

---

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И  
РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)**

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ЭМИС

\_\_\_\_\_ И. Г. Боровской

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2012 г.

**С.И. КОЛЕСНИКОВА**

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
СТАТИСТИКА**

*Методические указания по выполнению практических работ  
для студентов 080100.62 «Экономика»*

2012

Колесникова С.И Теория вероятности и математическая статистика– Томск:  
Изд-во ТУСУР, 2012. – 28с.

В методических указаниях по выполнению практических работ рассматриваются основные вопросы теории вероятности и математической статистики, также представлены вопросы для контроля знаний студентов.

**СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**  
**по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»**  
**и руководство по выполнению (36 часов)**  
**для студентов 080100.62 Экономика**

Краткое содержание тем и результатов их освоения .....	4
<b>Раздел 1. Практические работы 1-5. Операции над событиями. Классическое определение вероятности. Вероятность, аксиомы вероятности (по Колмогорову). Элементы комбинаторики. Основные теоремы теории вероятностей. Условные вероятности. Независимость событий. ....</b>	<b>6</b>
<b>Интерактивные занятия №1.1-1.2 (№И1) по теме: «Формулы полной вероятности и Байеса. Схема независимых испытаний. Формула Бернулли. Биномиальное распределение» (4 часа) .....</b>	<b>8</b>
Варианты домашних Заданий к разделу 1 .....	11
Варианты контрольных Заданий к разделу 1 .....	12
Контрольные вопросы к разделу 1 .....	14
<b>Раздел 2. Практические работы 6-10 (10 час) Случайные величины. Распределение вероятностей Интерактивные занятия №2.1-2.2 (№И2) по теме: «Непрерывные распределения: нормальное, показательное, равномерное. ЦПТ» (4 часа).....</b>	<b>14</b>
<b>Практические занятия 9-10 (4 ч.) .....</b>	<b>15</b>
<b>Интерактивное занятие №2.1-2.2 (№И2) по теме: «Непрерывные распределения: нормальное, показательное, равномерное. ЦПТ» (4 часа) .....</b>	<b>15</b>
Варианты домашних Заданий к разделу 2 .....	18
Варианты контрольных Заданий к разделу 2 .....	18
Контрольные вопросы к разделу 2 .....	19
<b>Раздел 3. Практические работы 11-14 (8 час) Основы теории случайных процессов Интерактивные занятия №3.1-3.2 (№И3) по теме: «Цепи Маркова и их использование в моделировании социально-экономических процессов. Теория массового обслуживания: основные модели» (4 часа).....</b>	<b>19</b>
<b>Интерактивные занятия №3.1-3.2 (№И3) по теме: «Цепи Маркова и их использование в моделировании социально-экономических процессов. Теория массового обслуживания: основные модели» (4 часа) .....</b>	<b>21</b>
Варианты домашних Заданий к разделу 3 .....	23
Варианты контрольных Заданий к разделу 3 .....	23
Контрольные вопросы к разделу 3 .....	24
<b>Раздел 4. Практические работы 15-18 (8ч). Основные понятия математической статистики Интерактивные занятия №4.1-4.3 (№И4) по теме: «Гистограмма. Статистические методы обработки экспериментальных данных. Точечные оценки. Функция правдоподобия» (6 час) .....</b>	<b>24</b>
<b>Интерактивные занятия №4.1-4.3 (№И4) по теме: «Гистограмма. Статистические методы обработки экспериментальных данных. Точечные оценки. Функция правдоподобия» (6 часов) .....</b>	<b>25</b>
Варианты домашних Заданий к разделу 4 .....	27
Варианты контрольных Заданий к разделу 4 .....	28
Контрольные вопросы к разделу 4 .....	28

**Обозначения:** ИДЗ - индивидуальные домашние задания  
 СРС - самостоятельная работа студентов  
 ИнЗ - интерактивное занятие

З-Эл – знания элементарные (определения, понятия, умение приводить иллюстрирующие примеры);

З-Пр – знания продуктивные (умение применить знания элементарные для решения учебных задач);

У-Эл – «умения» элементарные (уметь пользоваться готовыми частными алгоритмами для решения типовых задач), умение решать задачи по шаблону (копировать);

У-Пр – «умения» продуктивные (применять положения и известные частные алгоритмы дисциплины для решения практических задач);

В-Эл – элементарное владение методами дисциплины и уверенное осуществление (построение) основных операций для решения типовых задач;

В-Пр – продуктивно распознавать проблемы, алгоритмизировать их анализ и применять методы дисциплины для решения практических задач;

### Краткое содержание тем и результатов их освоения

Тема практических занятий	Деятельность студента. Решая задачи, студент:	Отрабатываемые компетенции и/ожидаемый уровень освоения
1. Основы теории вероятностей. Случайные события	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>использует</i> определения операций над событиями;</li> <li>• <i>выбирает</i> способ решения вероятностной задачи;</li> <li>• <i>устанавливает</i> роль правил суммы и произведения для анализа событий;</li> <li>• <i>использует</i> знания, полученные ранее и самостоятельно решает элементарные задачи двумя способами: комбинаторным (классическим) и на базе теорем суммы и произведения;</li> <li>• <i>учится</i> применять теоремы суммы и произведения;</li> <li>• совместно с преподавателем <i>разрабатывает</i> методику решения таких задач.</li> <li>• <i>использует</i> определения совместности и независимости событий;</li> <li>• <i>решает</i> совместно с преподавателем задачи, связанные с предельными теоремами для схемы Бернулли.</li> </ul>	<p><b>ОК-12, ОК-13/</b> 3-Эл, У-Эл, В-Эл  <b>ПК-14, ПК-15/</b> 3-Пр, У-Пр, В-Пр</p>
2. Случайные величины. Распределение вероятностей	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>учится</i> строить таблицы распределений ДСВ;</li> <li>• <i>определяет</i> основные числовые характеристики ДСВ и НСВ;</li> <li>• <i>определяет</i> независимость и зависимость СВ.</li> <li>• <i>строит</i> графики ФР и плотности распределений (полигоны частот);</li> <li>• <i>учится</i> различать различные типы распределений в тематических задачах, их предметное отличие друг от друга;</li> </ul>	<p><b>ОК-12, ОК-13/</b> 3-Эл, У-Эл, В-Эл  <b>ПК-14, ПК-15/</b> 3-Пр, У-Пр, В-Пр</p>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• находит распределение от монотонной функции от СВ.</li> </ul>	
3. Основы теории случайных процессов	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>решает</i> задачи корреляционного анализа;</li> <li>• <i>находит</i> совместное распределение СВ;</li> <li>• <i>знакомится</i> с принципами теории массового обслуживания;</li> <li>• <i>изучает</i> свойства случайных пуассоновских потоков;</li> <li>• <i>изучает</i> модели законов распределения вероятностей, наиболее употребляемые в социально-экономических приложениях.</li> </ul>	<b>ОК-12, ОК-13/</b> 3-Эл, У-Эл, В-Эл <b>ПК-14, ПК-15/</b> 3-Пр, У-Пр, В-Пр
4. Основные понятия математической статистики	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>изучает</i> выборки и их асимптотические свойства;</li> <li>• <i>находит</i> эмпирическую функцию распределения и другие числовые характеристики выборки;</li> <li>• <i>знакомится</i> со статистическими методами оценивания;</li> <li>• <i>изучает</i> свойства точечных оценок.</li> <li>• <i>излагает</i> метод максимального правдоподобия;</li> <li>• <i>строит</i> гистограммы.</li> <li>• <i>строит</i> доверительные интервалы для нормальной СВ.</li> </ul>	<b>ОК-12, ОК-13/</b> 3-Эл, У-Эл, В-Эл <b>ПК-14, ПК-15/</b> 3-Пр, У-Пр, В-Пр

## ХОД ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

1. Ознакомиться со справочными интернет-сведениями (СРС)
2. Ознакомиться с указанной темой в основной и дополнительной литературе.

- 1). Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Высш.шк., 2003, 400 с.
- 2). Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Высшая школа, 2003, 480 с.

### *Дополнительная литература*

- 1). Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Высш.шк, 2002, 576 с.
- 2). Магазинников Л.И. Высшая математика IV. Теория вероятностей. ТУСУР, 1998, 118 с.
- 3). Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Высш.шк., 2000, 480 с.
- 4). Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. Высш.шк., 2000, 366 с.
- 5). Колесникова С.И. Высшая математика III. Основы теории вероятностей. Элементы математической статистики. Методическое пособие. Томск: ТУСУР, 2007.–106 с.
- 6) Магазинников Л.И. Теория вероятностей. – Томск.: ТУСУР, 2000.–150 с.

