Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Факультет Инновационных технологий

Кафедра управления инновациями

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ И К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

по дисциплине «Теория ошибок и обработка результатов измерений»

Составлены кафедрой управления инновациями для студентов, обучающихся
по направлению подготовки «Мехатроника и робототехника»

Форма обучения очная

Составитель
доцент кафедры управления инновациями П.Н. Дробот
«25» октября 2018 г.

Томск 2018

Оглавление

Введение

Дисциплина «Теория ошибок и обработка результатов измерений» предлагается к изучению студентам магистратуры «Мехатроника и робототехника» для формировании системных знаний в области теории ошибок (погрешностей) измерений физических величин случайных, статистических, абсолютных и относительных, подчиняющихся различным статистически распределениям и чтобы научиться использовать методы обработки результатов измерений с использованием современных программных средств, выработать умения и навыки их использования в профессиональной деятельности.

Дисциплина формирует способность разрабатывать методики проведения экспериментов и проводить эксперименты на действующих макетах и образцах мехатронных и робототехнических систем и их подсистем, обрабатывать результаты с применением современных информационных технологий и технических средств; готовность разрабатывать методику проведения экспериментальных исследований и испытаний мехатронной или робототехнической системы, способностью участвовать в проведении таких испытаний и обработке их результатов. Полученные знания и навыки могут быть использованы в управлении разработками робототехнических комплексов.

Практические задания, предусмотренные настоящими указаниями, выполняются студентами во время аудиторных занятий индивидуально под контролем со стороны преподавателя. Все консультации осуществляются преподавателем.

Перед началом занятий студенты должны изучить инструкцию по охране труда. Преподаватель должен убедиться в знании инструкции, задавая студенту вопросы по ее содержанию, после чего сделать соответствующую запись в журнале охраны труда.

Во время проведения практических занятий в аудитории студентам запрещается передавать друг другу файлы и другие материалы, являющиеся результатом выполнения заданий.

Студент имеет право просить консультации у преподавателя, если он в текущий момент не распределяет задания, не принимает выполненные работы и не консультирует другого студента.

Преподаватель, давая консультацию студенту, указывает раздел технической документации или методической литературы, в которой имеется ответ на вопрос студента. Если необходимые сведения в документации и литературе отсутствуют, то преподаватель должен дать устные пояснения или продемонстрировать практические действия, приводящие к требуемому результату, с последующим повторением студентом.

Консультации, выдача практических заданий и прием результатов выполнения осуществляется только во время аудиторных занятий. Задания выполняются последовательно. Правильное выполнение некоторых заданий возможно только, если студент корректно выполнил предыдущие задания. Поэтому приступать к следующему заданию студент может, только сдав преподавателю результат выполнения предыдущего.

Материально-техническое обеспечение для практических занятий и самостоятельной работы

Для практических занятий

Лаборатория ГПО

учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, учебная аудитория для прове- дения занятий практического типа, учебная аудитория для проведения занятий лабораторного типа, учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, помещение для курсового проекти- рования (выполнения курсовых работ), помещение для проведения групповых и индивидуальных консультаций, помещение для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, поме- щение для самостоятельной работы

634034, Томская область, г. Томск, Вершинина улица, д. 74, 126 ауд. Описание имеющегося оборудования:

- Компьютер Celeron;
- Компьютер WS3 (5 шт.);
- Компьютер WS2 (2 шт.);
- Доска маркерная;
- Проектор LG RD-JT50;
- Экран проекторный;
- Экран на штативе Draper Diplomat;

- Осциллограф GDS-82OS;
- Паяльная станция ERSA Dig2000a Micro (2 шт.);
- Паяльная станция ERSA Dig2000A-Power;
- Колонки Genius;
- Веб-камера Logitech;
- Роутер ASUS;
- Проигрыватель DVD Yamaha S661;
- Учебно-методическая литература;
- Комплект специализированной учебной мебели;
- Рабочее место
преподавателя.

Программное обеспечение:

– Microsoft Windows 7 Pro
– OpenOffice

Лаборатория управления проектами

учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, учебная аудитория для проведения занятий практического типа, учебная аудитория для проведения занятий лабораторного типа, учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, помещение для курсового проектирования (выполнения курсовых работ), помещение для проведения групповых и индивидуальных консультаций, помещение для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, помещение для самостоятельной работы

634034, Томская область, г. Томск, Вершинина улица, д. 74, 414 ауд.

Описание имеющегося оборудования:

- Компьютер WS2 (6 шт.);
- Компьютер WS3 (2 шт);
- Компьютер Celeron (3 шт.);
- Компьютер Intel Core 2 DUO;
- Проектор Nec;
- Экран проекторный Projecta;

- Стенд передвижной с доской магнитной;
- Акустическая система + (2колонки) KEF-Q35;
- Кондиционер настенного типа Panasonic CS/CU-A12C;
- Комплект специализированной учебной мебели;
- Рабочее место преподавателя.

Программное обеспечение:

– Microsoft Windows 7 Pro

– OpenOffice

Размещение и освещенность рабочих мест в учебной аудитории (лаборатории) должно удовлетворять действующим требованиям санитарных правил и норм (СанПиН).

Для самостоятельной работы

Для самостоятельной работы используются учебные аудитории (компьютерные классы), расположенные по адресам:

- 634050, Томская область, г. Томск, Ленина проспект, д. 40, 233 ауд.;
- 634045, Томская область, г. Томск, ул. Красноармейская, д. 146, 201 ауд.;
- 634034, Томская область, г. Томск, Вершинина улица, д. 47, 126 ауд.;
- 634034, Томская область, г. Томск, Вершинина улица, д. 74, 207 ауд.

Состав оборудования: - учебная мебель; - компьютеры класса не ниже ПЭВМ INTEL Celeron D336 2.8ГГц. - 5 шт.; - компьютеры подключены к сети «Интернет» и обеспечивают доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.

Перечень программного обеспечения:

- Microsoft Windows;
- OpenOffice;
- Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows;
- 7-Zip;
- Google Chrome.

Прием выполненных практических заданий

Результаты выполнения практических заданий демонстрируются преподавателю. Во время приема выполненной работы преподаватель вправе:

- Требовать у студента демонстрации выполненного задания в виде файлов, таблиц, мнемосхем, рисунков, графиков или диаграмм, в том числе, по возможности и необходимости, в бумажном письменном или распечатанном виде.
- Самостоятельно производить манипуляции с программным обеспечением, не изменяя его конфигурацию.
- Требовать у студента пояснений, относящихся к способам реализации задания.

Задание считается выполненным и принимается преподавателем только в том случае, если получены все результаты, предусмотренные заданием. Если какие то результаты, предусмотренные заданием, не получены или неверны, то задание подлежит доработке.

Студент должен работать внимательно и аккуратно. Подлежат обязательному исправлению замеченные преподавателем недочеты:

- грамматические ошибки;
- небрежное оформление рисунков, графиков, структур, схем;
- неточности в описаниях, структурах, схемах.

Результаты выполнения заданий сохраняются студентом в электронном виде (файлы), а также, если возможно и удобно, в бумажном формате, до получения зачета/экзамена по данной дисциплине.

До начала экзаменационной сессии студент должен сдать результаты выполнения всех практических заданий, предусмотренным настоящими указаниями. В противном случае студенты к сдаче экзамена (зачета) не допускаются.

Тема занятий 1 – « Виды и цели измерений».

Практические занятия с указаниями по самостоятельной работе по заданиям 1 – 4

Цель: научить студентов для измеренных физических величин оценивать погрешности и их надежности (доверительной вероятности), ознакомить с различными случаями единичных и многократных измерений.

Задание 1

Изучите самостоятельно следующий материал и на его основе с помощью поиска в интернет подберите информацию и напишите эссе на тему «Оценка погрешности и ее надежности для измеренной величины». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Результаты всех измерений, на каком бы высоком уровне они ни проводились, подвержены некоторым ошибкам (погрешностям). В науке слово «погрешность» не означает что-то неправильное. Погрешность означает неизбежную ошибку, которая сопутствует всем измерениям. Погрешности (ошибки) нельзя отнести к промахам экспериментатора; вы не можете избежать их, стараясь быть очень внимательными. Лучшее, на что вы можете рассчитывать, — это свести погрешности к возможному минимуму и грамотно рассчитать их величины.

Несколько слов следует сказать о принятой в теории погрешностей терминологии. Данная терминология стихийно складывалась на протяжении многих десятилетий, и это привело к тому, что для одних понятий имеется по несколько синонимов, тогда как разные величины называются одинаково. Система наименований, предложенная в Государственных стандартах СССР 1970-го и 1974-го годов, иногда кажется неудачной. В частности, замена широко распространенного в мировой литературе термина «ошибка измерений» термином «погрешность измерений» представляется неоправданной.

Слово «погрешность» (от «грешить») как бы возлагает ответственность за отклонение результата измерения от истинного значения на лицо, проводившее измерения. На самом деле такие отклонения имеют совершенно объективные причины, и лишь в случае так называемых грубых погрешностей, или промахов, можно говорить о вине, или «грехе», экспериментатора. Мы будем оперировать и термином «ошибка», и термином «погрешность», получившим широкое распространение в отечественной литературе в советский период.

Также не очень удачным кажется термин «наблюдение», введенный вместо общепринятого «единичное измерение». Обычно под наблюдением понимают качественное описательное суждение об объекте или явлении, а не количественное определение его характеристик.

Теория ошибок — наука, занимающаяся изучением и оценкой погрешностей, целью которой является определение погрешностей в измерениях и нахождение способов их уменьшения, если это необходимо. Анализ погрешностей — существенная часть любого научного эксперимента, и поэтому теория ошибок должна занимать важное место в любом университетском курсе обучения экспериментальным наукам. Теория ошибок не является самой важной частью такого курса, но иногда ею пренебрегают или неправильно используют, что недопустимо. Результатом такого подхода становится бессмысленный ритуал, при котором студент добавляет несколько строчек вычислений в конце каждого отчета по лабораторной работе не потому, что он понимает смысл проделанного, а просто по той причине, что так требует преподаватель. Нужно понимать, что, не располагая информацией о погрешности измерения, нельзя сделать какого-либо правильного заключения, и более того, можно просто впасть в заблуждение о значении полученных результатов.

Теория ошибок — предмет, при обсуждении которого часто возникают споры, и ни одно изложение не может быть таким, чтобы с ним все согласились. Например, следует ли использовать квадратичное сложение погрешностей или складывать их абсолютные значения? К результатам каких измерений применимы статистические методы, а к каким эти методы не подходят? Спорных вопросов можно попытаться избежать, если отдавать предпочтение доступности изложения, а не абсолютной строгости, что в физической литературе вполне допустимо.

Задание 2

Изучите самостоятельно следующий материал и на его основе с помощью поиска в интернет подберите информацию и напишите эссе на тему «Методы измерений». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Метод измерений — прием или совокупность приемов сравнения измеряемой величины с ее единицей в соответствии с реализованным принципом измерений.

По общим приемам получения результатов измерений различают: 1) прямой метод измерений; 2) косвенный метод измерений. Первый реализуется при прямом измерении, второй — при косвенном измерении.

В соответствии с РМГ 29-2013 ГСИ. Метрология. Основные термины и определения к числу основных методов измерений относят метод непосредственной оценки и методы сравнения: дифференциальный, нулевой, замещения и совпадений.

Непосредственный метод — метод измерений, в котором значение величины определяют непосредственно по отсчетному устройству измерительного прибора прямого действия, например измерения силы тока амперметром.

Методы сравнения с мерой — методы, при которых измеряемая величина сравнивается с величиной, воспроизводимой мерой:

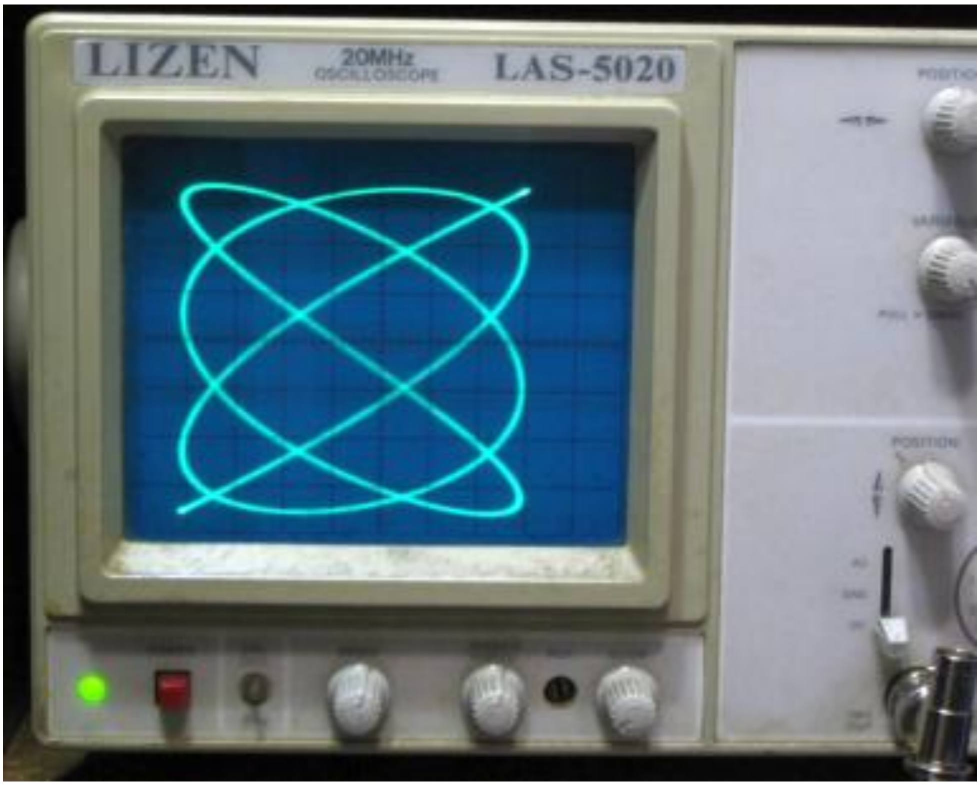
дифференциальный метод характеризуется измерением разности между измеряемой величиной и известной величиной, воспроизводимой мерой. Примером дифференциального метода может служить измерение вольтметром разности двух напряжений, из которых одно известно с большой точностью, а другое представляет собой искомую величину;

нулевой метод — при котором разность между измеряемой величиной и мерой сводится к нулю. При этом нулевой метод имеет то преимущество, что мера может быть во много раз меньше измеряемой величины, например измерительный мост;

метод замещения — метод сравнения с мерой, в котором измеренную величину замещают известной величиной, воспроизводимой мерой. Метод замещения применяется при измерении сопротивления с поочередным замещением его из магазина сопротивлений;

метод совпадений — метод сравнения с мерой, в котором разность между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой, измеряют, используя совпадение отметок шкал или периодических сигналов. Примером использования данного метода может служить измерение частоты наблюдением при помощи осциллографа фигур Лиссажу.

