последовательность сходится к нужному нам решению. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Обозначим через $y(x, x_0, y_0)$ решение этой задачи. Положим $t = x - x_0$, $z = y(x, x_0, y_0) - y_0$. Тогда $x = t + x_0$, $z = y(t + x_0, x_0, y_0) - y_0$,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\big(y(t + x_0, x_0, y_0) - y_0\big)}{dt} = \frac{d\big(y(t + x_0, x_0, y_0) - y_0\big)}{d(t + x_0)} \cdot \frac{d(t + x_0)}{dt} =$$

$$= \frac{d\big(y(t + x_0, x_0, y_0) - y_0\big)}{d(t + x_0)} = \frac{d\big(y(x, x_0, y_0) - y_0\big)}{dx} = y'.$$ Заметим, что значению $x = x_0$ соответствует значение $t = 0$, $z(0) = y(x_0) - y_0 = 0$. Поэтому дифференциальное уравнение перепишется в виде $\dfrac{dz}{dt} = f(t + x_0, z + y_0)$ с начальным условием $z(0) = 0$. Таким образом, изучение зависимости реше-

ния от начальных данных свелось к изучению решения от параметров x_0, y_0.

Следствие. Если функция $f(x, y)$ имеет по x и y непрерывные производные до порядка $p > 0$ включительно, то решение задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ имеет непрерывные производные до порядка p.

В дальнейшем нам понадобиться следующий важный результат.

Лемма (Адамара). Пусть $x = (x_1, x_2,..., x_n) \in R^n$, $z = (z_1, z_2,..., z_m) \in R^m$ и функция $F(x, z)$ имеет в некоторой выпуклой по x области $G \subseteq R^n \times R^m$ пространства $R^n \times R^m$ непрерывные производные по x до некоторого порядка $p > 0$ включительно. Тогда можно найти n таких функций $\Phi_i(x, y, z), i = 1,2,...n$, имеющих непрерывные производные по x, y до порядка $p-1$ включительно, что

$$F(y, z) - F(x, z) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x, y, z)(y_i - x_i).$$

Доказательство. В силу выпуклости области имеем

$$F(y, z) - F(x, z) =$$

$$= \int_0^1 F_t'(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2),..., x_n + t(y_n - x_n), z)dt \qquad (4.1)$$

По формуле производной сложной функции (см. например [3]) получаем

$$F_t'(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2),..., x_n + t(y_n - x_n), z) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial(x_i + t(y_i - x_i))} \cdot \frac{\partial(x_i + t(y_i - x_i))}{\partial t}. \qquad (4.2)$$

Так как $\dfrac{\partial(x_i + t(y_i - x_i))}{\partial t} = y_i - x_i$, то положив $F_i = \dfrac{\partial F}{\partial(x_i + t(y_i - x_i))}, i = 1,2,..., n$, соотношение (4.2) можно переписать в виде

$$F_t'(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2),..., x_n + t(y_n - x_n), z) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot (y_i - x_i) \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в (4.1), имеем

$$F(y, z) - F(x, z) = F(y_1, y_2,... y_n, z) - F(x_1, x_2,..., x_n, z) =$$
$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot (y_i - x_i) \right) dt = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left(F_i \cdot (y_i - x_i) \right) dt = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \int_0^1 F_i dt.$$

Положив $\Phi_i(x_1, x_2,..., x_n, y_1, y_2,..., y_n) = \int_0^1 F_i dt$, получаем требуемое. Лемма доказана.

Пусть $\varphi(x, \mu)$ и $\varphi(x, \mu + \Delta\mu)$ решения уравнений

$$y' = f(x, \mu) \tag{4.4}$$

и

$$y' = f(x, \mu + \Delta\mu). \tag{4.5}$$

Подставляя $\varphi(x, \mu)$ в (4.4), а $\varphi(x, \mu + \Delta\mu)$ в (4.5) и вычитая из второго первое, получим

$$\frac{d\left(\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu)\right)}{dx} = f(x, \mu + \Delta\mu) - f(x, \mu).$$

Применяя к правой части последнего соотношения лемму Адамара, имеем

$$\frac{d\left(\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu)\right)}{dx} = \left(\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu)\right)\Phi_1 + \Delta\mu\Phi_2,$$

где Φ_1, Φ_2 – непрерывные по $x, \mu, \varphi(x, \mu), \varphi(x, \mu + \Delta\mu)$ функции. Разделив последнее соотношение на $\Delta\mu$, получаем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi(x,\mu+\Delta\mu)-\varphi(x,\mu)}{\Delta\mu}\right)=\frac{\varphi(x,\mu+\Delta\mu)-\varphi(x,\mu)}{\Delta\mu}\Phi_1+\Phi_2 .$$

Заметим, что, в силу леммы Адамара, $\lim\limits_{\Delta\mu\to 0}\Phi_1=\dfrac{\partial f}{\partial\varphi}$, $\lim\limits_{\Delta\mu\to 0}\Phi_2=\dfrac{\partial f}{\partial\mu}$. Поэтому, переходя в полученном выше уравнении к пределу при $\Delta\mu\to 0$, имеем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)=\frac{\partial f}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}+\frac{\partial f}{\partial\mu}. \tag{4.6}$$

Уравнение (4.6) называется уравнением в вариациях, а в теории автоматического управления уравнением чувствительности. Обоснование справедливости предельного перехода, а также непрерывности и дифференцируемости соответствующих функций можно посмотреть в [14].

4.2. Определение устойчивости по Ляпунову

В предыдущем пункте мы занимались зависимостью решения от начальных данных в том случае, когда решение определено на ограниченном отрезке. В данном пункте мы будем исследовать этот вопрос в случае, когда решение определено на бесконечном полуинтервале $[a,\infty)$. Большой вклад в развитие данного вопроса внёс А.М.Ляпунов. Более подробное изложение можно найти в [10, 13, 14, 15, 18] и других пособиях.

Определение. Пусть $y^0(x)=\left(y_1^0(x), y_2^0(x),..., y_n^0(x)\right)^T$ – решение системы уравнений (3.1)

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x,y_1,y_2,...,y_n),\\ y_2' = f_2(x,y_1,y_2,...,y_n),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_n' = f_n(x,y_1,y_2,...,y_n). \end{cases}$$

с начальными данными $y(x_0) = y^0 = \left(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0\right)^T$, определённое на полуинтервале $[a, \infty)$. Это решение будем называть устойчивым, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что при выполнении условий

$$\left|x_1 - x_0\right| < \delta, \left\|y^1 - y^0\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i^1 - y_i^0\right)^2} < \delta \qquad (x_1 \in [a, \infty))$$

для любого решения $y^1(x) = \left(y_1^1(x) y_2^1(x), ..., y_n^1(x)\right)^T$ системы уравнений (3.1) с начальными данными $y(x_1) = y_1 = \left(y_1^1, y_2^1, ..., y_n^1\right)^T$, определённого также на полуинтервале $[a, \infty)$, выполнено неравенство $\left|y_i^1(x) - y_i^0(x)\right| < \varepsilon, i = 1,2,..., n$, для всех x из полуинтервала $[a, \infty)$. Если при этом $\lim\limits_{x \to \infty} \left(y_i^1(x) - y_i^0(x)\right) = 0, i = 1,2,..., n$, то решение $y^0(x) = \left(y_1^0(x), y_2^0(x), ..., y_n^0(x)\right)^T$ называется асимптотически устойчивым.

Исследование устойчивости решений можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения с нулевыми начальными данными некоторой другой системы дифференциальных уравнений. Покажем, как это сделать. Пусть $y^0(x) = \left(y_1^0(x), y_2^0(x), ..., y_n^0(x)\right)^T$ – решение системы уравнений (3.1) с начальными данными $y^0(x_0) = y^0$, $y(x) = \left(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\right)^T$ – любое решение этой же системы уравнений. Для удобства записи, дальнейшие вычисления проделаем в векторной форме. Желающие могут перейти к покоординатной форме записи и проделать вычисления в координатной форме. Напомним, что производная вектор-функции $y(x) = \left(y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)\right)^T$ скалярного аргумента вычисляется по формуле

$$\left(\left(y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)\right)^T\right)' = \left(y_1'(x), y_2'(x),..., y_n'(x)\right)^T .$$

Подробнее о дифференцировании вектор-функций можно посмотреть в [3]. Рассмотрим вектор-функцию $z(x) = y(x) - y^0(x)$. Тогда $y(x) = z(x) + y^0(x)$, $y'(x) = z'(x) + \left(y^0(x)\right)'$. Так как $y(x)$ и $y^0(x)$ – решения системы уравнений (3.1), то подставляя их в эту систему, получаем $y'(x) = z'(x) + \left(y^0(x)\right)' = f(x, y+z)$. Поэтому $z' + f(x, y^0) = f(x, y+z)$ или, что то же самое, $z' = f(x, y+z) - f(x, y^0)$. Рассмотрим теперь решение полученного уравнения с начальными данными $z(x_0) = 0$. Имеем $z(x_0) = y(x_0) - y^0(x_0) = y(x_0) - y_0 = 0$. Поэтому $y(x_0) = y_0$ и, если для системы дифференциальных уравнений (3.1) $y' = f(x, y)$ выполнены условия теоремы существования и единственности, то $y(x)$ совпадает с $y^0(x)$. Следовательно $z(x) \equiv 0$.

Определение. Решение $y(x) \equiv 0$ системы дифференциальных уравнений (3.1) с начальными данными $y(x_0) = 0$ будем называть точкой покоя этой системы.

Определение устойчивости точки покоя формулируется следующим образом.

Определение. Точку покоя системы дифференциальных уравнений (3.1) будем называть устойчивой, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что при выполнении условий $|x_1| < \delta, \left|y_i^0\right| < \delta, i = 1,2,..., n$ ($x_1 \in [a, \infty)$) для любого решения $y(x) = \left(y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)\right)^T$ системы уравнений (3.1) с начальными данными $y(x_1) = y^0 = \left(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0\right)^T$, определённого также на полуинтервале $[a, \infty)$, выполнены неравенства $\left|y_i(x)\right| < \varepsilon, i = 1,2,..., n$ для всех x из полуинтервала $[a, \infty)$. Если при этом $\lim\limits_{x \to \infty} y_i(x) = 0, i = 1,2,..., n$, то точка покоя называется асимптотически устойчивой.

Имеются различные методы исследования устойчивости невозмущённого движения, в том числе и точки покоя.

4.3. Метод функций Ляпунова

Определение. Функцию $V(y) = V(y_1, y_2, ..., y_n)$ назовём не отрицательно определённой в содержащей начало координат области $D \subseteq R^n$, если для всякого $y \in D$ $V(y) \geq 0$. Если, кроме того, $V(y) = 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0$, то функция $V(y) = V(y_1, y_2, ..., y_n)$ называется положительно определённой.

Аналогично, с заменой неравенств на противоположные, определяются не положительно определённая и отрицательно определённая функции.

Теорема 4.3 (Ляпунова об устойчивости). Если для системы дифференциальных уравнений (3.1)

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases}$$

существует положительно определённая функция $V(y) = V(y_1, y_2, ..., y_n)$ такая, что функция $W = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial y_i} f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ не положительно определена, то точка покоя устойчива. Если функция W отрицательно определена, то точка покоя асимптотически устойчива.

Общего метода построения функций Ляпунова нет. Часто их берут в виде суммы чётных степеней координат.

Пример 1. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

В качестве функции Ляпунова возьмем положительно определенную функцию $V(x,y) = x^2 + y^2$. Чтобы воспользоваться теоремой Ляпунова, составляем функцию $W = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial y_i} f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$. Имеем:

$$W = V'_x \cdot f_1 + V'_y \cdot f_2 = 2x \cdot y + 2y(-x) = 0.$$

Функция W не положительно определена, следовательно, точка покоя данной системы устойчива, но не асимптотически.

Пример 2. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y^3. \end{cases}$$

В качестве функции Ляпунова возьмем положительно определенную функцию $V(x,y) = x^2 + y^2$. Чтобы воспользоваться теоремой Ляпунова, составляем функцию $W = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial y_i} f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$. Имеем:

$$W = V'_x \cdot f_1 + V'_y \cdot f_2 = 2x\left(y - x^3\right) + 2y\left(-x - 3y^3\right) = -\left(2x^4 + 6y^4\right).$$

Причем, $W = -\left(2x^4 + 6y^4\right) = 0$ тогда и только тогда, когда обе координаты нулевые, то есть $x = y = 0$.

Поэтому функция W отрицательно определена и, следовательно, точка покоя данной системы асимптотически устойчива.

Пример 3. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y + x^2y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - \dfrac{y}{2} - \dfrac{x^3y}{2}. \end{cases}$$

Будем искать функцию Ляпунова в виде $V(x, y) = ax^2 + by^2$, где a и b произвольные положительные константы. Составляем функцию $W = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial y_i} f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$. Имеем:

$$W = V_x' \cdot f_1 + V_y' \cdot f_2 = 2ax\left(-x - 2y + x^2y^2\right) + 2by\left(x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2}\right) =$$

$$= -\left(2ax^2 + by^2\right) + (b - 2a)\left(2xy - x^3y^2\right).$$

Первое слагаемое полученного выражения $-\left(2ax^2 + by^2\right)$ не положительно при любых значениях координат, причем $-\left(2ax^2 + by^2\right) = 0$ тогда и только тогда, когда обе координаты нулевые, то есть $x = y = 0$. А знак второго слагаемого не определен, то есть зависит от значений координат. Следовательно, надо подобрать константы a и b так, чтобы оно обнулилось. Пусть $b = 2a$, тогда $W = -\left(2ax^2 + by^2\right)$ и $V(x, y) = ax^2 + 2ay^2$. При любом положительном значении константы a функция $V(x, y)$ положительно определена, а функция W отрицательно определена. Следовательно, точка покоя данной системы асимптотически устойчива.

4.4. Устойчивость линейных систем

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$y' = A(x)y + b(x). \tag{4.7}$$

Соответствующая однородная система будет иметь вид

$$y' = A(x)y. \tag{4.8}$$

Очевидно, что система (4.8) имеет тривиальное решение и, в случае непрерывно дифференцируемых коэффициентов, это решение единственно.

Пусть матрица A постоянна, то есть системы (4.7) и (4.8) есть системы с постоянными коэффициентами. Тогда общее решение системы (4.8) может быть записано в виде

$$y = \sum_{l=1}^{n} C_l \alpha_l e^{\lambda_l x},$$

где $\lambda_l, l = 1,2,..., n$ – собственные числа, а $\alpha_l, l = 1,2,..., n$ – соответствующие им собственные векторы матрицы A. Соответственно, $y_i = \alpha_l e^{\lambda_l x}, i = 1,2,..., n,$ – фундаментальная система решений системы уравнений (4.8).

Исследуем устойчивость точки покоя системы (4.8). Имеем

$$\|y\| = \sum_{l=1}^{n} |C_l| \|\alpha_l\| \left|e^{\lambda_l x}\right| \le \sum_{l=1}^{n} |C_l| \|\alpha_l\| \left|e^{(\mathrm{Re}\lambda_l + iJm\lambda_l)x}\right| =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} |C_l| \|\alpha_l\| \left|e^{iJm\lambda_l x}\right| e^{\mathrm{Re}\lambda_l x} = \sum_{l=1}^{n} |C_l| \|\alpha_l\| e^{\mathrm{Re}\lambda_l x} \le Me^{\left(\max\limits_{1\le l\le n} \mathrm{Re}\lambda_l\right)x},$$

где $M = \sum_{l=1}^{n} |C_l| \|\alpha_l\|$. Таким образом, если действительные части $\mathrm{Re}\,\lambda_l, l = 1,2,..., n,$ собственных чисел $\lambda_l, l = 1,2,..., n$ матрицы A отрицательны, то $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\left(\max\limits_{1\le l\le n} \mathrm{Re}\lambda_l\right)x} = 0$. Поэтому точка покоя системы (4.8) асимптотически устойчива, и, следовательно, устойчива на полуинтервале $[0,+\infty)$.

4.5. Простейшие типы точек покоя систем двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1^1 x + a_2^1 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_1^2 x + a_2^2 y. \end{cases},$$

с невырожденной матрицей системы, то есть определитель $\det A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}$ матрицы системы отличен от нуля.

Как видно из предыдущего пункта, чтобы исследовать на устойчивость точку покоя данной системы, надо составить характеристическое уравнение для нахождения собственных чисел матрицы системы $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$ и найти его корни λ_1 и λ_2, то есть собственные числа матрицы A.

Возможны следующие случаи:

1) Собственные числа λ_1 и λ_2 вещественны и различны, тогда:

   а) если λ_1 и λ_2 отрицательны, то точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел);

   б) если λ_1 и λ_2 положительны, то точка покоя неустойчива (неустойчивый узел);

   в) если λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, то точка покоя неустойчива (седло);

2) Собственные числа λ_1 и λ_2 вещественны и кратны, тогда:

а) если $\lambda_1 = \lambda_2$ отрицательны, то точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел);

б) если $\lambda_1 = \lambda_2$ положительны, то точка покоя неустойчива (неустойчивый узел);

3) Собственные числа λ_1 и λ_2 комплексные, $\lambda_{1,2} = p \pm qi$, тогда:

а) если $p > 0$ и $q \neq 0$, то точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый фокус);

б) если $p < 0$ и $q \neq 0$, то точка покоя неустойчива (неустойчивый фокус);

в) если $p = 0$ и $q \neq 0$, то точка покоя устойчива (центр).

Пример 1. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0.$$

И находим его корни, $\lambda_1 = 3 - \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 3 + \sqrt{2}$. Так как $3 > \sqrt{2}$, то оба собственных числа матрицы системы положительны и, следовательно, точка покоя данной системы неустойчива и является неустойчивым узлом.

4.6. Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (3.1) в нормальной форме

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases}$$

или, что то же самое, в векторной форме $y' = f(x, y)$.

Пусть $y(x) \equiv 0$ – точка покоя системы (3.1). Предполагая, что функция $f(x, y)$ дифференцируема, линеаризуем её (см. [3]) в окрестности точки $y = (0,0,...,0)^T$, то есть представим в виде $f(x, y) = A(x)y + b(x, y)$, где $A(x)$ производная матрица функции $f(x, y)$ с элементами $a_j^i(x) = \dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}, i = 1,2,..., n, j = 1,2,...n$, $b(x, y)$ – бесконечно малая вектор-функция более высокого порядка малости, чем $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$. Тогда система дифференциальных уравнений (3.1) запишется в виде

$$y' = A(x)y + b(x, y). \tag{4.9}$$

Отбрасывая в системе (4.9) члены более высокого порядка малости, чем $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$, можем переписать её в форме

$$y' = A(x)y. \tag{4.10}$$

Система дифференциальных уравнений (4.10) называется системой первого приближения для системы дифференциальных уравнений (3.1). Иногда удаётся судить об устойчивости точки покоя системы (3.1) по устойчивости точки покоя для системы (4.10).