3. Ознакомиться с принципом решения задач аудиторных.
4. Рекомендуется решить задачи домашние (в рамках СРС).
5. Ознакомиться с планом проведения интерактивных занятий в случае их проведения, прилагающегося к каждому разделу, и принципом подготовки к нему.
6. Составить и предоставить преподавателю отчет о работе, если он входит в форму отчетности по данному разделу знаний.

**Замечание.** В методических указаниях использовался материал вышеуказанной основной и дополнительной литературы, а также материал других источников и интернет-ресурсов:

- 1) Шевелев Ю.П. Дискретная математика: учебное пособие для вузов - СПб. : Лань, 2008. – 591с.
- 2) Смылова З.А. Дискретная математика: Учебное пособие. - Томск: ТМЦДО, 2000.
- 3) Зюзьков В.М. Дискретная математика. - Томск: ТМЦДО, 1999.
- 4) Жигалова Е.Ф. Дискретная математика. - Томск: ТМЦДО, 2000.
- 5) Липский В. Комбинаторика для программистов. - М.: Наука, 1989.
- 6) <http://www.alleng.ru/d/econ/econ292.htm> Юдин С.В. Математика в экономике. Тула: РГТЭУ, 2009. — 228 с.
- 7) Козлов М. В. Элементы теории вероятностей в примерах и задачах. МГУ, 1990.
- 8) [http://www.aup.ru/books/m155/2\\_12.htm](http://www.aup.ru/books/m155/2_12.htm) Орлов А.И. Математика случая. Вероятность и статистика – основные факты. Учебное пособие. М.: МЗ-Пресс, 2004.

## Раздел 1. Практические работы 1-5.

### **Операции над событиями. Классическое определение вероятности.**

**Вероятность, аксиомы вероятности (по Колмогорову). Элементы комбинаторики. Основные теоремы теории вероятностей. Условные вероятности. Независимость событий.**

### **ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

Знакомство с основными понятиями математической дисциплины, изучающей закономерности массовых случайных явлений.

## Примеры типовых аудиторных заданий

**Практическое занятие 1 (2 ч.).** Операции над событиями. Классическое определение вероятности

**Задача 1.1.** Опыт – бросание игральной кости. Событие  $A = \{\text{выпадение четного числа очков}\}$ . Исходы опыта – выпадение того или иного числа очков. Очевидно, что шесть возможных исходов опыта образуют полную группу попарно несовместных равновероятных событий ( $n=6$ ). Благоприятствуют событию  $A$  три исхода: выпадение 2-х, 3-х и 6-и очков ( $m=3$ ). Следовательно,  $P(A) = m/n = 3/6 = 1/2$ .

**Задача 1.2.** Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события:

- $A = \{\text{герб на первой монете}\};$
- $B = \{\text{цифра на первой монете}\};$
- $C = \{\text{герб на второй монете}\};$
- $D = \{\text{цифра на второй монете}\};$
- $E = \{\text{хотя бы один герб}\};$
- $F = \{\text{хотя бы одна цифра}\};$
- $G = \{\text{один герб и одна цифра}\};$
- $H = \{\text{ни одного герба}\};$
- $K = \{\text{два герба}\}.$

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события:

- 1)  $A + C$ ;
- 2)  $AC$ ;
- 3)  $EF$ ;
- 4)  $G + E$ ;
- 5)  $GE$ ;
- 6)  $BD$ ;
- 7)  $E + K$ .

**Задача 1.3.** Зависимы или независимы: 1) несовместные события; 2) события, образующие полную группу; 3) равновероятные события?

**Практическое занятие 2 (2 ч.).** Вероятность, аксиомы вероятности (по Колмогорову). Элементы комбинаторики

**Задача 1.4.** Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набран правильный номер.

*Решение.* Воспользуемся классическим определением вероятности. Общее число исходов испытания (выбор в определенном порядке двух цифр из десяти) равно числу вариантов извлечения двух элементов из десяти с учетом порядка следования их, т.е. числу размещений из десяти элементов по два:

$$n = A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 9 \cdot 10 = 90.$$

Благоприятный исход испытания только один,  $t=1$ . Следовательно, искомая вероятность равна  $p=1/90$ .

**Задача 1.5.** В партии из десяти деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу изделий 4 стандартных.

Решение. Общее число исходов испытания равно числу вариантов извлечения шести деталей из десяти без учета порядка извлечения, т.е. равно числу сочетаний из десяти элементов по шесть:

$$n = C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 3 \cdot 10 = 210.$$

Число благоприятных исходов согласно основному правилу комбинаторики равно произведению числа вариантов извлечения четырех деталей из семи стандартных на число вариантов извлечения двух деталей из трех нестандартных:

$$m = C_7^4 \cdot C_3^2 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2} = 105.$$

Искомая вероятность равна  $p = 105/210 = 1/2$ .

**Задача 1.6.** Есть  $n$  писем и  $n$  подписанных конвертов. Письма раскладываются в конверты наудачу по одному. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет в предназначенный ему конверт, и предел этой вероятности при  $n \rightarrow \infty$ .

**Практическое занятие 3 (2 ч.).** Основные теоремы теории вероятностей. Условные вероятности. Независимость событий

**Задача 1.7.** Из урны, содержащей не менее двух белых и двух черных шаров, последовательно извлекаются два шара.

$A = \{\text{белый шар при первом извлечении}\};$

$B = \{\text{белый шар при втором извлечении}\};$

$AB = \{\text{белые шары при первом и втором извлечениях}\};$

$A+B = \{\text{первый шар – белый, второй – черный, или первый шар – черный, второй – белый, или первый и второй шары – белые}\}.$

**Задача 1.8.** Опыт: подбрасывание двух монет. События:

$A = \{\text{выпадение «орла» на обеих монетах}\};$

$B = \{\text{выпадение «орла» на одной из монет}\}.$

Найти вероятность  $P(A)$ . Общее число возможных исходов опыта  $n=4$  (oo, op, pp, po), благоприятствующий исход один (oo), следовательно,  $P(A)=1/4$ . (Здесь обозначено за "o" – "орел", за "p" – "решка").

Найти теперь условную вероятность  $P(A|B)$ . Поскольку известно, что произошло событие  $B$ , число возможных исходов испытания  $n=3$  (oo, op, po), благоприятствующий исход по-прежнему один, следовательно,  $P(A|B)=1/3$ .

**Задача 1.9.** Из урны, содержащей 3 белых и 7 черных шаров, наудачу извлекают два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Считаем, что шары извлекаются поочередно. Пусть

$A = \{\text{первый шар – белый}\}, B = \{\text{второй шар – белый}\},$  тогда  $AB = \{\text{оба шара – белые}\}.$

По теореме умножения вероятностей  $P(AB)=P(A)P(B|A)$ . Согласно классическому определению вероятности  $P(A)=3/10, P(B|A)=2/9$ . Следовательно,  $P(AB)= (3/10) \cdot (2/9)$ . Задача 1.6. (2/9).

**Интерактивное занятие №1.1-1.2 (№И1) по теме: «Формулы полной вероятности и Байеса. Схема независимых испытаний. Формула Бернулли. Биномиальное распределение» (4 часа)**

**Цель занятия:** активное воспроизведение ранее полученных знаний по разделу 1 «Основы теории вероятностей. Случайные события» в «незнакомых» условиях



(применение основных понятий темы раздела 1 для решения задачи: построение вероятностных моделей для практически важных текстовых задач).

**Дополнительная литература** для подготовки к занятию:

- 1) <http://www.math.ru/lib/book/djvu/50zadach.djvu> Ф. Мостеллер. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. 1975. — 112 с.
- 2) Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. РХД, 2003.

**Форма текущего контроля** освоения компетенций ОК-12, ОК-13, ПК-14, ПК-15 уровни 3-Пр, У-Пр, В-Пр (см. табл.1): *отчет* по решению следующих практических текстовых задач:

**Задача И1.1.** *Дни рождéния.* (Начальный уровень) Доказать, что парадóкс дней рождéния - это не парадокс. «Парадоксальное» утверждение: вероятность совпадения дней рождения (числа и месяца) хотя бы у двух членов группы из 23 и более человек, превышает 50%. Для 60 и более человек вероятность такого совпадения превышает 99%, хотя 100% она достигает, согласно принципу Дирихле, только когда в группе не менее 367 человек (с учётом високосных лет).