Фигу́ры Лиссажу́ — в общем случае незамкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два гармонических колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Ниже показано наблюдение фигуры Лиссажу на экране осциллографа.



Задание 3

С помощью поиска в интернет подберите информацию по непосредственному методу измерений и изучите; напишите эссе на тему «Непосредственный метод измерений». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Непосредственный метод — метод измерений, в котором значение величины определяют непосредственно по отсчетному устройству измерительного прибора прямого действия, например измерения силы тока амперметром.

Задание 4

С помощью поиска в интернет подберите информацию по методу сравнения с мерой – дифференциальному методу; напишите эссе на тему «Дифференциальный методу сравнения с мерой». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Дифференциальный метод характеризуется измерением разности между измеряемой величиной и известной величиной, воспроизводимой мерой. Примером дифференциального метода может служить измерение вольтметром разности двух напряжений, из которых одно известно с большой точностью, а другое представляет собой искомую величину

Задание 5

С помощью поиска в интернет подберите информацию по методу сравнения с мерой – нулевой метод; напишите эссе на тему «Нулевой метод сравнения с мерой». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

нулевой метод — при котором разность между измеряемой величиной и мерой сводится к нулю. При этом нулевой метод имеет то преимущество, что мера может быть во много раз меньше измеряемой величины, например измерительный мост

Задание 6

С помощью поиска в интернет подберите информацию по методу сравнения с мерой – методу замещения; напишите эссе на тему «Метод замещения как метод сравнения с мерой». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю

Метод замещения — метод сравнения с мерой, в котором измеренную величину замещают известной величиной, воспроизводимой мерой. Метод замещения применяется при измерении сопротивления с поочередным замещением его из магазина сопротивлений

Задание 7

С помощью поиска в интернет подберите информацию по методу сравнения с мерой – методу совпадений; напишите эссе на тему «Метод совпадений как метод сравнения с мерой». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю

Метод совпадений — метод сравнения с мерой, в котором разность между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой, измеряют, используя совпадение отметок шкал или периодических сигналов. Примером использования данного метода может служить измерение частоты наблюдением при помощи осциллографа фигур Лиссажу

Задание 8

Изучите самостоятельно следующий материал и на его основе с помощью поиска в интернет подберите информацию и напишите эссе на тему «Ошибки (погрешности) измерений». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Погрешности измерений. Процесс измерения неизбежно сопровождается ошибками, которые вызываются несовершенством измерительных средств, нестабильностью условий проведения измерений, несовершенством самого метода и методики измерений, недостаточным опытом и несовершенством органов чувств человека, выполняющего измерения, а также другими факторами.

Погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины, называется абсолютной. Она не всегда является информативной. Например, абсолютная погрешность 0,01 мм может быть достаточно большой при измерениях величин в десятые доли миллиметра и малой при измерениях величин, размеры которых превышают несколько метров.

Более информативной величиной является относительная погрешность, под которой понимают отношение абсолютной погрешности измерения к ее истинному значению (или математическому ожиданию).

Именно относительная погрешность используется для характеристики точности измерения.

По своему характеру (закономерностям проявления) погрешности измерения подразделяются на систематические, случайные и грубые промахи.

К систематическим погрешностям измерений относят погрешности, которые при повторных измерениях остаются постоянными или изменяются по какому-либо закону.

Систематические погрешности измерения при измерении одним и тем же методом и одними и теми же измерительными средствами всегда имеют постоянные значения. К причинам, вызывающим их появление, относят:

погрешности метода или теоретические погрешности;

инструментальные погрешности;

погрешности, вызванные воздействием окружающей среды и условий измерения.

Случайные погрешности измерений – это погрешности, принимающие при повторных измерениях различные, независимые по знаку и величине значения, не подчиняющиеся какой-либо закономерности.

Влияние случайных погрешностей измерений выражается в разбросе полученных результатов относительно математического ожидания, поэтому количественно наличие случайных погрешностей хорошо оценивается среднеквадратическим отклонением (СКО).

Случайные погрешности измерений, не изменяя точности результата измерений, тем не менее, оказывают влияние на его достоверность.

При этом дисперсия среднего арифметического ряда измерений всегда имеет меньшую погрешность, чем погрешность каждого определенного измерения. Если необходимо повысить точность результата (при исключенной систематической погрешности) в 2 раза, то количество измерений надо увеличить в 4 раза.

Грубые погрешности измерений (промахи) — это погрешности, приводящие к явным искажениям результатов измерения.

При оценке грубых промахов прибегают к обычным методам проверки статистических гипотез.

Задание 9

Изучите самостоятельно следующий материал и на его основе с помощью поиска в интернет подберите информацию и напишите эссе на тему «Оценка погрешности и ее надежности для измеренной величины». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Под измерением понимается сравнение измеряемой величины с другой величиной, принятой за единицу измерения. Измерения разделяют на прямые и косвенные. При прямых измерениях измеряемая величина определяется по показаниям измерительного прибора. При косвенных измерениях измеряемая величина вычисляется из результатов прямых измерений других величин, которые связаны с измеряемой величиной определенной функциональной зависимостью. В экспериментальной лаборатории чаще всего используются косвенные измерения.

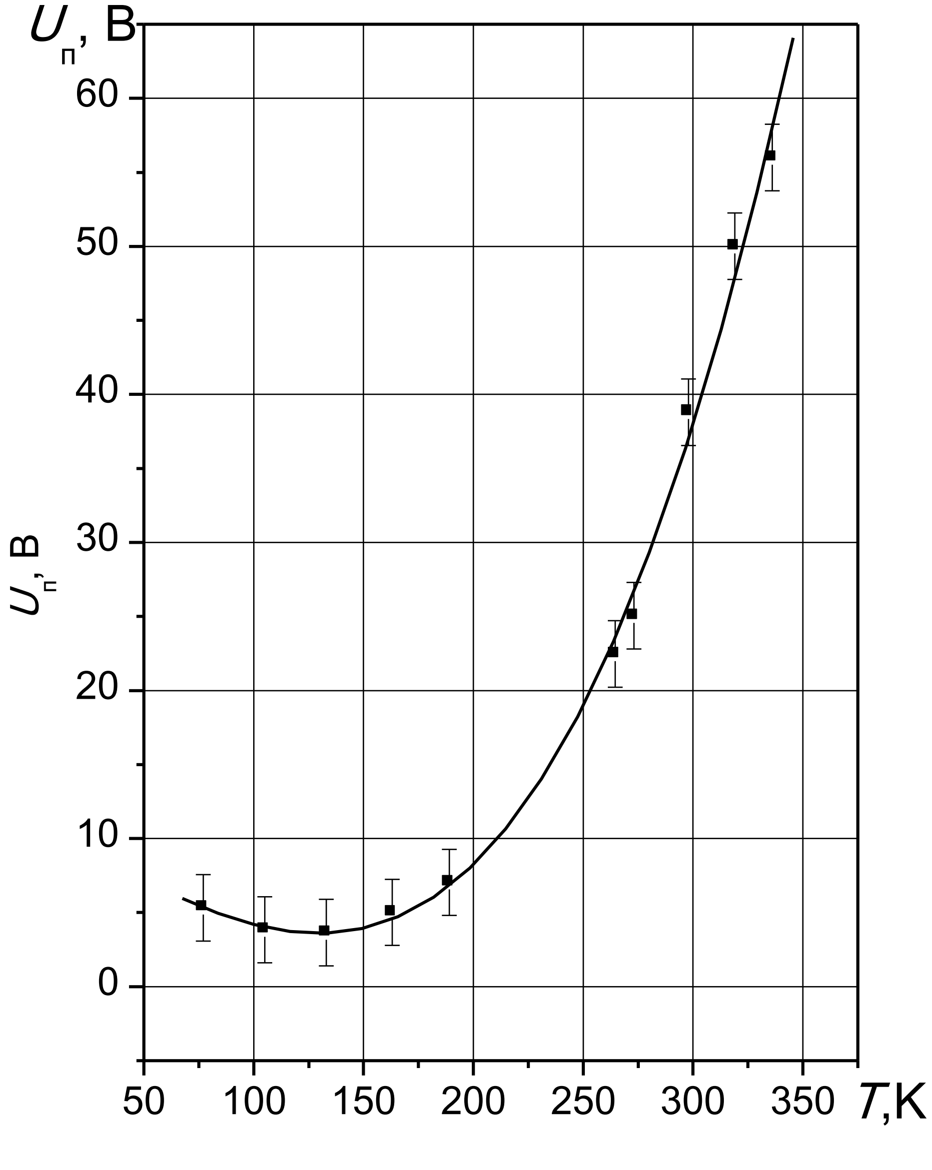
Экспериментальные исследования проводятся, как правило, для решения двух основных задач.

Определение искомой физической величины и оценка ее погрешности и надежности (доверительной вероятности). В первом приближении эта задача решается единичным прямым или косвенным измерением физической величины и оценкой погрешности измерения на основе разумных соображений, погрешностей измерительных приборов и специальных правил, полученных в теории ошибок. Более точно первая задача решается путем проведения многократных измерений одной и той же искомой физической величины и статистической обработки этих измерений.

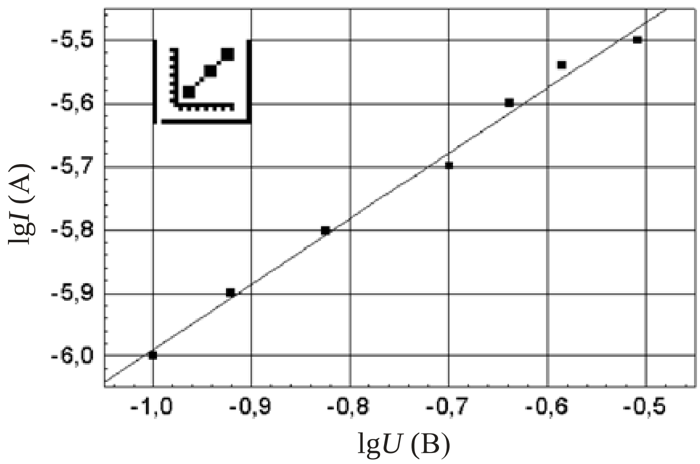
Задание 10

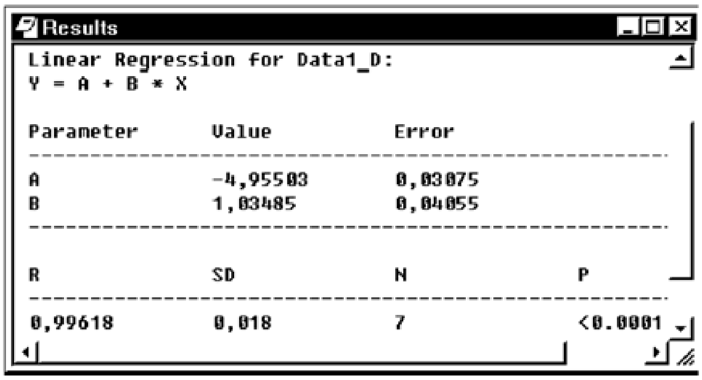
Изучите самостоятельно следующий материал и на его основе с помощью поиска в интернет подберите информацию и напишите эссе на тему «Определение параметров зависимости двух измеряемых физических величин и погрешности этих параметров». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Определение параметров зависимости двух измеряемых физических величин и погрешности этих параметров. Эта задача решается измерением одной физической величины при изменении другой физической величины и исследованием зависимости этих величин. Первое приближение дает графический метод, когда каждое измеренное значение физической величины наносится на график в виде точки со своим доверительным интервалом, ограниченным черточками ошибок. В середине доверительного интервала лежит измеренная точка, а его общая длина равна удвоенной абсолютной погрешности, определенной из результатов прямых или косвенных измерений. Через черточки ошибок или вблизи от них проводится неломаная линия, отображающая характер измеренной зависимости.



Более точное решение второй задачи достигается аппроксимацией экспериментальной зависимости какой-либо известной математической функцией с помощью статистического метода наименьших квадратов.




Results

Linear Regression for Data1_D:
Y = A + B * X

Parameter	Value	Error
A	-4,95503	0,03075
B	1,03485	0,04055

R	SD	N	P
0,99618	0,018	7	<0.0001

При проведении экспериментальных исследований необходимо помнить, что почти все измерения подвержены как случайным, так и систематическим погрешностям. Учет случайных ошибок совершенно отличен от учета систематических ошибок. Статистические методы дают достоверную оценку случайных погрешностей и указывают на точно определенный способ уменьшения их величины. Систематические погрешности трудно оценить и иногда даже обнаружить. Опытный ученый должен уметь предвидеть возможные источники систематических ошибок и обеспечить условия, при которых все оставшиеся систематические ошибки будут значительно меньше необходимой точности. Для этого потребуется, например, поверка измерительных приборов по принятым стандартам, их исправление или приобретение более совершенных приборов. Далее будем рассматривать эксперименты, для которых все источники систематических погрешностей выявлены и приняты меры, чтобы эти ошибки были намного меньше требуемой точности.

