Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Математика
(3 семестр)
Учебно-методическое пособие по самостоятельной работе для 09.03.01

Разработчик: доцент каф. математики
Приходовский М.А.

Томск
ТУСУР
2019

Содержание

Аннотация

В данном пособии приведены типовые варианты контрольных работ за 3 семестр (осень 2018 г) для специальности 09.03.01 (ФСУ ТУСУР). В семестре 14 отчётных заданий. На каждое контрольное задание приводится пример решения одной или нескольких задач из практических занятий на эту тему. Прочтение одного лишь только этого краткого пособия не является достаточным, так как понимание методов не может быть достингуто без изучения всего курса. Пособие рекомендуется именно для непосредственной подготовки к контрольным работам, после прослушивания курса лекций и практических занятий, где содержатся задачи более сложного уровня.

Темы контрольных задач.

1. Тройной интеграл в сферических координатах
2. Криволинейный интеграл 1 рода
3. Криволинейный интеграл 2 рода
4. Потенциал векторного поля
5. Разложить f(z) на Re и Im
6. Найти f(z) по одной её части
7. Интеграл от комплексной функции по незамкнутой кривой.
8. Интеграл по замкнутой кривой (интегральная формула Коши).
9. Вычисление вычетов
10. Приложения вычетов: интеграл по замкнутому контуру
11. Приложения вычетов: интеграл по всей оси
12. Приложения вычетов: интеграл от тригонометрической функции
13. Тригонометрический ряд Фурье
14. Комплексный ряд Фурье

Вариант для самостоятельного решения.

Задача 1. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_D zdxdydz$ где D – трёхмерное тело снизу ограниченное конусом $z^2 = x^2 + y^2$, а сверху сферой радиуса 1.

Задача 2. Вычислить массу проволоки, выполненной в виде четверти единичной окружности, причём скалярная функция плотности: $F(x, y) = x + y$.

Задача 3. Найти работу векторного поля $\overline{F} = (x + y, y)$, осуществляемую при перемещении точки по четверти окружности единичного радиуса.

Задача 4. Доказать, что поле потенциально, и найти потенциал: $F = (2x + yz, 2y + xz, 2z + xy)$

Задача 5 $f(z) = z - iz^2$ Найти u(x,y) и v(x,y), проверить условия Коши-Римана.

Задача 6 Дано: $u(x, y) = 3x + y$, $v(0,0) = 0$. Найти $v(x, y)$ и $f(z)$.

Задача 7 Вычислить интеграл $\int\limits_L (2z + \bar{z})dz, L = \{y = x\}$ от (0,0) до (1,1).

Задача 8 Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{1}{(z-1)^2(z-2)(z-5)}dz$ где $C = \{|z| = 3\}$

Задача 9. Найти вычет $\operatorname*{Res}\limits_{z=3} \frac{1}{(z-3)^3(z-4)^2}$

Задача 10 . Найти $\frac{1}{2\pi\ i}\oint\limits_{C}\frac{1}{(z-1)^2(z-2)(z-4)}dz$ где С окружность: $\{|z|=3{,}5\}$

Задача 11. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+9)^2}dx$.

Задача 12. Вычислить $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1}{2+\cos x}dx$.

Задача 13. Дана функция: $f(x)=\begin{cases}0 & ,x\in(-1{,}0)\\ 2x+1, & x\in(0{,}1)\end{cases}$. Разложить в тригонометрический ряд Фурье.

Задача 14. Дана функция: $f(x)=\begin{cases}0 & ,x\in(-1{,}0)\\ 2x+1, & x\in(0{,}1)\end{cases}$. Разложить в комплексный ряд Фурье.

Ответы.