Пусть система дифференциальных уравнений (3.1) является автономной, то есть функции $f_i, i = 1,2,..., n$ не зависят от x. Тогда система первого приближения (4.10) есть система с постоянными коэффициентами. В этом случае справедлив следующий результат.

> **Теорема 4.4.** Если вещественные части всех собственных чисел матрицы A системы первого приближения автономной системы дифференциальных уравнений отрицательны, то точка покоя автономной системы асимптотически устойчива. Если хотя бы одно собственное число матрицы A системы первого приближения автономной системы дифференциальных уравнений имеет положительную вещественную часть, то точка покоя автономной системы неустойчива.

Доказательство этой теоремы опустим. Желающие могут ознакомиться с ним в [10, 13, 14].

Отметим, что если часть собственных чисел матрицы A системы первого приближения автономной системы дифференциальных уравнений имеет вещественную часть равную нулю, то исследовать на устойчивость автономную систему дифференциальных уравнений по системе первого приближения нельзя.

Пример 1. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 5y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y + \dfrac{x^3}{2}. \end{cases}$$

Исследуем точку покоя на устойчивость с помощью системы первого приближения. Составляем матрицу системы первого приближения. Она состоит из частных производных правых частей $f_1(x,y) = 2x + y - 5y^2$ и $f_2(x,y) = 3x + y + \dfrac{x^3}{2}$ уравнений исходной системы, посчитанных в точке покоя системы. Имеем:

$$\frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x}=2\,,\ \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y}=(1-10y)\big|_{(0,0)}=1\,,$$

$$\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x}=\left(3+\frac{3x}{2}\right)\Bigg|_{(0,0)}=3\,,\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y}=1\,.$$

Тогда матрица системы первого приближения имеет вид:

$$A(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-1=0\,.$$

Находя корни уравнения, получаем $\lambda_1=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$, $\lambda_2=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. Собственные числа матрицы системы первого приближения вещественны и различны. Так как $3<\sqrt{13}$, то $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$. Следовательно, точка покоя данной системы неустойчива и является седлом.

Пример 2. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-x^3,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x-y^3.\end{cases}$$

Исследуем точку покоя на устойчивость с помощью системы первого приближения. Составляем матрицу системы первого приближения. Она состоит из частных производных правых частей $f_1(x,y)=y-x^3$ и $f_2(x,y)=-x-y^3$ уравнений исходной системы, посчитанных в точке покоя системы. Имеем:

$$\frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x}=\left(-3x^2\right)\big|_{(0,0)}=0\,,\ \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y}=1,$$

$$\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x}=-1,\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y}=\left(-3y^2\right)\Big|_{(0,0)}=0\ .$$

Тогда матрица системы первого приближения имеет вид:

$$A(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0\,.$$

Находя корни уравнения, получаем $\lambda_{1,2}=\pm i$. Действительная часть собственных чисел нулевая, следовательно, исследовать точку покоя данной системы на устойчивость по первому приближению нельзя. Но, если взять функцию Ляпунова $V(x,y)=x^2+y^2$ и составить функцию:

$$W=V'_x\cdot f_1+V'_y\cdot f_2=2x\left(y-x^3\right)+2y\left(-x-y^3\right)=-2\left(x^4+y^4\right)\le 0\,,$$

причем, $W=-\left(2x^4+6y^4\right)=0$ тогда и только тогда, когда обе координаты нулевые, то есть $x=y=0$, то видим, что точка покоя данной системы асимптотически устойчива.

Пример 3. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+x^3,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y^3.\end{cases}$$

Исследуем точку покоя на устойчивость с помощью системы первого приближения. Составляем матрицу системы первого приближения. Она состоит из частных производных правых частей $f_1(x,y)=y+x^3$ и $f_2(x,y)=-x+y^3$ уравнений исходной системы, посчитанных в точке покоя системы. Имеем:

$$\frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x}=\left(3x^2\right)\Big|_{(0,0)}=0\,,\ \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y}=1,$$

$$\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} = \left(3y^2\right)\Big|_{(0,0)} = 0 .$$

Тогда матрица системы первого приближения имеет вид:

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 .$$

Находя корни уравнения, получаем $\lambda_{1,2} = \pm i$. Действительная часть собственных чисел нулевая, следовательно, исследовать точку покоя данной системы на устойчивость по первому приближению нельзя. Но, если взять функцию Ляпунова $V(x, y) = x^2 + y^2$ и составить функцию:

$$W = V_x' \cdot f_1 + V_y' \cdot f_2 = 2x\left(y + x^3\right) + 2y\left(-x + y^3\right) = 2\left(x^4 + y^4\right) \geq 0 ,$$

то видим, что точка покоя данной системы неустойчива.

5. Уравнения с частными производными первого порядка

Уравнение вида

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, u\right) = 0 \qquad (5.1)$$

называется дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка.

Если функция F – линейна относительно $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}$, то уравнение называется квазилинейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Если, кроме того, функция F – линейна относительно u, то уравнение называется линейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. В этих случаях уравнение записывается, соответственно, в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_k} = b(x_1, x_2, ..., x_n, u) \qquad (5.2)$$

в случае квазилинейного уравнения, и в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_k} = b(x_1, x_2, ..., x_n)u + c(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (5.3)$$

в случае линейного уравнения.

Функция u называется решением уравнения (5.1) (соответственно (5.2), (5.3)) если при подстановке её в это уравнение она обращает его в тождество.

Если $u(x)$ – решение дифференциального уравнения (5.1), то поверхность $u = u(x)$ называется интегральной поверхностью.

Займёмся уравнением (5.2). Предположим, что хотя бы один из коэффициентов $a_k(x_1, x_2, ..., x_n, u), k = 1,2,..., n$ отличен от нуля. Последнее требование эквивалентно условию $\sum_{k=1}^{n}(a_k(x))^2 \neq 0$.

Пусть $u = u(x)$ – решение уравнения (5.2), определённое в некоторой области $D \subseteq R^n$, $x = x(t)$ – кривая в D. Тогда $u(t) = u(x(t))$ – решение уравнения (5.2), определённое на этой кривой. Подберём кривую $x = x(t)$ так, чтобы она удовлетворяла системе уравнений

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t), u(t)),$$

или, что то же самое, в координатной форме

$$\frac{dx_k}{dt} = a_k(x(t), u(t)), k = 1,2,..., n$$

Далее, дифференцируя $u(t) = u(x(t))$ по t и учитывая, что $u(t) = u(x(t))$ – решение уравнения (2), получаем

$$\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cdot\frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}a_k(x(t), u(t)) = b(x(t), u(t)).$$

Таким образом, кривая $x = x(t)$ такая, что вектор-функция $(x(t), u(t))$ есть решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_k}{dt} = a_k(x(t), u(t)), k = 1,2,\dots,n, \\ \dfrac{du}{dt} = b(x(t), u(t)). \end{cases} \tag{5.4}$$

Определение. Система уравнений (5.4) называется характеристикой уравнения (5.2).

Если функции $a_k(x,u), b(x,u)$ дифференцируемы, то система уравнений (5.4) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности. Из предыдущих рассуждений следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 5.1 Если гладкая поверхность S, определённая уравнением $u = u(x)$ является интегральной поверхностью уравнения (5.2) и $x = x(t)$ – характеристика уравнения (5.2) проходящая через точку (x_0, u_0) поверхности S, то она полностью лежит на этой поверхности.

С другой стороны, имеет место и обратный результат.

Теорема 5.2 Если гладкая поверхность S, определённая уравнением $u = u(x)$ такова, что для всякой точки (x_0, u_0) принадлежащей поверхности S характеристика уравнения (5.2) проходящая через точку (x_0, u_0) касается S в этой точке, то S является интегральной поверхностью уравнения (5.2).

Таким образом, любая интегральная поверхность уравнения (5.2) состоит из характеристик.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Составляем систему уравнений характеристик в симметричной форме $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$. Первая интегрируемая комбинация видна сразу $dz = 0$ или $z = C_1$. Умножая числитель и знаменатель первой дроби на x, а второй дроби на y и складывая результаты, получаем $\frac{xdx + ydy}{0} = \frac{dx}{x}$. Поэтому вторая интегрируемая комбинация $xdx + ydy = 0$ или, умножая обе части на 2, $2xdx + 2ydy = 0$. Последнее соотношение можно записать как $d\left(x^2 + y^2\right) = 0$. Следовательно $x^2 + y^2 = C_2$ – второй первый интеграл. Легко проверить, что эти первые интегралы независимы.

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения будет иметь вид $F(x^2 + y^2, z) = 0$, где F – некоторая дифференцируемая функция.

6. Разностные уравнения

6.1 Понятие разностного уравнения

Для скалярной функции скалярного переменного производная определяется соотношением $y'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h}$. Поэтому для дифференцируемых функций, при достаточно малых h, ошибка от замены производной $y'(t)$ разностью $\dfrac{y(t+h) - y(t)}{h}$ будет также мала.

Подставляя в дифференциальное уравнение $y' = f(t, y)$ вместо производной $y'(t)$ разность $\dfrac{y(t+h) - y(t)}{h}$ имеем $\dfrac{y(t+h) - y(t)}{h} = f(t, y)$ или, что тоже самое, $y(t+h) = y(t) + hf(t, y)$. Полученное соотношение называется разностным уравнением первого порядка. Зная $y(t)$, можем последовательно найти $y(t+h)$, $y(t+2h)$, …, $y(t+kh)$. Обычно в разностных уравнениях берут $t = 0$, $h = 1$. Вводя обозначение $y_k = y(kh)$, приведённое выше разностное уравнение первого порядка, можем записать в виде $y_k = y_{k-1} + f(y_{k-1})$.

Расчетные формулы численного решения дифференциальных, в том числе и формула метода Эйлера, представляют собой разностные уравнения, к более подробному изложению которых мы и переходим.

Для упрощения изложения будем считать, что отрезок $[a, b]$ разбит на части равноотстоящими точками (равномерной сеткой). В общем случае, то есть при произвольном разбиении отрезка $[a,b]$, проделать приведённые ниже рассуждения не сложно, только формулы будут более громоздкими. Приблизить первую производную можно не только с помощью разности $\frac{y(t+h)-y(t)}{h}$, а, например, симметричной конечной разностью $\frac{y(t+h)-y(t-h)}{2h}$. Заменяя в дифференциальном уравнении $y' = f(t,y)$ первую производную этой разностью получаем $\frac{y(t+h)-y(t-h)}{2h} = f(t,y)$ или, что тоже самое, $y(t+h) = y(t-h) + 2hf(t,y)$, которое представляет собой разностное уравнение второго порядка. В общем виде, приведённое выше разностное уравнение второго порядка, можем записать в виде $y_{k+1} = y_{k-1} + f(y_{k-1})$. Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(t,y,y')$. По определению второй производной можем записать

$$y''(t) = \lim_{h\to 0} \frac{y'(t+h)-y'(t)}{h}.$$

Тогда $\quad y''(t) \approx \frac{y'(t+h)-y'(t)}{h} \approx \frac{y(t+2h)-2y(t+h)+y(t)}{h^2}$

Поэтому вторую производную заменяют конечной разностью $\frac{y(t+2h)-2y(t+h)+y(t)}{h^2}$ и в приведённых выше обозначениях дифференциальное уравнение $y'' = f(t,y,y')$ перепишется в виде $y_{k+2} = 2y_{k+1} - y_k + f(y_k, y_{k+1})$. Таким образом, разностное уравнение первого порядка может быть записано в виде $y_k = \varphi(y_{k-1})$, а уравнение второго порядка в виде $y_{k+2} = \varphi(y_k, y_{k+1})$. Ясно, что для получения конкретного решения разностного уравнения первого порядка нужно знать начальное значение y_0, а для получения конкретного решения уравнения второго порядка необходимо знание двух значений y_0 и y_1. Прослеживается связь между разностными уравнениями и задачей Коши для дифференциальных уравнений. В общем случае разностное уравнение порядка n может быть записано в виде $F(y_{k+n}, y_{k+n-1}, \ldots, y_k) = 0$. Если удаётся разрешить это уравнение относительно y_{k+n}, то разностное уравнение записывается в виде $y_{k+n} = \varphi(y_{k+n-1}, \ldots, y_k)$.

6.2 Разностные уравнения первого порядка

Самыми простыми разностными уравнениями являются линейные разностные уравнения первого порядка. Самый общий вид линейного разностного уравнения первого порядка следующий

$$a_k y_{k+1} + b_k y_k = f_k. \tag{6.1}$$

Соответствующее однородное уравнение записывается в виде

$$a_k y_{k+1} + b_k y_k = 0. \tag{6.2}$$

Из (6.2) имеем $y_{k+1} = -\dfrac{b_k}{a_k} y_k$, откуда, при $k = 1$, получаем $y_1 = -\dfrac{b_1}{a_1} y_0$. Далее,

$$y_2 = -\frac{b_2}{a_2} y_1 = \left(-\frac{b_1}{a_1}\right)\left(-\frac{b_2}{a_2}\right) y_0.$$

Продолжая дальше, окончательно имеем

$$y_{k+1} = (-1)^{k+1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{b_2}{a_2}\right)\ldots\left(\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right)y_0. \qquad (6.3)$$

Любое решение уравнения (6.2) получается из (6.3) заданием начального условия y_0. Таким образом, (6.3) есть общее решение уравнения (6.2). Обычно берут $y_0 = 1$.

Если (6.1), а следовательно и (6.2) есть уравнения с постоянными коэффициентами, то есть имеют вид

$$ay_{k+1} + by_k = f_k,$$
$$ay_{k+1} + by_k = 0,$$

то решение (6.3) принимает вид

$$y_{k+1} = (-1)^{k+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} y_0.$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (6.1). Отметим, что для линейных разностных уравнений имеется полный аналог теоремы о наложении решений и её следствий. Отметим некоторые из них.

1. Если y_k^1 и y_k^2 два решения уравнения (6.1), то их разность есть решение уравнения (6.2).

2. Любое решение y_k уравнения (6.1) есть сумма какого-нибудь частного решения y_k^1 этого уравнения и общего решения уравнения (6.2), то есть имеет вид $y_k = y_k^1 + \alpha z_k$, где α - константа, а z_k - решение уравнения (6.2) при $y_0 = 1$.

Пример 1. Идея задачи взята из [19]. Банк принимает вклады под p процентов годовых. Начисление процентов происходит ежемесячно. Вычислить, сколько будет денег на вкладе через год, если было положено A рублей.

Решение. Начальное условие у нас $y_0 = A$. Через месяц на счёте будет $y_1 = \left(1 + \dfrac{p}{100 \cdot 12}\right)A$. Через два месяца будет $y_2 = \left(1 + \dfrac{p}{100 \cdot 12}\right)y_1 = \left(1 + \dfrac{p}{100 \cdot 12}\right)\left(1 + \dfrac{p}{100 \cdot 12}\right)A =$ $= \left(1 + \dfrac{p}{100 \cdot 12}\right)^2 A$. Через год будет, соответственно, $y_{12} = \left(1 + \dfrac{p}{100 \cdot 12}\right)^{12} A$. Подставить конкретные числа предоставляется читателю.

Пример 2. Банк выдаёт кредит под p процентов годовых. Погашение происходит ежемесячно. Вычислить, сколько будет выплачено денег в конце срока погашения, если было выдано A рублей.

Задачу предлагается решить самостоятельно.

6.3 Разностные уравнения второго порядка

Займёмся теперь линейными разностными уравнениями второго порядка. Самый общий вид линейного разностного уравнения второго порядка следующий

$$a_k y_{k+2} + b_k y_{k+1} + c_k y_k = f_k. \tag{6.4}$$

Соответствующее однородное уравнение записывается в виде

$$a_k y_{k+2} + b_k y_{k+1} + c_k y_k = 0. \tag{6.5}$$

Для линейных разностных уравнений можно развить теорию аналогичную теории для линейных дифференциальных уравнений.

Перейдём к рассмотрению частного случая линейных разностных уравнений – линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. В этом случае уравнение второго порядка имеет вид

$$ay_{k+2} + by_{k+1} + cy_k = f_k. \tag{6.6}$$

Соответствующее однородное уравнение записывается в виде

$$ay_{k+2} + by_{k+1} + cy_k = 0. \tag{6.7}$$

По аналогии с уравнениями первого порядка с постоянными коэффициентами будем искать решение уравнения (6.7) в виде $y_k = \alpha q^k$. Подставляя это решение в (6.7), получаем $a\alpha q^{k+2} + b\alpha q^{k+1} + c\alpha q^k = 0$, или, сокращая на αq^k, получаем $aq^2 + bq + c = 0$. Таким образом, мы доказали, что для того чтобы $y_k = \alpha q^k$ было решением уравнения (6.7), нужно (необходимо), чтобы q было решением алгебраического (в данном случае квадратного) уравнения $aq^2 + bq + c = 0$. Рассмотрим возникающие здесь возможности.

1. Оба корня данного квадратного уравнения действительны и различны. Тогда мы имеем два линейно независимых решения $y_k^1 = (q_1)^k$ и $y_k^2 = (q_2)^k$ уравнения (6.7). Тогда общее решение уравнения (6.7) будет иметь вид $y_k = \alpha_1 (q_1)^k + \alpha_2 (q_2)^k$.

2. Корни одинаковые, в этом случае говорят, что квадратное уравнение имеет корень кратности 2. Тогда, по аналогии с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка можно доказать, что решения $y_k^1 = (q_1)^k$ и $y_k^2 = k(q_1)^k$ линейно независимы и общее решение уравнения (6.7) имеет вид $y_k = \alpha_1 (q_1)^k + \alpha_2 k (q_1)^k$.

3. Корни комплексные. Если коэффициенты уравнения действительны, то тогда эти корни являются комплексно сопряжёнными, то есть имеют вид $q_1 = s + ti$, $q_2 = s - ti$. Соответственно решения $y_k^1 = (q_1)^k$ и $y_k^2 = (q_2)^k$ уравнения (6.7) будут линейно независимы. Записав $q_1 = s + ti$, $q_2 = s - ti$ в тригонометрической форме, то есть в виде $q_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $q_2 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, где r - модуль, а φ - аргумент числа q_1, получаем $y_k^1 = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$ и $y_k^2 = r^k(\cos k\varphi - i\sin k\varphi)$. По теореме о наложении решений можем утверждать, что линейные комбинации $\dfrac{y_k^1 + y_k^2}{2} = r^k \cos k\varphi$ и $\dfrac{y_k^1 - y_k^2}{2i} = r^k \sin k\varphi$ тоже являются решениями уравнения (6.7), причём линейно независимыми. Тогда общее решение уравнения (6.7) может быть записано в виде $y_k = \alpha_1 r^k \cos k\varphi + \alpha_2 r^k \sin k\varphi$.