Тема занятий 2 – «Статистический анализ многократных измерений».

Практические занятия с указаниями по самостоятельной работе по заданиям 1 – 4

Цель: научить студентов проводить статистический анализ многократных измерений.

Самостоятельно изучите предложенный материал раздела 2.2 Статистический анализ многократных измерений.

Задание 1 Используя материалы раздела 2.2.1 и соответствующие материалы из интернет напишите эссе на тему «Предельное распределение». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Задание 2 Используя материалы раздела 2.2.2 и соответствующие материалы из интернет напишите эссе на тему «Распределение Гаусса». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Задание 3. Используя материалы раздела 2.2.2 и соответствующие материалы из интернет напишите эссе на тему «Стандартное отклонение как абсолютная погрешность Δx каждого отдельного измерения из выборки $x_1, ..., x_N$ ». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Задание 4. Используя материалы раздела 2.2.2 и соответствующие материалы из интернет напишите эссе на тему «Стандартное отклонение среднего как абсолютная погрешность среднего значения по выборке $x_1, ..., x_N$ ». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

2.2. Статистический анализ многократных измерений
2.2.1. Предельное распределение

В основе теории погрешностей лежат *два предположения, подтверждаемых опытом*:

1) при большом числе измерений случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака (как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения) встречаются одинаково часто;

2) большие (по абсолютной величине) погрешности встречаются реже, чем малые, то есть вероятность появления погрешности уменьшается с ростом величины погрешности.

Любое измеренное значение физической величины будем обозначать как *x*. На практике имеется конечное число *N* измеренных значений искомой физической величины (5, 10 или, может быть, 50)

$$x_1, x_2, ..., x_N, \tag{1.1}$$

среди которых могут встречаться несколько раз одинаковые значения. Сколько раз появлялось измерение x_k, показывает число n_k, а частота появления измерения x_k определяется выражением

$$F_k = \frac{n_k}{N}. \tag{1.2}$$

Отложив значения частот F_k по оси ординат, а значения x_k — по оси абсцисс, можно получить гистограмму распределения наших измерений. В пределе $N \to \infty$ распределение измерений стремится к непрерывной кривой, которая называется *предельным распределением*. Истинным значением величины можно считать такое значение x, к которому мы приближаемся по мере осуществления все большего числа измерений, выполняемых все более тщательно. Определенное таким образом «истинное значение» есть идеализация, аналогичная понятию математической точки, которая не имеет размеров, или линии, которая не имеет ширины. Подобно этим двум понятиям, «истинное значение» — это полезная идеализация. Истинные значения будем обозначать прописными буквами X, Y.

2.2.2. Распределение Гаусса

Если результаты измерения x подвержены только случайным ошибкам, то их предельное распределение есть функция Гаусса $f_{X,\sigma}(x)$, имеющая вид колокола с центром в истинном значении X и с параметром ширины σ:

$$f_{X,\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}. \tag{1.3}$$

Предельное распределение должно удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{1.4}$$

В графическом смысле интеграл (1.4) определяет площадь под всей кривой предельного распределения. В теоретическом смысле это вероятность попадания измерения в интервал $\pm\infty$, которая, естественно, равна 100 %, или 1. Пределы $\pm\infty$ в интеграле (1.4) не должны вводить в заблуждение читателя. В любом реальном эксперименте результаты всех измерений попадают в некоторый достаточно малый конечный интервал. Даже после бесконечно большого числа измерений их доля, лежащая вне конечного интервала, будет полностью пренебрежимой. Практически $f(x)$ равна нулю вне этого интервала, и поэтому нет никакой разницы, равны ли пределы интеграла (1.4) $\pm\infty$ или определены конкретно. Но в общем случае мы не знаем этих конкретных пределов, поэтому более удобно оставить их равными $\pm\infty$.

Малые значения σ приводят к распределению типа острого пика, соответствующего точным измерениям, большие значения σ дают широкое распределение, соответствующее измерениям с малой точностью. Фактор σ в знаменателе формулы (1.3) автоматически обеспечивает для более узкого распределения (что соответствует меньшей величине σ) большую высоту в центре, как это и должно быть, чтобы полная площадь под кривой равнялась 1.

Для конечного набора (конечной выборки) измерений (1.1) разумно считать наилучшей оценкой $x_{\text{наил}}$ истинного значения X *выборочное среднее значение* $\overline{x}$ (то есть усредненное по ограниченной выборке):

$$x_{\text{наил}} = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} =$$

$$= \frac{\sum\limits_i x_i}{N} = \frac{\sum\limits_k x_k n_k}{N} = \sum_k x_k F_k \cong X. \tag{1.5}$$

Этот же результат получается на основе строгой теории и свойств нормального распределения. Среднее значение $\overline{x}$, которое было бы найдено после бесконечного множества измерений, называется *математическим ожиданием,* или просто *средним*

$$\overline{x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx. \tag{1.6}$$

Подставив в формулу (1.6) вместо $f(x)$ нормальное распределение $f_{X,\sigma}(x)$ (1.3), после решения интеграла получаем

$$\overline{x} = X. \tag{1.7}$$

Таким образом, если мы сделаем большое, но конечное число измерений, то наше среднее значение $\overline{x}$ будет близко к истинному значению X.

Средняя абсолютная погрешность любого отдельного измерения из выборки $x_1, \ldots, x_N$ есть *стандартное отклонение*, определяемое выражением

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}, \tag{1.8}$$

из которого видно, что это *среднеквадратичное* отклонение результатов измерений $x_1, \ldots, x_N$. В англоязычной литературе для этого понятия приводится известная аббревиатура RMS (root mean square) и иногда величину σ_x называют выборочным стандартным отклонением. В русскоязычной литературе величину, определяемую выражением (1.8), называют *несмещенной оценкой* стандартного отклонения и для нее нет эквивалентной общепринятой аббревиатуры, однако для удобства мы будем использовать аббревиатуру СО. СО измеряется в тех же единицах, что и сама величина x — это абсолютная погрешность Δx каждого отдельного измерения из выборки $x_1, \ldots, x_N$. Фактор (N–1) в знаменателе (1.8) отражает реальную ситуацию, что легко понять, если рассмотреть предельный (и абсурдный с точки зрения статистической обработки) случай, когда мы сделали одно измерение: N=1. В этом случае среднее значение $\overline{x}$ равно единственному значению x_1 и единственное отклонение автоматически равно нулю. Следовательно, определение (1.8) приводит к неопределенности вида 0/0, то есть в соответствии с (1.8) σ_x — неопределенная величина, что корректно отражает нашу полную неосведомленность о статистической погрешности после выполнения только одного измерения.

Однако наш результат $x_{\text{наил}} = \overline{x}$ есть разумная комбинация всех N измерений, и поэтому есть основания полагать, что он будет более надежным, чем любое из отдельных измерений. Погрешность в результате $x_{\text{наил}} = \overline{x}$ равна стандартному отклонению σ_x, деленному на $\sqrt{N}$. Эта величина называется *стандартным отклонением среднего* и обозначается $\sigma_{\overline{x}}$:

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}. \qquad (1.9)$$

Другие названия — *стандартная ошибка* или *стандартная ошибка среднего*. В англоязычной литературе для *стандартного отклонения среднего* используется известная аббревиатура SDOM (standard deviation of the mean). Для удобства мы будем использовать для понятия *стандартного отклонения среднего* аббревиатуру СОС.

Используя распределение Гаусса, можно вычислить СО в случае $N \to \infty$:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - \overline{x})^2 f(x)dx = \sigma^2, \qquad (1.10)$$

то есть в случае множества измерений параметр ширины σ функции Гаусса $f_{X,\sigma}(x)$ есть просто СО σ_x. Величина $\sigma_x^2 = \sigma^2$ называется *дисперсией*. На основе анализа N средних значений $\overline{x}$, полученных из N *выборок* вида (1.1), в предположении, что распределение средних $\overline{x}$ есть нормальное распределение, строго доказывается, что абсолютная погрешность в оценке среднего есть СОС.

Подведем итог. На практике ни X, ни σ не известны, но мы знаем наши N измеренных значений $x_1, x_2, ..., x_N$, где N так велико, как позволяют получить наши время и терпение. Основываясь на этих N измеренных значениях, мы показали, что наилучшей оценкой истинного значения X будет среднее $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{N}$, наилучшей оценкой параметра ширины σ будет СО σ_x для $x_1, x_2, ..., x_N$, а абсолютной погрешностью в оценке среднего будет СОС $\sigma_{\overline{x}}$. Все эти результаты получены в предположении, что данные наших измерений распределены нормально. Хотя это и разумное допущение, оно относится к разряду допущений, которые трудно проверить на практике, и иногда не совсем верно. Но и в этом случае мы должны подчеркнуть, что если результаты измерений не подчиняются нормальному распределению, оно почти всегда является *приблизительно* нормальным, и поэтому вполне допустимо использовать понятия этого раздела, по крайней мере, как хорошие приближения.

На практике можно задать требуемую погрешность Δx. *Доверительным интервалом* называется интервал от $x-\Delta x$ до $x+\Delta x$, в который попадает истинное значение *X*. *Надежностью* называется вероятность α того, что истинное значение *X* попадает в данный доверительный интервал. Для распределения Гаусса величина α определяется табулированным *нормальным интегралом ошибок*

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-z^2/2} dz = \mathrm{erf}\,(t), \qquad (1.11)$$

где $t = \dfrac{\Delta x}{\sigma}$, $z = \dfrac{x - X}{\sigma}$.

Значения нормального интеграла ошибок представлены в табл. 1.1. Теоретически α — вероятность того, что результат измерения будет лежать в пределах $t\sigma$ от истинного значения *X*.

Таблица 1.1

Вероятность α того, что результат измерения *x* будет лежать в пределах *t* стандартных отклонений от истинного значения *X*

t	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	3,0	4
α, %	0	20	38	55	68	79	87	92	99,7	99,99

Величина надежности α зависит от задаваемой погрешности. Выбрав абсолютную погрешность Δx в пределах одного СО (*t*=1), получим надежность α = 68 % (или 0,68), а за пределы этого интервала попадет доля (1 – α) от числа выполненных измерений. При $\Delta x = 2\sigma$ α = 95 %, а за пределы доверительного интервала выпадет 5 % измерений. При $\Delta x = 3\sigma$ α = 99,7 %, а за пределы доверительного интервала выпадет 0,3 % измерений.

Необходимость увеличивать абсолютную погрешность измерений Δx для повышения надежности противоречит естественному желанию экспериментатора получать результаты с наименьшей погрешностью. Выход из этого противоречия единственный: нужно делать измерения тщательно и с высокой точностью, чтобы распределение Гаусса имело вид острого пика с малой шириной σ. Тогда погрешность $\Delta x = (2–3)\sigma$ будет мала по абсолютному значению, а надежность α будет высока — на уровне 95 % и более. Качество измерения характеризуется не только абсолютной погрешностью, но и отношением Δx к $x_{\text{наил}}$, поэтому оценку точности измерений дает относительная погрешность

$$\varepsilon = \pm \Delta x / \bar{x} \cong \pm \sigma / X . \qquad (1.12)$$

2.2.3. Распределение Стьюдента

Оценки СО (1.8) и СОС (1.9) являются предельными, то есть справедливыми при больших N (практически при $N \geq 20$). При малых значениях N эти оценки определяют лишь порядок величины СО и СОС, и при нахождении границ доверительного интервала для $\bar{x} \cong X$ мы не можем пользоваться коэффициентом t и табл. 1.1, поскольку величина СОС при $N < 20$ нам не известна.

При малых N приходится вводить новый коэффициент t_α. Этот коэффициент был предложен в 1908 г. английским математиком и химиком В.С. Госсетом, публиковавшим свои работы под псевдонимом Стьюдент (Student) — студент, и получил впоследствии название *коэффициента Стьюдента*.

Для малой выборки типа (1.1) Госсет преобразовал измеряемую величину x к величине

$$h = \frac{x - \bar{x}}{\sigma_{\bar{x}}}, \qquad (1.13)$$

где $\bar{x}$ определяется выражением для среднего (1.5), а $\sigma_{\bar{x}}$ — выражением для СОС (1.9).

Если обозначить вероятность появления того или иного значения h в пределах $h \pm \frac{1}{2} dh$ через $f(h)dh$, то плотность распределения вероятности появления величины h имеет вид

$$f(h) = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\sqrt{N-1}\,\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{h^2}{N-1}\right)^{N/2}}. \qquad (1.14)$$

В уравнении (1.14) $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Это распределение названо распределением Стьюдента, кривые распределения показаны на рис. 1.1 для различных значений числа измерений N. Здесь же — границы доверительного интервала $(-t_\alpha, t_\alpha)$ для некоторого значения α (различного для разных кривых).

Множители при $\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{h^2}{N-1}\right)^{N/2}}$ в $f(h)$ выбраны так, чтобы площади под любой кривой $f(h)$ равнялись 1.

При $N \to \infty$ (практически при $N \geq 20$) распределение Стьюдента переходит в нормальное распределение с единичной дисперсией $\sigma^2 = 1$ (рис. 1.1), а коэффициенты Стьюдента $t_\alpha = \Delta x / \sigma_{\overline{x}}$ переходят в коэффициенты t для нормального распределения (см. табл. 1.1).