1. $\frac{\pi}{8}$ 2. 2 3. $-\frac{\pi}{4}$ 4. $x^2+y^2+z^2+xyz+C$ 5. $u=x+2xy, v=y-x^2+y^2$

6. $3z-iz$ 7. $1+2i$ 8. $-\frac{\pi i}{24}$ 9. 3 10. $-\frac{1}{18}$ 11. $\frac{\pi}{54}$

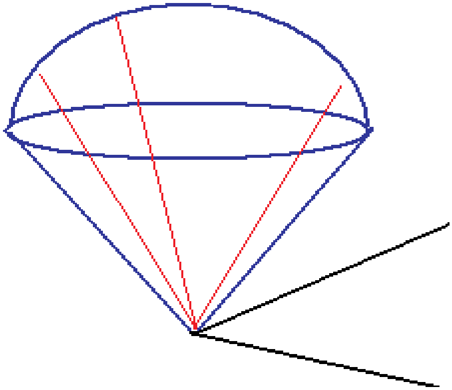
12. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

13. $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{1-3(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right)$ 14. $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}+\frac{1-3(-1)^n}{in\pi}\right)e^{in\pi x}$

Разбор подобных задач из практики.

Задача 1. Найти объём тела, ограниченного конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и сферой радиуса $\sqrt{2}$, с помощью цилиндрических координат.

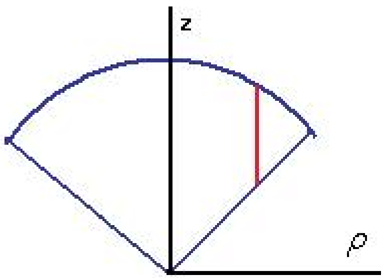
Решение. Чертёж:



Это тело вращения с осью Oz. Проекцией на горизонтальную плоскость является круг радиуса 1. Тогда диапазоны изменения двух переменных очевидно таковы (как было для круга в полярных координатах): $\varphi \in [0,2\pi]$, $\rho \in [0,1]$. Таким образом, нам остаётся только узнать диапазон изменения высоты в зависимости от расстояния до оси, то есть в зависимости от ρ.

Построим сечение вертикальной плоскостью (вид сбоку).

По горизонтали - условная ось ρ, так как тело вращения и поэтому неважно, в какую сторону двигаться от оси, диапазон изменения высот ведёт себя одинаково на одном и том же расстоянии от оси вне зависимости от угла φ.



Красным показана эта линия. Она проходит от прямой $z=\rho$ до окружности радиуса $\sqrt{2}$, которую можно задать в виде $z=\sqrt{2-\rho^2}$.

Таким образом, надо вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}}\rho\ dz\right)d\rho\right)d\varphi$.

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}}\rho\ dz\right)d\rho\right)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(\rho\ z\Big|_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}}\right)d\rho\right)d\varphi =$$

$\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\rho\left(\sqrt{2-\rho^2}-\rho\right)d\rho\right)d\varphi$. Здесь далее можно рассматривать не как вложенные интегралы, а как произведение, т.к. интегрируя по ρ мы получим константу, и всё равно в итоге будет интеграл типа $\int\limits_0^{2\pi}Cd\varphi =$ $2\pi C$. Поэтому сразу запишем в виде $\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\left(\sqrt{2-\rho^2}-\rho\right)d\rho$, далее

$$2\pi\int\limits_0^1\rho\left(\sqrt{2-\rho^2}-\rho\right)d\rho = 2\pi\int\limits_0^1\rho\left(\sqrt{2-\rho^2}\right)d\rho-2\pi\int\limits_0^1\rho^2d\rho =$$

$$-\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt{2-\rho^2}\right)(-2\rho)d\rho-2\pi\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 = -\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt{2-\rho^2}\right)d(2-\rho^2)-\frac{2\pi}{3} =$$

$$-\pi\frac{2}{3}\sqrt{2-\rho^2}^{\,3}\Big|_0^1-\frac{2\pi}{3} = -\pi\frac{2}{3}\left(1-\sqrt{2}^{\,3}\right)-\frac{2\pi}{3} = \pi\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)-\frac{2\pi}{3} =$$

$$\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}-\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Ответ. $\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Задача 2. Вычислить массу проволоки, выполненной в виде графика $y = f(x) = \ln x$, плотность которой $F(x,y) = x^2$, где $x \in [1, \sqrt{2}]$.