Пример 3. Решить уравнение $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$.

Решениями характеристического уравнения $q^2 - 5q + 6 = 0$ являются $q_1 = 2$, $q_2 = 3$. Поэтому имеем два линейно независимых решения $y_k^1 = 2^k$ и $y_k^2 = 3^k$ нашего уравнения $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$. Тогда общее решение данного уравнения имеет вид $y_k = \alpha_1 2^k + \alpha_2 3^k$.

Пример 4. Решить уравнение $y_{k+2} - 10y_{k+1} + 25y_k = 0$.

Решением характеристического уравнения $q^2 - 10q + 25 = 0$ является $q_1 = 5$ кратности 2. Следовательно двумя линейно независимыми решениями уравнения $y_{k+2} - 10y_{k+1} + 25y_k = 0$ будут $y_k^1 = 5^k$ и $y_k^2 = k \cdot 5^k$. Тогда общее решение данного уравнения имеет вид $y_k = \alpha_1 5^k + \alpha_2 k \cdot 5^k$.

Пример 5. Решить уравнение $y_{k+2}+4y_{k+1}+8y_k=0$.

Решениями характеристического уравнения $q^2+4q+8=0$ являются комплексно сопряжённые числа $q_1=-2+2i$, $q_2=-2-2i$. Модули комплексных чисел $q_1=-2+2i$ и $q_2=-2-2i$ равен $r=2\sqrt{2}$, а аргумент - $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$. Тогда два линейно независимых решения уравнения $y_{k+2}+4y_{k+1}+8y_k=0$ равны $y_k^1=\left(2\sqrt{2}\right)^k\cos\left(\dfrac{3\pi k}{4}\right)$ и $y_k^2=\left(2\sqrt{2}\right)^k\sin\left(\dfrac{3\pi k}{4}\right)$, а общее решение данного уравнения имеет вид $y_k=\alpha_1\left(2\sqrt{2}\right)^k\cos\left(\dfrac{3\pi k}{4}\right)+\alpha_2\left(2\sqrt{2}\right)^k\sin\left(\dfrac{3\pi k}{4}\right)$.

Аналогичная теория может быть построена и для линейных разностных уравнений порядка n. Самый общий вид линейного разностного уравнения порядка n следующий

$$a_k^n y_{k+n}+a_k^{n-1}y_{k+n-1}+\ldots+a_k^0 y_k=f_k. \qquad (6.8)$$

Соответствующее однородное уравнение записывается в виде

$$a_k^n y_{k+n}+a_k^{n-1}y_{k+n-1}+\ldots+a_k^0 y_k=0. \qquad (6.9)$$

Для частного случая линейных разностных уравнений – линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами можем записать

$$a^n y_{k+n}+a^{n-1}y_{k+n-1}+\ldots+a^0 y_k=f_k. \qquad (6.10)$$

Соответствующее однородное уравнение записывается в виде

$$a^n y_{k+n}+a^{n-1}y_{k+n-1}+\ldots+a^0 y_k=0. \qquad (6.11)$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РЯДОВ

7. Представление функций рядами

7.1. Числовые ряды

Всюду, где введено понятие суммы двух объектов мы можем рассматривать суммы конечного числа элементов. Если операция сложения ассоциативна, то скобки можно опустить, и в таком случае у нас однозначно определено выражение $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Вызывает интерес распространение понятия суммы на бесконечное число слагаемых и выяснения условий сохранения свойств конечных сумм.

Назовём выражение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ рядом, a_n - общим членом ряда. В качестве слагаемых чаще всего рассматривают числа, и тогда ряд называется числовым, функции и тогда ряд называется функциональным. Можно рассматривать так же ряды из векторов, но так как операции сложения векторов сводятся к операциям сложения их координат, принципиально нового не получается. Вначале будем рассматривать числовые ряды.

Вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ рассмотрим последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$ которая называется последовательностью частичных сумм ряда и составлена из суммы первых n членов ряда.

Определение. Если существует и конечен предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$ ряда, то будем говорить, что ряд сходится и называется сходящимся, если же этот предел не существует или равен ∞, то будем говорить, что ряд расходится и называется расходящимся.

Пример 1. Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{6}{n^2-9}$.

Так как $a_n=\frac{6}{n^2-9}=\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n+3}$, то

$$S_n=\sum_{k=4}^{n}\frac{6}{k^2-9}=1-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}-\frac{1}{11}+$$

$$+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n+3}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=$$

$$=\frac{49}{20}-\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}.$$

Находя предел частичных сумм, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{49}{20}$. Следовательно, ряд сходится и его сумма равна $\frac{49}{20}$.

Пример 2. Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4^{n+1}}$.

Это сумма членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{5}{16}$ и знаменателем $\frac{5}{4}$. Частичная сумма ряда равна

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{5^k}{4^{k+1}}=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\left(\frac{5}{16}-\frac{5}{16}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^n\right):\left(1-\frac{5}{4}\right)=$$

$$=-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^n.$$

Переходя к пределу, получаем $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Следовательно, ряд расходится. Это можно было выяснить, заметив что не выполнен необходимый признак сходимости, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^n = \infty .$$

Пример 3. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + i4^{n+1}}{5^{n+1}}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + i4^{n+1}}{5^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n + i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} .$$

Первое слагаемое есть сумма членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{3}{5}$ и знаменателем $\frac{3}{5}$. Так как знаменатель прогрессии меньше 1, то первое слагаемое есть ряд сходящийся и его сумма равна $\frac{3}{2}$. И второе слагаемое есть сумма членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{16}{25}$ и знаменателем $\frac{4}{5}$. Так как знаменатель прогрессии меньше 1, то и второе слагаемое также есть ряд сходящийся и его сумма равна $\frac{16}{5}$. Подводя итог заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + i4^{n+1}}{5^{n+1}}$ сходится и его сумма равна $\frac{3}{10} + \frac{16}{5} i$. Более того ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + i4^{n+1}}{5^{n+1}}$ сходится абсолютно, так как ряды из действительных и мнимых частей сходящиеся знакоположительные и поэтому абсолютно сходящиеся.

Пример 4. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n+3}{n+6}}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2n+3}{n+6}}=\sqrt{2}\neq 0$, то в силу невыполнения необходимого признак сходимости ряд расходится.

Отметим аналог свойства несобственных интегралов, являющегося весьма полезным при изучении рядов.

Теорема. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=p}^{\infty}a_n, p\geq 1$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Говоря другими словами, отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.

Доказательство. При $p=1$ это один и тот же ряд и доказывать нечего. При $p>1$ обозначим через S_n частичную сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, а через σ_n сумму $\sigma_n=\sum\limits_{k=p}^{n}a_k=a_p+a_{p+1}+\ldots+a_n$. Тогда $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{p-1}a_k+\sum\limits_{k=p}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{p-1}a_k+\sigma_n$. Так как $\sum\limits_{k=1}^{p-1}a_k$ конечное число, то существование предела слева влечёт существование предела справа и наоборот. Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда членами ряда являются комплексные числа. Тогда

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{Re}a_k+i\operatorname{Im}a_k\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}a_k+i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Im}a_k=\operatorname{Re}S_n+i\operatorname{Im}S_n.$$

Переходя к пределу при n стремящемся к ∞, получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{Re}a_n+i\operatorname{Im}a_n\right)$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\,a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Im}\,a_n$ составленные из действительных и мнимых частей членов ряда и при этом

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\,a_n+i\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Im}\,a_n$$

Вспоминая определение предела последовательности на языке неравенств, можем сформулировать определение сходимости ряда с помощью неравенств.

Определение. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится и называется сходящимся, если существует и конечен предел $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ частичных сумм ряда, то есть если для всякого $\varepsilon>0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n>N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|S-S_n|<\varepsilon$, или, что тоже самое, $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\right|<\varepsilon$. Выражение $R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$ называется остатком ряда.

Проводя аналогии с пределом последовательности, можем сформулировать критерий Коши сходимости ряда, который выглядит следующим образом.

Теорема (критерий Коши сходимости ряда). Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon>0$ существовал номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n>N(\varepsilon)$ и $p\geq 1$ выполнялось неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$.

Следствие (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд сходится, то предел общего члена ряда существует и равен нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Получается из критерия Коши при $p = 1$.

Необходимый признак сходимости ряда является полезным, когда нужно доказать расходимость ряда, так как он эквивалентен следующему результату.

Следствие (необходимый признак сходимости ряда в альтернативной форме). Если предел общего члена ряда не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Следует из того, что утверждение «предложение A влечёт выполнение предложения B» эквивалентно утверждению «отрицание предложения B влечёт выполнение отрицания предложения A» ($(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, через $\neg A$ обозначено отрицание утверждения A).

Утверждение обратное необходимому признаку сходимости неверно, то есть из равенства нулю предела общего члена ряда вовсе не следует его сходимость. Для доказательства достаточно привести пример ряда, общий член которого стремится к нулю при n стремящемся к ∞, а ряд расходится. Классическим примером является гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$. Общий член этого ряда $\frac{1}{n}$ стремится к нулю при n стремящемся к ∞. Докажем, что этот ряд расходится. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Заменим в этой сумме все слагаемые на последнее $\frac{1}{2n}$. Так как оно самое маленькое, то сумма от этого только уменьшится, поэтому можно записать $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}>\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$. Далее, $S_1=1$, $S_2=1+\frac{1}{2}$,

$S_4=S_2+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>S_2+\frac{1}{2}=2$, $\quad S_8=S_4+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>S_4+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$. Таким образом, последовательность $S_1,S_2,S_4,...,S_{2^k},...$ является возрастающей и каждый последующий член этой последовательности больше предыдущего на число большее чем $\frac{1}{2}$ и поэтому предел этой последовательности равен ∞. Таким образом мы доказали, что гармонический ряд расходится.

Риман доказал, что не для всех рядов можно переставлять слагаемые. Выяснение вопроса о том, когда можно переставлять члены ряда приводит нас к необходимости введения нового понятия.

Определение. Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей, то есть сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Теорема. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Если ряд сходится абсолютно, то выполнен критерий Коши для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то есть для всякого $\varepsilon>0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n>N(\varepsilon)$ и $p\geq 1$ выполняется неравенство $\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|<\varepsilon$ (внешний знак модуля опущен, так как слагаемы положительны). Так как по свойствам модуля $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|$, то критерий Коши выполнен и для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, поэтому исходный ряд сходится.

Обратное доказанному утверждению не верно. То есть имеются ряды сходящиеся и не сходящиеся абсолютно. Об этом поговорим несколько позднее.

Определение. Ряд называют условно сходящимся, если он сходится и не сходится абсолютно.

Отметим также, что для знакоположительных рядов с действительными членами понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Для рядов с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n\right)$$

абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ эквивалентна одновременной абсолютной сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ соответственно из действительных и мнимых частей общего члена ряда.

Это следует из цепочки неравенств $|\operatorname{Re} a| \le |a|, |\operatorname{Im} a| \le |a|$, $|a| \le |\operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} a|$ и теоремы сравнения, доказываемой ниже.

Достаточные признаки сходимости могут быть сформулированы как в терминах абсолютной сходимости, так и в терминах сходимости знакоположительных рядов с действительными членами.

Признак сравнения. Этот признак имеет непредельную (конечную) и предельную формы.

Непредельная форма признака сравнения. Пусть имеется два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (7.1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (7.2). Если, начиная с некоторого номера выполняются неравенства $|a_n| \le |b_n|$, то из абсолютной сходимости ряда (7.2) следует абсолютная сходимость ряда (7.1) и из абсолютной расходимости ряда (7.1) следует абсолютная расходимость ряда (7.2).

Доказательство. Не умаляя общности можно считать, что неравенство $|a_n| \le |b_n|$ выполняется, начиная с $n=1$. Действительно, отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, поэтому отбросив члены, для которых это неравенство не выполнено и перенумеровав, получаем для новых двух рядов, что соответствующее неравенство выполняется с номера $n=1$. Пусть ряд (7.2) абсолютно сходится, то есть сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$. Обозначим через S_n частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, а через σ_n частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$. В силу выполнения неравенства $|a_n| \le |b_n|$ имеем $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}|a_k| \le \sum\limits_{k=1}^{n}|b_k| = \sigma_n \le \sigma$, где через σ обозначена сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$. Таким образом, последовательность S_n частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ является возрастающей ограниченной сверху последовательностью и поэтому имеет предел. То есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится. С другой стороны, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то, в силу положительности его членов, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ и так как $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}|a_k| \le \sum\limits_{k=1}^{n}|b_k| = \sigma_n$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \infty$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ расходится. Теорема доказана.

Пример 5. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\cdot 5^n}$.

При любом $n \geq 1$ выполнено неравенство $\frac{1}{(3n+1)\cdot 5^n} \leq \frac{1}{5^n}$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ сходится, то сходится и исходный ряд.

Предельная форма признака сравнения. Пусть имеется два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (7.1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (7.2). Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = K$, $K \neq 0$, $K \neq \infty$, то либо оба ряда абсолютно сходятся либо абсолютно расходятся.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = K$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\left|\left|\frac{a_n}{b_n}\right| - K\right| < \varepsilon$, или $-\varepsilon < \left|\frac{a_n}{b_n}\right| - K < \varepsilon$, следовательно $K - \varepsilon < \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < K + \varepsilon$. Поэтому

$$(K-\varepsilon)|b_n| < |a_n| < (K+\varepsilon)|b_n| \qquad (7.3).$$

Дальнейшее следует из теоремы сравнения в непредельной (конечной) форме. Действительно, если ряд (7.2) абсолютно сходится, то используя правую часть $|a_n| < (K+\varepsilon)|b_n|$ неравенства (7.3), заключаем, что и ряд (7.1) абсолютно сходится. Далее, если абсолютно сходится ряд (7.1), то используя левую часть $(K-\varepsilon)|b_n| < |a_n|$ неравенства (7.3) заключаем, что и ряд (7.2) абсолютно сходится. Аналогично, если ряд (7.2) абсолютно не сходится, то используя левую часть $(K-\varepsilon)|b_n| < |a_n|$ неравенства (7.3), заключаем, что и ряд (7.1) не является абсолютно сходящимся. Далее, если ряд (7.1) абсолютно не сходится то используя правую часть $|a_n| < (K+\varepsilon)|b_n|$ неравенства (7.3) заключаем, что и ряд (7.2) абсолютно не сходится. Теорема доказана.

Пример 6. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{5n^7-2n^4}}$.

Находим порядок малости общего члена $\frac{1}{\sqrt[5]{5n^7-2n^4}}$ ряда относительно $\frac{1}{n}$. Имеем

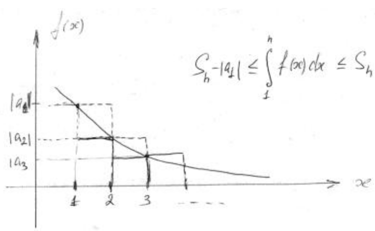
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{5n^7-2n^4}}:\frac{1}{n^\alpha}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{\sqrt[5]{5n^7-2n^4}}=\begin{cases}0, \text{если } \alpha<\frac{7}{5};\\ \frac{1}{\sqrt[5]{5}}, \text{если } \alpha=\frac{7}{5};\\ \infty, \text{если } \alpha>\frac{7}{5}.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости $\frac{1}{\sqrt[5]{5n^7-2n^4}}$ относительно $\frac{1}{n}$ равен $\frac{7}{5}$, поэтому ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{5n^7-2n^4}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^7}}$ в смысле сходимости ведут себя одинаково, и так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^7}}$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{5n^7-2n^4}}$.

Отметим, что также как и в несобственных интегралах 1-го рода удобно в качестве эталонного ряда применять обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ который при $\alpha \le 1$ расходится, а при $\alpha > 1$ сходится.

Интегральный признак (Коши). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ удаётся подобрать монотонную действительнозначную функцию f действительного аргумента так, что $f(n) = |a_n|$. Тогда из сходимости интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а их расходимости интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$ следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не является абсолютно сходящимся.

Доказательство. Обозначим через S_n частичную сум-



му ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Так как f монотонная и $f(x) \ge 0$, то имеет место оценка $S_n - |a_1| \le \int_1^n f(x)dx \le S_n$. Пусть интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда из левой части $S_n - |a_1| \le \int_1^n f(x)dx$ полученной оценки следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то есть из сходимости интеграла следует абсолютная сходимость исходного ряда. Если исходный ряд сходится абсолютно, то есть сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то из правой части $\int_1^n f(x)dx \le S_n$ оценки получаем сходимость интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$. Аналогично, если интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то из правой части $\int_1^n f(x)dx \le S_n$ полученной оценки следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то есть из расходимости интеграла следует, что исходный ряд не сходится абсолютно. Если исходный ряд не сходится абсолютно, то есть не сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то из левой части $S_n - |a_1| \le \int_1^n f(x)dx$ оценки получаем расходимость интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$. Теорема доказана.

Пример 7. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+3)}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{(x+3)\ln(x+3)}$. Для интеграла $\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)}$ имеем $\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)} = \lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{d(\ln(x+3))}{\ln(x+3)} =$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(\ln(\ln(x+3))\right)\Big|_1^A = \lim_{A\to\infty}\left(\ln(\ln(A+3)) - \ln(\ln 4)\right) = \infty .$$

Интеграл расходится, поэтому и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$ расходится. А так как при любом $n\geq 1$ выполнено неравенство $\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}<\frac{1}{n\ln(n+3)}$, то расходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+3)}$.

Пример 8. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+25}$.

По признаку сравнения ряд сходится так как наш ряд в смысле сходимости ведёт себя так же, как и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Докажем теперь сходимость ряда с помощью интегрального признака сходимости. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x^2+25}$. Для интеграла $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+25}$ имеем

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+25}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{x^2+25}=\frac{1}{5}\lim_{A\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{5}\right)\Bigg|_1^A=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{A\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{A}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right)=\frac{\pi}{10}-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{1}{5}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\frac{\pi}{10}-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. Поэтому исходный ряд тоже сходится.

Признак Даламбера в непредельной форме. Если начиная с некоторого номера $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge q > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Если $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$, то $|a_{n+1}| \le q|a_n|$, $|a_n| \le q|a_{n-1}|$, …, $|a_2| \le q|a_1|$. Соединяя вместе, получаем

$$|a_{n+1}| \le q|a_n| \le q^2|a_{n-1}| \le ... \le q^n|a_1|.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}|a_1|$ есть сумма членов геометрической прогрессии с первым членом $|a_1|$ и знаменателем $0 \le q < 1$, следовательно, сходится. Поэтому по признаку сравнения исходный ряд сходится абсолютно.

Если $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge q > 1$, то $|a_{n+1}| > |a_n|$ и поэтому $\lim_{n\to\infty}|a_n| \ne 0$ и из-за нарушения необходимого признака сходимости ряд расходится.