При $N < 20$ распределение Стьюдента позволяет оценить величину надежности α по заданному значению Δx или, наоборот, по заданной величине надежности α найти величину абсолютной погрешности Δx.

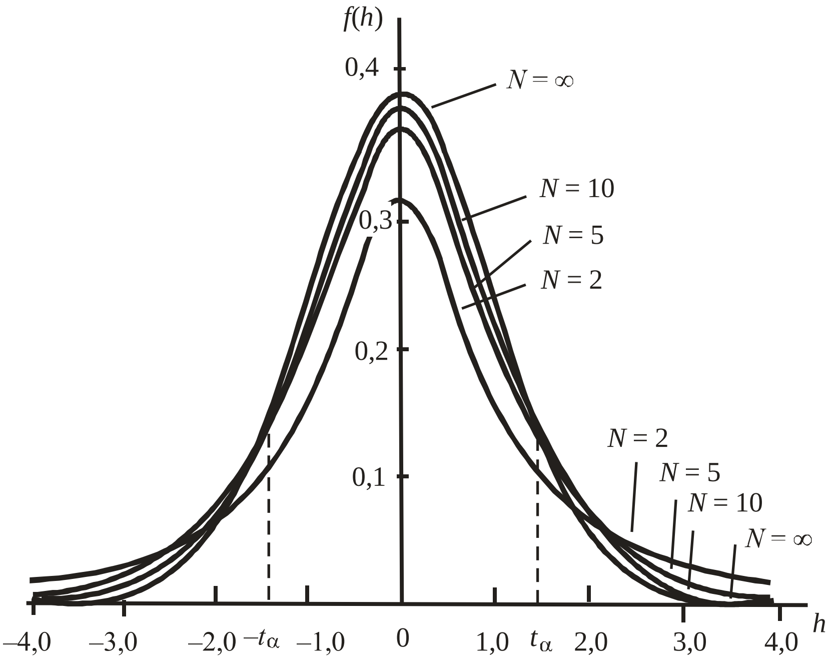


Рис. 1.1. Кривые распределения Стьюдента
для различного числа измерений N

В табл. 1.2 приведены коэффициенты Стьюдента t_α. Задав надежность $\alpha = 95$ % или 0,95 по числу проведенных измерений N (например, N=7), определяем по табл. 1.2 значение t_α = 2,45 для этих данных.

Рассчитав по формуле (1.9) СОС, находим абсолютную погрешность

$$\Delta x = t_\alpha \sigma_{\overline{x}} \tag{1.15}$$

и записываем результат в виде $x = \overline{x} \pm \Delta x,$ что означает, что оценка истинного значения величины x попадает в доверительный интервал $\pm \Delta x$ с надежностью $\alpha = 95$ %.

Таблица 1.2

Значения коэффициентов Стьюдента t_α

N	α = 0,9	α = 0,95	α = 0,99
2	6,31	12,71	63,66
3	2,92	4,3	9,92
4	2,35	3,18	5,84
5	2,13	2,78	4,6
6	2,02	2,57	4,03
7	1,94	2,45	3,71
8	1,90	2,36	3,5
9	1,86	2,31	3,36
10	1,83	2,26	3,25

Расчет параметров нормального распределения для заданной статистической выборки на примере трех различных вариантов. Учет поправок Стьюдента для ограниченной статистической выборки

Задание 5 используя материал, приведенный выше рассчитайте среднее значение измеренной величины, стандартное отклонение, стандартное отклонение среднего, вычислите относительную погрешность, проделайте учет того, что выборка (1.16) является конечной и уточните результаты с помощью коэффициента Стьюдента.

Предположим, что студент 10 раз измерил удельное сопротивление ρ германиевого образца при комнатной температуре и получил значения ρ

$$47,\ 49,\ 45,\ 48,\ 49,\ 50,\ 50,\ 46,\ 49,\ 49\ \text{Ом}\cdot\text{см}. \qquad (1.16)$$

Задание 6 используя материал, приведенный выше рассчитайте среднее значение измеренной величины, стандартное отклонение , стандартное отклонение среднего, вычислите относительную погрешность, проделайте учет того, что выборка (1.16) является конечной и уточните результаты с помощью коэффициента Стьюдента.

При многократном измерении силы F получены значения в ньютонах: 200; 198; 205; 203; 206; 195; 206; 204. Укажите доверительные границы истинного значения силы с вероятностью $\alpha = 0{,}95$ ($t_\alpha = 2{,}36$).

При многократном измерении электрического сопротив-ления R получены значения в омах: 91; 90; 95; 90; 93; 91; 94. Укажите доверительные границы истинного значения со-противления с вероятностью $\alpha = 0{,}99$.

Задание 7 используя материал, приведенный выше рассчитайте среднее значение измеренной величины, стандартное отклонение , стандартное отклонение среднего, вычислите относительную погрешность, проделайте учет того, что выборка (1.16) является конечной и уточните результаты с помощью коэффициента Стьюдента

Тема занятий 3 «Аппроксимация методом наименьших квадратов» – Практические занятия с указаниями по самостоятельной работе по заданиям 1 – 4

Цель : научить студентов проводить аппроксимацию экспериментальных результатов

Изучите самостоятельно предложенный материал

При анализе измеренных N пар значений (x_1, y_1), ..., (x_N, y_N) и аппроксимации полученной зависимости прямой линией $y=A+Bx$ решаются две основные задачи:

1) определение наилучших оценок постоянных A и B, основанных на данных (x_1,y_1), ..., (x_N,y_N), то есть нахождение прямой линии, которая наилучшим образом аппроксимирует результаты измерений;

Рассмотрим первую задачу аппроксимации. Для упрощения будем предполагать, что погрешность в измерениях x пренебрежимо мала, в противном случае анализ существенно осложняется. Такое предположение очень часто оправдывается на практике. Например, при измерении ВАХ (см. рис. 1.3) напряжение U подавалось от стабилизированного источника питания и точно измерялось. Сделаем еще одно допущение, разумное для многих экспериментов. Предположим, что все погрешности в y одинаковы по величине, если говорить точнее, что результат измерения каждого y_i подчиняется распределению Гаусса с одинаковой шириной σ_y во всех измерениях и с центром на истинном значении Y_i, которое можно было бы вычислить, зная параметры A и B:

$$Y_i = A + Bx_i. \tag{1.24}$$

оценки метода наименьших квадратов для постоянных A и B:

$$A = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i\right)}{D}; \tag{1.27}$$

$$B = \frac{N\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)}{D}, \tag{1.28}$$

где

$$D = N\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2. \tag{1.29}$$

Формулы (1.27) и (1.28) дают наилучшие оценки постоянных A и B для прямой линии $y = A + Bx$, основанные на измеренных точках (x_1, y_1), ..., (x_N, y_N). Получившаяся линия называется *линией аппроксимации методом наименьших квадратов* этих данных, или *линией регрессии y* от x.

Оценка σ_y будет определяться суммой квадратов отклонений:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - A - Bx_i\right)^2}, \tag{1.30}$$

где A и B определяются выражениями (1.27) и (1.28).

абсолютные погрешности A и B определяют простым расчетом ошибок в косвенных измерениях, исходя из погрешности σ_y для $y_1, ..., y_N$:

$$\left(\Delta A\right)^2 = \sigma_A^2 = \sigma_y^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \Big/ D; \tag{1.31}$$

$$\left(\Delta B\right)^2 = \sigma_B^2 = N\sigma_y^2 \Big/ D, \tag{1.32}$$

где D определяется выражением (1.29).

Построив график измеренной зависимости и проведя через точки экспериментальных результатов линию аппроксимации, необходимо от каждой точки отложить вертикальные черточки ошибок длиной в одно стандартное отклонение (1.30) по каждую сторону от точки. Тогда мы можем видеть, действительно ли измеренные точки лежат разумно близко к линии. Если это так, то измерения подтверждают наше предположение, что x и y связаны линейно.

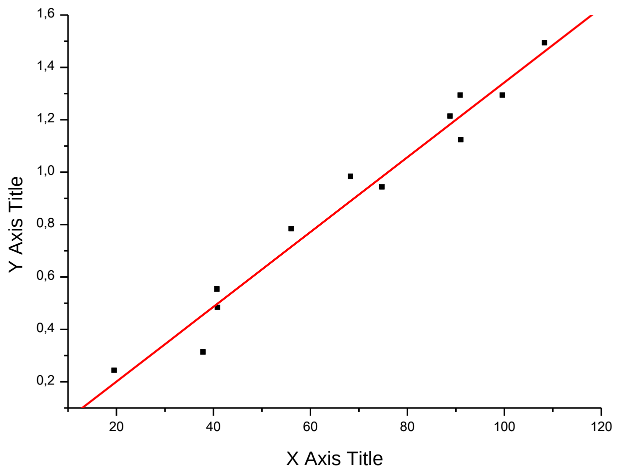
Задание 1 На основе предложенного материала и соответствующих ему материалов из интернет напишите эссе на тему «Методы аппроксимации»

Задание 2 На основе предложенного материала и соответствующих ему материалов из интернет напишите эссе на тему «Метод наименьших квадратов и почему он так называется»

Задание 3 На основе предложенного материала и соответствующих ему материалов из интернет напишите эссе на тему «Метод наименьших квадратов и почему он так называется»

Задание 4 На основе предложенного материала и соответствующих ему материалов из интернет напишите эссе на тему «Аппроксимация и интерполяция – основные отличия»

Задание 5 В программе Origin проведите линейную аппроксимацию данных



Data1

	A(X)	B(Y)
1	19,76	0,24
2	38,09	0,31
3	40,95	0,55
4	41,08	0,48
5	56,29	0,78
6	68,51	0,98
7	75,01	0,94
8	89,05	1,21
9	91,13	1,29
10	91,26	1,12
11	99,84	1,29
12	108,55	1,49
13		

Проверочный ответ : A = – 0,085 ± 0,056; B=0,0143 ± 8,09162E-4

Задание 6 В программе Origin проведите линейную аппроксимацию данных

Data3

	A(X)	C(Y)
1	19,76	0,11758
2	38,09	0,1726
3	40,95	0,40789
4	41,08	0,33255
5	56,29	0,68888
6	68,51	0,97015
7	75,01	0,91136
8	89,05	1,331
9	91,13	1,46516
10	91,26	1,1853
11	99,84	1,46516
12	108,55	1,81878

Проверочный ответ :

A= –0,41404± 0,08809; B=0,01932 ± 0,0012

Задание 7 В программе Origin проведите линейную аппроксимацию данных

Data4

	A(X)	D(Y)
1	19,76	0,02627
2	38,09	0,05046
3	40,95	0,21773
4	41,08	0,15387
5	56,29	0,53069
6	68,51	0,94979
7	75,01	0,85404
8	89,05	1,62593
9	91,13	1,91427
10	91,26	1,33508
11	99,84	1,91427
12	108,55	2,76455

Проверочный ответ :

A= –0,48803 ± 0,18687;   B=0,23325±0,02539

Тема занятий 4 «Правила определения и вычисления погрешностей. Как определять и приводить погрешности» –Практические занятия с указаниями по самостоятельной работе по заданиям

3. Задачи

3.1. Определение искомой физической величины и ее погрешности из прямых многократных измерений

Задача 3.1.1

При многократном измерении силы F получены значения в ньютонах: 200; 198; 205; 203; 206; 195; 206; 204. Укажите доверительные границы истинного значения силы с вероятностью $\alpha = 0{,}95$ ($t_\alpha = 2{,}36$).

Ответ: доверительные границы истинного значения силы 199 Н $\le F \le$ 205 Н, $\alpha = 0{,}95$.

Задача 3.1.2

При многократном измерении электрического сопротивления R получены значения в омах: 91; 90; 95; 90; 93; 91; 94. Укажите доверительные границы истинного значения сопротивления с вероятностью $\alpha = 0{,}99$.

Ответ: доверительные границы истинного значения сопротивления: 89,2 Ом $\le R \le$ 94,8 Ом, $\alpha = 0{,}95$.

Задача 3.1.3

При многократном измерении постоянного напряжения U получены значения в вольтах: 14,2; 13,8; 14,0; 14,8; 13,9; 14,1; 14,5; 14,3. Укажите доверительные границы истинного значения напряжения с заданной вероятностью, если известно, что коэффициент Стьюдента $t_\alpha = 2{,}36$.

Ответ: доверительные границы истинного значения напряжения 13,9 Ом $\le R \le$ 14,5 Ом, α = 0,95.

3.2. Определение погрешности физической величины при известном среднеквадратичном отклонении

Задача 3.2.1

При измерении электрического сопротивления нагрузки омметр показывает 90 Ом. Среднеквадратичное отклонение показаний σ_R = 1 Ом. Погрешность от подключения омметра в сеть Δ_S = –2 Ом. Укажите доверительные границы истинного значения сопротивления с вероятностью α = 0,97 (t_α = 2).

Ответ: доверительные границы истинного значения сопротивления 90 Ом $\le R \le$ 94 Ом, α = 0,97, t_α = 2.

Задача 3.2.2

При измерении силы динамометр показывает 910 Н. Среднеквадратичное отклонение показаний σ_F = 5 Н. Погрешность от подключения динамометра Δ_S = +3 Н. Укажите доверительные границы истинного значения силы с вероятностью α = 0,96 ($t_\alpha = 2$).

Ответ: доверительные границы истинного значения силы 897 Н $\le F \le$ 917 Н, α = 0,96, t_α = 2.

Задача 3.2.3

При измерении напряжения вольтметр показывает 230 В. Среднеквадратичное отклонение показаний σ_U = 2 В. Погрешность Δ_S от подключения вольтметра в цепь равна –1 В. Найдите истинное значение напряжения и его доверительные границы с вероятностью α = 0,96 (t_α = 2).