Решение. Здесь кривая задана явно, так что надо решать по формуле $\int\limits_L F \cdot dl = \int\limits_a^b F(x, f(x)) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Очевидно, $f'(x) = \frac{1}{x}$, тогда

$$\int\limits_1^{\sqrt{2}} x^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int\limits_1^{\sqrt{2}} x^2 \cdot \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} dx = \int\limits_1^{\sqrt{2}} x \cdot \sqrt{x^2+1}\; dx =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2+1}\; 2x dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2+1}\; d(x^2+1) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\sqrt{x^2+1}^{\,3}\Big|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Ответ. $\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Задача 3. Найти работу векторного поля $\overline{F} = (2x - 3y, x + 2y)$ по перемещению точки по половине эллипса, заданного параметрически: $\{x = 3\cos t, y = 5\sin t\}, \quad x \in [0, \pi]$.

Решение. Здесь используем формулу для параметрически заданной кривой: $\int\limits_L (\overline{F}, d\overline{l}) = \int\limits_a^b \left(P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\right) dt$.

При этом учитываем, что $\{x' = -3\sin t, y' = 5\cos t\}$. При этом все x и y, которые встречаются в записи компонент векторного поля, надо выразить в виде $\{x = 3\cos t, y = 5\sin t\}$.

$$\int\limits_0^{\pi} \left(\underbrace{(6\cos t - 15\sin t)}_{P} \cdot \underbrace{(-3\sin t)}_{x'} + \underbrace{(3\cos t + 10\sin t)}_{Q} \cdot \underbrace{(5\cos t)}_{y'}\right) dt =$$

$$\int_0^{\pi}\left(45\sin^2 t+15\cos^2 t-18\sin t\cos t+50\sin t\cos t\right)dt =$$

$$\int_0^{\pi}\left(30\sin^2 t+15(\sin^2 t+\cos^2 t)+32\sin t\cos t\right)dt =$$

$$\int_0^{\pi}\left(30\frac{1-\cos 2t}{2}+15+16\sin 2t\right)dt = 15\int_0^{\pi} dt+16\int_0^{\pi}\sin 2t dt+15\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)dt$$

$$= 15t\Big|_0^{\pi}-8\cos 2t\Big|_0^{\pi}+15t\Big|_0^{\pi}-\frac{15}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi} = 15\pi-8(1-1)+15\pi-\frac{15}{2}(0-0) =$$

30π. **Ответ.** 30π.

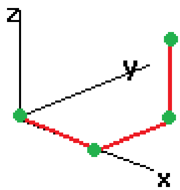
Задача 4. Найти потенциал, либо доказать, что поле не потенциально: $\overline{F}=(yz,xz,xy)$.

Решение. Чтобы доказать, что поле потенциально, построим матрицу из всех 9 производных. В первом столбце по x, во втором по y и в 3-м по z:

$$\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица симметрична $\Rightarrow$ поле потенциально.

Теперь ищем потенциал. Для этого соединим начальную точку с произвольной с помощью ломаной, чтобы каждое звено было параллельно какой-либо из осей координат.



Начальная точка, как правило, (0,0,0). Изменяющуюся переменную при этом будем обозначать через t, чтобы отличать от переменных x, y, z, которые в этих вычислениях будут использять роль верхнего предела в том или ином интеграле, либо роль фиксированной константы внутри функции. Получается такая сумма интегралов:

$$\int_0^x P(t,0,0)dt+\int_0^y Q(x,t,0)dt+\int_0^z R(x,y,t)dt$$

Применим это к конкретным функциям в этой задаче.

$$\int_0^x (0\cdot 0)dt+\int_0^y (x\cdot 0)dt+\int_0^z xydt \ = \ 0+0+xyt\Big|_0^z \ = \ xyz\,.$$

Вспомнив, что потенциал определяется с точность до константы, окончательный ответ можно записать так: $U=xyz+C$.

Ответ. $U=xyz+C$.

Задача 5. Функцию $f(z)=i(\bar{z})^2$ представить в виде $u(x,y)+iv(x,y)$.

Решение. $f(z)=i(\bar{z})^2 \ = \ i(x-iy)(x-iy) \ = \ i(x^2+i^2y^2-i2xy) \ =$

$i(x^2-y^2-i2xy) \ = \ -i^2 2xy+i(x^2-y^2) \ = \ (2xy)+i(x^2-y^2)$.

Поэтому $u(x,y)=2xy$, $v(x,y)=x^2-y^2$.

Заметим, что здесь нарушено уже даже 1-е условие Коши-Римана:

$u'_x=2y$, $v'_y=-2y$.