**Задача И1.2.** *Осторожный фальшивомонетчик.* (Начальный уровень) В каждый ящик в сто монет кладется одна фальшивая ( $m$  фальшивых в общем случае). Для проверки из ста ящиков берутся по одной монете из каждого последовательно. Какова вероятность, что фальшивомонетчик не будет обнаружен?

**Задача И1.3** *Долговечность ламп.* (Начальный уровень). На складе вперемешку хранятся лампы, полученные с четырех заво-дов: 250 – с первого завода, 525 – со второго, 275 – с третьего и 950 – с четвертого. Вероятность того, что лампа проработает больше 1500 часов, для продукции этих заводов соответственно равна 0.15, 0.3, 0.2 и 0.1. Найти вероятность того, что взятая наугад лампа проработает больше 1500 часов.

**Задача И1.4** *Задача по кредитам.* (Средний уровень). Средний процент невозврата кредита, выданного банком, составляет 5%. Найти вероятность того, что при выдаче банком ста кредитов, проблема с невозвратом возникнет не менее, чем в двух случаях.

**Задача И1.5** *Задача по кредитам.* (Средний уровень). Средний процент невозврата кредита, выданного банком, составляет 5%. Найти вероятность того, что при выдаче банком ста кредитов, проблема с невозвратом возникнет не менее, чем в двух случаях.

**Задача И1.6** *Успеваемость.* (Средний уровень). В группе из десяти студентов, пришедших на экзамен, три студента подготовлены отлично, четыре – хорошо, два – посредственно и один – плохо. Отлично подготовленный студент знает все 20 вопросов экзаменационных билетов, хорошо подготовленный – 16, посредственно подготовленный – 10, плохо подготовленный – 5. Вызванный наугад студент ответил на все три вопроса билета. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен отлично.

**Задача И1.7** *Лотерея.* (Высокий уровень). В шкафу стоят однотипные приборы, из которых 15 новых и 10 уже бывших в эксплуатации. Берутся наугад два прибора и

эксплуатируются в течение некоторого времени, после чего возвращаются в шкаф. Затем вторично берутся наугад два прибора. Найти вероятность того, что оба вторично взятых прибора новые.

**Задача И1.8 Шары.** (Высокий уровень). В первой урне – 1 белый и 2 черных шара, во второй – 3 белых и 3 черных шара. Из второй урны наугад переложили в первую один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар находился ранее во второй урне, если известно, что он белый.

**Задача И1.9 Попадание в цель.** (Высокий уровень). По самолету производится три выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.5. при втором – 0.6, при третьем – 0.8. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0.3, при двух попаданиях – с вероятностью 0.6. при трех попаданиях – с вероятностью 1. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет выведен из строя.

**Задача И1.10 Сортировочная станция.** (Высокий уровень). На железнодорожную сортировочную станцию поступает состав из  $k$  вагонов, направляемых в различные адреса; в адрес  $A_1$  направляются  $k_1$  вагонов, в адрес  $A_2$  —  $k_2$  вагонов, в адрес  $A_3$  —  $k_3$  вагонов ( $k_1 + k_2 + k_3 = k$ ). Вагоны в составе занимают то или другое положение независимо друг от друга; все места в составе для любого вагона равновероятны. Найти вероятность того, что все вагоны, направляемые в один и тот же адрес, будут стоять рядом.

**Подготовка занятия №1.** Выбор ведущего студента, ответственного за выбор и подачу необходимой информации и обсуждение с ним алгоритма занятия.

Таблица 1

№	№ задачи	Вид (совмещение нескольких видов) интерактивной работы	Трудоемкость (час)	Отрабатываемые компетенции/ожидаемый уровень освоения	Оценка личностных качеств	Контроль выполнения работы (участие в полемике, индивидуальные групповые задания (ИГЗ) и т.д)
1	И1.1-И1.3	Работа в команде. Решение ситуационных задач.	1	ОК-12, ОК-13/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-14, ПК-15/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
2	И1.4-И1.6	Работа в команде. Решение ситуационных задач. Исследовательский метод	1	ОК-12, ОК-13/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-14, ПК-15/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
3	И1.7-И1.10	Работа в команде.	2	ОК-12, ОК-13/	Качество работы;	ИГЗ. Критерии оценивания поведения

	Решение ситуационных задач. Исследовательский метод		3-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-14, ПК-15/ 3-Пр, У-Пр, В-Пр	своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
Всего		4			

**Вступление.** Сообщение темы и обоснование ее актуальности через вышеуказанные задачи.

**Основная часть:**

- I. Сообщение в виде доклада-презентации ответственными двумя студентами за проведение занятия 1, в котором излагается суть обсуждаемых положений:
  - 1) Формулы полной вероятности и Байеса на примере задач типа: *Два стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0.6, вторым – 0.8. Найти вероятность того, что в мишени будет две пробоины.*  
*Решение.* Введем в рассмотрение события, вероятности которых известны:  
 $A = \{\text{поражение мишени первым стрелком}\},$   
 $B = \{\text{поражение мишени вторым стрелком}\}.$   
 Интересующее нас событие выразим через эти события. Для того, чтобы имело место событие  $C = \{\text{две пробоины в мишени}\},$  надо, чтобы произошли вместе события  $A$  и  $B,$  т.е.  $C = AB.$   
 Естественно считать события  $A$  и  $B$  независимыми, поэтому  $P(C) = P(A) P(B) = 0.6 \cdot 0.8.$
  - 2) Схема независимых испытаний. Формула Бернулли. Биномиальное распределение;
  - 3) Предельные теоремы в схеме Бернулли.
- II. Выяснение позиций участников с зафиксированными точками зрения на решение вышеизложенных задач.

Итог II-го этапа: формирование целевых групп по общности позиций каждой из групп.

- III. Организация коммуникации между группами: 1) выяснение позиции-варианта решения выявленных групп и защита занятой позиции; 2) формирование нового набора вариантов решений на основании общего обсуждения; 3) выбор одного решения голосованием;
- IV. Повторная защита позиций-вариантов групп после проведения расчетов с целью оценки отклонения от «истинного» решения (попарное оценивание).

**Выводы:** реализован самостоятельный поиск учащимися путей и вариантов решения поставленной учебной задачи (выбор одного из предложенных вариантов или нахождение собственного варианта и обоснование решения на базе коллективной интерактивной работы).

**Итог занятия №И1:** Оценивание уровней 3-Пр, У-Пр, В-Пр освоения компетенций ОК-1, ПК-32 по результатам работы на занятиях (активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции) и своевременности сдачи отчета по решению практических задач И1.1-И1.9.

### ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 1

- 1) Партия содержит 8 изделий первого сорта и 32 изделия второго сорта. Наудачу взято 5 изделий. Найти вероятность того, что среди них ровно 4 изделия одного сорта.
- 2) Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания для первого охотника равна 0.2, а для второго – 0.6. Произошло только одно попадание. Найти вероятность того, что промахнулся первый охотник.

- 3) Для прядения смешаны поровну белый и окрашенный хлопок. Какова вероятность среди пяти случайно выбранных волокон смеси обнаружить менее двух окрашенных?
- 4) Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения в пути для каждого изделия равна 0.0002. Найти вероятность того, что будет повреждено не более трех изделий.
- 5) В урне 20 шаров, из них 3 черных. Наудачу взято 5 шаров. Найти вероятность того, что среди взятых шаров не более одного черного.
- 6) На сборку поступают детали с трех станков. Известно, что первый станок дает 0.3% брака, второй – 0.2%, третий – 0.4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого станка поступило 1000, со второго – 2000 и с третьего – 2500 деталей.
- 7) Что вероятнее, выиграть у равносильного противника две партии из четырех или четыре из восьми? Ничейные исходы не учитываются.
- 8) Вероятность появления некоторого события при одном испытании равна 0.4. Найти вероятность того, что при 1000 испытаний относительная частота этого события отклонится от вероятности не более чем на 0.05.
- 9) Изделия определенного вида изготавливаются на трех поточных линиях. Первая линия производит 20% изделий, вторая – 30%, третья – 50%. Каждая линия характеризуется соответственно следующими показателями выхода годных изделий: 95%, 98% и 97%. Найти вероятность того, что взятое наугад и оказавшееся бракованным изделие изготовлено на первой линии.
- 10) Сделано 14 выстрелов по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.2. Найти наименьшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.
- 11) Сколько нужно провести опытов с бросанием монеты, чтобы с вероятностью 0.92 можно было ожидать, что относительная частота выпадения «орла» отклонится от вероятности 0.5 менее чем на 0.01 ?

## ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 1

### I вариант

- 1) Подброшены две монеты. Какова вероятность того, что только на одной монете выпадет «орёл»?
- 2) Десять человек случайным образом рассаживаются за круглым столом. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся сидящими рядом?
- 3) Имеется две партии изделий. Каждая партия состоит из пяти изделий первого сорта и трех – второго сорта. Из каждой партии наугад берут по два изделия. Найти вероятность того, что состав партий останется одинаковым.
- 4) В ящик, содержащий три одинаковых детали, брошена одна стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находившихся в ящике.
- 5) Производится четыре независимых выстрела по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.5. Для разрушения цели достаточно хотя бы одного попадания. Найти вероятность того, что цель будет разрушена.
- 6) Вероятность получения положительного результата в каждом из опытов равна 0.9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0.98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?

### II вариант

- 1) Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков не превосходит семи.
- 2) В партии 20 изделий, из них 7 нестандартных. Наудачу взято 5 изделий. Найти вероятность того, что среди выбранных изделий 2 нестандартных.
- 3) В партии десять изделий, из которых три нестандартных. Наудачу взято пять изделий. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одно нестандартное.
- 4) Вероятность того, что изделие некоторого предприятия удовлетворяет стандарту, равна 0.95. Упрощенная схема проверки качества дает положительный результат с вероятностью 0.98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, и с вероятностью 0.05 для изделий, не удовлетворяющих стандарту. Найти вероятность того, что изделие, признанное стандартным, действительно стандартное.
- 5) Производится восемь независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события  $A$  равна 0.1. Найти вероятность того, что событие  $A$  появится в этих испытаниях хотя бы один раз.

### III вариант

- 1) Наудачу выбирается целое число от 1 до 30 включительно. Какова вероятность того, что оно является делителем числа 30?
- 2) Из десяти лотерейных билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов найдутся оба выигрышных.
- 3) Стрелок стреляет три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.8, при втором – 0.7, при третьем – 0.6. Какова вероятность того, что будет только одно попадание?
- 4) Имеется шесть одинаковых урн. В пяти урнах находится по 2 белых и 2 черных шара, а в одной – 5 белых и 1 черный шар. Из взятой наугад урны извлечен шар, оказавшийся белым. Найти вероятность того, что шар взят из урны, содержащей 5 белых шаров.
- 5) Производится четыре независимых выстрела по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.5. Для разрушения цели достаточно хотя бы одного попадания. Найти вероятность того, что цель будет разрушена.
- 6) Вероятность появления события  $A$  в каждом испытании равна 0.8. Сколько нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью 0.9 можно было ожидать, что событие  $A$  появится не менее чем 75 раз?

### IV вариант

- 1) Экзаменационные работы зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что номер наугад взятой работы кратен 10 или 11?
- 2) Найти вероятность того, что все четыре туза в хорошо перетасованной колоде из 36-и карт окажутся вместе.
- 3) Три стрелка одновременно стреляют в одну мишень. Найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина, если вероятности попадания в мишень для каждого из стрелков соответственно равны 0.9, 0.8 и 0.7.
- 4) Изделия определенного вида изготавливаются на трех поточных линиях. Первая линия производит 20% изделий, вторая – 30%, третья – 50%. Каждая линия характеризуется соответственно следующими показателями выхода годных изделий: 95%, 98% и 97%. Найти вероятность того, что взятое наугад и оказавшееся бракованным изделие изготовлено на первой линии.
- 5) Сделано 14 выстрелов по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.2. Найти наименьшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.

б) Сколько нужно провести опытов с бросанием монеты, чтобы с вероятностью 0.92 можно было ожидать, что относительная частота выпадения «орла» отклонится от вероятности 0.5 менее чем на 0.01 ?

### Контрольные вопросы к разделу 1

1. Доказать формулу суммы событий.
2. Вывести формулу для произведения событий.
3. Дать определение алгебры и сигма-алгебры событий.
4. Вероятность «хотя бы одного успеха» в вероятностных задачах.
5. Дать определение гипотез, привести примеры событий-гипотез и событий-не гипотез.
6. Доказать формулу полной вероятности.
7. Доказать формулу Байеса.

### Раздел 2. Практические работы 6-10 (10 час) Случайные величины. Распределение вероятностей Интерактивные занятия №2.1-2.2 (№И2)

по теме: «Непрерывные распределения: нормальное, показательное, равномерное. ЦПТ» (4 часа)

**Цель работы:** Изучение и закрепление материала: по второму разделу: Случайные величины. Распределение вероятностей

**Дополнительная литература** для подготовки к занятию:

- 1) <http://www.alleng.ru/d/econ/econ292.htm> Юдин С.В. Математика в экономике. Тула: РГТЭУ, 2009. — 228 с.
- 2) [http://www.aup.ru/books/m155/2\\_12.htm](http://www.aup.ru/books/m155/2_12.htm) Орлов А.И. Математика случая. Вероятность и статистика – основные факты. Учебное пособие. М.: МЗ-Пресс, 2004.

**Форма текущего контроля** освоения компетенций ОК-12, ОК-13, ПК-14, ПК-15 уровни 3-Пр, У-Пр, В-Пр (см. табл.2): отчет по решению следующих практических текстовых задач:

### Примеры типовых аудиторных заданий

**Практическое занятие 6 (2 ч).** Распределения случайных величин: дискретные с.в. 4. Числовые характеристики случайных величин.

**Задача 2.1.** Приобретено пять лотерейных билетов. Вероятность выигрыша по одному билету равна 0,05.  $X$  – число выигравших билетов. Требуется для дискретной случайной величины  $X$ : а) построить ряд распределения; б) вычислить  $M(X)$ ,  $D(X)$  и  $\sigma(X)$ ; в) найти вероятность  $P(X < M(X))$ .

**Задача 2.2.** Даны значения независимых случайных величин  $x$  и  $y$  и их вероятности:

$x$	2	3	5	$y$	1	4
$p$	0,3	0,5	0,2	$p$	0,2	0,8

Найти распределения (значения и вероятности) случайной величины  $z = x + y$ . Вычислить среднее значение и дисперсию.

**Задача 2.3.** Случайная величина  $x$  равномерно распределена в интервале  $(a, b)$ . Найти плотность вероятности и функцию распределения случайной величины  $h = x^2$ .  $a = -5$ ,  $b = 5$ .

**Практическое занятие 7 (2 ч.).** Распределения непрерывных случайных величин. Плотность распределения. Моменты случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация и их свойства.

**Задача 2.4.** Дана плотность распределения случайной величины  $X$  :

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \in [\gamma, b] \\ 0, & x \notin [\gamma, b] \end{cases}$$

Найти: параметр  $\gamma$ ; определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , функцию распределения  $F(x)$  и вероятность  $P(\alpha < X < \beta)$ . Исходные данные:  $a=1.0$ ;  $b=2.8$ ;  $\alpha=2.1$ ;  $\beta=2.5$ .

**Задача 2.5.** Случайная величина  $X$  – отклонение концентрации раствора от нормы – нормально распределенная, причём  $M(X)=0$ . Найти  $\sigma(X)$ , если известно, что  $P(-0.01 < X < 0.01) = 0.3$ .

**Задача 2.6.** Найти распределение величины  $Y = aX + b$ , если плотность вероятности СВ  $X$

имеет вид:  $f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2\delta^2}}$ .

**Задача 2.7.** Чему равен коэффициент корреляции величин  $ax+b$  и  $ch+d$ , где  $a, b, c, d$  - детерминированные константы, а  $x$  и  $h$  имеют коэффициент корреляции  $r$ ?

**Практическое занятие 8 (2 ч.).** Биномиальное и геометрическое распределения. Теорема Пуассона, оценка отклонения биномиальных вероятностей от пуассоновских.

**Задача 2.8.** Найти числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию, моду, медиану) для дискретных случайных величин с биномиальным, геометрическим и пуассоновским распределением.

**Задача 2.9.** Два стрелка  $A$  и  $B$  независимо друг от друга стреляют поочередно по некоторой цели, имея по 2 патрона, каждый — до первого попадания одним из стрелков или до полного израсходования патронов. Вероятность попадания при одном выстреле стрелком  $A$  равна 0.3, а стрелком  $B$  – 0.5. Стрельбу начинает  $B$ .  $X$  — общее число попаданий. Найти а) ряд распределения  $X$ ; б)  $MX$ , функцию распределения  $F(x)$ , в ответ ввести  $F(3.5)$ ; в)  $\sigma_x$ ; г)  $Dx$  (округлить до 0,001); д)  $P(1.5 < x < 3,5)$ .