Признак Даламбера в предельной форме. Если $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, то при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, при $q > 1$ ряд расходится (при $q > 1$ $\lim_{n\to\infty}|a_n| \ne 0$), при $q = 1$ признак Даламбера ответа не даёт, то есть имеются как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $q = 1$.

Доказательство. Так как $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, то то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$

выполнено неравенство $\left|\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|-q\right|<\varepsilon$, или $-\varepsilon<\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|-q<\varepsilon$, следовательно $q-\varepsilon<\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|<q+\varepsilon$. Если $q<1$, то можем взять $\varepsilon>0$ таким, чтобы $q+\varepsilon$ было меньше 1. Тогда по признаку Даламбера в непредельной (конечной) форме ряд абсолютно сходится. Если $q>1$, то можем взять $\varepsilon>0$ таким, чтобы $q-\varepsilon$ было больше 1. Тогда по признаку Даламбера в непредельной (конечной) форме ряд расходится.

Пример 9. Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{(n+4)^n}$.

Применяя признак Даламбера, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)!}{(n+5)^{n+1}}:\frac{(n+1)!}{(n+4)^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)!(n+4)^n}{(n+5)^{n+1}(n+1)!}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)(n+4)^n}{(n+5)^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)}{(n+5)}\cdot\left(\frac{n+4}{n+5}\right)^n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{(n+5)}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+5}\right)^n=1\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+5}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+5}\right)^n=\frac{1}{e}=e^{-1}.$$

Так как $e^{-1}<1$ то ряд сходится.

Радикальный признак Коши в непредельной форме. Если начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{|a_n|}\le q<1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ абсолютно сходится, если $\sqrt[n]{|a_n|}\ge q>1$, то ряд расходится.

Доказательство. Если $\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1$, то $|a_n| \le q^n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ есть сумма членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем $0 \le q < 1$, следовательно, сходится. Поэтому по признаку сравнения исходный ряд сходится абсолютно. Если $\sqrt[n]{|a_n|} \ge q > 1$, то $|a_n| \ge q^n$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \ne 0$ и из-за нарушения необходимого признака сходимости ряд расходится.

Радикальный признак Коши в предельной форме. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, то при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, при $q > 1$ ряд расходится (при $q > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \ne 0$), при $q = 1$ признак Коши ответа не даёт, то есть имеются как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $q = 1$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\left|\sqrt[n]{|a_n|} - q\right| < \varepsilon$, или $-\varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|} - q < \varepsilon$, следовательно $q - \varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|} < q + \varepsilon$. Если $q < 1$, то можем взять $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $q + \varepsilon$ было меньше 1. Тогда по радикальному признаку Коши в непредельной (конечной) форме ряд абсолютно сходится. Если $q > 1$, то можем взять $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $q - \varepsilon$ было больше 1. Тогда по радикальному признаку Коши в непредельной (конечной) форме ряд расходится.

Пример 10. Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5 - i}{8} \right)^n$.

Применяя радикальный признак Коши, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{5-i}{8}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{5-i}{8}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5-i}{8}\right|=\left|\frac{5-i}{8}\right|=\frac{\sqrt{26}}{8}.$$

Так как $\frac{\sqrt{26}}{3}<1$, то ряд сходится абсолютно.

Признак Дирихле. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ с произвольными членами. Пусть, далее, последовательность $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ограничена, а числовая последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к нулю монотонно, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ сходится.

Следствием признака Дирихле является следующий признак.

Признак Лейбница. Пусть дан знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $a_n\ge 0$. Если начиная с некоторого номера $a_n\ge a_{n+1}$ и $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, то ряд сходится. При этом модуль остатка не превосходит модуля первого отбрасываемого члена и по знаку совпадает с ним.

Доказательство. Рассмотрим чётные и нечётные частичные суммы

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}a_k=a_1-a_2+\ldots+a_{2n-1}-a_{2n}$$

и

$$S_{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}a_k=a_1-a_2+\ldots+a_{2n-1}-a_{2n}+a_{2n+1}.$$

Так как $S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}$ и $a_{2n+1}\ge 0$, то $S_{2n}\le S_{2n+1}$. Далее, в силу монотонности стремления к нулю общего члена ряда

$a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$ и поэтому $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$. Следовательно S_{2n} возрастающая последовательность.

$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq S_{2n-1}$ следовательно S_{2n+1} убывающая последовательность, следовательно $S_{2n+1} \leq S_1 = a_1$.

Так как $S_{2n} \leq S_{2n+1}$, $S_{2n} \leq a_1$, то следовательно, S_{2n} возрастающая, ограниченная сверху последовательность, поэтому она имеет предел. Обозначим его S. Так как $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ и $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$, то $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$.Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится. Рассмотрим остаток ряда. Имеем

$$R_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} - \ldots =$$
$$= a_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) - \ldots .$$

В силу монотонности $a_{2k} - a_{2k+1} \geq 0$ для любого $k = 1,2,\ldots$. Поэтому, так как мы вычитаем не отрицательные числа, R_{2n} положительно и $R_{2n} \leq a_{2n+1}$. Аналогично,

$$R_{2n+1} = \sum_{k=2n+2}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = -a_{2n+2} + a_{2n+3} - \ldots =$$
$$= -(a_{2n+2} - (a_{2n+3} - a_{2n+4}) - \ldots .$$

Из последнего заключаем, что R_{2n+1} отрицательно и $|R_{2n+1}| \leq a_{2n+2}$. Теорема доказана.

Пример 11. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} tg\,\frac{\pi}{3n}$.

Ряд из модулей имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{\pi}{3n}$. Исследуя его с помощью предельного признака сравнения и находя порядок малости относительно $\frac{1}{n}$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(tg\frac{\pi}{3n}:\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(tg\frac{\pi}{3n}:\frac{\pi}{3n}\right)\left(\frac{\pi}{3n}:\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{3n}:\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n^{\alpha}}{3n}=\begin{cases}0,\text{если }\alpha<1;\\ \frac{\pi}{3},\text{если }\alpha=1;\\ \infty,\text{если }\alpha>1.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости относительно $\frac{1}{n}$ равен 1 и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{3n}$ расходится, а, следовательно, и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}tg\frac{\pi}{3n}$ не является абсолютно сходящимся. Далее, так как $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}tg\frac{\pi}{3n}\right|=\lim_{n\to\infty}tg\frac{\pi}{3n}=0$ и стремление к нулю монотонно потому что $tg\frac{\pi}{3n}>tg\frac{\pi}{3(n+1)}$, то по признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}tg\frac{\pi}{3n}$ сходится и так как он не сходится абсолютно, то является условно сходящимся.

Пример 12. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}tg^2\frac{\pi}{3n}$.

Ряд из модулей имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}tg^2\frac{\pi}{3n}$. Применяя предельный признак сравнения и находя порядок малости относительно $\frac{1}{n}$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(tg^2\frac{\pi}{3n}:\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(tg^2\frac{\pi}{3n}:\left(\frac{\pi}{3n}\right)^2\right)\left(\left(\frac{\pi}{3n}\right)^2:\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi^2}{9n^2}:\frac{1}{n^\alpha}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2 n^\alpha}{9n^2}=\begin{cases}0,\text{если } \alpha<2;\\ \dfrac{\pi^2}{9},\text{если } \alpha=2;\\ \infty,\text{если } \alpha>2.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости относительно $\frac{1}{n}$ равен 2 и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} tg^2\frac{\pi}{3n}$ сходится, а следовательно и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}tg^2\frac{\pi}{3n}$ сходится абсолютно.

Пример 13. Выяснить сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n}.$$

Предел модуля общего члена ряда равен

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1+2}{2n+1}\right)^{2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{2n}=\frac{1}{e^2}.$$

Поэтому ряд расходится.

7.2. Функциональные ряды

Выражение $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ называется функциональным рядом, $u_n(z)$ - общим членом функционального ряда. Будем обозначать через $S_n(z)=\sum_{k=1}^{n}u_k(z)$ - частичную сумму ряда, через $S(z)$ - сумму ряда.

Определение. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится к $S(z)$ в области D, если $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ для всякого z из D.

С другой стороны, при каждом фиксированном z функциональный ряд является числовым. Будем говорить, что ряд сходится в точке z из D, если сходится соответствующий числовой ряд.

Множество тех z, в которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится, назовём областью сходимости функционального ряда.

Множество тех z, в которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ абсолютно сходится, назовём областью абсолютной сходимости функционального ряда. Обычно искать область абсолютной сходимости проще.

Так как при каждом фиксированном z функциональный ряд является числовым, то для исследования сходимости функциональных рядов применяются признаки сходимости числовых рядов.

Пример 1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{z}\right)^n$.

Найдём область абсолютной сходимости ряда. Используя радикальный признак Коши, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{7}{z}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{7}{z}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{|z|} = \frac{7}{|z|}.$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно при $\frac{7}{|z|} < 1$ и расходится при $\frac{7}{|z|} > 1$, или, что тоже самое, сходится при $|z| > 7$ и расходится при $|z|<7$. При $|z|=7$ ни с помощью признака Коши, ни с помощью признака Даламбера (показывается также) выяснить сходимость нашего ряда не удаётся. Рассмотрим ряд при $|z|=7$. Так как $|z|=7$, то $z=7e^{i\varphi}$, $0\le\varphi<2\pi$. Подставляя в ряд, получаем $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{7e^{i\varphi}}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-in\varphi}$. Так как $\left|e^{-in\varphi}\right|=1$, то в силу нарушения необходимого признак сходимости, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-in\varphi}$ расходится. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{z}\right)^n$ сходится при $|z|>7$ и расходится при $|z|\le 7$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n+1}}{5^n}$.

Применяя признак Даламбера, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{4(n+1)+1}}{5^{n+1}}:\frac{z^{4n+1}}{5^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^4}{5}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|^4}{5}=\frac{|z|^4}{5}.$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно при $\frac{|z|^4}{5}<1$ и расходится при $\frac{|z|^4}{5}>1$, или, что тоже самое, сходится при $|z|<\sqrt[4]{5}$ и расходится при $|z|>\sqrt[4]{5}$. При $|z|=\sqrt[4]{5}$ ни с помощью признака Коши, ни с помощью признака Даламбера (показывается также) выяснить сходимость нашего ряда не удаётся. Рассмотрим ряд при $|z|=\sqrt[4]{5}$. Так как $|z|=\sqrt[4]{5}$, то $z=\sqrt[4]{5}e^{i\varphi}$, $0\le\varphi<2\pi$. Подставляя в ряд, получаем $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt[4]{5}e^{i\varphi}\right)^{4n+1}}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{5}e^{i(2n+1)\varphi}$. Так как $\left|e^{i(2n+1)\varphi}\right|=1$, то в силу нарушения необходимого признак сходимости, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{5}e^{i(2n+1)\varphi}$ расходится. Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n+1}}{5^n}$ сходится при $|z|<\sqrt[4]{5}$ и расходится при $|z|\geq\sqrt[4]{5}$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{z}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{z+3}\right)^n\right)$.

Исходный ряд сходится, если сходится сумма $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{6}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+3}\right)^n$. Применяя к первому слагаемому $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{6}\right)^n$ признак Коши, находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{z}{6}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{z}{6}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{6}=\frac{|z|}{6}.$$

Следовательно, первое слагаемое сходится в области $|z|<6$ и расходится в области $|z|>6$. Исследуя при $|z|=6$ (на границе областей) получаем $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6e^{i\varphi}}{6}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}e^{in\varphi}$. Так как $\left|e^{in\varphi}\right|=1$, то в силу нарушения необходимого признак сходимости, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}e^{in\varphi}$ расходится. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{6}\right)^n$ сходится при $|z|<6$ и расходится при $|z|\geq 6$.

Аналогично, применяя ко второму слагаемому $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+3}\right)^n$ признак Коши, находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{z+3}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{z+3}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|z+3|}=\frac{1}{|z+3|},$$

из чего заключаем, что второе слагаемое сходится в области $|z+3|>1$ и расходится при $|z+3|<1$. Исследуя при $|z+3|=1$ (на границе областей) получаем $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{i\varphi}}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-in\varphi}$. Так как $\left|e^{-in\varphi}\right|=1$, то в силу нарушения необходимого признак сходимости, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-in\varphi}$ расходится. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+3}\right)^n$ сходится при $|z+3|>1$ и расходится при $|z+3|\le 1$. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{z}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{z+3}\right)^n\right)$ сходится в пересечении (общей части) областей $|z|<6$ и $|z+3|>1$.

Естественным образом возникает вопрос о наследовании суммой ряда $S(z)$ свойств членов ряда $u_n(z)$, таких как непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость. Точнее, если члены ряда $u_n(z)$ непрерывны в области D, то будет ли непрерывной сумма ряда $S(z)$; если члены ряда $u_n(z)$ интегрируемы на кривой L, лежащей в области D, то будет ли сумма ряда $S(z)$ интегрируема на этой кривой; если члены ряда $u_n(z)$ дифференцируемы в области D, то будет ли дифференцируема сумма ряда $S(z)$?

Пример. На отрезке [0,1] вещественной прямой рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}(1-x)$. Его частичные суммы есть

$S_1(x)=1-x$, $S_2(x)=1-x^2$, …, $S_n(x)=1-x^n$, ... Нетрудно видеть, что пределом этой последовательности частичных сумм, а следовательно и суммой ряда, будет функция $S(x)=\begin{cases}1, & при\ x\in[0,1)\\ 0, & при\ x=1.\end{cases}$. Эта функция терпит разрыв в точке $x=1$, в то время как члены ряда непрерывны на всей вещественной оси, следовательно и на отрезке $[0,1]$.

Таким образом, чтобы сумма ряда обладала теми же свойствами, что и члены ряда, нужно нечто более жёсткое, чем сходимость ряда. Такими понятиями, как это будет показано ниже, являются понятия равномерной в области сходимости и равномерной внутри области сходимости.

Сформулируем вначале определение сходимости ряда на языке неравенств, которое получается переформулировкой определения сходимости последовательности функций.

Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ сходится к своей сумме $S(z)$ в области D, если для всякого $\varepsilon>0$ существует номер $N(\varepsilon,z)$ такой, что для всех $n>N(\varepsilon,z)$ выполняется неравенство $\left|S_n(z)-S(z)\right|<\varepsilon$.

Теорема 7.2.1 (критерий Коши сходимости ряда). Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ сходился в области D, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon>0$ существовал номер $N(\varepsilon,z)$ такой, что для всех $n>N(\varepsilon,z)$ и $p\geq 1$ выполнялось неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(z)\right|<\varepsilon$ для всех z из области D.

Оставим эту теорему без доказательства.

Определение равномерной сходимости выглядит следующим образом.

Определение. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно к своей сумме $S(z)$ в области D, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ единый для всех z из области D такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ сразу для всех z из области D.

Определение. Говорят, что ряд сходится равномерно внутри области D, если он сходится равномерно на каждом ограниченном замкнутом подмножестве из множества D.

Как и для сходимости ряда, для равномерной сходимости ряда имеет место критерий Коши.

Теорема 7.2.2 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходился равномерно в области D, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовал единый для всех z из области D номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и $p \geq 1$ выполнялось неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)\right| < \varepsilon$ сразу для всех z из области D.

Оставим эту теорему без доказательства.

Выяснять по определению равномерную и равномерную внутри области сходимости достаточно трудно. Поэтому нужны результаты, позволяющие сделать это легко. Таким результатом является достаточный признак равномерной сходимости, принадлежащий Вейерштрассу. К его изложению мы и приступаем.

Определение. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорируется рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ или, что то же самое, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ мажорирует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если, начиная с некоторого номера выполнено неравенство $|a_n| \le |b_n|$.

Теорема 7.2.3 (Вейерштрасс). Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ в области D существует мажорирующий его абсолютно сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится в D равномерно.

Доказательство. Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то для ряда из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ выполнен критерий Коши, то есть для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и $p \ge 1$ выполняется неравенство $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$. Далее, так как по условию теоремы для всякого z из D выполнено неравенство $|u_n(z)| \le |a_n|$, то можем написать

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(z)\right| \le \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(z)| \le \sum_{k=n}^{n+p} |a_n| .$$

Из полученного неравенства следует, что для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ выполнен критерий Коши равномерной сходимости. Теорема доказана.

Пример 4. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ сходится равномерно внутри круга сходимости $|z|<1$. Пусть G некоторое замкнутое множество, лежащее в круге $|z|<1$. В силу замкнутости G существует замкнутый круг $|z|\le 1-\delta$ при некотором $\delta>0$ в котором лежит множество G. Тогда для всякого z из G выполнено неравенство $|z|\le 1-\delta$, а следовательно и неравенства $\left|z^n\right|\le (1-\delta)^n$, $n=1,2,\ldots$. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\delta)^n$ сходится и является мажорирующим для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ на множестве G следовательно, по теореме Вейерштрасса, ряд сходится на G равномерно. В силу произвольности множества G, ряд сходится равномерно внутри круга сходимости $|z|<1$.

Теорема 7.2.4. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно на множестве D, и функции $u_n(z)$ непрерывны на множестве D, то сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ непрерывна на множестве D.

Доказательство. Пусть z и $z+h$ точки из D. Нам требуется показать, что $\lim\limits_{h\to 0} S(z+h)=S(z)$. Для этого оценим разность $|S(z+h)-S(z)|$. Имеем

$$|S(z+h)-S(z)|=$$
$$=\left|\left(S(z+h)-S_n(z+h)\right)-\left(S(z)-S_n(z)\right)+S_n(z+h)-S_n(z)\right|\le$$
$$\le\left|\left(S(z+h)-S_n(z+h)\right)\right|+\left|\left(S(z)-S_n(z)\right)\right|+\left|S_n(z+h)-S_n(z)\right|.$$

Каждое из первых двух слагаемых $|(S(z+h)-S_n(z+h))|$ и $|(S(z)-S_n(z))|$ можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ за счёт равномерной сходимости ряда, третье $|S_n(z+h)-S_n(z)|$ за счёт непрерывности частичных сумм ряда. Теорема доказана.

Определение. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ можно интегрировать почленно в области D, если для любой кривой L лежащей в D выполнено соотношение

$$\int_L \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L u_n(z)dz.$$

Теорема 7.2.5. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно внутри области D, функции $u_n(z)$ и сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ интегрируемы на кривой L, лежащей в D, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ можно интегрировать почленно.