Ответ. $u(x,y)=2xy$, $v(x,y)=x^2-y^2$.

Задача 6. Дано $u(x,y)=2xy-2y$, $f(0)=i$. Найти $v(x,y)$ и $f(z)$.

Решение. Сначала проверим уравнение Лапласа, т.е. что сумма вторых производных равна 0.

$u'_x=2y \ \Rightarrow \ u''_{xx}=0$,

$u'_y=2x-2 \ \Rightarrow \ u''_{yy}=0$.

Их сумма равна 0. Уравнение Лапласа выполняется. Поэтому данная $u(x,y)$ может являться одной из компонент какой-либо комплексной функции. Далее надо вычислить $v(x,y)$, найдём её в виде потенциала от её градиента: $v = \int dv = \int v'_x dx + v'_y dy$ то есть в виде потенциала векторного поля (v'_x, v'_y). Дело в том, что в такой записи можно заменить производные от неизвестной функции $v(x,y)$ на производные от известной функции $u(x,y)$ по условиям Коши-Римана. $\int v'_x dx + v'_y dy = \int (-u'_y)dx + u'_x dy$. А первые производные от u уже известны, мы их вычисляли выше в процессе проверки уравнения Лапласа. Как и при вычислении потенциала, в качестве начальной точки как правило, принимаем (0,0) и интегрируем по ломаной.

$$\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} (-u'_y)dx + u'_x dy = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} (2-2x)dx + (2y)dy = \int\limits_0^x (2-2x)dx + \int\limits_0^y 2y dy =$$

$2x\Big|_0^x - x^2\Big|_0^x + y^2\Big|_0^y = 2x - x^2 + y^2$. Но так как начальная точка была взята произвольно, то надо записать в самом общем виде:

$v(x,y) = 2x - x^2 + y^2 + C$.

При этом константа C должна быть такая, чтобы обеспечивалось равенство $f(0) = i$, т.е. $f(0+0i) = 0+1i$, т.е. в точке $(x,y) = (0,0)$ было $(u,v) = (0,1)$, таким образом, должно быть $v(0,0) = 1$.

$v(0,0) = 0 - 0^2 + 0^2 + C = 1 \Rightarrow C = 1$.

Итак, $v(x,y) = 2x - x^2 + y^2 + 1$.

Осталось восстановить функцию $f(z)$. Для этого вспомним, что:

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \; y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

и применим эти выражения в записи $u + iv$.

$u + iv = (2xy - 2y) + i(2x - x^2 + y^2 + 1) =$

$$\left(2\frac{z+\bar{z}}{2}\frac{z-\bar{z}}{2i} - 2\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i\left(2\frac{z+\bar{z}}{2} - \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + 1\right) =$$

$$\left(\frac{z^2-\bar{z}^2}{2i} - \frac{1}{i}(z-\bar{z})\right) + i\left((z+\bar{z}) - \frac{z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}}{4} + \frac{z^2+\bar{z}^2-2z\bar{z}}{-4} + 1\right) =$$

$$-i\frac{z^2-\bar{z}^2}{2}+i(z-\bar{z})+i(z+\bar{z})-\frac{i}{4}(z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z})-\frac{i}{4}(z^2+\bar{z}^2-2z\bar{z})+i =$$

$$-i\frac{z^2-\bar{z}^2}{2}+2iz-\frac{i}{4}(z^2+\bar{z}^2)-\frac{i}{4}(z^2+\bar{z}^2)+i =$$

$$2iz-\frac{i}{2}(z^2-\bar{z}^2)-\frac{i}{2}(z^2+\bar{z}^2)+i = 2iz-iz^2+i.$$

Как видим, $\bar{z}$ здесь в процессе преобразований полностью сократилось. Так и должно было быть, ведь

Ответ. $2iz-iz^2+i$.

Задача 7.1. Вычислить $\int\limits_L \bar{z}dz$ по отрезку от 0 до i.

Решение. $\int\limits_L \bar{z}dz = \int\limits_L (x-iy)(dx+idy) = \int\limits_L (xdx+ydy-iydx+ixdy) =$

$\int\limits_L (xdx+ydy)+i\int\limits_L(-ydx+xdy)$ а это уже 2 криволинейных интеграла второго рода от различных векторных полей. Причём на вертикальном отрезке, соединяющем 0 с точкой i, фиксировано $x=0$, а значит и $dx=0$, т.е. исчезают все слагаемые, где есть x или dx.