**Задача 2.10.** Вероятность производства бракованной детали равна 0.006. Какова вероятность наиболее вероятного числа бракованных деталей среди наудачу отобранных 1500 деталей?

### Практические занятия 9-10 (4 ч.)

**Интерактивное занятие №2.1-2.2 (№И2) по теме: «Непрерывные распределения: нормальное, показательное, равномерное. ЦПТ» (4 часа)**

**Цель занятия:** активное воспроизведение ранее полученных знаний по разделу 2 и освоение новой темы «Непрерывные распределения: нормальное, показательное, равномерное. ЦПТ».

**Форма текущего контроля** освоения компетенций ОК-12, ОК-13, ПК-14, ПК-15, *отчет* по решению указанных практических задач:

**Задача И2.1. Брак деталей.** (Начальный уровень) Деталь, взятая с конвейера, считается годной, если отклонение  $X$  её контролируемого размера от номинала не превышает 0.15мм. Величина  $X$  распределена нормально, причём  $\sigma(X)=0.9$ мм. Найти вероятность того, что деталь не будет признана браком.

**Задача И2.2. Контроль деталей.** (Начальный уровень) Завод изготавливает бруски. Номинальный размер (длина) бруска  $d = 10$  мм. Фактический диаметр – случайная величина с мате-матическим ожиданием 12.5 мм и среднеквадратическим отклонением 0.26 мм. При контроле бракуются все бруски, диаметр которых отличается от номинала более, чем на 0.01 мм. Определить процент брака.

**Задача И2.3. Числовые характеристики с.в.** (Начальный уровень) Найти числовые характеристики (матожидание, дисперсию, моду, медиану) для нормального, показательного, равномерного законов.

**Задача И2.4. Дальность полёта** (Средний уровень) Средняя дальность полёта пули равна  $t$ . Предполагается, что дальность полёта  $X$  распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением 50м. Найти, какой процент снарядов даёт перелёт от 150 м до 200 м.

**Задача И2.5. Стрельба по цели** (Средний уровень) Производится стрельба по цели, имеющей вид полосы шириной 65 м. Прицеливание производится по средней линии полосы. Среднеквадратическое отклонение точки попадания от середины полосы равно 18 м. Найти вероятность попадания в полосу при одном выстреле.

**Задача И2.6. Закон Пуассона.** (Средний уровень) В цехе  $n=100$  станков. Количество отказов  $k$  за смену подчиняется закону Пуассона с параметром  $\lambda=0.34$ . Найти вероятность того, что количество отказов находится в интервале:  $3 \leq k \leq 5$ .

**Задача И2.7. Проценты.** (Высокий уровень). Банкомат выдаёт стандартные суммы в 500, 100 и 50 долл., причём первые составляют 10%, а последние - 60% всех выдач. В среднем банкомат производит 100 выдач в сутки. Определить размер денежной суммы, которую необходимо заложить в банкомат утром, чтобы этой суммы с вероятностью 0,9 хватило для выдачи наличности вкладчикам до следующего утра.

**Задача И2.8. Торговля.** (Высокий уровень). Торговец газетами ходит по вагонам электропоездов. В каждом из вагонов он может продать газету с вероятностью  $1/3$ . Случайная величина  $X$  - число вагонов, в которые заходил торговец прежде, чем продал первые 100 газет. Найти распределение случайной величины  $X$ .

**Задача И2.9. Стоимость акции.** (Высокий уровень). Почему стоимость акции лучше описывается логнормальным распределением, чем нормальным?

**Подготовка занятия №И2.** Выбор ведущего студента, ответственного за выбор и подачу необходимой информации, и обсуждение с ним алгоритма занятия.

Таблица 2

№	№ зада-чи	Вид интерактивной работы (совмещение)	Тру до-емк-ость	Отрабатываемые компетенции/	Оценка личностных качеств	Контроль выполнения работы (участие в полемике, индивидуальные
---	-----------	---------------------------------------	-----------------	-----------------------------	---------------------------	--



		нескольких видов)	(час.)	ожидаемый уровень освоения		групповые задания (ИГЗ) на базе выбранного программного продукта и т.д)
1	И2.1-2.3	Работа в команде. Решение ситуационных задач.	1	ОК-12, ОК-13/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-14, ПК-15/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
2	И2.4-2.6	Работа в команде. Решение ситуационных задач. Исследовательский метод.	1	ОК-12, ОК-13/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-14, ПК-15/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
3	И2.7-2.9	Работа в команде. Решение ситуационных задач. Исследовательский метод.	2	ОК-12, ОК-13/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-14, ПК-15/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
Всего			4			

**Вступление.** Сообщение темы и обоснование актуальности вероятностных распределений: нормального, показательного, равномерного в практических задачах (в экономике, в частности).

**Основная часть:**

- I. Сообщение в виде доклада-презентации ответственным (студентом, двумя студентами) за проведение занятия И2, в котором излагается суть обсуждаемых положений:
    - 1) Непрерывные распределения: нормальное, показательное, равномерное.
    - 2) Неравенство Чебышева. Закон больших чисел и его следствие;
    - 3) Центральная предельная теорема Ляпунова.
    - 4) Перечень практических вероятностно-статистических задач с данными распределениями.
  - II. Выяснение позиций участников с зафиксированными точками зрения на решение основной задачи И2.2, решаемой на занятии.
- Итог II-го этапа: формирование целевых групп по общности позиций каждой из групп.
- III. Организация коммуникации между группами: 1) выяснение позиции-варианта решения выявленных групп и защита занятой позиции; 2) формирование нового набора вариантов решений на основании общего обсуждения; 3) выбор одного решения голосованием;
  - IV. Повторная защита позиций-вариантов групп после проведения расчетов с целью оценки отклонения от «истинного» решения.

**Выводы:** реализован самостоятельный поиск учащимися путей и вариантов решения поставленной учебной задачи (выбор одного из предложенных вариантов или нахождение собственного варианта и обоснование решения на базе коллективной интерактивной работы).

**Итог занятия №И2:** Оценивание уровней 3-Пр, У-Пр, В-Пр освоения компетенций ОК-12, ОК-13, ПК-14, ПК-15 по результатам работы на занятиях (активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции) и своевременности сдачи отчета по решению реальной практической задачи.

## ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 2

1. Известно, что случайные величины  $X$ ,  $Y$  независимы, причем  $DX=4$ ,  $DY=3$ . Найти  $D(3X)$ ,  $D(-2Y)$ ,  $D(X+Y)$ ,  $D(X-Y)$ .
2. Известно, что  $EX=1$ ,  $EY=2$ ,  $EX^2=2$ ,  $EY^2=8$ ,  $EXY=1$ . Найти  $DX$ ,  $DY$ ,  $\text{cov}(X, Y)$ ,  $D(X+Y)$ .
3. Два стрелка, для каждого из которых вероятность попадания в цель равна  $p$ , производят  $n$  залпов по два выстрела. Найти математическое ожидание и дисперсию числа парных попаданий  $X$  и общего числа попаданий  $Y$ .
4. В интервал времени  $[0, T]$  в случайный момент времени появляется сигнал длительности  $\tau$ . Приемник включается в случайный момент на время  $t$ . Найти вероятность обнаружения сигнала.
5. Монета упала на дощатый пол. Ширина доски  $2H$ , радиус монеты  $r$  ( $2r < 2H$ ). Какова вероятность того, что монета попадет на щель?
6. Найти производящую функцию, математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , имеющей геометрическое распределение.
7. Найти функцию распределения, производящую функцию, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины  $X$ , заданной законом распределения:  

$X$	-1	1	3
$p$	0,2	0,3	0,5

## ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 2

### Вариант I

1. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,4.  $X$  – число попаданий в мишень. Требуется для дискретной случайной величины  $X$ : а) построить ряд распределения; б) вычислить  $M(X)$ ,  $D(X)$  и  $\sigma(X)$ ; в) найти вероятность  $P(X < M(X))$ .
2. Дана плотность распределения случайной величины  $X$  :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ bx^2 + 0,5, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти: а) константу  $b$ ; функцию распределения  $F(x)$ , в ответ ввести  $F(1/3)$ ;  $F(1/2)$ ; в)  $MX$ ; г)  $DX$ ; д)  $P(1/3 < X < 1/2)$ .