Ответ: доверительные границы истинного значения напряжения 227 В $\le U \le$ 235 В, α = 0,96.

3.3. Определение погрешности физической величины из косвенных единичных измерений

Задача 3.3.1

Сила инерции определяется по формуле $F = ma$ — по измеренным значениям массы m = 50 кг и ускорения a = 1 м/с^2. Среднеквадратичные отклонения результатов измерений: σ_m = 0,5 кг, σ_a = 0,01 м/с^2.

Найдите случайную погрешность измерения силы ΔF с вероятностью α = 0,96 (t_α = 2,12).

Ответ: абсолютная погрешность силы $\Delta F = 50 \cdot 0,03 = = 1,5 \cong 2$ Н.

Задача 3.3.2

Электрическая мощность P определяется по результатам измерений падения напряжения $U = 220 \pm 2$ В и силы тока $I = 2{,}0 \pm 0{,}1$ А как $P = UI$. Найдите предельные границы истинного значения мощности.

Ответ: предельные границы истинного значения мощности 414 Вт $\le P \le$ 466 Вт.

Задача 3.3.3

Сопротивление нагрузки определяется по закону Ома: $R = U/I$. Показания вольтметра 50 В, амперметра 1 А. Среднеквадратичные отклонения показаний: вольтметра — $\sigma_U = = 0{,}5$ В, амперметра — $\sigma_A = 0{,}05$ А. Найти доверительные границы истинного значения сопротивления с вероятностью $\alpha = 0{,}95$ ($t_\alpha = 1{,}96$).

Ответ: доверительные границы истинного значения сопротивления 39 Ом $\le R \le$ 61 Ом.

3.4. Определение предела допускаемой погрешности средства измерения. Поле допуска, класс точности

Задача 3.4.1

Амперметр с пределами измерений от –5 А до +15 А класса точности 1,0 показывает значение 5 А. Найдите предел допускаемой погрешности прибора.

Ответ: предел допускаемой абсолютной погрешности прибора составляет 0,15 А.

Задача 3.4.2

Вольтметр с пределами измерения 0–200 В класса точности 0,5 показывает значение 100 В. Найдите предел допускаемой погрешности измерения вольтметра. Чему равно измеряемое напряжение?

Ответ: измеряемое напряжение будет лежать в пределах 99 В $\le U \le$ 101 В.

Задача 3.4.3

Средство измерения линейного размера характеризуется асимметричным допуском относительно номинального размера $10\frac{+0{,}014}{-0{,}032}$. Каким целесообразно принять предел допускаемой погрешности измерения?

Решение

Все поле допуска Д = 0,014+0,032 = 0,046. Предел допускаемой погрешности измерения

$$\Delta \le 0{,}33Д = 0{,}33 \cdot 0{,}046 = 0{,}015.$$

Ответ: предел допускаемой погрешности измерения целесообразно принять 0,015 мм.

Задача 3.4.4

Амперметр класса точности 0,06/0,04 со шкалой от –20 А до +20 А показывает значение 2 А. Найдите предел допускаемой относительной погрешности прибора. Чему равна измеряемая сила тока?

Ответ: предел допускаемой относительной погрешности прибора равен 0,42 %. Измеряемая сила тока будет лежать в пределах 1,99 А $\le I \le$ 2,01 А.

Тема занятий 5 «Практические рекомендации вычисления погрешностей для случаев прямых и косвенных однократных и многократных измерений» –Практические занятия с указаниями по самостоятельной работе по заданиям 1 ,2 и решение задач

Задание 1 Изучите самостоятельно предложенные материалы, дополните его материалами из интернет. Напишите эссе на тему «Совместные измерения и способы их проведения».

Совместными называются измерения двух различных физических переменных, проводимые для исследования математической связи этих переменных. Результатом совместных измерений является набор измеренных N пар значений $(x_1, y_1), ..., (x_N, y_N)$, где каждая пара значений измеряется один раз. Адекватным методом обработки (аппроксимации) результатов таких измерений является *метод наименьших квадратов* (МНК).

В результате проделанной работы определяются следующие показатели:

1) наилучшие оценки параметров a и b и стандартные отклонения от наилучших значений Δa и Δb (абсолютные погрешности);

2) наилучшая оценка значения функции $y = a+bx$ для любого значения x и стандартное отклонение от наилучшего значения Δy (абсолютная погрешность); величина Δy дает уже не приблизительную, а точную оценку погрешности в измерениях функции y, основанную на учете как погрешностей измерительных приборов, так и отклонений, вызванных случайными факторами;

На практике часто главной целью линейной аппроксимации является определение тангенса угла наклона прямой линии и его погрешности: $b \pm \Delta b$. Например, при исследовании температурной зависимости удельной электропроводности собственного полупроводника

$$\ln \sigma(1/T) \sim -\frac{E_g}{2k} \cdot \frac{1}{T},$$

где E_g — ширина запрещенной зоны, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, простым логарифмированием экспоненциальная зависимость $\sigma(T)$ преобразуется в линейную

$$\ln \sigma(1/T) \sim -\frac{E_g}{2k} \cdot \frac{1}{T},$$

а тангенс угла наклона позволяет определить значение и абсолютную погрешность ширины запрещенной зоны собственного полупроводника:

$$E_g = -2k \cdot b; \;\; \Delta E_g = 2k \cdot |\Delta b|.$$

Проведите анализ нелинейных зависимостей, представленных данными

U, B	3E-4	6E-4	0,0012	0,0018	0,0023	0,0029	0,0059	0,0112	0,0162
I, A	1E-10	2E-10	3,98E-10	6,31E-10	7,9E-10	1E-9	2E-9	3,98E-9	6,31E-9
U, B	0,0263	0,0468	0,0794	0,1047	0,1259	0,1445	0,2089	0,2951	0,3548
I, A	1E-8	2E-8	3,98E-8	6,31E-8	7,94E-8	1E-7	2E-7	3,98E-7	6,31E-7

Проведите анализ нелинейных зависимостей, представленных данными

U(Y)	I(Y)
3E-4	1E-10
6E-4	2E-10
0,0012	3,98E-10
0,0018	6,31E-10
0,0023	7,94E-10
0,0029	1E-9
0,0059	2E-9
0,0112	3,98E-9
0,0162	6,31E-9
0,0214	7,94E-9
0,0263	1E-8
0,0468	2E-8
0,0794	3,98E-8
0,1047	6,31E-8
0,1259	7,94E-8
0,1445	1E-7
0,2089	2E-7
0,2951	3,98E-7
0,3548	6,31E-7
0,389	7,94E-7
0,4169	1E-6
0,5012	2E-6
0,56	4E-6
0,6	6,3E-6
0,62	7,9E-6
0,64	1E-5
0,69	2E-5
0,74	4E-5
0,76	6,3E-5
0,79	7,9E-5
0,81	1E-4

Проведите анализ нелинейных зависимостей, представленных данными

	U(X)	I(Y)
1	6E-5	1E-9
2	1,1E-4	1,7E-9
3	1,6E-4	2,44E-9
4	2,12E-4	3,18E-9
5	2,63E-4	3,91E-9
6	3,16E-4	4,67E-9
7	3,65E-4	5,4E-9
8	4,67E-4	6,9E-9
9	5,68E-4	8,3E-9
10	7,2E-4	1,05E-8
11	0,00138	2E-8
12	0,0028	4E-8
13	0,00416	6E-8
14	0,00557	8E-8
15	0,00708	1E-7
16	0,014	2E-7
17	0,028	4E-7
18	0,042	6E-7
19	0,056	8E-7
20	0,0708	1E-6
21	0,14	2E-6
22	0,26	4E-6
23	0,331	6E-6
24	0,364	8E-6
25	0,386	1E-5
26	0,435	2E-5
27	0,476	4E-5
28	0,498	6E-5
29	0,514	8E-5
30	0,526	1E-4
31	0,566	2E-4
32	0,607	4E-4
33	0,632	6E-4
34	0,652	8E-4
35	0,668	1E-3
36	0,722	0,002

Задание 2 Изучите предложенный материал и примените к решению практических задач

2.1.2. Значащие цифры

Появление карманных микрокалькуляторов способствовало появлению ужасной привычки выписывать совсем *незначащие* цифры только потому, что калькулятор их выдает. Величина Δx служит оценкой *погрешности*, и ее, очевидно, нельзя приводить с очень большой точностью. Было бы абсурдом представлять результат подобно следующему для удельного сопротивления германиевого образца:

$$\rho = 48{,}2 \pm 1{,}21494 \text{ Ом} \cdot \text{см}. \tag{2.3}$$

Невероятно, чтобы погрешность измерений составляла до пяти значащих цифр. В случае высокоточных измерений иногда приводят погрешности с двумя значащими цифрами, но для учебной лаборатории справедливо правило 1.

Правило 1. Приведение абсолютных погрешностей

В учебной лаборатории экспериментальные погрешности обычно должны округляться до одной значащей цифры.

Есть только одно исключение из правила 1: если первая значащая цифра в погрешности Δx есть 1, то лучше сохранить две значащие цифры в Δx. Например, округлить $\Delta x = 1{,}2$ до $\Delta x = 1$ — значит на 20 % уменьшить погрешность, поэтому более правильно сохранить две значащие цифры и привести $\Delta x = 1{,}2$. Тот же аргумент, вероятно, можно использовать, если первая цифра есть 2, но уже определенно нельзя, если первая цифра больше, чем 2.

Таким образом, в выражении (2.3) значение $\Delta x = 1{,}21494$ должно быть округлено до $\Delta x = 1{,}2$ и результат (2.3) следует переписать как

$$\rho = 48{,}2 \pm 1{,}2 \text{ Ом} \cdot \text{см}. \tag{2.4}$$

После расчета погрешности необходимо проанализировать, какие цифры в *измеренной величине* являются значащими. Приводить результат в виде

$$\rho = 45{,}213 \pm 3 \text{ Ом} \cdot \text{см}, \tag{2.5}$$

очевидно, нелепо. Погрешность 3 означает, что цифра 5 на втором месте от начала числа 45,2134 могла быть в действительности 2 или 8. Ясно, что последующие цифры 2, 1 и 3 вовсе не имеют значения и должны быть округлены. Корректная запись выражения (2.5) выглядит следующим образом:

$$\rho = 45 \pm 3 \text{ Ом} \cdot \text{см}. \tag{2.6}$$

Правило 2. Приведение результатов

Последняя значащая цифра в любом результате должна быть того же порядка величины (находиться в той же позиции), что и у абсолютной погрешности.

Например, результат 92,81 с погрешностью 0,3 должен быть округлен до 92,8±0,3. Если же ошибка равна 3, то этот же результат следует представить как 93±3, а если ошибка равна 30 — то как 90±30. Нуль писать так же обязательно, как и любую другую цифру: 25,70±0,02, а не 25,7±0,02. Запись 25,7 означает, что число сотых долей неизвестно, а запись 25,70 показывает, что число сотых известно и равно нулю.

Однако *используемые в расчетах* числа должны, как правило, содержать на одну значащую цифру больше, чем это оправдано. Это уменьшит неточности при округлении чисел. В конце расчета окончательный ответ следует округлить и избавиться от этой добавочной (и незначащей) цифры.

Если измеренное число настолько велико или мало, что требует «научной записи», то проще и нагляднее приводить результат и погрешность в одинаковом виде. Результат проще прочитать и понять в такой форме записи:

$$\text{измеренный заряд} = (1{,}61 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-19}\ \text{Кл},$$

чем в виде

$$\text{измеренный заряд} = 1{,}61 \cdot 10^{-19} \pm 5 \cdot 10^{-21}\ \text{Кл}.$$

2.1.3. Погрешности в косвенных измерениях

В теории ошибок доказываются простые правила для вычисления погрешности результата косвенных измерений.

Правило 3. Определение погрешностей измерения:

1) когда измеряемые величины складываются или вычитаются, *складываются их абсолютные погрешности*;
2) когда измеряемые величины умножаются или делятся, *складываются их относительные погрешности*.

Однако при определенных условиях погрешности, рассчитанные по этим правилам, могут оказаться неоправданно большими. Если измерения x, y, ..., w выполняются *независимо* и их исходные погрешности *независимы и случайны*, то более реалистичную и меньшую оценку окончательной погрешности можно дать в соответствии с правилами, в которых абсолютные или относительные погрешности *складываются квадратично*.

В теории ошибок доказывается, что оценки результирующей погрешности по простым правилам — верхние пределы, которые всегда справедливы. Конечный вариант правил выглядит следующим образом.

Правило 4. Определение погрешностей в суммах и разностях

Предположим, что x, ..., w измерены с абсолютными погрешностями Δx, ..., Δw и что измеренные значения используются для вычисления $q = x + ... + z - (u + ... + w)$.

Если известно, что погрешности измерений x, ..., w *независимы и случайны*, то погрешность q равна корню квадратному из суммы квадратов абсолютных погрешностей исходных величин:

$$\Delta q \leq \sqrt{(\Delta x)^2 + ... + (\Delta z)^2 + (\Delta u)^2 + ... + (\Delta w)^2}. \qquad (1)$$

В любом случае Δq никогда не больше, чем их обычная сумма:

$$\Delta q = \Delta x + ... + \Delta z + \Delta u + ... + \Delta w. \qquad (2)$$

Многие расчеты включают более сложные операции, чем вычисление сумм, разностей, произведений и частных: вычисление тригонометрических функций, квадратного корня и тому подобного.

Правило 5. Определение погрешностей в произведениях и частных

Предположим, что x, …, w измерены с погрешностями Δx, ..., Δw и что измеренные значения используются для вычисления $q = \frac{x \cdot \ldots \cdot z}{u \cdot \ldots \cdot w}$.