При этом $y\in[0,1]$. Итак, $\int\limits_L (0+ydy)+i\int\limits_L(-0+0dy) = \int\limits_0^1 ydy+0i =$

$$\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1+0i = \frac{1}{2}+0i = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 7.2. Вычислить $\int\limits_L \bar{z}dz$ по окружности радиуса R.

Решение. Изначально преобразование с раскрытием скобок точно такое же, как и в прошлой задаче: $\int\limits_L \bar{z}dz = \int\limits_L (x-iy)(dx+idy) =$

$\int\limits_L (xdx+ydy-iydx+ixdy) = \int\limits_L (xdx+ydy)+i\int\limits_L (-ydx+xdy)$.

Дальше, криволинейные интегралы вычисляются иначе из-за того, что другая кривая. На окружности наилучший способ задать точку - параметрически: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$. При этом $t \in [0,2\pi]$.

Также вычислим дифференциалы: $dx = -R\sin t dt$, $dy = R\cos t dt$.

$$\int\limits_0^{2\pi} (R\cos t(-R\sin t)+R\sin tR\cos t)dt + i\int\limits_0^{2\pi} ((-R\sin t)(-R\sin t)+R\cos tR\cos t)dt$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} 0dt + i\int\limits_0^{2\pi} R^2(\sin^2 t+\cos^2 t)dt = 0+iR^2\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi R^2 i.$$

Ответ. $2\pi R^2 i$.

Задача 8. Вычислить $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-4)^2}dz$, где контур L:

А) $|z-1| = 0{,}5$ Б) $|z-2| = 0{,}5$ В) $|z-4| = 0{,}5$ Г) $|z| = 5$.

Решение. Так как здесь в интеграле уже изначально есть множитель $\frac{1}{2\pi\ i}$, то домножать на $2\pi\ i$ в правой части не нужно.

А) $\left.\frac{z}{(z-2)(z-4)^2}\right|_{z=1} = \frac{1}{(-1)(-3)^2} = -\frac{1}{9}$.

Б) $\left.\frac{z}{(z-1)(z-4)^2}\right|_{z=2} = \frac{2}{1(-2)^2} = \frac{1}{2}$.

В) В отличие от двух первых точек, здесь в знаменателе корень 2-го порядка, поэтому подставляем $z = 4$ не сразу, а после вычисления производной.

$$\left(\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right)'\Bigg|_{z=4} = \left(\frac{z}{z^2-3z+2}\right)'\Bigg|_{z=4} = \frac{1\cdot(z^2-3z+2)-(2z-3)z}{(z^2-3z+2)^2}\Bigg|_{z=4}$$

$$= \frac{z^2-3z+2-2z^2+3z}{(z-1)^2(z-2)^2}\Bigg|_{z=4} = \frac{2-z^2}{(z-1)^2(z-2)^2}\Bigg|_{z=4} = \frac{-14}{9\cdot 4} = -\frac{7}{18}.$$

Г) По интегральной теореме Коши, сумма интегралов по трём предыдущим контурам: $-\frac{1}{9}+\frac{1}{2}-\frac{7}{18}=0$.

Ответы. А) $-\frac{1}{9}$ Б) $\frac{1}{2}$ В) $-\frac{7}{18}$ Г) 0.

Задача 9. Вычислить вычет $\underset{z=7}{\mathrm{Re}\,s}\frac{1}{(z-7)^4(z-5)^2}$.

Решение. В отличие от прошлой задачи, здесь полюс 4-го порядка, так что формула $\underset{z=z_0}{\mathrm{Re}\,s}\, f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)^m\cdot f(z)\right)^{(m-1)}$

приобретёт вид: $\underset{z=z_0}{\mathrm{Re}\,s}\, f(z) = \frac{1}{3!}\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)^4\cdot f(z)\right)^{(3)}$.

$$\underset{z=7}{\mathrm{Re}\,s}\frac{1}{(z-7)^4(z-5)^2} = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 7}\left(\frac{1}{(z-5)^2}\right)^{(3)} = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 7}\left(\frac{(-2)}{(z-5)^3}\right)'' =$$

$$\frac{1}{3!}\lim_{z\to 7}\left(\frac{(-2)(-3)}{(z-5)^4}\right)' = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 7}\left(\frac{(-2)(-3)(-4)}{(z-5)^5}\right) = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 7}\left(\frac{3!(-4)}{(z-5)^5}\right) = \frac{-4}{(z-5)^5}\Bigg|_7$$

$$= \frac{-4}{2^5} = -\frac{2^2}{2^5} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}.$$

Ответ. $-\frac{1}{8}$.