3. Весы для тяжелых предметов считаются годными, если отклонение  $X$  от контрольного веса на более чувствительных весах не превышает 18 г. Величина  $X$  – нормально распределенная и  $M(X)=0$ ,  $D(X)=10$  г. Сколько процентов пригодных весов изготавливает завод? Ответ округлить до целых.

### Вариант II

1. Из коробки, содержащей 3 синих и 4 красных карандаша, наудачу вынимают 3 карандаша.  $X$  – число красных карандашей среди вынутых. Требуется для дискретной случайной величины  $X$ : а) построить ряд распределения; б) вычислить  $M(X)$ ,  $D(X)$  и  $\sigma(X)$ ; в) найти вероятность  $P(X < M(X))$ .
2. Задана плотность распределения вероятностей
 
$$f(x) = \begin{cases} a|x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$
3. Найти: а) константу  $a$ ; б) функцию распределения  $F(x)$ , в ответ ввести значения  $F(-1/2)$ ,  $F(1/2)$ ; в)  $M(X)$ ; г)  $D(X)$ ; д)  $P(-1/2 < X < 2)$ .

### Вариант III

1. Игральная кость бросается до появления шестерки, но не более семи раз.  $X$  – число бросаний кости. Требуется для дискретной случайной величины  $X$ : а) построить ряд распределения; б) вычислить  $M(X)$ ,  $D(X)$  и  $\sigma(X)$ ; в) найти вероятность  $P(X < M(X))$ .
2. Задана плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ ax^3 + b, & -1 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Найти: а) константы  $a$ ; б) функцию распределения  $F(x)$ , в ответ ввести значения  $F(-1/2)$ ,  $F(1/2)$ ; в)  $M(X)$ ; г)  $D(X)$ ; д)  $P(-1/2 < X < 0.5)$ .

### Контрольные вопросы к разделу 2

1. Доказать свойства для математического ожидания и дисперсии СВ.
2. Вывести формулу дисперсии суммы и произведения СВ.
3. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии типовых вероятностных распределений дискретных СВ (Пуассона, геометрического, биномиального).
4. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии типовых вероятностных распределений непрерывных СВ (нормального, показательного, равномерного).
5. Сформулировать ЦПТ и дать «практическую» интерпретацию.
6. Предельные теоремы для биномиального распределения.
7. Дать определение коэффициента корреляции двух СВ.

### Раздел 3. Практические работы 11-14 (8 час)

#### Основы теории случайных процессов

#### Интерактивные занятия №3.1-3.2 (№ИЗ) по теме: «Цепи Маркова и их использование в моделировании социально-экономических процессов. Теория массового обслуживания: основные модели» (4 часа)

**Цель работы.** Знакомство с основами теории случайных процессов и моделирования систем массового обслуживания.

*Дополнительная литература* для подготовки к занятию:

Денисенко Т.И. Использование марковских цепей при решении различных прикладных задач // Фундаментальные исследования. – 2009. – № 1 – С. 27-28  
www.rae.ru/fs/?section=content&op=show\_article&article\_id=7781400.

### Примеры типовых аудиторных заданий.

Марковские цепи используются в теории массового обслуживания для расчета распределения вероятностей числа занятых приборов в системе, состоящей из  $n$  приборов с пуассоновским потоком требований и показательным законом времени обслуживания.

**Практическое занятие 11 (2 ч.).** Совокупности случайных величин. Совместное распределение. Независимость случайных величин.

**Задача 3.1.** Каждая из двух случайных величин  $x$  и  $h$  принимает лишь два значения  $a$  и  $-a$ . Вероятности всех сочетаний  $x$  и  $h$  даны в табл.3.1.

Таблица 3.1

$x$	$a$	$a$	$-a$	$-a$
$h$	$a$	$-a$	$a$	$-a$
$p$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Ответить на вопросы: а) являются ли  $x$  и  $h$  независимыми? Если нет, то каков их коэффициент корреляции? б) Найти законы распределения  $x$  и  $h$ .

**Задача 3.2.** Вычислить и построить двумерную функцию распределения  $F(x,y)$  независимых дискретных величин  $x$  и  $y$ , если случайная величина  $x$  принимает три возможных значения  $0, 1$  и  $3$  с вероятностями  $1/2, 1/4$  и  $1/4$ , а  $y$  - два значения  $0$  и  $1$  с вероятностями  $1/3$  и  $2/3$ .

**Задача 3.3.** Вычислить коэффициент корреляции случайных величин  $x$  и  $x + h$ , если  $x$  и  $h$  - совместно независимые нормальные (гауссовские) величины с нулевыми средними и дисперсиями  $Dx$  и  $Dh$  соответственно.

**Практическое занятие 12 (2 ч.).** Понятие случайного процесса. Пуассоновский процесс. Случайные потоки.

**Задача 3.4.** Доказать свойство, связывающее показательный закон и пуассоновский процесс: При показательном распределении интервала времени между требованиями  $T$ , независимо от того, сколько он длился, оставшаяся его часть имеет тот же закон распределения.

**Задача 3.5.** На стоянку такси через единичные моменты времени прибывают машины (по одной в каждый момент). Если на стоянке нет ожидающих, то машина сразу уезжает. Обозначим через  $\eta_k$  число пассажиров, приходящих в момент  $k$  на стоянку, и будем считать, что  $\eta_1, \eta_2, \dots$  - независимые случайные величины. Пусть  $\xi_k$  длина очереди в момент времени  $k$ ,  $\xi_0 = 0$ . Будет ли последовательность случайных величин  $\xi_0, \dots, \xi_n$  марковской цепью?

**Задача 3.6.** В начальный момент в урне  $n_0$  белых и  $m_0$  черных шаров. Через каждую единицу времени из урны (без возвращения) извлекается один шар. Пусть  $\xi_k$  - число белых, а  $\eta_k$  - число черных шаров в урне в момент времени  $k$ . Какие из указанных ниже последовательностей образуют цепь Маркова:

а)  $\xi_k, k \geq 0$  ;

б)  $\xi_k - \eta_k, k \geq 0$  ?

**Задача 3.7.** К рабочему, стоящему на контроле, через минуту поступают изделия, причём каждое из них независимо от других может оказаться дефектным с вероятностью  $p$ ,  $0 < p < 1$ . Поступившие изделия рабочий одно за другим проверяет, затрачивая на проверку каждого по одной минуте. Если изделие оказывается дефектным, то он прекращает проверку других изделий и исправляет дефектное, на что уходит ещё 5 минут. Пусть  $\xi_n$  – число изделий, скопившихся у рабочего через  $n$  минут после начала работы. Будет ли последовательность случайных величин  $\xi_n, n \geq 1$ , цепью Маркова?

### Практические занятия 13-14 (4 ч)

#### Интерактивные занятия №3.1-3.2 (№ИЗ) по теме: «Цепи Маркова и их использование в моделировании социально-экономических процессов. Теория массового обслуживания: основные модели» (4 часа)

**Цель занятия:** активное воспроизведение ранее полученных знаний в «незнакомых» условиях (применение знакомой модели для решения незнакомых задач).

**Форма текущего контроля** освоения компетенций ОК-12, ОК-13, ПК-14, ПК-15 (табл.3); **отчет** по решению практических задач (по выбору):

**Задача ИЗ.1.** Эскадрилья бомбардировщиков состоит из четырех самолетов. Боевое задание она получает один раз в день. Если к концу дня из-за потерь, нанесенных противником, наличный состав самолетов уменьшается до нуля, одного или двух, то командир эскадрильи получает один самолет из резерва; этот самолет доставляется ночью. Если наличный состав равен трем или четырем самолетам, то командир не имеет права на пополнение. На следующий день, если в наличии имеется три или четыре самолета, то задание эскадрилье дается; в противном случае задание отменяется. Во время выполнения задания каждый самолет может быть выведен из строя с вероятностью  $p$ . Ввести понятие состояния эскадрильи так, чтобы функционирование эскадрильи можно было описать с помощью цепи Маркова, построить матрицу  $P$  и исследовать ее на регулярность.

**Задача ИЗ.2.** Задана матрица:  $P_1 = \begin{vmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{vmatrix}$  вероятностей перехода дискретной цепи

Маркова из  $i$ -го состояния в  $j$ -ое за один шаг ( $i, j=1, 2$ ). Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент  $t=0$  определяется вектором  $\vec{q} = (0,1; 0,9)$ . Найти:

- 1) матрицу  $P_2$  перехода цепи из состояния  $i$  в состояние  $j$  за два шага;
- 2) распределение вероятностей по состояниям в момент  $t=2$ ;
- 3) вероятность того, что в момент  $t=1$  состоянием цепи будет  $A^2$ ;
- 4) стационарное распределение.