Если известно, что погрешности x, ..., w *независимы и случайны*, то относительная погрешность q равна корню квадратному из суммы квадратов исходных относительных погрешностей:

$$\frac{\Delta q}{|q|} \le \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u}{u}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta w}{w}\right)^2}. \tag{1}$$

В любом случае она никогда не больше, чем их обычная сумма:

$$\frac{\Delta q}{q} \le \frac{\Delta x}{x} + \ldots + \frac{\Delta z}{z} + \frac{\Delta u}{u} + \ldots + \frac{\Delta w}{w}. \tag{2}$$

Для этих случаев приведем общее правило для определения погрешности функции, имеющей как отрицательную, так и положительную производную.

Правило 6. Определение погрешности произвольной функции одной переменной

Если величина x измерена с абсолютной погрешностью Δx и используется для вычисления функции $q(x)$, то абсолютная погрешность Δq равна

$$\Delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right| \Delta x.$$

Например, измерен угол $\theta = 20 \pm 3$ градуса. Наилучшая оценка для $\cos\theta$ составляет cos 20° = 0,94, а в соответствии с правилом 6

$$\Delta(\cos\theta) = \left|\frac{d\cos\theta}{d\theta}\right| \Delta\theta = |\sin\theta|\Delta\theta. \tag{2.7}$$

Погрешность $\Delta\theta$ должна быть выражена в радианах, поскольку производная от $\cos\theta$ равна $-\sin\theta$, только если угол θ выражен в радианах. Перепишем $\Delta\theta = 3°$ в виде $\Delta\theta = 0{,}05$ рад, тогда $\Delta(\cos\theta) = (\sin 20°) \cdot 0{,}05 = 0{,}0171 \cong 0{,}02$.

Таким образом, конечный результат имеет вид $\cos\theta = 0{,}94 \pm 0{,}02$.

Погрешность измерения степенной функции — частный случай правила 6, но он достаточно важен и заслуживает представления в виде отдельного правила.

Правило 7. Определение погрешности степенной функции

Если величина x измерена с абсолютной погрешностью Δx и используется для вычисления степенной функции $q(x) = x^n$, где n — фиксированное известное число, то относительная погрешность Δq в $|n|$ раз больше, чем погрешность величины x:

$$\frac{\Delta q}{|q|} = |n| \frac{\Delta x}{|x|}.$$

Из этого правила следует несложный вывод, что n должно быть целым и положительным числом. Однако правило 7 можно обобщить для *любых* показателей n.

Другой частный случай правила 6 — умножение измеренной величины x на точное число B — также заслуживает представления в виде отдельного правила.

Правило 8. Умножение измеренной величины на точное число

Если величина x измерена с абсолютной погрешностью Δx и используется для вычисления произведения

$$q = B \cdot x, \tag{1}$$

в котором B не имеет погрешности, то абсолютная погрешность результата q равна $|B|$, умноженному на абсолютную погрешность измерения x:

$$\Delta q = |B| \cdot \Delta x. \tag{2}$$

Используя метод «шаг за шагом», а также приведенные выше правила, можно справиться с любой задачей вычисления погрешностей в случае косвенных измерений. Например, для вычисления погрешности величины

$$q = x \cdot \left(y - z \cdot \sin u \right) \tag{2.8}$$

сначала найдем погрешность измерения функции $\sin u$; зная ее, определим погрешность в произведении $z \cdot \sin u$ и затем — в разности $y - z \cdot \sin u$; наконец, найдем погрешность в произведении (2.8).

Однако существуют задачи, при решении которых метод «шаг за шагом» переоценивает конечную погрешность. Всегда когда функция включает одну и ту же величину более чем один раз, некоторые из погрешностей могут взаимно компенсироваться (*эффект компенсирующихся погрешностей*). Например, при измерении трех величин x, y, z мы должны вычислить функцию типа

$$q = \frac{x + y}{x + z}, \tag{2.9}$$

при этом *переоценка* x приведет к переоценке и числителя x+y и знаменателя x+z. То же самое произойдет при недооценке x: одинаково недооценены будут и числитель и знаменатель. В любом случае при вычислении частного величина $q = \frac{x + y}{x + z}$ не изменится.

Правило 9. Определение погрешности функции нескольких переменных

Предположим, что $x, ..., w$ измерены с абсолютными погрешностями Δx, ..., Δw и что измеренные значения используются для вычисления функции $q(x, ..., w)$. Если погрешности $x, ..., w$ независимы и случайны, то абсолютная погрешность измерения q равна

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial q}{\partial w}\Delta w\right)^2}. \qquad (1)$$

В любом случае она никогда не больше, чем обычная сумма

$$\Delta q = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\Delta x + \ldots + \left|\frac{\partial q}{\partial w}\right|\Delta w. \qquad (2)$$

Применение метода «шаг за шагом» не позволяет учитывать того факта, что погрешность в числителе, связанная с x, может до некоторой степени компенсироваться погрешностью в знаменателе, связанной с теми же ошибками в x, что приводит к переоценке конечной погрешности. Единственный способ избежать этого заключается в расчете погрешности за один прием с помощью общей формулы, из которой можно получить все описанные выше правила и с помощью которой может быть решена любая задача вычисления ошибок в косвенных измерениях.

Вывод. Обычно при расчете погрешностей проще, если возможно, продвигаться шаг за шагом, используя предыдущие простые правила 4–8. Непосредственное использование общих формул правила 9 довольно громоздко на практике. Однако если функция $q(x, ..., z)$ включает любую переменную более одного раза, могут возникнуть компенсирующиеся ошибки; тогда лучше вычислять Δq за один прием, используя непосредственно выражения правила 9.

2.2.1. Определение искомой физической величины и ее погрешности из прямых или косвенных единичных измерений

В простейшем случае единичного *прямого* измерения искомая физическая величина определяется считыванием показаний со шкалы измерительного прибора. Абсолютная погрешность измеренной величины определяется из разумных соображений и погрешности прибора.

Если измерительный прибор стрелочный, то его класс точности приводится на измерительной шкале и обозначается числом, обведенным окружностью. Это число указывает *максимальную* абсолютную погрешность прибора в процентах от верхнего предела измерений. Например, для стрелочного миллиамперметра М45 со шкалой 75 мА и классом точности 1 погрешность в измерении силы тока не более 0,75 мА. Часто на практике абсолютную погрешность определяют как половину наименьшего деления шкалы прибора, соответствующей установленному пределу измерения.

Если измерительный прибор цифровой, то абсолютная погрешность рассчитывается по формуле, приведенной в паспорте прибора. Все цифры, которые показывает цифровой прибор, являются значимыми. Обычно цифровые приборы имеют абсолютную погрешность в одну-две единицы последней значащей цифры, если в паспорте прибора не указана другая величина.

Если искомая физическая величина является функцией одной переменной, определенной прямым измерением, то результирующая погрешность рассчитывается по правилам 6–7.

Чаще всего в измерительной практике используются *косвенные* измерения. В случае *косвенного* измерения искомая физическая величина связана функциональной зависимостью, представленной формулой, с одной или несколькими физическими величинами, которые определяются прямыми измерениями, а их абсолютные погрешности определяются в соответствии с п. 2.1.1.

Перед расчетом погрешности косвенного измерения необходимо:

1) установить, выполняются ли прямые измерения исходных величин *независимо.* Если это так, то их погрешности *независимы* и *случайны.* При этом результирующая погрешность определяется *квадратичной суммой* исходных абсолютных или относительных погрешностей в соответствии с формулами (1) правил 4 или 5.

Правило 4. Определение погрешностей в суммах и разностях

Предположим, что x, ..., w измерены с абсолютными погрешностями Δx, ..., Δw и что измеренные значения используются для вычисления $q = x + ... + z - (u + ... + w)$.

Если известно, что погрешности измерений x, ..., w *независимы и случайны*, то погрешность q равна корню квадратному из суммы квадратов абсолютных погрешностей исходных величин:

$$\Delta q \le \sqrt{(\Delta x)^2 + ... + (\Delta z)^2 + (\Delta u)^2 + ... + (\Delta w)^2}. \qquad (1)$$

В любом случае Δq никогда не больше, чем их обычная сумма:

$$\Delta q = \Delta x + ... + \Delta z + \Delta u + ... + \Delta w. \qquad (2)$$

Многие расчеты включают более сложные операции, чем вычисление сумм, разностей, произведений и частных: вычисление тригонометрических функций, квадратного корня и тому подобного.

Правило 5. Определение погрешностей в произведениях и частных

Предположим, что x, …, w измерены с погрешностями Δx, ..., Δw и что измеренные значения используются для вычисления $q = \dfrac{x \cdot \ldots \cdot z}{u \cdot \ldots \cdot w}$.

Если известно, что погрешности *x*, ..., *w* *независимы и случайны*, то относительная погрешность *q* равна корню квадратному из суммы квадратов исходных относительных погрешностей:

$$\frac{\Delta q}{|q|} \le \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u}{u}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta w}{w}\right)^2}. \qquad (1)$$

В любом случае она никогда не больше, чем их обычная сумма:

$$\frac{\Delta q}{q} \le \frac{\Delta x}{x} + \ldots + \frac{\Delta z}{z} + \frac{\Delta u}{u} + \ldots + \frac{\Delta w}{w}. \qquad (2)$$

Для этих случаев приведем общее правило для определения погрешности функции, имеющей как отрицательную, так и положительную производную.

Если измерения *зависимы,* то результирующая погрешность вычисляется по формулам (2) правил 4 и 5, которые для *любых* измерений дают верхний предел оценки погрешности.

Для полной ясности приведем пример зависимых и независимых измерений. Независимость исходных величин достигается при помощи измерений независимыми методами. Это часто встречается на практике, однако возможны случаи, когда исходные ошибки связаны между собой. Так, если для измерения сопротивления $R = U/I$ ток I и напряжение U измерены одним и тем же гальванометром (соответственно с подходящим шунтом и добавочным сопротивлением) или универсальным цифровым вольтметром, то исходные ошибки $\Delta I/I$ и $\Delta U/U$ взаимосвязаны. Причем если измерительные шкалы (пределы измерения) для тока и напряжения выбраны так, что $\Delta I/I \approx \Delta U/U$, то получим

$$\Delta R/R \approx 2 \cdot \Delta U/U \approx 2\Delta I/I \text{ (правило 5, формула (2))}$$

вместо

$$\Delta R/R = \sqrt{\left(\Delta I/I\right)^2 + \left(\Delta U/U\right)^2} \approx \sqrt{2}\,\Delta I/I \approx \sqrt{2}\,\Delta U/U$$

при независимых ошибках (правило 5, формула (1)).

Отсюда следует вывод, что для уменьшения погрешности измерения в приведенном примере необходимо использовать два независимых прибора для измерения тока и напряжения;

2) проанализировать формулу для расчета искомой физической величины и определить, входит ли в эту формулу какая-либо исходная величина несколько раз и приводит ли это к компенсирующимся погрешностям. Например, если формула содержит дробь, в числитель и знаменатель которой входит одна и та же величина, определенная из прямых измерений, то использовать метод «шаг за шагом» нельзя — это приведет к необоснованному завышению погрешности. В данном случае необходимо пользоваться формулами общего правила 9.

Если анализ показал, что эффект компенсирующихся погрешностей не наблюдается, то погрешность косвенного измерения определяется методом «шаг за шагом»: последовательно определяются погрешности исходных величин, полученных прямыми измерениями, затем в соответствии с правилами (4–8) вычисляется погрешность искомой величины.

2.2.2. Определение искомой физической величины и ее погрешности из прямых или косвенных многократных измерений

Результат *единичного* измерения далеко не всегда дает наилучшую оценку истинного значения X измеряемой физической величины. Любой экспериментатор стремится использовать измерительные приборы с малой погрешностью измерения. Погрешность современных измерительных приборов, например цифровых, очень мала. Единичное измерение не показывает случайного отклонения от истинного значения X, которое часто бывает больше измерительной погрешности, что может создать иллюзию высокой точности в определении физической величины. В простейших случаях, например при измерении величины омического сопротивления калиброванного резистора, изготовленного в заводских условиях, можно с первого раза получить наилучшую оценку номинального сопротивления (при наличии поверенного исправного омметра). Но в большинстве серьезных научных исследований, например при изучении полупроводниковых эффектов электропроводности, гальваномагнитных и многих других, главную роль в погрешности начинают играть случайные отклонения от истинного значения измеряемой величины. Такая ситуация складывается в силу сложности изучаемого явления, нетривиальности методики измерения, замысловатости экспериментального оборудования и оснастки. В этом случае корректная оценка погрешности в определении физической величины может быть дана только на основе статистической обработки результатов многократных измерений этой величины.

Для оценки погрешности необходимо выполнить следующие этапы проведения и обработки многократных измерений:

1) не изменяя условий эксперимента (температуры окружающей среды, величин магнитного поля, приложенного напряжения, освещенности и тому подобных), провести несколько измерений одной и той же интересующей физической величины. Для удовлетворительной точности в оценке наилучшего значения измеряемой величины x число этих измерений N должно быть не менее пяти;

2) на основе полученной ограниченной статистической *выборки* $x_1, x_2, ..., x_N$ вычислить по формуле (1.5) *выборочное среднее значение* $\overline{x}$ как наилучшую оценку $x_{\text{наил}}$ истинного значения X;

3) вычислить по формуле (1.9) *стандартное отклонение среднего* $\sigma_{\overline{x}}$;

4) задав надежность (доверительную вероятность), например $\alpha = 95$ % (или 0,95), по числу проведенных измерений N (например, N=5) определить табличное значение коэффициента Стьюдента $t_\alpha = 2{,}78$ для заданных N и α (см. табл. 1.2) и найти абсолютную погрешность по формуле (1.15).