Задача 10. Вычислить интеграл $\frac{1}{2\pi\ i}\oint\limits_{|z|=5}\frac{1}{(z-2)(z-4)^2(z-6)}dz$.

Решение. Здесь очевидно, точки 2 и 4 внутри круга, 6 снаружи, так как радиус равен 5.

$$\frac{1}{2\pi\ i}\oint\limits_{|z|=5}\frac{1}{(z-2)(z-4)^2(z-6)}dz = \underset{z=2}{\operatorname{Re}s}\, f(z)+\underset{z=4}{\operatorname{Re}s}\, f(z) =$$

$$\left.\frac{1}{(z-4)^2(z-6)}\right|_2 + \left.\left(\frac{1}{(z-2)(z-6)}\right)'\right|_4 = \frac{1}{(-2)^2(-4)}+\left.\left(\frac{1}{z^2-8z+12}\right)'\right|_4 =$$

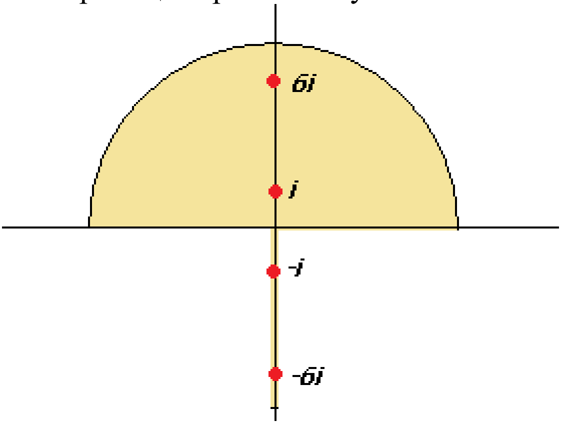
$$-\frac{1}{16}+\left.\frac{-(2z-8)}{(z^2-8z+12)^2}\right|_4 = -\frac{1}{16}+\left.\frac{-(2z-8)}{(z-2)^2(z-6)^2}\right|_4 = -\frac{1}{16}+\frac{0}{2^2(-2)^2} =$$

$$-\frac{1}{16}.$$

Ответ. $-\frac{1}{16}$.

Задача 11.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+36)}dx$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2+36)}$, её можно представить в виде $f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-i)(z+6i)(z-6i)}$, есть 4 полюса первого порядка: $\pm i, \pm 6i$. Интеграл по границе верхнего полукруга равен сумме вычетов в 2 точках, а именно $i, 6i$. Если радиус больше 6, то обе точки внутри полукруга, и при дальнейшем увеличении радиуса интеграл уже не изменится. При этом из теории известно, что при увеличении радиуса, доля результата, приходящегося на горизонтальный отрезок, растёт, а по дуге - стремится к 0, потому что здесь степень знаменателя на 4 больше, чем числителя, то есть модуль функции величина порядка $\frac{1}{R^4}$, а дуга длины πR. Поэтому интеграл по дуге меньше, чем $\frac{\pi}{R^3}$, и стремится к 0. В пределе, действительная ось - граница верхней полуплоскости.



Таким образом, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+36)} dx = 2\pi\, i\left(\underset{z=i}{\operatorname{Res}} f(z) + \underset{z=6i}{\operatorname{Res}} f(z) \right)$,

где $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z+6i)(z-6i)}$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+36)} dx = 2\pi\, i \left(\left. \frac{1}{(z+i)(z^2+36)} \right|_{i} + \left. \frac{1}{(z^2+1)(z+6i)} \right|_{6i} \right) =$$

$$2\pi\, i \left(\frac{1}{(2i)35} + \frac{1}{(-35)(12i)} \right) = \frac{2\pi\, i}{35i} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) = \frac{2\pi}{35} \cdot \frac{5}{12} = \frac{\pi}{6 \cdot 7} = \frac{\pi}{42}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{42}$.