Доказательство. Отметим, что если члены $u_n(z)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ непрерывны в области D и ряд сходится равномерно, то сумма ряда непрерывна и, следовательно, интегрируема. Поэтому в случае непрерывности $u_n(z)$ в D условие интегрируемости суммы ряда можно убрать из формулировки теоремы, так как оно автоматически выполняется. Пусть $S(z)$ сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$. Оценим выражение $\left|\int_L S(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \int_L u_k(z)dz\right|$. Имеем

$$\left|\int_L S(z)dz-\sum_{k=1}^{n}\int_L u_k(z)dz\right|=\left|\int_L S(z)dz-\int_L\left(\sum_{k=1}^{n}u_k(z)\right)dz\right|=$$

$$=\left|\int_L\left(S(z)-\sum_{k=1}^{n}u_k(z)\right)dz\right|=\left|\int_L R_n(z)dz\right|\le\int_L\left|R_n(z)\right|ds.$$

Здесь через $R_n(z)$ обозначен остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$, через ds дифференциал длины дуги. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ сходится равномерно, то для всякого $\varepsilon>0$ существует номер $N(\varepsilon)$ единый для всех z на кривой L такой, что для всех $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|R_n(z)\right|<\dfrac{\varepsilon}{l}$ сразу для всех z из области D. Здесь l длина кривой L. Тогда для всех $n>N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\left|\int_L S(z)dz-\sum_{k=1}^{n}\int_L u_k(z)dz\right|<\varepsilon$, что и означает почленную интегрируемость ряда. Теорема доказана.

Теорема 7.2.6. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ сходится равномерно на множестве D, и функция $\varphi(z)$ ограничена на D, то есть существует число $M>0$ такое, что $\left|\varphi(z)\right|\le M$ для всех z из множества D, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(z)u_n(z)$ сходится на D равномерно.

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ сходится на D равномерно, то для него выполняется критерий Коши равномерной сходимости, то есть для всякого $\varepsilon>0$ существует единый для всех z из области D номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и $p \geq 1$ выполняется неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)\right| < \frac{\varepsilon}{M}$ сразу для всех z из области D. Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi(z) u_k(z)\right| = \left|\varphi(z) \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)\right| = \left|\varphi(z)\right| \cdot \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)\right| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

Поэтому критерий Коши равномерной сходимости выполнен и для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(z) u_n(z)$. Теорема доказана.

Определение. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ можно дифференцировать почленно в области D, если для всех z из области D выполнено соотношение $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(z)$.

Теорема 7.2.7. Если ряд сходится равномерно внутри области D и функции $u_n(z)$ голоморфные (аналитические) в области D, то сумма ряда есть функция аналитическая и ряд можно дифференцировать почленно любое число раз.

Доказательство. Теорему примем без доказательства.

Заметим, что для функций действительного переменного дифференцируемость функции не влечёт её аналитичности. Для рядов состоящих из функций действительного переменного имеет место следующий результат о почленной дифференцируемости ряда.

Теорема 7.2.8. Если функции $u_n(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b) и ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно внутри этого интервала, то исходный ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно дифференцировать почленно, то есть имеет место равенство $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, или, что то же самое, производная суммы исходного ряда равна сумме ряда из производных.

Пример 5. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{7^n}$ сходится равномерно внутри области сходимости.

Нетрудно доказать, что данный ряд сходится в области $|z| < 7$ (например с помощью признака Даламбера). Возьмём $|z| \le 7 - \delta$, где $7 > \delta > 0$ - некоторое число. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7-\delta)^{n+1}}{7^n}$ с одной стороны является мажорирующим для исходного в области $|z| \le 7 - \delta$, с другой стороны, он сходится, так как, по признаку Даламбера, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(7-\delta)^{n+2}}{7^{n+1}} : \frac{(7-\delta)^{n+1}}{7^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(7-\delta)}{7}\right| = \frac{(7-\delta)}{7}.$$

Так как $\frac{7-\delta}{7} < 1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7-\delta)^{n+1}}{7^n}$ сходится. По теореме Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно на множестве $|z| \le 7 - \delta$. Так как любое замкнутое множество из круга $|z| < 7$ может быть заключено в замкнутый круг $|z| \le 7 - \delta$ при некотором $7 > \delta > 0$, то исходный ряд сходится равномерно внутри круга $|z| < 7$. Следовательно, внутри круга $|z| < 7$ его можно почленно и дифференцировать, и интегрировать по любой кривой.

Пример 6. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+5}}{(n+2)7^n}$.

Данный ряд получен интегрированием ряда $z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{7^n}$. В предыдущей задаче показано, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{7^n}$ сходится равномерно внутри круга $|z| < 7$. И так как члены $\frac{z^{n+1}}{7^n}$ ряда есть функции голоморфные (аналитические) на всей комплексной плоскости, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{7^n}$ можно интегрировать почленно. Далее, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{7^n}$ есть сумма членов геометрической прогрессии с первым членом z и знаменателем прогрессии $\frac{z}{7}$. При $|z| < 7$ знаменатель прогрессии по модулю меньше единицы, следовательно, при $|z| < 7$ получаем $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{7^n} = z : \left(1 - \frac{z}{7}\right) = z : \frac{7-z}{7} = \frac{7z}{7-z}$. Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+2)7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z \frac{z^{n+1}}{7^n} dz = \int_0^z \frac{7z}{7-z} dz = \int_0^z \left(\frac{49}{7-z} - 7 \right) dz =$$
$$= -49 \ln(7-z) - 7z + 49 \ln 7 .$$

Таким образом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+5}}{(n+2)7^n} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+2)7^n} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z \frac{z^{n+1}}{7^n} dz =$$
$$= z^3 (-49 \ln(7-z) - 7z + 49 \ln 7) .$$

Пример 7. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^{n+4}}{7^n}$.

Для данного ряда можем записать

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^{n+4}}{7^n}=z^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{7^n}=z^4\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n+1}}{7^n}\right)'.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{7^n}$ состоит из голоморфных (аналитических) функций $\frac{z^{n+1}}{7^n}$ и так как он внутри области $|z|<7$ сходится равномерно, то его можно дифференцировать почленно и поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^{n+4}}{7^n}=z^4\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n+1}}{7^n}\right)'=z^4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{7^n}\right)'=z^4\left(\frac{z}{1-\frac{z}{7}}\right)'=$$

$$=z^4\left(\frac{7z}{7-z}\right)'=z^4\frac{49}{(7-z)^2}=\frac{49z^4}{(7-z)^2}.$$

7.3. Степенные ряды

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ называется степенным. Так как этот ряд сдвигом начала координат в точку z_0 может быть преобразован к виду $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, то обычно последний и изучают. Имеет место следующий результат.

Теорема (Абель). Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ сходится в точке z_1, то он сходится, и притом абсолютно, в любой точке z, для которой $|z|<|z_1|$. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится в точке z_2, то он расходится и в любой точке z, для которой $|z|>|z_2|$.

Таким образом, степенной ряд имеет круг сходимости. Выражение для нахождения радиуса $R=\dfrac{1}{L}$ круга сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ получают с помощью признака Даламбера $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ или признака Коши $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

Пример 1. Найти радиус круга сходимости и круг сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+5-2i)^n}{(n+3)4^n}$.

Имеем $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{1}{(n+3)4^n}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n]{n+3}}=\dfrac{1}{4}$.

Таким образом, радиус сходимости ряда равен $R=\dfrac{1}{L}=4$ и ряд сходится в круге $|z+5-2i|<4$. Для выяснения сходимости на границе $|z+5-2i|=3$ круга сходимости нужны дополнительные исследования.

Пример 2. Найти радиус круга сходимости и круг сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^n(z-3)^n}{(n+2)!}$.

Имеем

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+3)!}:\frac{(n+1)^n}{(n+2)!}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)^{n+1}(n+2)!}{(n+3)!(n+1)^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+3)(n+1)^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)}{(n+3)}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\right)=e\,.$$

Таким образом, радиус сходимости ряда равен $R=\frac{1}{L}=\frac{1}{e}$ и ряд сходится в круге $|z-3|<\frac{1}{e}$. Для выяснения сходимости на границе $|z-3|=\frac{1}{e}$ круга сходимости нужны дополнительные исследования.

Пример 3. Найти радиус круга сходимости и круг сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{4n+5}}{7^{n+1}}$.

В данном случае воспользоваться приведенными выше формулами для нахождения радиуса круга сходимости нельзя, так как степени $(z+1)$ идут не подряд. Это так называемый ряд с пропусками. Для выяснения области сходимости лучше всего воспользоваться либо признаком Даламбера, либо признаком Коши непосредственно. Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z+1)^{4(n+1)+5}}{7^{n+2}}:\frac{(z+1)^{4n+5}}{7^{n+1}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z+1)^4}{7}\right|=\frac{|z+1|^4}{7}\,.$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно при $\frac{|z+1|^4}{7}<1$ и расходится при $\frac{|z+1|^4}{7}>1$, или, что тоже самое, сходится при $|z+1|<\sqrt[4]{7}$ и расходится при $|z+1|>\sqrt[4]{7}$. При $|z+1|=\sqrt[4]{7}$ ни с помощью признака Коши, ни с помощью признака Даламбера (показывается также) выяснить сходимость нашего ряда не удаётся. Рассмотрим ряд при $|z+1|=\sqrt[4]{7}$. Так как $|z+1|=\sqrt[4]{7}$, то $z=-1+\sqrt[4]{7}e^{i\varphi}$, $0\le\varphi<2\pi$. Подставляя в ряд, получаем $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt[4]{7}e^{i\varphi}\right)^{4n+5}}{7^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt[4]{7}e^{i(4n+5)\varphi}$. Так как $\left|e^{i(4n+5)\varphi}\right|=1$, то в силу нарушения необходимого признак сходимости, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt[4]{7}e^{i(4n+5)\varphi}$ расходится. Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{4n+5}}{7^{n+1}}$ сходится при $|z+1|<\sqrt[4]{7}$ и расходится при $|z+1|\ge\sqrt[4]{7}$.

Нетрудно показать, что степенной ряд сходится равномерно внутри круга сходимости, поэтому его можно интегрировать и дифференцировать внутри этого круга любое число раз. Кроме того, так как функции $(z-z_0)^n$ являются аналитическими (голоморфными) во всей комплексной плоскости и степенной ряд сходится равномерно внутри круга сходимости, то его сумма есть функция аналитическая (голоморфная) внутри круга сходимости.

7.4. Ряды Тейлора

Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, коэффициенты которого вычисляются по формулам $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, называется рядом Тейлора.

Теорема (Тейлор). Всякая голоморфная (аналитическая) в круге $|z-z_0|<R$ функция есть сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, коэффициенты c_n которого вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

где интегрирование ведётся по любому замкнутому контуру содержащему точку z_0 внутри себя и целиком лежащему в круге $|z-z_0|<R$. Это представление единственно в том смысле, что если мы получили разложение функции в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, то это обязательно ряд Тейлора.

Доказательство. Опустим.

Ряд Тейлора разложения функции по степеням z, то есть при $z_0 = 0$ называется рядом Маклорена.

Таблица разложений некоторых функций в ряд Маклорена.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n;$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n;$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n};$$

$$\operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}.$$

Пример 1. Разложить в ряд $\cos z^5$ в окрестности точки $z = 0$.

Пользуясь разложением $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ можем записать $\cos z^5 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(z^5\right)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{10n}}{(2n)!}$. По теореме единственности это ряд Тейлора для функции $\cos z^5$.

Пример 2. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+4)^n}{(2n+3)7^n}$. Найти $f''(-4)$.

Коэффициенты разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z+4)$ вычисляются по формуле $c_n = \frac{f^{(n)}(-4)}{n!}$. Поэтому $f''(-4) = 2! \cdot c_2$. Так как $c_2 = \frac{1}{(2 \cdot 2 + 3)7^2} = \frac{1}{7 \cdot 49} = \frac{1}{343}$, то $f''(-4) = \frac{2!}{343} = \frac{2}{343}$.

Пример 3. Разложить по положительным степеням $(z-1)$ функции $\dfrac{1}{z+3}$ и $\dfrac{1}{(z+3)^2}$.

Можем записать $\dfrac{1}{z+3}=\dfrac{1}{z-1+1+3}=\dfrac{1}{(z-1)+4}$. Далее, для разложения по положительным степеням $(z-1)$, имеем

$$\frac{1}{(z-1)+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{4}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{4^{n+1}}.$$

Это разложение справедливо при $\left|\dfrac{z-1}{4}\right|<1$ или, что тоже самое, при $|z-1|<4$.

Далее, так как $\dfrac{1}{(z+3)^2}=-\left(\dfrac{1}{z+3}\right)'$, то можем записать

$$\frac{1}{(z-3)^2}=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{4^{n+1}}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(z-1)^{n-1}}{4^{n+1}}$$

для разложения по положительным степеням $(z-1)$.

Пример 4. Функцию $\dfrac{1}{(z-1)(z+3)}$ разложить по степеням $(z+2)$.

Раскладывая рациональную дробь $\dfrac{1}{(z-1)(z+3)}$ на сумму двух простейших, получаем $\dfrac{1}{(z-1)(z+3)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z+3}\right)$.

Первое слагаемое раскладывается по степеням $\left(z+2\right)$ следующим образом. Так как $\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{(z+2)-3}$, то разложение по положительным степеням $\left(z+2\right)$ имеет вид

$$\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}$$

и справедливо при $\left|z+2\right|<3$.

Аналогично, для слагаемого $\dfrac{1}{z+3}$ можем записать $\dfrac{1}{z+3}=\dfrac{1}{z+2+1}=\dfrac{1}{1+(z+2)}$. Поэтому разложение $\dfrac{1}{z+3}$ по положительным степеням $\left(z+2\right)$ имеет вид

$$\frac{1}{z+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+2)^n$$

и справедливо в области $\left|z+2\right|<1$.

Объединяя результаты, получаем разложение

$$\frac{1}{\left(z-1\right)\left(z+3\right)}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+2)^n,$$

справедливое в области $\left|z+2\right|<1$.

Пример 5. Функцию e^{z+4} разложить по степеням $\left(z-2\right)$.

Имеем $e^{z+4}=e^{\left(z-2\right)+6}=e^6e^{z-2}=e^6\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-2\right)^n}{n!}$.

8. Ряды Фурье

Рассмотрим множество вещественнозначных функций заданных на отрезке $[a,b]$ и интегрируемых вместе со своим квадратом, то есть таких, что существуют интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b f^2(x)dx$. Такими являются, например, все непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, функции имеющие конечное число точек разрыва 1-го рода отрезке $[a,b]$. Для таких функций конструкция $\int_a^b f(x)g(x)dx$ обладает всеми свойствами скалярного произведения. Поэтому на множестве функций интегрируемых вместе со своим квадратом вводят скалярное произведение по формуле

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx \tag{8.1}$$

Для комплекснозначных функций действительного переменного интегрируемых со своим квадратом скалярное произведение вводят по формуле

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{8.2}$$

Отметим, что как только появилось скалярное произведение, то сразу же можем ввести понятие нормы элемента по формуле $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$. Для действительнозначных функций получаем

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для комплекснозначных функций имеем

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

А так как есть понятие нормы элемента, то есть понятие расстояния между элементами, которое можно ввести по формуле $\rho(f,g) = \|f - g\|$. В нашем случае получаем

$$\rho(f,g) = \|f - g\| = \left(\int_a^b \left(f(x) - g(x) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

для действительнозначных функций и

$$\rho(f,g) = \|f - g\| = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

для комплекснозначных функций.

Откуда в такой форме взялось? Каждая функция, заданная на отрезке $[a,b]$, полностью определяется набором своих значений, то есть если для всякого x из $[a,b]$ можем найти $f(x)$, то функция определена полностью. Не всегда удаётся задать функцию набором своих значений. Поэтому можно попытаться охарактеризовать функцию приближённо набором в конечном числе точек. Пусть $f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)$ такой набор. Тогда этот набор можно считать n-мерным вектором $\left(f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)\right)^T$. Другую функцию $g(x)$ тоже можно охарактеризовать в тех же точках. Чем больше точек, тем точнее характеристика функции. А теперь повторим схему, реализованную при построении интегральных сумм в интеграле Римана. Разобьем отрезок $[a,b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, выберем внутри каждого элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ по точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Рассмотрим $\left(f(\xi_1), f(\xi_2),..., f(\xi_n)\right)^T$ и

$\left(g(\xi_1), g(\xi_2),..., g(\xi_n)\right)^T$. Скалярное произведение этих n-мерных векторов имеет вид

$$(f,g)_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k) =$$

$$= f(\xi_1)g(\xi_1) + f(\xi_2)g(\xi_2) + ... + f(\xi_n)g(\xi_n).$$

Увеличивая число точек разбиения, скорее всего, получим, что $(f,g)_n$ стремится к ∞. Например, взяв $f(x)=g(x)=1$ для всякого x из $[a,b]$, получаем, что $f(\xi_k)g(\xi_k)=1$, $(f,g)_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k) = n$. Поэтому подправим это скалярное произведение рассмотрением скалярного произведения с весом, взяв в качестве веса Δx_i. Тогда имеем

$$(f,g)_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= f(\xi_1)g(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)g(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)g(\xi_n)\Delta x_n.$$

В результате получилась интегральная сумма. Переходя к пределу по всевозможным разбиениям, имеем

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Аналогичная конструкция может быть реализована и для комплекснозначных функций.

Назовём две функции ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Семейство функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ назовём ортогональным, если каждые две функции из этого семейства ортогональны между собой.

Ортогональной системой функций является так называемая тригонометрическая система функций

$$1, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l},\ n=1,2,..., \tag{8.3}$$

которая ортогональна на отрезке $[-l,l]$. Частным случаем этой системы функций является система

$$1,\cos nx,\sin nx\ ,\ n=1,2,\ldots, \tag{8.4}$$

ортогональная на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Также являются ортогональными системы комплексно-значных функций $e^{i\frac{n\pi x}{l}}$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ на отрезке $[-l,l]$ и e^{inx}, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Доказывается просто. Необходимо вычислить скалярное произведение между элементами этих систем.

Конкретные ортогональные семейства функций, отличные от тригонометрической системы, можно найти в [29-31] и других книгах.