**Задача ИЗ.3.** Задана матрица  $\Lambda = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix}$  интенсивностей переходов непрерывной

цепи Маркова. Составить размеченный граф состояний, соответствующий матрице  $\Lambda$ ; составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний; найти предельное распределение вероятностей.

**Подготовка занятия №ИЗ.** Выбор ведущего студента, ответственного за выбор и подачу необходимой информации, и обсуждение с ним алгоритма занятия.

№	№ задачи	Вид интерактивной работы (совмещение нескольких видов)	Трудоемкость (час.)	Отрабатываемые компетенции/ожидаемый уровень освоения	Оценка личностных качеств	Контроль выполнения работы (участие в полемике, индивидуальные групповые задания (ИГЗ) на базе выбранного программного продукта и т.д.)
1	ИЗ.1	Работа в команде. Решение ситуационных задач. Исследовательский метод. Поисковый метод.	1	ОК-12, ОК-13/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-14, ПК-15/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
2	ИЗ.2	Работа в команде. Решение ситуационных задач.	0.5	ОК-12, ОК-13/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-14, ПК-15/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
3	ИЗ.3	Работа в команде. Решение ситуационных задач.	0.5	ОК-12, ОК-13/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-14, ПК-15/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
Всего			4			

**Вступление.** Сообщение темы (далее, на примере задачи 1) и обоснование ее актуальности через задачи анализа систем массового обслуживания.

**Основная часть:**

- I. Сообщение в виде доклада-презентации ответственным (студентом) за проведение занятия ИЗ, в котором излагается суть обсуждаемого явления:
    - 1) Цепи Маркова с конечным числом состояний и непрерывным временем;
    - 2) Цепи Маркова и их использование в моделировании социально-экономических процессов;
    - 3) Теория массового обслуживания: основные модели.
    - 4) Свойства пуассоновского потока.
  
  - II. Выяснение позиций участников с зафиксированными точками зрения на решение основных задач ИЗ.1- ИЗ.3.
- Итог II-го этапа: формирование целевых групп по общности позиций каждой из групп.
- III. Организация коммуникации между группами: 1) выяснение позиции-варианта решения выявленных групп и защита занятой позиции; 2) формирование нового

набора вариантов решений на основании общего обсуждения; 3) выбор одного решения голосованием;

IV. Повторная защита позиций-вариантов групп после проведения расчетов с целью оценки отклонения от «истинного» решения.

**Выводы:** реализован самостоятельный поиск учащимися путей и вариантов решения поставленных учебных задач (выбор одного из предложенных вариантов или нахождение собственного варианта и обоснование решения на базе коллективной интерактивной работы).

**Итог занятия №ИЗ:** Оценивание уровней 3-Пр, У-Пр, В-Пр освоения компетенций ОК-1, ПК-32 по результатам работы на занятиях (активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции) и своевременности сдачи отчета по решению практических задач согласно табл. 3.

### ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 3

1. Доказать, что для любого состояния цепи Маркова вероятность возвращения в него бесконечное число раз равна 0 или 1, причем в первом случае состояние не возвратно, а во втором возвратно.

2. Пусть каждый человек, услышавший новость, может передать ее другому; при этом вероятность искажения смысла на противоположный постоянна и равна  $p=0,000001$ . Какова вероятность услышать новость в неискаженном виде после того, как она «побывала» у большого числа людей?

3. У профессора три любимых вопроса, один из которых он задает на каждом экзамене. Он никогда не задает какой-либо из этих вопросов два раза подряд. Если в прошлый раз был задан вопрос А, то он бросает монету и задает вопрос В, если выпал герб. Если был задан вопрос В, то он бросает две монеты и задает вопрос С, если выпадет два герба. Если был задан вопрос С, то он бросает три монеты и задает вопрос А, если выпадет три герба. Какой вопрос он задает чаще всего?

4. Известно, что если погоду в данной местности характеризовать только следующими состояниями: облачно, дождь и хорошая погода, то запись текущей погоды образует

марковскую цепь с матрицей вероятностей перехода  $P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,7 & 0,0 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$ . Предскажите

погоду на один и на два дня вперед, если сегодня погода хорошая. Имеет ли смысл пользоваться монетой, для того, чтобы решить, брать ли с собой зонтик, выходя из дому? Предполагается, что погода устойчива в течение дня.

### ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 3

#### Вариант I

К контролеру поступает поток изделий на проверку. Если контролер занят проверкой изделия, то вновь поступающее изделие проходит без контроля.

Поток изделий – простейший с параметром, равным 1 шт./час. Время проверки распределено по показательному закону с параметром, равным 1/2 час-1.

Определить динамику работы системы и указать, с какого момента наступает (если наступает) стационарный режим?

Найти вероятности состояний системы и характеристики (показатели эффективности) данной СМО.

#### Вариант II

Определить оптимальное число контролеров ОТК, проверяющих продукцию на конечном этапе сборочного конвейера, вероятность отказа системы (т.е. вероятность того, что изделие пройдет без контроля), коэффициент занятости аппаратов.

Если подошедшее изделие застаёт всех контролеров занятыми, то оно проходит без контроля. Статистическое обследование показало, что поток изделий на конвейере - простейший с параметром, равным 0.5 шт./мин., время проверки одного изделия случайно и распределено по показательному закону с параметром, равным 0.25 шт./мин.

Затраты на оснащение одного рабочего места контролера 500\$, текущие затраты на работу одного контролера ( $c_2=c_3$ ) 7500\$/год, потери у потребителя изделий от возможного брака одного изделия 50\$. Годовой фонд времени работы контролеров 6000 часов

### **Вариант III**

Определить оптимальное число причалов промышленного речного порта, принимающего влажные сыпучие материалы. Поток поступления барж простейший с параметром, равным 0.5 шт./сутки. Время разгрузки одной баржи случайно и распределено по показательному закону с параметром, равным 0.5 шт./сутки.

Цена оборудования одного причала 100000\$, текущие затраты на содержание одного работающего причала 400\$/сутки а стоящего - 200\$/сутки, затраты на содержание груженной баржи 1000\$/сутки. Если груз с момента прибытия ожидает более 2-х суток, то условия его разгрузки усложняются и связаны с дополнительными текущими затратами в 600\$/сутки. Годовой фонд времени работы системы 365 суток.

### **Контрольные вопросы к разделу 3**

1. Сформулировать свойства пуассоновского потока.
2. Сформулировать основное свойство показательного закона.
3. Дать основные характеристики СМО.

### **Раздел 4. Практические работы 15-18 (8ч).**

#### **Основные понятия математической статистики**

#### **Интерактивные занятия №4.1-4.3 (№И4) по теме: «Гистограмма. Статистические методы обработки экспериментальных данных. Точечные оценки. Функция правдоподобия» (6 час)**

**Цель работы** – освоить элементы математической статистики: выборки и их числовые характеристики, а также правила их корректного нахождения.

*Дополнительная литература* для подготовки к занятию:

- 1) <http://www.alleng.ru/d/econ/econ292.htm> Юдин С.В. Математика в экономике. Тула: РГТЭУ, 2009. — 228 с.
- 2) Козлов М. В. Элементы теории вероятностей в примерах и задачах. МГУ, 1990.
- 3) [http://www.aup.ru/books/m155/2\\_12.htm](http://www.aup.ru/books/m155/2_12.htm) Орлов А.И. Математика случая. Вероятность и статистика – основные факты. Учебное пособие. М.: МЗ-Пресс, 2004.

**Форма текущего контроля** освоения компетенций ОК-12, ОК-13, ПК-14, ПК-15 уровни 3-Пр, У-Пр, В-Пр (см. табл. 4): отчет по решению следующих практических текстовых задач:

### **Примеры типовых аудиторных задач**



**Практическое занятие 15 (2 ч.).** Выборка. Выборочные моменты, их асимптотические свойства.

**Задача 4.1.** Дан ранжированный ряд: 23 23 24 24 25 25 25 27 28 в таблице 4.1 в первой строке. Найти: частоты, относительные частоты, накопленные частоты.

*Решение.* Для данного ряда в нижеприведенной таблице в первой строке записаны все значения величины (варианты), во второй – соответствующие им частоты (безынтервальный вариационный ряд), в третьей – накопленные частоты, в четвертой – относительные частоты (табл.4.1).