Задача 11.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$.

Решение. В этом примере, если решать без вычетов, решение было бы более громоздким: надо было бы дважды применять рекуррентную формулу из прошлого семестра, чтобы от 3 степени перейти ко 2-й и затем к 1-й. А с помощью вычетов, будет просто один вычет в полюсе порядка 3.

$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^3} = \dfrac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$. В верхней полуплоскости только один полюс $z=i$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}dx = 2\pi\ i\cdot\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3} = 2\pi\ i\cdot\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)''\Bigg|_i =$$

$$\pi\ i\left(\frac{(-3)}{(z+i)^4}\right)'\Bigg|_i = \pi\ i\left(\frac{(-3)(-4)}{(z+i)^5}\right)\Bigg|_i = \pi\ i\frac{12}{(2i)^5} = \pi\ i\frac{2^2 3}{2^5 i^5}\ .$$

Учитывая, что $i^4=(-1)^2=1$, тогда $i^5=i$, далее:

$$\pi\ i\frac{2^2 3}{2^5 i^5} = \pi\ i\frac{3}{2^3 i} = \frac{3}{8}\pi\,.$$

Ответ. $\dfrac{3}{8}\pi$.

Задача 12. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+4\cos x}dx$.

Решение. Здесь надо сделать замену $z=e^{ix}$, при которой:

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad dx=\frac{1}{iz}dz\,.$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+4\cos x}dx = \oint_{|z|=1}\frac{1}{5+4\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{iz}dz = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{5+2\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{z}dz =$$

$$\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{5z+2\left(z^2+1\right)}dz = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{2z^2+5z+2}dz\,.$$

Теперь найдём корни многочлена в знаменателе, тем самым найдём полюсы функции.

$D = 25 - 4\cdot 2\cdot 2 = 9$. $z = \dfrac{-5\pm 3}{4}$, корни $-\dfrac{1}{2}$ и -2. Один из них, очевидно, внутри единичного круга, другой снаружи. Поэтому надо будет найти всего один вычет.

С учётом найденных полюсов, интеграл запишется в виде:

$$\frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{2(z+2)\left(z+\frac{1}{2}\right)}dz = 2\pi\ i\frac{1}{i}\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2(z+2)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right) =$$

$$2\pi\left.\frac{1}{2(z+2)}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = 2\pi\frac{1}{2\left(2-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\pi .$$

Ответ. $\dfrac{2}{3}\pi$.

Задача 13. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 1 & , x\in(-1{,}0) \\ x+2, & x\in(0{,}1)\end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье на $[-1{,}1]$.

Решение. Найдём все коэффициенты ряда Фурье. Здесь $l=1$, поэтому $\dfrac{1}{l}$ перед каждым интегралом не пишется.

$$a_0 = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{0}1dx + \int\limits_{0}^{1}(x+2)dx = x\Big|_{-1}^{0} + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + 2x\Big|_0^1 = 1+\frac{1}{2}+2 = \frac{7}{2}.$$

При этом $\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{7}{4}$. Далее, вычислим все прочие коэффициенты.

$$a_n = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x dx = \int\limits_{-1}^{0}\cos n\pi x dx + \int\limits_{0}^{1}(x+2)\cos n\pi x dx$$

во 2-м слагаемом здесь будет интегрирование «по частям».

$u = x+2$	$v = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)$
$u' = 1$	$v' = \cos(n\pi x)$

$$\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x+2}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_{0}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi x)dx \right).$$

Теперь получилось 3 слагаемых, в 1-м и 2-м получится $0-0=0$ в каждом, так как там либо $\sin 0$ либо $\sin n\pi$.

$$\frac{0-\sin(-n\pi)}{n\pi} + \left(\frac{3\sin(n\pi)-0}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Big|_0^1 \right) =$$

$$0 + \left(0 + \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2} \right) = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}.$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x dx = \int_{-1}^{0} \sin n\pi x dx + \int_0^1 (x+2)\sin n\pi x dx$$

во 2-м слагаемом также интегрируем по частям.