Результат записываем в виде $x = x_{\text{наил}} \pm \Delta x = \overline{x} \pm \Delta x,$ что означает, что оценка истинного значения величины x попадает в доверительный интервал $\pm\Delta x$ с надежностью $\alpha = 95$ %.

В случае косвенных измерений перечисленные выше четыре этапа проведения и обработки многократных измерений могут применяться двумя способами, которые в конечном итоге дают достаточно близкие результаты, и поэтому безразлично, каким из них пользоваться. Это справедливо, если погрешности измерений малы по сравнению с измеряемой величиной (именно это предположение положено в основу формул (1.5), (1.9) и (1.15)).

Способ 1. Можно описанную процедуру применять последовательно к каждой исходной величине x, y, ..., w, использующейся для расчета измеряемой величины $q = q(x, y, ..., w)$, и получать средние значения исходных величин и их погрешности. Затем на основе полученных данных вычислять с использованием правил (4–8) наилучшую оценку $q_{\text{наил}} = q\left(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{w}\right)$ и ее погрешность Δq.

Способ 2. Для каждого измерения исходных величин вычисляется измеряемая величина q и для нее получается ограниченная выборка $q_1, q_2, ..., q_N$. Далее по выражениям (1.5), (1.9) и (1.15) вычисляются $q_{\text{наил}} = \overline{q}$ и погрешность $\Delta q = t_\alpha \sigma_x$.

Задачи

3.1. Определение искомой физической величины и ее погрешности из прямых многократных измерений

Решение задач данного типа основано на теоретическом материале, изложенном в подразд. 1.2.

Наилучшей оценкой $x_{\text{наил}}$ истинного значения X измеренной величины является *выборочное среднее значение* $\overline{x}$ (то есть усредненное по ограниченной выборке), вычисляемое по выражению (1.5).

Поскольку число измерений N на практике обычно меньше 20, то для анализа статистического разброса измерений используется распределение Стьюдента. Абсолютная погрешность Δx в определении $x_{\text{наил}}$ вычисляется по формуле (1.15) с использованием табулированных значений коэффициента Стьюдента t_α (см. табл. 1.2) и стандартного отклонения среднего $\sigma_{\overline{x}}$, вычисляемого по формуле (1.9). Стандартное отклонение среднего $\sigma_{\bar{x}}$ можно вычислить также по формуле $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}$, где стандартное (или среднеквадратичное) отклонение σ_x вычисляется по формуле (1.8). Порядок вычисления стандартного отклонения среднего $\sigma_{\bar{x}}$ определяется вычислительными возможностями, имеющимися в распоряжении исследователя: при помощи электронного калькулятора с режимом статистической обработки, калькулятора, встроенного в Windows, или специальной компьютерной программы.

После вычисления абсолютной погрешности Δx можно вычислить и указать численно доверительные границы истинного значения: нижняя граница $x_{\text{наил}} - \Delta x$ и верхняя граница $x_{\text{наил}} + \Delta x$.

Наиболее распространены компьютеры с операционной системой Windows, в которую встроен калькулятор, позволяющий вычислять среднее значение и стандартное отклонение (или среднеквадратичное отклонение) σ_x, которое позволит вычислить стандартное отклонение среднего $\sigma_{\bar{x}}$ по формуле $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}$. Поэтому кратко рассмотрим порядок вычислений статистических данных с помощью стандартного калькулятора Windows (рис. 3.1).

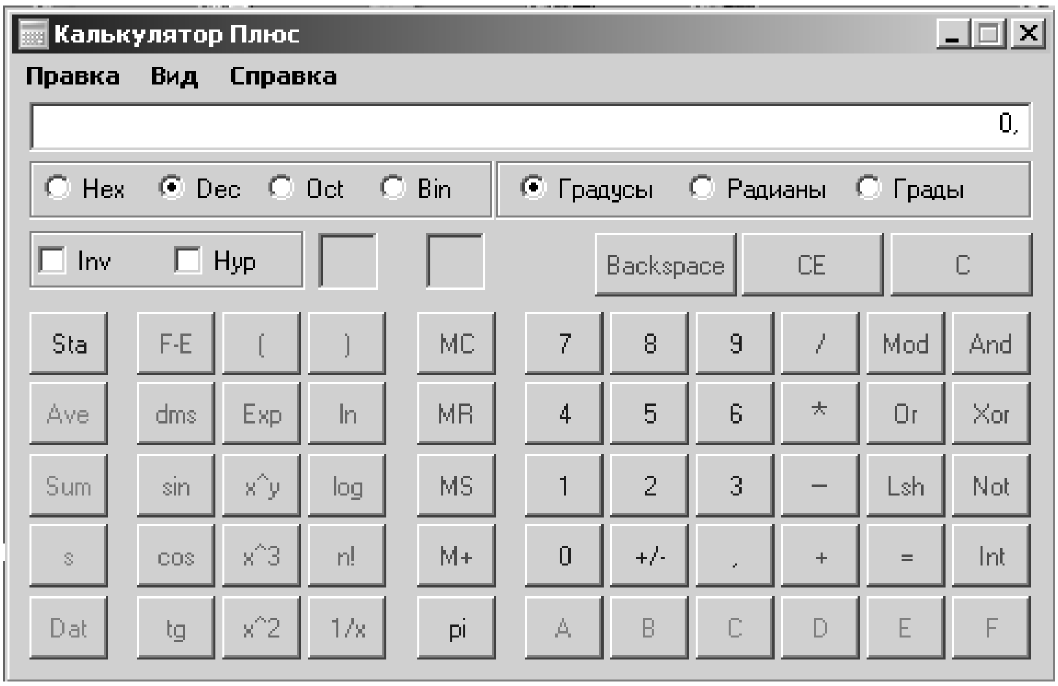


Рис. 3.1. Окно программы калькулятора Windows

Калькулятор должен быть включен в режим Инженерный: меню Вид $\rightarrow$ Инженерный. Затем нужно перейти в режим статистики, нажав кнопку **Sta**. Ввести измеренные значения поочередно, набирая число на клавиатуре (или мышкой) и нажимая кнопку **Dat**. После ввода всех чисел вычислить среднее значение, нажав кнопку **Ave**, записать результат в журнал. Вычислить стандартное отклонение (или среднеквадратичное отклонение) σ_x, нажав кнопку, обозначенную малой буквой **s**, и результат записать в журнал. Вычислить стандартное отклонение среднего $\sigma_{\bar{x}}$ по формуле $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}$ и результат записать в журнал.

Результаты вычислений округлить и число значащих цифр оставить в соответствии с правилами 1 и 2, приведенными в п. 2.2.2.

Перейдем к рассмотрению конкретных вариантов задач.

Задача 3.1.1

При многократном измерении силы F получены значения в ньютонах: 200; 198; 205; 203; 206; 195; 206; 204. Укажите доверительные границы истинного значения силы с вероятностью α = 0,95 (t_α = 2,36).

Ответ: доверительные границы истинного значения силы 199 Н $\le F \le$ 205 Н, α = 0,95.

Задача 3.1.2

При многократном измерении электрического сопротив-ления R получены значения в омах: 91; 90; 95; 90; 93; 91; 94. Укажите доверительные границы истинного значения сопротивления с вероятностью α = 0,99.

Результат приводим в виде $R = \bar{R} \pm \Delta R = 92,0 \pm 2,8$ Ом.

Ответ: доверительные границы истинного значения сопротивления: 89,2 Ом $\le R \le$ 94,8 Ом, α = 0,95.

Задача 3.1.3

При многократном измерении постоянного напряжения U получены значения в вольтах: 14,2; 13,8; 14,0; 14,8; 13,9; 14,1; 14,5; 14,3. Укажите доверительные границы истинного значения напряжения с заданной вероятностью, если из-вестно, что коэффициент Стьюдента t_α = 2,36.

Ответ: доверительные границы истинного значения напряжения 13,9 Ом $\le R \le$ 14,5 Ом, α = 0,95.

3.2. Определение погрешности физической величины при известном среднеквадратичном отклонении

Решение задач данного класса основано на теоретическом материале, изложенном в подразд. 1.2.

В задачах задается среднеквадратичное отклонение, вероятность α того, что истинное значение X попадает в данный доверительный интервал, и соответствующий коэффициент t_α.

СО измеряется в тех же единицах, что и сама величина x — это абсолютная ошибка Δx каждого отдельного измерения. СО определяется по формуле (1.8).

Нетрудно проверить, что значения t_α и α, как правило, заданы так, что соответствуют распределению Гаусса, а не распределению Стьюдента: число измерений N заметно больше 10 — N=16–25 и более. Значение N может быть легко установлено из соответствующих полных таблиц по заданным значениям t_α и α.

В этом случае абсолютная ошибка Δx определяется по формуле $\Delta x = t_\alpha \cdot \sigma_x$, где σ_x — среднеквадратичное отклонение, t_α — пределы интегрирования табулированного нормального интеграла ошибок (1.11), а не коэффициент Стьюдента, α — вероятность того, что результат измерения будет лежать в пределах $t_\alpha \cdot \sigma_x$ от истинного значения X.

Если в задаче задана некоторая погрешность измерительного прибора Δ_S, например погрешность от подключения электроизмерительного прибора в сеть, погрешность градуировки прибора, то Δ_S можно учесть следующим образом. По определению погрешность средства измерений — это разность между показаниями средства измерений x и истинным (действительным) значением X измеряемой величины: $x - X = \Delta_S$. Тогда истинное значение $X = x - \Delta_S$.

Задача 3.2.1

При измерении электрического сопротивления нагрузки омметр показывает 90 Ом. Среднеквадратичное отклонение показаний σ_R = 1 Ом. Погрешность от подключения омметра в сеть Δ_S = –2 Ом. Укажите доверительные границы истинного значения сопротивления с вероятностью α = 0,97 (t_α = 2).

Ответ: доверительные границы истинного значения сопротивления 90 Ом $\le R \le$ 94 Ом, α = 0,97, t_α = 2.

Задача 3.2.2

При измерении силы динамометр показывает 910 Н. Среднеквадратичное отклонение показаний σ_F = 5 Н. Погрешность от подключения динамометра Δ_S = +3 Н. Укажите доверительные границы истинного значения силы с вероятностью α = 0,96 ($t_\alpha = 2$).

Решение

Абсолютная погрешность $\Delta F = t_\alpha \cdot \sigma_F = 2 \cdot 5 = 10$ Н.

Наилучшая оценка истинного значения с учетом $\Delta_S =$ = +3 Н составляет F = 910 – (+3) = 907 Н.

Ответ: доверительные границы истинного значения силы 897 Н $\le F \le$ 917 Н, α = 0,96, t_α = 2.

Задача 3.2.3

При измерении напряжения вольтметр показывает 230 В. Среднеквадратичное отклонение показаний $\sigma_U =$ 2 В. Погрешность Δ_S от подключения вольтметра в цепь равна –1 В. Найдите истинное значение напряжения и его доверительные границы с вероятностью $\alpha = 0{,}96$ ($t_\alpha = 2$).

Ответ: доверительные границы истинного значения напряжения 227 В $\leq U \leq$ 235 В, $\alpha = 0{,}96$.

3.3. Определение погрешности физической величины из косвенных единичных измерений

Решение задач данного класса основано на теоретическом материале, изложенном в п. 2.1.3.

Погрешность косвенного измерения находится в соответствии с правилами 4–9 в зависимости от условия задачи, вида косвенного измерения. При этом необходимо установить, выполняются ли прямые измерения исходных величин *независимо.* Если это так, то их погрешности *независимы* и *случайны.*

Нужно определить, входит ли в выражение для расчета искомой величины какая-либо исходная величина несколько раз и приводит ли это к компенсирующимся погрешностям. Если анализ показал, что эффект компенсирующихся погрешностей не наблюдается, то погрешность косвенного измерения определяется методом «шаг за шагом».

Задача 3.3.1

Сила инерции определяется по формуле $F = ma$ — по измеренным значениям массы m = 50 кг и ускорения a = 1 м/с^2. Среднеквадратичные отклонения результатов измерений: σ_m = 0,5 кг, σ_a = 0,01 м/с^2.

Найдите случайную погрешность измерения силы ΔF с вероятностью $\alpha = 0{,}96$ ($t_\alpha = 2{,}12$).

Ответ: абсолютная погрешность силы $\Delta F = 50 \cdot 0{,}03 = = 1{,}5 \cong 2$ Н.

Задача 3.3.2

Электрическая мощность P определяется по результатам измерений падения напряжения $U = 220 \pm 2$ В и силы тока $I = 2{,}0 \pm 0{,}1$ А как $P = UI$. Найдите предельные границы истинного значения мощности.

Ответ: предельные границы истинного значения мощности 414 Вт $\leq P \leq$ 466 Вт.

Задача 3.3.3

Сопротивление нагрузки определяется по закону Ома: $R = U/I$. Показания вольтметра 50 В, амперметра 1 А. Среднеквадратичные отклонения показаний: вольтметра — σ_U == 0,5 В, амперметра — σ_A = 0,05 А. Найти доверительные границы истинного значения сопротивления с вероятностью α = 0,95 (t_α = l,96).

Ответ: доверительные границы истинного значения сопротивления 39 Ом $\leq R \leq$ 61 Ом.

3.4. Определение предела допускаемой погрешности средства измерения. Поле допуска, класс точности

Решение задач данного типа основано на теоретическом материале, изложенном в подразд. 2.2 и осуществляется в основном для оценки погрешностей при прямых единичных измерениях.

Предел допускаемой погрешности средства измерений (СИ) — это наибольшее значение погрешности СИ, при котором оно еще признается годным к применению. Устанавливается нормативным документом для данного типа СИ.

Допуск относительно номинального размера может располагаться односторонне, симметрично и асимметрично. Расположение допуска относительно номинального размера на выбор средств измерений не влияет, так как при расчете предела допускаемой погрешности следует брать все поле допуска Д.