Таблица 4.1. Значения вариант и их частот

X	22	23	24	25	27	28
$n_i$	1	2	2	3	1	1
$n_n$	1	3	5	8	9	10
$\frac{n_i}{n}$	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1

**Практическое занятие 16 (2 ч.).** Порядковые статистики. Эмпирическая функция распределения. Выборочная медиана.

**Задача 4.2.** Распределение относительных частот появления признака задано табл. 4.2

Таблица 4.2.

$x_i$	0	1	2	1	4	5	6	7
$n_i$	0.05	0.161	0.175	0.1	0.2	0.05	0.018	0.025

Построить эмпирическую функцию распределения, используя накопленные частоты; найти моду, медиану и выборочные среднее и дисперсию.

**Интерактивные занятия №4.1-4.3 (№И4) по теме: «Гистограмма. Статистические методы обработки экспериментальных данных. Точечные оценки. Функция правдоподобия» (6 часов)**

**Цель занятия:** активное воспроизведение ранее полученных знаний в «незнакомых» условиях (применение знакомой модели для решения незнакомых задач); ознакомиться с максимально широким кругом понятий раздела теории вероятностей и матстатистики и выявить основные методы теории вероятностей, которые могут использоваться в экономике. Раскрыть взаимосвязь понятий, их внутреннюю логику. Научиться правильно формулировать статистические задачи.

**Форма текущего контроля** освоения компетенций ОК-12, ОК-13, ПК-14, ПК-15 (табл.3); отчет по решению практических задач (по выбору):

**Задача И4.1.** В заданной таблице (табл. 6.1□1 пособия С.И.Колесниковой) приведены размеры диаметров головок 100 заклепок (в мм), изготовленных станком (который делает их тысячами). Все контролируемые условия, в которых работал станок, оставались неизменными. В тоже время диаметры головок раз от разу несколько изменялись. Характерная черта случайных колебаний: изменения выглядят бессистемными, хаотичными.

Выполнить задания:

1. Для выборки диаметров головок заклепок вычислить среднее значение, медиану, дисперсию, минимальный и максимальный элементы.

2. Для выборки диаметров шляпок заклепок построить гистограмму частот с шагом группировки  $h$  (например, 0,075мм) на интервале от  $X_{\min}$  (например, 13мм) до  $X_{\max}$  (например, 13,75мм) (без учета сильно выделяющегося наблюдения)
3. Используя инструмент <Описательная статистика> создать таблицу основных статистических характеристик и разместить ее с соответствующим заголовком справа от исходных данных. Уметь объяснить смысл каждой статистики.
4. Обработать данные с целью выдвижения гипотезы о виде распределения наблюдаемой случайной величины и ее проверки.
5. Проверить выдвинутую гипотезу. Сделать выводы.

**Задача И4.2.** Путем опроса получены данные (табл. 6.1□-6.10 пособия С.И.Колесниковой),  $n=80$ .

Выполнить следующие задания:

- а) получить дискретный вариационный ряд и статистическое распределение выборки;
- б) построить полигон частот;
- в) составить ряд распределения относительных частот;
- г) составить эмпирическую функцию распределения;
- д) построить график эмпирической функции распределения;
- е) найти основные числовые характеристики вариационного ряда (по возможности использовать упрощающие формулы для их нахождения):
  - 1) выборочное среднее  $M(X)$  ;
  - 2) выборочную дисперсию  $D(X)$ ;
  - 3) выборочное среднее квадратическое отклонение  $\sigma(X)$ ;
  - 4) коэффициент вариации  $V$ ;
  - 5) интерпретировать полученные результаты.

**Задача И4.3.**

Составить выборочное уравнение прямой линии регрессии для корреляционной зависимости объема продаж  $M$  (в кг) товара от их цены  $V$  (в руб) по данным, приведенным в таблице (табл. 6.1□ 6.10 пособия С.И.Колесниковой).

**Подготовка занятия №И4.** Выбор ведущих студентов, ответственного за выбор и подачу необходимой информации и разработка с ними алгоритма занятия.

Таблица 4

№	№ задачи	Вид интерактивной работы (совмещение нескольких видов)	Трудоемкость (час.)	Отрабатываемые компетенции и/ожидаемый уровень освоения	Оценка личностных качеств	Контроль выполнения работы (участие в полемике, индивидуальные групповые задания (ИГЗ) на базе выбранного программного продукта и т.д)
1	И4.1	Работа в команде. Решение ситуационных задач. Поисковый метод.	3	ОК-12, ОК-13/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-14, ПК-15/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
2	И4.2	Работа в команде. Решение	1.5	ОК-12, ОК-13/ З-Эл, У-Эл,	Качество работы; своевременность	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность,

		ситуационных задач.		В-Эл ПК-14, ПК-15/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	ть сдачи отчета по решению ИГЗ	инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
3	И4.3	Работа в команде. Решение ситуационных задач. Исследовательский метод.	1.5	ОК-12, ОК-13/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-14, ПК-15/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
Всего			6			

**Вступление.** Сообщение темы (далее, на примере задачи И4.1) и обоснование ее актуальности через логику задач математической статистики.

**Основная часть:**

- I. Сообщение в виде доклада-презентации ответственными (студентами) за проведение занятия И4, в котором излагается суть обсуждаемого явления:
    - 1) Точечные оценки параметров распределения;
    - 2) Доверительный интервал и доверительная вероятность;
    - 3) Метод наименьших квадратов;
    - 4) Элементы корреляционного анализа.
    - 5) Задача Гальтона о росте детей высоких родителей: рост «регрессирует» в среднем, т.е. в среднем дети высоких родителей не так высоки, как их родители.
    - 6) Озвучивание задач И4.1.-И4.3 с выяснением их особенностей и возможных подходов к решению (необязательно, вошедших в вышеназванное сообщение).
  - II. Выяснение позиций участников с зафиксированными точками зрения на решение задач И4.1-И4.3.
- Итог II-го этапа: формирование целевых групп по общности позиций каждой из групп.
- III. Организация коммуникации между группами: 1) выяснение позиции-варианта решения выявленных групп и защита занятой позиции; 2) формирование нового набора вариантов решений на основании общего обсуждения; 3) выбор одного решения голосованием;
  - IV. Повторная защита позиций-вариантов групп после проведения расчетов с целью оценки отклонения от «истинного» решения.

**Выводы:** реализован самостоятельный поиск учащимися путей и вариантов решения поставленной учебной задачи (выбор одного из предложенных вариантов или нахождение собственного варианта и обоснование решения на базе коллективной интерактивной работы).

**Итог занятия №И4:** Оценивание уровней ОК-12, ОК-13 (З-Эл, У-Эл, В-Эл), ПК-14, ПК-15 (З-Пр, У-Пр, В-Пр) по результатам работы на занятиях (активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции) и своевременности сдачи отчета по решению практических задач согласно табл. 4.

#### ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 4

1. Методом скользящего среднего произвести сглаживание временного ряда, приведенного в таблице. Использовать интервал усреднения, в который входили бы 2 последовательных года наблюдения. Результаты представить в таблице.

2. Известен вид функции регрессии:  $\tilde{F} = \tilde{f}(x; a_0, a_1, a_2) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x^2 + \tilde{a}_2 x^4$   
Измерены значения некоторого параметра  $Y$  в шести точках:

$x$	0	0,00359	0,00718	0,01077	0,01436	0,01795
$F$	369	359	328	273	188	63

Необходимо найти коэффициенты  $a_i$  функции регрессии.

3. Найти левые и правые пределы доверительных интервалов для дисперсии с.в., заданной в таблице (преподавателем).

4. Построить гистограмму с.в., заданной в таблице (преподавателем).

#### ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 4

##### Варианты I-X (таблицы данных 1-10)

По заданной совокупности данных:

№ единицы

совокупности	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Значение признака	19,2	17,8	20,1	16,9	20,4	18,7	18,3	19,6	19,8	17,5

Определить *показатели вариации*: размах вариации; отклонение признаков  $x_i$  от типического уровня, свободного от случайных колебаний; общий объем вариации; средний размер отклонений в расчете на единицу совокупности; среднее линейное отклонение; дисперсию; среднее квадратическое отклонение; коэффициент вариации.

##### Контрольные вопросы к разделу 4

1. Перечислить основные шаги при построении гистограммы частот.
2. Сформулировать понятие «доверительный интервал».
3. Изложить суть метода наименьших квадратов.
4. Указать свойства точечных статистических оценок.