$u = x+2$	$v = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)$
$u' = 1$	$v' = \sin(n\pi x)$

$$-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x+2}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx \right) =$$

$$-\frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi} + \left(-\frac{3\cos(n\pi)-2}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Big|_0^1 \right)$$

теперь 3-е слагаемое содержит $\sin 0$ и $\sin n\pi$ и равно 0.

При этом мы ещё и не различаем $\cos(-n\pi)$ и $\cos(n\pi)$ так как косинус функция чётная. И то и другое равно $(-1)^n$.

$$-\frac{1-(-1)^n}{n\pi} + \left(-\frac{3(-1)^n - 2}{n\pi} + \frac{0-0}{n^2\pi^2} \right) = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} + \frac{2-3(-1)^n}{n\pi} = \frac{1-2(-1)^n}{n\pi}.$$

Итак, $\dfrac{a_0}{2}=\dfrac{7}{4}$, $a_n=\dfrac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}$, $b_n=\dfrac{1-2(-1)^n}{n\pi}$. Мы знаем все коэффициенты и теперь запишем ряд Фурье:

Ответ. $\dfrac{7}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\dfrac{1-2(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right)$.

Задача 14. Разложить функцию $f(x)=\begin{cases}1 & ,x\in(-1,0)\\ x+2, & x\in(0,1)\end{cases}$

в комплексный ряд Фурье на $[-1,1]$.

Решение. Здесь $l=1$, поэтому $\dfrac{1}{2l}$ перед каждым интегралом это $\dfrac{1}{2}$.

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}1dx+\int_{0}^{1}(x+2)dx\right) = \frac{1}{2}\left(x\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1+2x\Big|_0^1\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+2\right)=\frac{7}{4}.$$

$$c_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)e^{-in\pi x}dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}e^{-in\pi x}dx+\int_{0}^{1}(x+2)e^{-in\pi x}dx\right)$$

Во втором слагаемом интегрирование по частям.

$u=x+2$	$v=\dfrac{1}{-in\pi}e^{-in\pi x}$
$u'=1$	$v'=e^{-in\pi x}$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Bigg|_0^1-\frac{1}{-in\pi}\int_0^1 e^{-in\pi x}dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Bigg|_0^1+\frac{1}{in\pi}\int_0^1 e^{-in\pi x}dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Bigg|_0^1+\frac{1}{-i^2n^2\pi^2}e^{-in\pi x}\Bigg|_0^1\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{in\pi}}{-in\pi}+\frac{3e^{-in\pi}-2}{-in\pi}+\frac{e^{-in\pi}-1}{n^2\pi^2}\right).$$

Учтём тот факт, что по формуле Эйлера:

$$e^{in\pi}=\cos n\pi+i\sin n\pi = (-1)^n+i0 = (-1)^n,$$

$$e^{-in\pi}=\cos n\pi-i\sin n\pi = (-1)^n-i0 = (-1)^n.$$

Тогда $\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{in\pi}}{-in\pi}+\frac{3e^{-in\pi}-2}{-in\pi}+\frac{e^{-in\pi}-1}{n^2\pi^2}\right)=$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-1)^n}{-in\pi}+\frac{3(-1)^n-2}{-in\pi}+\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-1)^n+3(-1)^n-2}{-in\pi}+\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2(-1)^n-1}{-in\pi}+\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-2(-1)^n}{in\pi}+\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\right).$$

Мы вычислили коэффициент c_n и теперь можно записать ряд.

Ответ. $\frac{7}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1-2(-1)^n}{in\pi}+\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\right)e^{in\pi x}$.

Литература

1. Л.И.Магазинников. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования http://edu.tusur.ru/publications/2258

2. А.П.Ерохина, Л.Н. Байбакова. Высшая математика III в упражнениях с задачами и решениями. http://narod.ru/disk/29273915001/eroh-bajb.djvu.html

3. А.А.Ельцов, Т.А.Ельцова. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения http://edu.tusur.ru/publications/2259

4. Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям: Учебное пособие / Ельцов А. А., Ельцова Т. А. — 2005. 204 с. http://edu.tusur.ru/publications/39

5. Воробьёв Н.Н. Теория рядов. Санкт-Петербург, 2002, изд-во «Лань». ISBN 5-8114-0446-8