Пусть $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots$ - множество попарно ортогональных функций. Пусть далее функция $f(x)$ представлена в виде

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n(x)\,. \tag{8.5}$$

Это представление называется разложением функции в обобщённый ряд Фурье. Вычислим при некотором k скалярное произведение $\left(f(x),\varphi_k(x)\right)$ от левой и правой частей данного разложения. В результате получаем

$$\left(f(x),\varphi_k(x)\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n(x),\varphi_k(x)\right)=\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n(x)\cdot\varphi_k(x)\right)dx\,.$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n(x)\cdot\varphi_k(x)$ можно интегрировать почленно, то

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x) \cdot \varphi_k(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_k(x) dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \big(\varphi_n(x), \varphi_k(x)\big) = \alpha_k \big(\varphi_k(x), \varphi_k(x)\big) = \alpha_k \left\| \varphi_k(x) \right\|^2$$

Следовательно, $\big(f(x), \varphi_k(x)\big) = \alpha_k \left\| \varphi_k(x) \right\|^2$ и получаем коэффициенты разложения функции $f(x)$ по ортогональной системе функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$

$$\alpha_n = \frac{(f(x), \varphi_n(x))}{\left\| \varphi_n(x) \right\|^2}. \tag{8.6}$$

Чем хороши ряды Фурье? Для ответа на этот вопрос рассмотрим так называемые полиномы по ортогональной системе $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$, содержащие не более чем n слагаемых, то есть всевозможные линейные комбинации

$$\varphi = \beta_1 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2 + ... + \beta_n \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k$$

элементов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$. Оценим квадрат нормы разности элементов f и φ. Имеем

$$\left\| f - \varphi \right\|^2 = \big(f - \varphi, f - \varphi\big) = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k \right) =$$

$$= \big(f, f\big) - 2 \sum_{k=1}^{n} \beta_k \big(f, \varphi_k\big) + \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k \right) =$$

$$= \big(f, f\big) - 2 \sum_{k=1}^{n} \beta_k \big(f, \varphi_k\big) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \beta_k \beta_p \big(\varphi_k, \varphi_p\big).$$

Так как $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ является семейством ортогональных функций, то

$$\big(\varphi_k, \varphi_p\big) = \begin{cases} \left\| \varphi_k \right\|^2, & \text{если } k = p, \\ 0, & \text{если } k \neq p. \end{cases}$$

Поэтому $\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\beta_k\beta_p(\varphi_k,\varphi_p)=\sum_{k=1}^{n}(\beta_k)^2(\varphi_k,\varphi_k)$. Таким образом,

$$\|f-\varphi\|^2=(f,f)-2\sum_{k=1}^{n}\beta_k(f,\varphi_k)+\sum_{k=1}^{n}(\beta_k)^2(\varphi_k,\varphi_k).$$

Далее, так как $(\varphi_k,\varphi_k)=\|\varphi_k\|^2$, $(f,\varphi_k)=\alpha_k\|\varphi_k(x)\|^2$, то последнее соотношение можно переписать в виде

$$\|f-\varphi\|^2=\|f\|^2-2\sum_{k=1}^{n}\beta_k\alpha_k\|\varphi_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}(\beta_k)^2\|\varphi_k\|^2.$$

Вычитая и прибавляя в правой части полученного соотношения $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2$ имеем

$$\|f-\varphi\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2-2\sum_{k=1}^{n}\beta_k\alpha_k\|\varphi_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}(\beta_k)^2\|\varphi_k\|^2,$$

$$\|f-\varphi\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-\beta_k)^2\|\varphi_k\|^2.$$

В последнем соотношении слагаемые $\|f\|^2$ и $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2$ постоянны, а слагаемое $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-\beta_k)^2\|\varphi_k\|^2$ достигает наименьшего значения и обращается в нуль при $\alpha_k=\beta_k$. Таким образом, $\|f-\varphi\|^2$ достигает минимума, когда

$$\varphi=\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\ldots+\alpha_n\varphi_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k,$$

то есть является n-ой частичной суммой ряда Фурье. Таким образом, частичные суммы ряда Фурье осуществляют наилучшее среднеквадратичное приближение к исходной функции. Кроме того, так как $\|f-\varphi\|^2 \geq 0$, то $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2$. Устремляя n к бесконечности, получаем неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2 .$$

Из неравенства Бесселя сразу же следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2$ является сходящимся.

Отметим несколько понятий в пространствах со скалярным произведением.

Назовём семейство ортогональных функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ полным в пространстве со скалярным произведением H, если не существует в этом пространстве функции ортогональной к каждой из функций семейства $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$.

Если семейство элементов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ является полным в H, то каждый элемент из H представим своим обобщённым рядом Фурье.

Если в неравенстве Бесселя $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2$ имеет место равенство, то есть $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2$ для каждого элемента из H, то система элементов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ называется замкнутой в H, а равенство $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2$ называется условием замкнутости или равенством Парсеваля-Стеклова.

Если система элементов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ замкнута в H, то она полна в H.

Доказательство у Магазинникова Л.И.[30, 32] или других книгах по рядам Фурье.

Применяя формулы вычисления коэффициентов ряда Фурье $a_n = \dfrac{(f(x), \varphi_n(x))}{\|\varphi_n(x)\|^2}$ к тригонометрической системе (3.3), получаем разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (8.7)$$

коэффициенты которого находятся по формулам

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 0,1,2,..., \qquad (8.8)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1,2,.... \qquad (8.9)$$

Преобразуем слагаемое $a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ в (8.7). Имеем

$$a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} =$$

$$= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Положим

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A_n,\ \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos\varphi_n,\ \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \sin\varphi_n.$$

С учётом этих обозначений имеем

$$a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} = A_n\left(\cos\varphi_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) =$$

$$= A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l} - \varphi_n\right).$$

Поэтому ряд (8.7) может быть записан в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}-\varphi_n\right).$$

Функция $A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}-\varphi_n\right)$ является периодической с наименьшим периодом $\frac{2l}{n}$ и представляет собой гармоническое колебание. Поэтому разложение функций в ряд Фурье называют гармоническим анализом. Величина A_n называется *амплитудой гармоники*, $\frac{n\pi}{l}$ *частотой гармоники*, φ_n *отклонением от начального положения*.

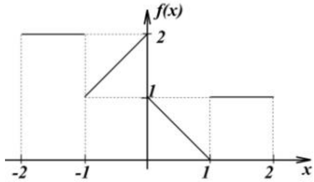
Величины A_n, $n=1,2,\ldots$ называют *амплитудным спектром*, $\frac{n\pi}{l}$ - *частотным спектром*, φ_n, $n=1,2,\ldots$ - *фазовым спектром*.

Заметим, что зная амплитудный, частотный и фазовый спектры, можно восстановить исходную функцию, так как имеет место следующий результат.

Теорема (Дирихле). Всякая кусочно непрерывная и ограниченная на отрезке $[-l,l]$ функция (сигнал) $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье (8.7) который сходится к периодической с периодом $2l$ функции $S(x)$ заданной на числовой прямой и в точках отрезка $[-l,l]$ принимающей значения

$$S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Пример 1. Разложить функцию, заданную графически, в ряд Фурье. Найти амплитудный, фазовый и частотный спектры.



Записывая функцию в аналитической форме, получаем

$$f(x)=\begin{cases} 2, & -2\le x<-1, \\ x+2, & -1\le x<0, \\ 1-x, & 0\le x<1, \\ 1, & 1\le x<2. \end{cases}$$

Найдем коэффициенты разложения данной функции в ряд Фурье. Имеем $a_0=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}f(x)dx$. Так как подынтегральная функция положительна, то $\int\limits_{-2}^{2}f(x)dx$ есть площадь под кривой $f(x)$, которая легко вычисляется и равна 5. Поэтому $a_0=\frac{5}{2}$.

Далее,

$$a_n=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{-1}2\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}(x+2)\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}(1-x)\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx.$$

Вычислим каждый интеграл в данном выражении отдельно. Для первого интеграла имеем

$$\int_{-2}^{-1} 2\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = \frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} = \frac{4}{\pi n}\left(\sin\left(\frac{-\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{-2\pi n}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi n}\left(-\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \sin(\pi n)\right) = -\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Для вычисления второго интеграла $\int_{-1}^{0}(x+2)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx$ применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = x + 2$, $dv = \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx$. Тогда $du = dx$, $dv = \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$. В результате получаем

$$\int_{-1}^{0}(x+2)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = \frac{2(x+2)}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} - \frac{2}{\pi n}\int_{-1}^{0}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{4}{\pi n}\sin(0) - \frac{2}{\pi n}\sin\left(-\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(0) - \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(-\frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Для вычисления третьего интеграла также применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = 1 - x$, $dv = \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx$. Тогда $du = -dx$, $dv = \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$. В результате имеем

$$\int_{0}^{1}(1-x)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = \frac{2(1-x)}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1} + \frac{2}{\pi n}\int_{0}^{1}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx =$$

$$= 0 - \frac{2}{\pi n}\sin(0) - \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1} =$$

$$= -\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(0) = \frac{4}{\pi^2 n^2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Для четвёртого слагаемого получаем

$$\int_1^2 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{2}{\pi n}\left[\sin\left(\frac{2\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[\sin(\pi n) - \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right] = -\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Окончательно, для коэффициентов a_n имеем

$$a_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2} - \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) - \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Вычислим теперь коэффициенты b_n. Имеем,

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} 2\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x+2)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-x)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{2}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx.$$

Вычислим каждый интеграл отдельно. Для первого интеграла имеем.

$$\int_{-2}^{-1} 2\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = -\frac{4}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} = -\frac{4}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{-\pi n}{2}\right) - \cos\left(\frac{-2\pi n}{2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \cos(\pi n)\right) = \frac{4}{\pi n}\left((-1)^n - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right).$$

Для вычисления второго интеграла $\int_{-1}^{0}(x+2)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx$ применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = x + 2$,

$dv=\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx$. Тогда $du=dx$, $dv=-\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)$. И для второго интеграла получаем

$$\int_{-1}^{0}(x+2)\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx=-\frac{2(x+2)}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{2}{\pi n}\int_{-1}^{0}\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx=$$

$$=-\frac{2\cdot 2}{\pi n}\cos(0)+\frac{2}{\pi n}\cos\left(-\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}+\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin(0)-\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(-\frac{\pi n}{2}\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}+\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Третий интеграл также вычисляем с применением формулы интегрирования по частям. Положим $u=1-x$, $dv=\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx$.

Тогда $du=-dx$, $dv=-\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)$. И для третьего интеграла получаем

$$\int_{0}^{1}(x+1)\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx=-\frac{2(1-x)}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1}-\frac{2}{\pi n}\int_{0}^{1}\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx=$$

$$=0+\frac{2}{\pi n}\cos(0)-\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1}=$$

$$=\frac{2}{\pi n}-\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin(0)=\frac{2}{\pi n}-\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Для четвёртого интеграла имеем

$$\int_{1}^{2}\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx=-\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2}=-\frac{2}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left(\cos(\pi n)-\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)=\frac{2}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-(-1)^n\right).$$

Окончательно, для коэффициентов b_n имеем

$$b_n=\frac{1}{2}\cdot 4\left(\left(-1\right)^n-\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi n}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\left(-1\right)^n\right)=\frac{1}{\pi n}\left(\left(-1\right)^n-1\right).$$

Таким образом, ряд Фурье для заданной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{5}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^2 n^2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)-\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\cos\frac{n\pi x}{2}+$$

$$+\frac{1}{\pi n}\left(\left(-1\right)^n-1\right)\sin\frac{n\pi x}{2}$$

Амплитудный спектр равен

$$A_n=\sqrt{\left(\frac{4}{\pi^2 n^2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)-\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)^2+\frac{1}{\pi^2 n^2}\left(\left(-1\right)^n-1\right)^2}\ ,$$

$$n=1,2,\ldots.$$

Фазовый спектр равен

$$\varphi_n=arctg\left(\frac{\frac{1}{\pi n}\left(\left(-1\right)^n-1\right)}{\frac{4}{\pi^2 n^2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)-\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}\right)=$$

$$=arctg\left(\frac{\pi n\left(\left(-1\right)^n-1\right)}{4\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right)-2\pi n\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}\right),\ n=1,2,\ldots.$$

Частотный спектр равен $\frac{\pi n}{2}$.

Для чётных функций коэффициенты (8.8), (8.9) разложения функции в ряд Фурье приобретают вид

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{-l}^0 f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,,\ n = 0,1,2,..., \tag{8.10}$$

$$b_n = 0\,,\ n = 1,2,.... \tag{8.11}$$

Аналогично, для нечётных функций имеем

$$a_n = 0\,,\ n = 0,1,2,..., \tag{8.12}$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{-l}^0 f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,\ n = 1,2,.... \tag{8.13}$$

Функции, заданные на половине периода, можем продолжить на другую половину периода любым образом. Продолжая чётным образом, получаем разложение по косинусам

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}\,, \tag{8.14}$$

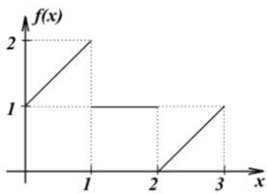
коэффициенты которого находятся по формулам (8.10), (8.11).

Продолжая нечётным образом, получаем разложение по синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,, \tag{8.15}$$

коэффициенты которого находятся по формулам (8.12), (8.13).

Пример 2. Разложить функцию, заданную графически, в ряд Фурье по косинусам.



Продолжая функцию, заданную на половине периода чётным образом, получаем разложение по косинусам

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$. Так как функция задана на отрезке $[0,3]$, то коэффициенты нужного нам разложения находятся по формулам $a_n=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx$, $n=0,1,2,\ldots$, $b_n=0$, $n=1,2,\ldots$.

Переходя к аналитическому заданию, получаем

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1\le x\le 2,\\ x-2, & 2\le x\le 3.\end{cases}$$

Имеем $a_0=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx$. Так как подынтегральная функция положительна, то $\int_0^3 f(x)dx$ есть площадь под кривой $f(x)$, которая легко вычисляется и равна 3. Поэтому $a_0=2$.

Далее,

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 (x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\frac{2}{3}\int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{3}dx+\frac{2}{3}\int_2^3 (x-2)\cos\frac{n\pi x}{3}dx.$$

Вычислим каждый интеграл отдельно. Для вычисления первого интеграл $\int_0^1 (x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx$ применим формулу интегрирования по частям. Полагая $u=x+1$, $dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx$, имеем $du=dx$, $v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}$. Тогда

$$\int_0^1 (x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx = (x+1)\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^1 - \frac{3}{n\pi}\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{3}dx =$$

$$= (x+1)\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^1 + \frac{3\cdot 3}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3} - 0 + \left(\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{9}{n^2\pi^2}\right) =$$

$$= \frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - 1\right).$$

Для второго интеграла $\int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{3}dx$ получаем

$$\int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_1^2 = \frac{3}{n\pi}\left(\sin\frac{2n\pi}{3} - \sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

Для вычисления третьего интеграла $\int_2^3 (x-2)\cos\frac{n\pi x}{3}dx$, также как и для вычисления первого, применим формулу интегрирования по частям. Полагая $u = x-2$, $dv = \cos\frac{n\pi x}{3}dx$, имеем $du = dx$, $v = \frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}dx$. Тогда

$$\int_2^3 (x-2)\cos\frac{n\pi x}{3}dx = (x-2)\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_2^3 - \frac{3}{n\pi}\int_2^3 \sin\frac{n\pi x}{3}dx =$$

$$= (x-2)\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_2^3 + \frac{3\cdot 3}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_2^3 =$$

$$= \frac{3}{n\pi}\sin n\pi - 0 + \left(\frac{9}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{9}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - \cos\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Окончательно, для коэффициентов a_n имеем

$$a_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-1\right)+$$

$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\left(\sin\frac{2n\pi}{3}-\sin\frac{n\pi}{3}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-\cos\frac{2n\pi}{3}\right)=$$

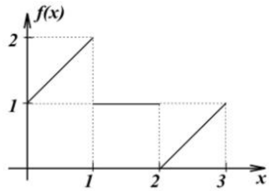
$$=\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+(-1)^n-1-\cos\frac{2n\pi}{3}\right)+\frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{2n\pi}{3}+\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

Таким образом, ряд Фурье для заданной функции имеет вид

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+(-1)^n-1-\cos\frac{2n\pi}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{2n\pi}{3}+\sin\frac{n\pi}{3}\right)\right)\cos\frac{n\pi x}{3}.$$

Пример 3. Разложить функцию, заданную графически, в ряд Фурье по синусам.



Продолжая нечётным образом, получаем разложение по синусам $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$, коэффициенты которого находятся по формулам

$$a_n=0,\ n=0,1,2,...,\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2,....$$

Переходя к аналитическому заданию, получаем

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1\le x\le 2,\\ x-2, & 2\le x\le 3.\end{cases}$$

Имеем,

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx + \frac{2}{3}\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{3}dx + \frac{2}{3}\int_2^3 (x-2)\sin\frac{n\pi x}{3}dx .$$

Вычислим каждый интеграл отдельно. Для вычисления первого интеграл $\int_0^1 (x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx$ применим формулу интегрирования по частям. Полагая $u = x+1$, $dv = \sin\frac{n\pi x}{3}dx$, имеем $du = dx$, $v = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}$. Тогда

$$\int_0^1 (x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx = -(x+1)\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^1 + \frac{3}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{3}dx =$$

$$= -(x+1)\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^1 + \frac{3\cdot 3}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{3}{n\pi} + \left(\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3} - 0\right) = \frac{3}{n\pi} - \frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3} .$$

Для второго интеграла $\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{3}dx$ получаем

$$\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{3}dx = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_1^2 = -\frac{3}{n\pi}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

Для вычисления третьего интеграла $\int_2^3 (x-2)\sin\frac{n\pi x}{3}dx$, также как и для вычисления первого, применим формулу интегрирования по частям. Полагая $u = x-2$, $dv = \sin\frac{n\pi x}{3}dx$, имеем $du = dx$, $v = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}dx$. Тогда

$$\int_2^3 (x-2)\sin\frac{n\pi x}{3}dx = -(x-2)\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_2^3 + \frac{3}{n\pi}\int_2^3 \cos\frac{n\pi x}{3}dx =$$

$$= -(x-2)\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_2^3 + \frac{3\cdot 3}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_2^3 =$$

$$= -\frac{3}{n\pi}\cos n\pi + 0 + \left(\frac{9}{n^2\pi^2}\sin n\pi - \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}\right) =$$

$$= -\frac{3}{n\pi}(-1)^n - \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

Окончательно, для коэффициентов b_n имеем

$$b_n = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{n\pi} - \frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3}\right)\right) -$$

$$-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{n\pi}(-1)^n + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3} - (-1)^n\right) + \frac{6}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{3} - \sin\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Таким образом, ряд Фурье для заданной функции имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3} - (-1)^n\right) +\right.$$

$$\left.+\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{3} - \sin\frac{2n\pi}{3}\right)\right)\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Разложение (8.7) можно также записать в виде

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} \qquad (8.16)$$

коэффициенты которого находят по формулам

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (8.17)$$

Разложение (8.16) называют рядом Фурье в комплексной форме.