Предел допускаемой погрешности Δ должен отвечать требованиям $\Delta \leq 0,33$ Д.

Класс точности средств измерений указывает *максимальную* абсолютную погрешность прибора в процентах от верхнего предела измерений.

Если класс точности прибора обозначается двумя числами как c/d (например, 0,02 / 0,01), то с классом точности связаны пределы допускаемой абсолютной и относительной погрешностей прибора. Если пределы допускаемой абсолютной погрешности устанавливают по формуле

$$\Delta = \pm\left(a + bx\right), \tag{3.1}$$

где x — значение измеряемой величины; a, b — положительные числа, не зависящие от x, то пределы допускаемой относительной погрешности определяются как

$$\delta = \pm\left[c + d \cdot \left(\frac{X_K}{x} - 1\right)\right]\%, \tag{3.2}$$

где X_K — верхний предел измерения; c, d — положительные числа, указывающие класс точности; x — показание прибора.

Значение класса точности позволяет установить не точность конкретного измерения, а лишь указать пределы, в которых находится значение измеряемой величины.

Задача 3.4.1

Амперметр с пределами измерений от –5 А до +15 А класса точности 1,0 показывает значение 5 А. Найдите предел допускаемой погрешности прибора.

Ответ: предел допускаемой абсолютной погрешности прибора составляет 0,15 А.

Задача 3.4.2

Вольтметр с пределами измерения 0–200 В класса точности 0,5 показывает значение 100 В. Найдите предел допускаемой погрешности измерения вольтметра. Чему равно измеряемое напряжение?

Ответ: измеряемое напряжение будет лежать в пределах 99 В $\leq U \leq$ 101 В.

Задача 3.4.3

Средство измерения линейного размера характеризуется асимметричным допуском относительно номинального размера $10\frac{+0{,}014}{-0{,}032}$. Каким целесообразно принять предел допускаемой погрешности измерения?

Ответ: предел допускаемой погрешности измерения целесообразно принять 0,015 мм.

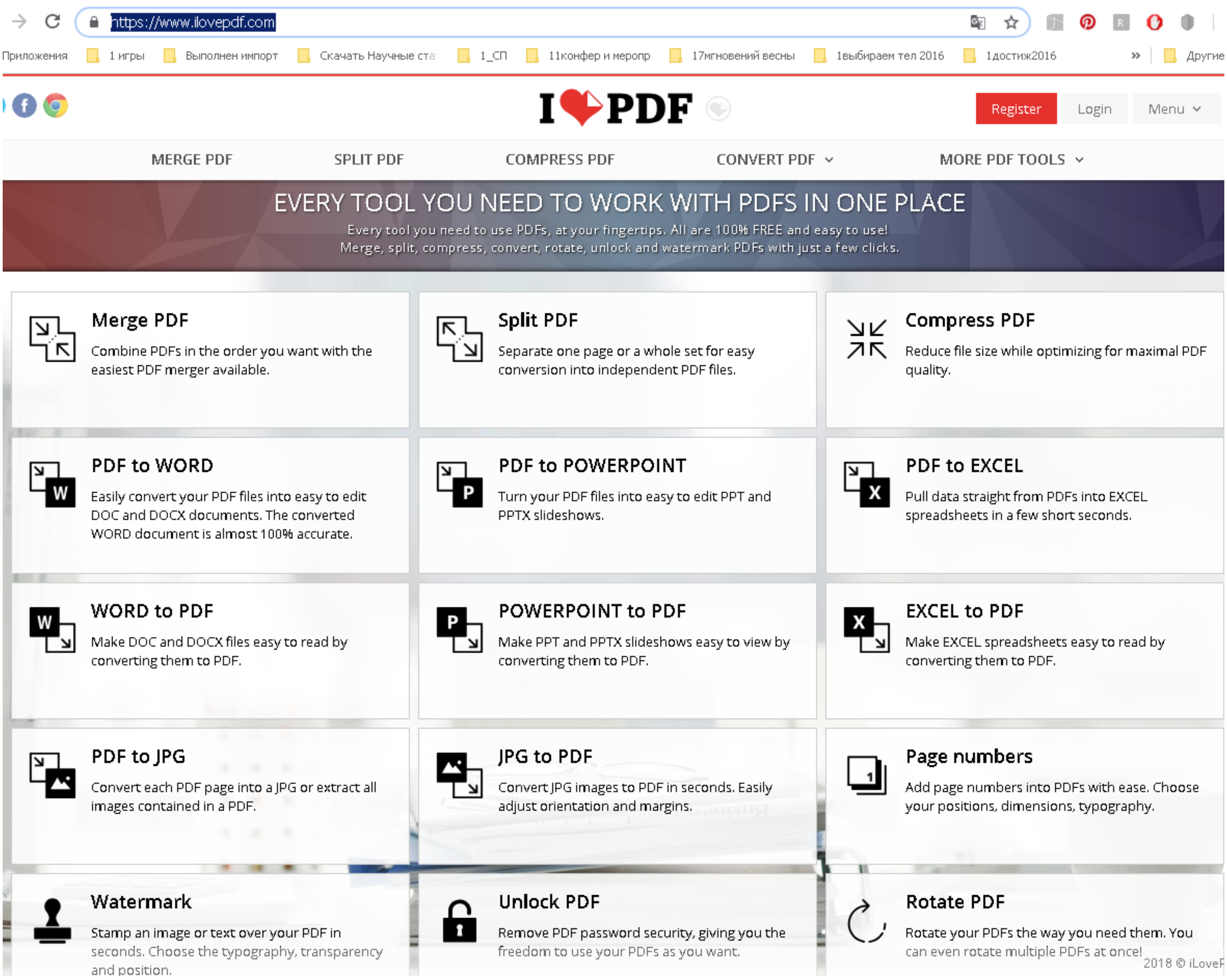
Задача 3.4.4

Амперметр класса точности 0,06/0,04 со шкалой от –20 А до +20 А показывает значение 2 А. Найдите предел допускаемой относительной погрешности прибора. Чему равна измеряемая сила тока?

Ответ: предел допускаемой относительной погрешности прибора равен 0,42 %. Измеряемая сила тока будет лежать в пределах 1,99 А $\leq I \leq$ 2,01 А.

Методические указания по самостоятельной работе:

Для подготовки к каждому практическому занятию студентам необходимо проработать лекционный материал, материал, предложенный выше к каждому заданию и ресурсы интернет по теме задания. При этом необходимо опираться на проверенные, достоверные источники. Таковыми являютсяж 1) материалы статей на ресурсе Российского индекса научного цитирования РИНЦ по адресу elibrary.ru; 2) материалы электронных библиотек, к которым подключен и имеет полнотекстовый доступ университет – это электронно-библиотечные системы Znanium.com, Лань, Юрайт, соответствующие ссылки к ним на сайте библиотеки ТУСУР https://lib.tusur.ru/ в разделе Ресурсы. Если необходимо, то найденные вами файлы в формате pdf можно удобным образом и бесплатно преобразовать с хорошим качеством форматирования в форман редактора Ворд docx с помощью веб ресурса https://www.ilovepdf.com.



Далее необходимо подготовится к презентации сделанного исследования и изучения материалов по заданиям, приготовить презентацию в формате Power Point ppt и доклад. Если заданием было написание эссе, то его нужно оформить по обычным требованиям, предъявляемым к научнотехническим отчетам. Или воспользоваться указаниями к оформлению курсовых работ. В соответствии с нормами, принятыми на факультете инновационных технологий, все курсовые работы и курсовые проекты оформляются в соответствии с едиными для факультета методическими указаниями:

Методические указания по выполнению курсовых проектов и курсовых работ на факультете инновационных технологий: Учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] Томск: ТУСУР, 2018. — 34 с. — URL: https://edu.tusur.ru/publications/8847

Эти методические указания составлены в соответствии с документами ТУСУР:

1. Положение по организации выполнения и защиты курсовых проектов и курсовых работ в ТУСУРе при введении ФГОС 3.–Томск: ТУСУР,2013.–17с.
2. ОС ТУСУР 01-2013 Работы студенческие по направлениям подготовки и специальностям технического профиля.–Томск: ТУСУР,2013.–56с.

Основным назначением настоящих методических указаний является обеспечение качества реализации требований государственных образовательных стандартов высшего образования к условиям реализации основных образовательных программ и результатам их освоения. Методические указания по выполнению курсовых проектов и курсовых работ на факультете инновационных технологий доступны для всех студентов на научно-образовательном портале ТУСУР.

Оценочный материал

Темы опросов на занятиях

Определение основных понятий дисциплины и связанных с ними терминов. Роль информационных технологий в обработке результатов измерений. Значение фундаментальной и математической подготовки инженера-конструктора-технолога. Предмет, цель и задачи дисциплины. Характеристика материала дисциплины и его структура.

Предельное распределение. Частота появления измерения. Понятие «истинное значение». Распределение Гаусса. Предельное распределение, условие нормировки. Выборочное среднее значение. Математическое ожидание. Стандартное отклонение. Стандартное отклонение среднего. Стандартная ошибка среднего. Дисперсия. Доверительный интервал. Нормальный интеграл ошибок. Распределение Стьюдента. Коэффициент Стьюдента. Плотность распределения вероятности.

Совместные измерения. Метод наименьших квадратов. Нормальные уравнения. Линия аппроксимации. Число степеней свободы. Аппроксимация методом наименьших квадратов: параметры линейной зависимости и их погрешности. Коэффициент линейной корреляции. Смешанный второй момент. Вероятность некоррелированности измеренных величин.

Абсолютные и относительные погрешности. Значащие цифры. Погрешности в косвенных измерениях. Десять правил определения погрешностей. Практические рекомендации.

Определение искомой физической величины и ее погрешности из прямых или косвенных единичных измерений. Определение искомой физической величины и ее погрешности из прямых или косвенных многократных измерений. Определение параметров функциональной зависимости и их погрешностей из анализа результатов совместных измерений.

Вопросы на самоподготовку

Компьютерные технологии в обработке результатов измерений. Самостоятельная проработка темы: «Разработка методики эксперимента». Статистический анализ многократных измерений. Организации, занимающиеся разработкой программного обеспечения для обработки и анализа данных. Специализированные программные пакеты программного анализа данных. Методы линейной аппроксимации.

Темы опросов на занятиях

Определение основных понятий дисциплины и связанных с ними терминов. Роль информа- ционных технологий в обработке результатов измерений. Значение фундаментальной и математи- ческой подготовки инженера-конструктора-технолога. Предмет, цель и задачи дисциплины. Харак- теристика материала дисциплины и его структура.

Предельное распределение. Частота появления измерения. Понятие «истинное значение». Распределение Гаусса. Предельное распределение, условие нормировки. Выборочное среднее зна- чение. Математическое ожидание. Стандартное отклонение. Стандартное отклонение среднего. Стандартная ошибка среднего. Дисперсия. Доверительный интервал. Нормальный интеграл оши- бок. Распределение Стьюдента. Коэффициент Стьюдента. Плотность распределения вероятности.

Совместные измерения. Метод наименьших квадратов. Нормальные уравнения. Линия ап- проксимации. Число степеней свободы. Аппроксимация методом наименьших квадратов: парамет- ры линейной зависимости и их погрешности. Коэффициент линейной корреляции. Смешанный второй момент. Вероятность некоррелированности измеренных величин.

Абсолютные и относительные погрешности. Значащие цифры. Погрешности в косвенных измерениях. Десять правил определения погрешностей. Практические рекомендации.

Определение искомой физической величины и ее погрешности из прямых или косвенных единичных измерений. Определение искомой физической величины и ее погрешности из прямых или косвенных многократных измерений. Определение параметров функциональной зависимости и их погрешностей из анализа результатов совместных измерений.

Вопросы для экзамена

1. Классификация измерений. Измерения прямые, косвенные, совместные и совокупные.

2. Классификация методов измерения ФВ. Метод непосредственной оценки и метод сравнения с мерой.
3. Суть понятий: измерение, испытание, контроль
4. Классификация погрешностей. Систематические и случайные погрешности.
5. Правила суммирования погрешностей (неисключенные остатки систематических погрешностей и случайные погрешности)..
6. Доверительный интервал погрешности.
7. Классификация средств измерений (СИ).
8. Метрологические характеристики СИ.
9. Погрешности средств измерения, их нормирование. Классы точности СИ.
10. Обработка результатов прямых однократных измерений.
11. Определение результата и погрешности косвенных измерений.
12. Обработка результатов прямых многократных равноточных измерений.
13. Правила представления результатов измерений.
14. Сигналы измерительной информации.
15. Обобщенные структурные схемы приборов прямого и уравновешивающего преобразования

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература

1. Метрология, стандартизация и сертификация: Учебное пособие / Перемитина Т. О. - 2016. 150 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/6715, дата обращения: 06.05.2018.
2. Основы научных исследований и патентоведение: Учебное пособие / Озеркин Д. В., Алексеев В. П. - 2012. 171 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/1283, дата обращения: 06.05.2018.

Дополнительная литература

1. Интеллектуальные средства измерений [Текст]: учебник для вузов / Г. Г. Раннев. - М. : Академия, 2011. - 272 с (наличие в библиотеке ТУСУР - 10 экз.)
2. Автоматизация измерений, контроля и испытаний [Текст] : учебник для вузов / К. П. Латышенко. - М. : Академия, 2012. - 320 с. (наличие в библиотеке ТУСУР - 15 экз.)
3. Метрология, стандартизация и сертификация : учебное пособие / В. Ф. Отчалко ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Томский государственный университет си- стем управления и радиоэлектроники (Томск), Кафедра электронных средств автоматизации и управления . - Томск : ТМЦДО, 2010. - 208 с.. (наличие в библиотеке ТУСУР - 24 экз.)