Соответственно $\left|\frac{l}{\pi}c_n\right|$ есть *амплитудный спектр,*

$-\arg\left(\frac{l}{\pi}c_n\right)$ - *фазовый спектр,* $\frac{n\pi}{l}$ - *частотный спектр.*

Пример 4. Разложить функцию в ряд Фурье в комплексной форме. Найти амплитудный, фазовый и частотный спектры.

$$f(x)=\begin{cases}1, & -2\le x<0,\\ 3, & 0\le x\le 2.\end{cases}$$

Найдём коэффициенты разложения. Так как $l=2$, то

$$c_n=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)e^{\frac{-in\pi x}{2}}dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}2e^{\frac{-in\pi x}{2}}dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{2}3e^{\frac{-in\pi x}{2}}dx=$$

$$=-\frac{1}{2in\pi}e^{\frac{-in\pi x}{2}}\Bigg|_{-2}^{0}-\frac{3}{2in\pi}e^{\frac{-in\pi x}{2}}\Bigg|_{0}^{2}=\frac{i}{2n\pi}\left(\left(e^0-e^{in\pi}\right)+3\left(e^{-in\pi}-e^0\right)\right)=$$

$$=\frac{i}{2n\pi}\left(\left(1-e^{in\pi}\right)+3\left(e^{-in\pi}-1\right)\right)=$$

$$=\frac{i}{2n\pi}\left(\left(1-(\cos n\pi+i\sin n\pi)\right)+3\left((\cos n\pi+i\sin n\pi)-1\right)\right)=$$

$$=\frac{i}{2n\pi}\left(\left(1-(-1)^n\right)+3\left((-1)^n-1\right)\right)=\frac{i}{n\pi}\left((-1)^n-1\right),\ n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

Таким образом, ряд Фурье для заданной функции имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{i}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)e^{\frac{in\pi x}{2}}$$

Амплитудный спектр – $\left|\frac{\left((-1)^n-1\right)}{n\pi}\right|$

Фазовый спектр –

$$-\arg\left(\frac{i}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)\right)=\begin{cases}0, & \textit{если } n=2k\\ \frac{\pi}{2}, & \textit{если } n=2k+1\end{cases}$$

Частотный спектр - $\frac{n\pi}{2}$.

Интересна функция Хэвисайда, или что то же самое, единичная функция $h(t)=\begin{cases}0, \text{если } t<0,\\ 1, \text{если } t\ge 0\end{cases}$. С помощью этой функции удобно записывается ступенька на отрезке $[t_1,t_2]$ задаваемая формулой $f(t)=\begin{cases}1, \text{если} t\in[t_1,t_2],\\ 0, \text{если } t\notin[t_1,t_2]\end{cases}$ так как $f(t)=h(t-t_1)-h(t-t_2)$.

Запишем условие замкнутости $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2=\|f\|^2$ для тригонометрической системы $1, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}$, $n=1,2,\ldots$ и функции $f(x)$ с рядом Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

для неё.

Имеем

$$\frac{(a_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n)^2+(b_n)^2\right)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx.$$

Из этого соотношения сразу получаем, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n)^2+(b_n)^2\right)$ сходятся, следовательно, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ и $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

Пусть $g(x)$ другая функция и

$$g(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\beta_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

её ряд Фурье. Условие замкнутости для функции $f(x)+g(x)$ имеет вид

$$\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n+\alpha_n)^2+(b_n+\beta_n)^2\right)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(f(x)+g(x)\right)^2 dx.$$

Аналогично для функции $f(x)-g(x)$ условие замкнутости имеет вид

$$\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n-\alpha_n)^2+(b_n-\beta_n)^2\right)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(f(x)-g(x)\right)^2 dx.$$

Вычитая из первого соотношения второе и сокращая на 4, получаем соотношение

$$\frac{a_0\cdot\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\alpha_n+b_n\cdot\beta_n\right)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot g(x)dx,$$

которое называется обобщённым условием замкнутости.

Пусть теперь $g(x)=\begin{cases}1, & \textit{если } x\in[x_1,x_2],\\ 0 & \textit{если } x\notin[x_1,x_2].\end{cases}$ Тогда

$$\alpha_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)dx=\frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2} dx=\frac{x_2-x_1}{l},$$

$$\alpha_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{-x_1}^{x_2}\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$\beta_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{-x_1}^{x_2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot g(x)dx=\frac{1}{l}\int_{-x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Подставляя полученные выражения для α_0, α_n, β_n в обобщённое условие замкнутости, получаем

$$\frac{a_0}{2}\int_{x_1}^{x_2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-x_1}^{x_2}\cos\frac{n\pi x}{l}dx+b_n\int_{-x_1}^{x_2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right)=\int_{-x_1}^{x_2} f(x)dx,$$

что и означает почленную интегрируемость ряда Фурье для функции $f(x)$. Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема. Тригонометрический ряд Фурье кусочно-непрерывной функции можно интегрировать почленно независимо от характера сходимости.

Для почленной дифференцируемости удаётся доказать лишь следующий результат.

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема, то ряд Фурье для производной $f'(x)$ может быть получен почленным дифференцированием ряда Фурье для функции $f(x)$.

Доказательство опустим.

Отметим, что в сформулированной теореме поточечная сходимость ряда Фурье для производной не гарантируется, хотя в среднеквадратичном ряд сходится обязан.

Интересны также условия равномерной сходимости ряда Фурье, которые сформулированы в следующей теореме.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-l,l]$ и кусочно дифференцируема на $[-l,l]$. Пусть, кроме того, $f(-l)=f(l)$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно относительно $x\in[-l,l]$.

Доказательство. Для доказательства равномерной сходимости достаточно показать сходимость числового ряда $f(x)=\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$ так как он является мажорирующим для ряда Фурье $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$ функции $f(x)$.

Пусть a_0', a_n', b_n' коэффициенты ряда Фурье

$$f'(x)=\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n'\sin\frac{n\pi x}{l}$$

функции $f'(x)$. Установим связь между коэффициентами a_n, b_n и a_n', b_n' функций $f(x)$ и $f'(x)$. Применяя к коэффициентам a_n формулу интегрирования по частям с $u=f(x)$, $dv=\cos\frac{n\pi x}{l}dx$, $du=f'(x)dx$, $v=\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}$, получаем

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=,$$

$$=f(x)\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}-\frac{1}{n\pi}\int_{-l}^{l}f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=-\frac{l}{n\pi}b_n',\ n=0,1,2,\ldots.$$

Аналогично для b_n полагая $u=f(x)$, $dv=\sin\frac{n\pi x}{l}dx$, $du=f'(x)dx$, $v=-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}$, получаем

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=$$

$$=-f(x)\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}+\frac{1}{n\pi}\int_{-l}^{l}f'(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{l}{n\pi}a_n',\ n=1,2,\ldots.$$

Первое слагаемое равно нулю в силу равенства $f(-l)=f(l)$.

Таким образом, получили

$$|a_n|=\frac{l}{n\pi}|b_n'|,\ |b_n|=\frac{l}{n\pi}|a_n'|,\ n=1,2,\ldots.$$

Докажем, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{b_n'}{n}\right|$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n'}{n}\right|$ сходятся. Действительно, из неравенства $(A\pm B)^2\geq 0$ следует оценка $|AB|\leq\frac{A^2+B^2}{2}$. Положив в этом неравенстве $A=a_n', B=\frac{1}{n}$

получаем оценку $\left|\dfrac{a_n'}{n}\right| \le \dfrac{1}{2}\left((a_n')^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$ из которой следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{a_n'}{n}\right|$ так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n')^2$ сходится в силу условия замкнутости для функции $f'(x)$. Аналогично $\left|\dfrac{b_n'}{n}\right| \le \dfrac{1}{2}\left((b_n')^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$, откуда следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{b_n'}{n}\right|$.

Следовательно, из $|a_n| = \dfrac{l}{n\pi}|b_n'|$, $|b_n| = \dfrac{l}{n\pi}|a_n'|$, $n = 1,2,\ldots$,

получаем, что ряд $f(x) = \dfrac{|a_0|}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| + |b_n|$ сходится, а поэтому ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует оценка скорости сходимости к нулю коэффициентов a_n, b_n. Точнее, имеет место следующий результат.

Следствие 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-l,l]$ и кусочно дифференцируема на $[-l,l]$. Пусть, кроме того, $f(-l) = f(l)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n n = 0$.

Доказательство. Так как ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n')^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n')^2$ сходится в силу условия замкнутости для функции $f'(x)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n')^2 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n')^2 = 0$ по необходимому признаку сходимости. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n' = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n' = 0$. Умножая обе части равенств $|a_n| = \dfrac{l}{n\pi}|b_n'|$, $|b_n| = \dfrac{l}{n\pi}|a_n'|$, $n = 1,2,\ldots$ на n получаем требуемое. Следствие доказано.

Следствие 2. Пусть периодическая с периодом $2l$ функция $f(x)$ непрерывна вместе с производными до порядка m включительно, а $(m+1)$-я производная кусочно непрерывна. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n n^{m+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n n^{m+1} = 0$ и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) n^k$, $k = 1,2,...,m$ сходятся.

Доказательство. Нетрудно показать, что если $f(x)$ периодическая с периодом $2l$ функция, то и все её производные, если они существуют, тоже периодические с периодом $2l$ функции. В силу периодичности $f^{(k)}(-l) = f^{(k)}(-l+2l) = f^{(k)}(l)$, $k = 1,2,...,m$. Так как по условию $f^{(m)}(x)$ непрерывна, а $f^{(m+1)}(x)$ кусочно непрерывна, то по следствию 1, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n^{(m+1)}}{n}\right|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{b_n^{(m+1)}}{n}\right|$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(m)} n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{(m)} n = 0$. Далее, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|a_n^{(m)}\right|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|b_n^{(m)}\right|$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(m-1)} n^2 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{(m-1)} n^2 = 0$. Продолжая, получаем, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| n^m$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| n^m$ сходятся, следовательно сходится и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) n^k$, $k = 1,2,...,m$. Кроме того $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(m-m)} n^{m+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n n^{m+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{(m-m)} n^{m+1} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n n^{m+1} = 0$. Следствие доказано.

Приложение 1

1.1. Комплексные числа и действия над ними

При решении алгебраических уравнений степени два и выше иногда приходится рассматривать конструкции вида $a+b\cdot\sqrt{-1}$, где a и b – некоторые действительные числа. Например, подставляя формально конструкцию $1+2\cdot\sqrt{-1}$ в не имеющее действительных корней уравнение $x^2-2x+5=0$, получаем $\left(1+2\cdot\sqrt{-1}\right)^2-2\left(1+2\cdot\sqrt{-1}\right)+5$. Действуя в полученном выражении с конструкцией $1+2\cdot\sqrt{-1}$ как с двучленом по правилам алгебры, известным из школы, раскрывая скобки и приводя подобные, имеем

$$(1)^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{-1}+\left(2\cdot\sqrt{-1}\right)^2-2-2\cdot 2\cdot\sqrt{-1}+5=4+4\cdot(-1)=0\,.$$

Таким образом, конструкцию $1+2\cdot\sqrt{-1}$ можно считать корнем новой природы (не действительным) уравнения $x^2-2x+5=0$.

Пусть i – некоторый формальный символ, x и y – действительные (вещественные) числа. Конструкции вида $z=x+iy$ назовём комплексными числами, x действительной, а y мнимой частями комплексного числа $z=x+iy$ и будем обозначать их соответственно $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$. Число $x-iy$ будем называть сопряжённым (комплексно сопряжённым) к числу $z=x+iy$ и обозначать $\bar{z}$. Два комплексных числа будем считать равными, если совпадают их действительные и мнимые части. На множестве комплексных чисел введём операции сложения и умножения по формулам:

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)\,;$$

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)\,.$$

Заметим, что $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z=2x$, $z-\bar{z}=2\operatorname{Im}z=2y$, следовательно $x=\operatorname{Re}z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\operatorname{Im}z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

Если действительные числа отождествить с комплексными числами вида $x+0\cdot i$, то складывая и умножая числа $x+0\cdot i$ и $y+0\cdot i$ по приведённым выше формулам, получаем

$$(x+0\cdot i)+(y+0\cdot i)=(x+y)+i\cdot(0+0)=(x+y)+0\cdot i,$$

$$(x+0\cdot i)(y+0\cdot i)=(xy-0\cdot 0)+i(x\cdot 0+y\cdot 0)=xy+0\cdot i.$$

Как видим, операции сложения и умножения комплексных чисел вида $x+0\cdot i$ не выводят за множество чисел этого вида (то есть получаются числа того же вида). Поэтому можно считать, что операции сложения и умножения совпадают с обычными операциями над действительными числами и считать комплексные числа расширением множества действительных чисел. Из введённых выше операций над комплексными числами следует, что для комплексного числа $i=0+i\cdot 1$ получаем

$$i^2=(0+i\cdot 1)(0+i\cdot 1)=(0\cdot 0-1\cdot 1)+i(0\cdot 1+1\cdot 0)=-1+0\cdot i=-1.$$

Заметим, что операции сложения и умножения комплексных чисел производятся как соответствующие операции над двучленами с раскрытием скобок и приведением подобных и учётом того, что $i\cdot i=-1$. Слагаемые вида 0 и $0\cdot i$ обычно опускаются.

Обратные операции определяются однозначно и задаются формулами:

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{(x_2)^2+(y_2)^2}.$$

Каждому комплексному числу $z=x+iy$ сопоставим точку (x,y) плоскости R^2. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости. Операция сложения комплексных чисел совпадает с операцией сложения радиус-векторов точек (x, y). Для операции умножения комплексных чисел не находится соответствующей операции над векторами.

Модулем $|z|$ комплексного числа $z = x + iy$ назовём длину радиус-вектора точки (x, y), то есть число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Заметим, что $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. Далее,

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Числа $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ являются соответственно косинусом и синусом угла φ между радиус-вектором точки (x, y) и осью OX. Поэтому можем записать $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Эта форма записи числа z называется тригонометрической формой комплексного числа. Угол φ при этом называется аргументом числа z. Совершенно ясно, что числа, аргументы которых отличаются на 2π, совпадают. Среди всех значений аргумента числа z выбирают значение, называемое главным и обозначают его $\arg z$.

Совмещая алгебраическую и тригонометрическую формы комплексного числа z, можем записать

$$z = x + iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi.$$

Следовательно, $x = \operatorname{Re} z = |z|\cos\varphi$, $y = \operatorname{Im} z = |z|\sin\varphi$. Разделив мнимую часть на действительную, получаем $\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{|z|\sin\varphi}{|z|\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$, или выписывая крайние части соотношения, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$. Если $x = \operatorname{Re} z > 0$, то есть комплексное число z лежит в правой полуплоскости (в первой или четвёртой четверти), то $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ Если же $x=\operatorname{Re}z<0$, то есть комплексное число z лежит в левой полуплоскости (во второй или третьей четверти), то $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi$. Отметим частные случаи. Если число z действительное и положительное, то есть $x=\operatorname{Re}z>0$, $y=\operatorname{Im}z=0$, то $\varphi=0$, если число z действительное и отрицательное, то есть $x=\operatorname{Re}z<0$, $y=\operatorname{Im}z=0$, то $\varphi=\pi$. Если число z мнимое, то есть $x=\operatorname{Re}z=0$, то в случае $y=\operatorname{Im}z>0$ $\varphi=\frac{\pi}{2}$, а в случае $y=\operatorname{Im}z<0$ можно взять либо $\varphi=\frac{3\pi}{2}$, либо $\varphi=-\frac{\pi}{2}$.

Подводя итог вышесказанному, получаем, что при выборе главного значения аргумента из промежутка $[0,2\pi)$ его находят по формулам

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x>0, y>0,\\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x=0, y>0,\\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x<0,\\ \frac{3\pi}{2}, & \text{если } x=0, y<0,\\ 2\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x>0, y<0.\end{cases}$$

Удобным также является выбор главного значения аргумента из промежутков $[-\pi,\pi)$ и $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$. Формулы для нахождения главного значения аргумента при выборе его из промежутков $[-\pi,\pi)$ и $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ предлагается написать самостоятельно. Все значения аргумента обозначают $\operatorname{Arg} z$. Отметим, что $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

Полагая $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, можем записать $z = |z| e^{i\varphi}$. Эта форма записи числа z называется показательной формой записи комплексного числа. Так как $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$, то, складывая и вычитая с $e^{i\varphi}$, получаем формулы Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Далее,

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Поэтому

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1| \cdot |z_2| \big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big) = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Таким образом, мы получили, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Аналогично можно получить, что при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Как следствие этих результатов, получаем формулы возведения комплексного числа в степень n и извлечения корня n-ой степени из комплексного числа, называемые формулами Муавра:

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi);$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Заметим, что для любого действительного отрицательного числа главное значение аргумента равно π, для любого действительного положительного числа главное значение аргумента равно 0.

Пример 1. Найдём $\sqrt[3]{1}$. Так как $|1|=1,\ \arg 1=0,$ то, используя вышеприведённую формулу, имеем $\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3},\ k=0,1,2.$ Придавая k последовательно значения 0,1,2, получаем три значения корня кубического из единицы $\sqrt[3]{1}_1=1,\ \sqrt[3]{1}_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \sqrt[3]{1}_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Пример 2. Найдём $\sqrt{1+i}$. Так как $|1+i|=\sqrt{2},\ \arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$, то

$$\sqrt{1+i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right),\ k=0,1.$$

Придавая k последовательно значения 0,1, получаем два значения $\sqrt{1+i}_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $\sqrt{1+i}_2=\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{8}+\pi)+i\sin(\frac{\pi}{8}+\pi)\right)$ корня квадратного из $\sqrt{1+i}$.

1.2. Некоторые функции комплексного переменного

Перечислим элементарные функции комплексного переменного. Всюду ниже константы a, b, c, d и так далее предполагаются комплексными числами.

Линейное отображение $w=az$ и линейная функция $w=az+b$. Рассмотрим этот оператор немного подробнее. Запишем числа a и z в показательной форме, $a=|a|e^{i\arg a}$, $z=|z|e^{i\arg z}$. Тогда

$$w=az=|a|e^{i\arg a}\cdot|z|e^{i\arg z}=|a|\cdot|z|\cdot e^{i(\arg z+\arg a)},$$

$$w=az+b=|a|e^{i\arg a}\cdot|z|e^{i\arg z}+b=|a|\cdot|z|\cdot e^{i(\arg z+\arg a)}+b$$

Таким образом, при отображении $w = az$ комплексная плоскость в точке z растянулась в $|a|$ раз и повернулась на угол $\arg a$. При отображении $w = az + b$ плоскость ещё и сдвинулась на число b.

Перечислим и некоторые другие функции комплексного переменного.

Дробно-линейная функция $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Степенная функция $w = z^n$ и её частные случаи при различных n.

Дробно-рациональная функция

$$w = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0}.$$

Показательная функция $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$.

Логарифмическая функция

$$w = Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) = \ln|z| + iArgz$$

и её главное значение

$$w = \ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

Тригонометрические функции комплексного переменного

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \ \mathrm{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Гиперболические функции

$$\mathrm{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ \mathrm{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\mathrm{th} z = \frac{\mathrm{sh} z}{\mathrm{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \ \mathrm{cth} z = \frac{\mathrm{ch} z}{\mathrm{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Функции обратные к тригонометрическим и гиперболическим.

Функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Пример 3. Решить уравнение $\cos z = 2$;

Так как $\cos z = 2$, то $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$. Следовательно, $e^{iz} + e^{-iz} = 4$. Умножая обе части равенства на e^{iz} получаем $e^{i2z} - 4e^{iz} + 1 = 0$. Это квадратное уравнение относительно e^{iz}. Решая его получаем $e^{iz} = 2 + \sqrt{3}$ или $e^{iz} = 2 - \sqrt{3}$.

Из первого соотношения получаем

$$iz = Ln(2+\sqrt{3}) = \ln\left|2+\sqrt{3}\right| + i(\arg(2+\sqrt{3}) + 2k\pi) =$$

$= \ln\left|2+\sqrt{3}\right| + 2k\pi i$. Поэтому $z = 2k\pi - i\ln\left|2+\sqrt{3}\right|$.

Из второго соотношения имеем

$$iz = Ln(2-\sqrt{3}) = \ln\left|2-\sqrt{3}\right| + i(\arg(2-\sqrt{3}) + 2k\pi) =$$

$= \ln\left|2-\sqrt{3}\right| + 2k\pi i$. Поэтому $z = 2k\pi - i\ln\left|2-\sqrt{3}\right|$.

Приложение 2

Принцип сжатых отображений и некоторые его применения

Достаточно интересной для практических применений является теорема Стефана Банаха о сжимающем операторе, называемая также принципом сжатых отображений и справедливая в полных метрических пространствах [26]. Прежде, чем приступать к её изложению, дадим необходимые определения.

Определение 1. Множество M элементов произвольной природы называется *метрическим пространством*, если каждой паре точек x, y из M поставлено в соответствие положительное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее условиям, называемым аксиомами метрического пространства:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех x, y из M;
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для всех x, y, z из M.

Примерами метрических пространств являются следующие.

1. Множество действительных чисел R с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$. Справедливость аксиом 1 и 2 очевидна из свойств модуля. Из свойства $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ следует соотношение

$$|x - y| = |x - z - y + z| \leq |x - z| + |z - y|,$$

доказывающее справедливость аксиомы 3.

2. Множество R^n упорядоченных наборов из n вещественных чисел (векторов размерности n) $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2}\ .$$

Для удобства, там, где может возникнуть неоднозначность, будем обозначать это пространство R_2^n. Справедливость аксиомы 1 следует из того, что арифметический корень всегда неотрицателен и сумма квадратов действительных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Справедливость аксиомы 2 следует из равенств

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\eta_i-\xi_i)^2}=\rho(y,x).$$

Справедливость аксиомы 3 следует из неравенства Коши–Буняковского [1]. Соответствующее доказательство можно найти, например, в [1].

3. То же, что и в предыдущем примере, множество R^n векторов $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ размерности n с расстоянием

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i-\eta_i\right|.$$

Для удобства, там, где может возникнуть неоднозначность, будем обозначать это пространство R_1^n.

Справедливость аксиомы 1 следует из того, что модуль всегда неотрицателен и сумма модулей равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Справедливость аксиомы 2 следует из равенств

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i-\eta_i\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|\eta_i-\xi_i\right|=\rho(y,x).$$

Справедливость аксиомы 3 устанавливается следующей цепочкой вычислений:

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i-\eta_i\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i-\zeta_i+\zeta_i-\eta_i\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\xi_i-\zeta_i\right|+\left|\zeta_i-\eta_i\right|\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i-\zeta_i\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|\zeta_i-\eta_i\right|=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

4. То же, что и в предыдущих двух примерах, множест-

во R^n векторов $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ размерности n с расстоянием

$$\rho(x,y)=\max_{1\le i\le n}\left|\xi_i-\eta_i\right|.$$

В случае возникновения неоднозначности будем обозначать это пространство R^n_∞.

Справедливость аксиомы 1 следует из того, что модуль всегда неотрицателен и максимум конечного числа модулей равен нулю тогда и только тогда, когда каждый из модулей равен нулю. Справедливость аксиомы 2 следует из цепочки равенств

$$\rho(x,y)=\max_{1\le i\le n}\left|\xi_i-\eta_i\right|=\max_{1\le i\le n}\left|\eta_i-\xi_i\right|=\rho(y,x).$$

Далее, так как для всякого $i=1,2,...,n$ выполнено неравенство

$$\left|\xi_i-\eta_i\right|\le\left|\xi_i-\zeta_i\right|+\left|\zeta_i-\eta_i\right|,$$

то для всякого $i=1,2,...,n$ имеем

$$\left|\xi_i-\eta_i\right|\le\max_{1\le i\le n}\left|\xi_i-\zeta_i\right|+\max_{1\le i\le n}\left|\zeta_i-\eta_i\right|.$$

Поэтому выполнено неравенство

$$\max_{1\le i\le n}\left|\xi_i-\eta_i\right|\le\max_{1\le i\le n}\left|\xi_i-\zeta_i\right|+\max_{1\le i\le n}\left|\zeta_i-\eta_i\right|,$$

означающее справедливость аксиомы 3.

Понятие расстояния позволяет ввести определение окрестности конечной точки в метрическом пространстве.

Определение 2. Окрестностью точки $x_0\in M$ назовем множество точек $U_\varepsilon(x_0)=\{x\in M:\ \rho(x_0,x)<\varepsilon\}$.

Тогда, по аналогии с определением предела последовательности в R^n [3], можем ввести следующее ниже определение предела последовательности точек метрического пространства.

Определение 3. Точка A называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ при n, стремящемся к бесконечности ($A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует N, зависящее от выбора ε, такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $\rho(A, a_n) < \varepsilon$.

Последовательность, имеющую предел *A*, назовем сходящейся. Будем при этом говорить, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке *A*. Если же предела не существует, то последовательность назовем расходящейся. Так как бесконечно удаленная точка не является элементом из *R*, то числовая последовательность, имеющая пределом ∞, является расходящейся.

Определение 4. Последовательность метрического пространства X называется фундаментальной, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n, m > N$ выполнено неравенство $\rho(a_m, a_n) < \varepsilon$.

Теорема. Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Доказательство. Так как $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то для всякого ε > 0 существует N такое, что для всех $n, m > N$ выполнены неравенства $\rho(A, a_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(A, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, поэтому

$$\rho(a_m, a_n) \le \rho(A, a_n) + \rho(A, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Теорема доказана.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, то есть существуют метрические пространства, в которых не каждая фундаментальная последовательность имеет предел. Например, во множестве рациональных чисел Q с тем же, что и в R, расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$, любая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к иррациональному числу, предела в Q не имеет.

Определение 5. Метрическое пространство X называется полным, если в нем каждая фундаментальная последовательность сходится.

Приведённые выше примеры 1,2,3,4 метрических пространств являются полными метрическими пространствами.

Если в линейном пространстве $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций (см. п.2.3) ввести расстояние по формуле

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}\left|x(t)-y(t)\right|,$$

то это пространство становится полным метрическим пространством. Заметим, что пространство, полное в одной метрике, может не быть полным в другой метрике. Если в $C[a,b]$ ввести расстояние по формуле $\rho(x,y)=\int\limits_a^b\left|x(t)-y(t)\right|dt$, то в этой метрике пространство $C[a,b]$ не является полным. Соответствующий пример последовательности непрерывных функций, сходящейся в этой метрике к разрывной функции, можно найти в книгах по функциональному анализу, например в [26].

Теорема (о сжимающем операторе). Пусть на полном метрическом пространстве X задан оператор $A: X\to X$ (то есть переводящий X в себя) такой, что $\forall x,y\in X$ выполняется неравенство

$$\rho(Ax,Ay)\le\alpha\rho(x,y)\,, \tag{1}$$

где $0<\alpha<1$ и не зависит от x и y. Тогда существует единственная точка x_0 такая, что

$$Ax_0=x_0\,.$$

Оператор A, обладающий свойством (1), называется сжимающим, а точка x_0 – неподвижной точкой оператора A.

Доказательство. Пусть $x \in X$ – произвольная точка. Зафиксируем её на процесс дальнейших рассуждений и положим

$$x_1 = Ax, x_2 = Ax_1, ..., x_n = Ax_{n-1}, ...$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ – фундаментальна. Действительно,

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(Ax, Ax_1) \le \alpha\rho(x, x_1) = \alpha\rho(x, Ax),$$

$$\rho(x_2, x_3) = \rho(Ax_1, Ax_2) \le \alpha\rho(x_1, x_2) \le \alpha^2\rho(x, x_1) = \alpha^2\rho(x, Ax),$$

....

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \le \alpha^n\rho(x, Ax).$$

Далее,

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \le$$

$$\le \alpha^n(1 + \alpha + ... + \alpha^{p-1})\rho(x, Ax) = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x, Ax). \qquad (2)$$

Так как $0 < \alpha < 1$, то

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x, Ax), \qquad (3)$$

откуда и следует утверждение о фундаментальности последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Так как X полное пространство, то существует элемент $x_0 \in X$ такой, что

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Докажем, что $Ax_0 = x_0$. Для этого достаточно показать, что

$\rho(x_0, Ax_0) = 0$. Действительно,

$$\rho(x_0, Ax_0) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, Ax_0) = \rho(x_0, x_n) + \rho(Ax_0, Ax_{n-1}) \le$$

$$\le \rho(x_0, x_n) + \alpha\rho(x_0, x_{n-1}).$$

Так как $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполнены неравенства $\rho(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \rho(x_0, x_{n-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$, и следовательно, неравенство $\rho(x_0, Ax_0) < \varepsilon$. В силу произвольности ε из последнего неравенства следует, что $\rho(x_0, Ax_0) = 0$, и поэтому $Ax_0 = x_0$.

Докажем теперь единственность неподвижной точки у оператора сжатия. Предположим, что существуют два неподвижных элемента $x_0, y_0 \in X$ оператора A, то есть таких, что $Ax_0 = x_0$, $Ay_0 = y_0$. Тогда

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(Ax_0, Ay_0) \le \alpha\rho(x_0, y_0).$$

Если теперь допустить, что $\rho(x_0, y_0) > 0$, то из последнего неравенства следует, что $\alpha \ge 1$, что противоречит условию $0 < \alpha < 1$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Переходя в (2) к пределу при p, стремящемся к ∞, получаем неравенство (3), служащее оценкой ошибки n - го приближения и одновременно оценкой скорости сходимости.

Замечание 1. Построение последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно начинать с любой точки x. Выбор x будет сказываться лишь на быстроте сходимости $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ к x_0.

Замечание 2. Условие $\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y)$, $0 < \alpha < 1$, нельзя заменить на более слабое $\rho(Ax, Ay) \le \rho(x, y)$ и даже на $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$. Соответствующий пример смотри в [28] на странице 63.

Принцип сжатых отображений применяется для доказательства сходимости итерационных процедур, то есть процедур вида $x_{n+1} = Ax_n$ с соответственно подобранным оператором A.

Пусть $A: R^n \to R^n$ – линейный оператор. Тогда $Ax + b = 0$ – система n линейных уравнений с n неизвестными. Рассмотрим оператор $B: R^n \to R^n$, действующий по формуле $Bx = Ax + b$. При $b \neq 0$ B – оператор, полученный из линейного оператора A сдвигом на вектор b. При $b = 0$ оператор B совпадает с оператором A. Найдем условия сжимаемости оператора B при различных метриках в пространстве R^n. Для R_1^n имеем

$$\rho(Bx, By) = \rho(Ax + b, Ay + b) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| (Ax)^i + b_i - (Ay)^i - b_i \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j - \sum_{j=1}^{n} a_j^i y^j \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j^i (x^j - y^j) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| a_j^i \right| \left| x^j - y^j \right| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| a_j^i \right| \right) \left| x^j - y^j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| a_j^i \right| \right) \left| x^j - y^j \right| =$$

$$= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} \left| a_j^i \right| \cdot \sum_{j=1}^{n} \left| x^j - y^j \right| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} \left| a_j^i \right| \rho(x, y).$$

Таким образом, мы получили условие сжимаемости оператора B, а следовательно, и оператора A.

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} \left| a_j^i \right| < 1.$$

Для R_∞^n условие сжимаемости оператора B, а следовательно, и оператора A, имеет вид

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} \left| a_j^i \right| < 1.$$

Для R_2^n условие сжимаемости оператора B, а следовательно, и оператора A

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(a_j^i \right)^2 < 1.$$

Соответствующие вычисления предлагается проделать самостоятельно или посмотреть в [26].

Подводя итоги, получаем, что если систему n линейных уравнений с n неизвестными удается записать в форме $x = Ax + b$ с матрицей A, удовлетворяющей одному из полученных условий сжимаемости оператора A, то, по теореме о сжимающем операторе, последовательные приближения $x_{n+1} = Ax_n + b$ сходятся к точке x_0, являющейся решением данной системы линейных уравнений. Соответствующий процесс называется итерационным.

На этой идее основаны методы простой итерации и его модификации (метод Зейделя).

Пусть теперь функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности (см. п.1.4) решения задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, то есть непрерывна по совокупности переменных в некоторой области D и удовлетворяет в ней условию Липшица по y. Перейдём к эквивалентному интегральному уравнению $y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y)dx$. Рассмотрим оператор, действующий по формуле $By(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$. Этот оператор переводит непрерывную функцию в непрерывную. Получим условия сжимаемости оператора B в метрике пространства $C[a, b]$. Имеем $\rho(By_1, By_2) = \max\limits_{x \in [a,b]} \left| y_1(x) - y_2(x) \right| =$

$$= \max_{x \in [a,b]} \left| \int\limits_{x_0}^{x} (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)))dt \right| \le$$

$$\leq \max_{x\in[a,b]} \int_{x_0}^{x} \left| f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \right| dt \leq$$

$$\leq \max_{x\in[a,b]} \int_{x_0}^{x} L\left| y_1(t)) - y_2(t)) \right| dt \leq L|b-a| \max_{x\in[a,b]} \left| y_1(x)) - y_2(x)) \right|.$$

Таким образом, если $L|b-a|<1$, то оператор B – сжимающий. Тогда, по теореме о сжимающем операторе, решение интегрального уравнения $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$, а следовательно, и задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, существует и единственно на отрезке $[a,b]$.

Приложение 3

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = C$;

2. $\int 1dx = x + C$;

3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \;\; \alpha \neq -1$;

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

5. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + \tilde{C}$;

5a. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + \tilde{C}$;

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \tilde{C}$;

6a. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + \tilde{C}$;

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

7a. $\int e^x dx = e^x + C$;

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;

13. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;

14. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;

15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;

16. $\int e^{ax}\cos bx dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$;

17. $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C$.

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$;

Приложение 4

Таблица основных дифференциалов

1. $dx = \frac{1}{a} d(ax) = \frac{1}{a} d(ax + b)$, где a и b - некоторые числа. В частности, $dx = \frac{1}{2} d(2x) = \frac{1}{2} d(2x + b) = \frac{1}{3} d(3x) = \frac{1}{3} d(3x + b)$ и так далее;

2. $x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} d(x^{\alpha+1}) = \frac{1}{\alpha+1} d(x^{\alpha+1} + b), \alpha \neq -1$. В частности, $xdx = \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} d(x^2 + b)$, $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3) = \frac{1}{3} d(x^3 + b)$, $\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right) = -d\left(\frac{1}{x} + b\right)$, $\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2} d\left(\frac{1}{x^2} + b\right)$, $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x}) = 2d(\sqrt{x} + b)$;

3. $\frac{dx}{x} = d(\ln x) = d(\ln x + b) = \frac{1}{a} d(a \ln x + b)$;

4. $e^x dx = d(e^x) = d(e^x + b)$;

5. $\cos x dx = d \sin x = d(\sin x + b)$;

6. $\sin x dx = -d \cos x = -d(\cos x + b)$;

7. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\mathrm{tg} x = d(\mathrm{tg} x + b)$;

8. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\mathrm{ctg} x = -d(\mathrm{ctg} x + b)$;

9. $\frac{dx}{1 + x^2} = d(\mathrm{arctg}\, x) = -d(\mathrm{arcctg}\, x)$;

10. $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбанев Н.Н. Высшая математика I. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учеб. пособие. /Н.Н. Горбанев, А.А. Ельцов, Л.И. Магазинников – 2-е изд., перераб. и доп.–Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2001.
2. Магазинников Л.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия/ Л.И Магазинников, А.Л. Магазинникова. – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2011.
3. Ельцов А.А. Высшая математика I. Дифференциальное исчисление./ А.А. Ельцов, Г.А. Ельцова, Л.И. Магазинников – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2001.
4. Ельцов А.А. Интегральное исчисление./ А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова – Томск: Томск. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2013.
5. Ельцов А.А. Дифференциальные уравнения./ А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова – Томск: Томск. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2013.
6. Ельцов А.А. Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям./ А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова – Томск: Томск. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2005.
7. Бугров Я. С.Высшая математика: Учеб. для вузов: В 3 т. /Я. С. Бугров, С М. Никольский; Под ред. В. А. Садовничего. — 6-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – (Высшее образование: Современный учебник).
   Т 3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.
8. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1991.
9. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981.
10. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – 3-е изд., испр. и

доп. – М.: Высшая школа, 1967.
11. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа./ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин – 7-е изд., -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
12. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975.
13. Карташев А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления: учеб. пособие для вузов./ А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1986.
14. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1964.
15. Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения. – М.: Наука, 1988.
16. Иванов В.К. Теория линейных некорректных задач и её приложения./ В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана – М.: Наука, 1978.
17. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач./ А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин – М.: Наука, 1979.
18. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1987.
19. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов – М.: Физматлит, 2004.
20. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Физматгиз, 1963.
21. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений./ И.С. Градштейн, И.М. Рыжик – М.: Наука, 1971.
22. Демидович Б.П. Численные методы анализа./ Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова – М.: Наука, 1967.
23. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики./ Б.П. Демидович, И.А. Марон – М.: Наука, 1970.
24. Келли Дж.Л. Общая топология. – М.: Наука, 1968.
25. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной (введение в теорию интеграла). – М.: Наука, 1973. – 350с.

26. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974.
27. Будак Б.Н. Кратные интегралы и ряды./ Б.Н. Будак, С.В. Фомин – М.: Наука, 1967.
28. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов./ А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович – М.: Наука, 1969.
29. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы). Ч.1. Общие функциональные ряды и их приложение: Учеб. Пособие для втузов – М.: Высшая школа, 1980. – 279 с.
30. Магазинников Л.И. Высшая математика 3. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования. – Томск: Изд-во ТУСУРа, 2002. – 206 с.
31. Магазинников Л.И. Высшая математика. Специальные разделы (для автоматизированной технологии обучения). Ч. 1./ Л.И. Магазинников, Г.Н. Глазов – Томск: Изд-во Том.ун-та, 1992. – 198 с.
32. Магазинников Л.И. Высшая математика. Специальные разделы (для автоматизированной технологии обучения). Ч. 2. / Л.И. Магазинников, Г.Н. Глазов – Томск: Изд-во Том.ун-та, 1992. – 193 с.