

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

ГРИНШПОН И. Э.

**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.  
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.  
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.**

Курс лекций  
Учебное пособие

2019

Приведен конспект лекций по разделам "Линейная алгебра" "Векторная алгебра и "Аналитическая геометрия читаемых в первом семестре на первом курсе ФВС (54\* и 59\*) и 40\* ФСУ. Конспект включает в себя действия с матрицами, решение матричных уравнений, решение систем линейных уравнений матричным методом, методом Крамера и методом Гаусса; вводится понятие линейного пространства и его базиса; рассматриваются линейные операторы; для нахождения собственных чисел и собственных векторов линейного оператора приводятся сведения из теории многочленов одной переменной, в том числе, нахождение корней многочленов с целыми коэффициентами; рассматриваются квадратичные формы. Разделы "Векторная алгебра" и "Аналитическая геометрия" выносятся на самостоятельное изучение. В этих разделах рассматриваются действия с векторами, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов и их приложения, приводятся различные уравнения прямой на плоскости и в пространстве, и уравнения плоскости, уравнения кривых второго порядка и их приведение к каноническому виду.

Теоретический материал иллюстрируется примерами.

В пособии приведены также исторические сведения об ученых-математиках.

# Глава I

## Линейная алгебра

При записи определений, теорем и различных формул мы будем использовать логические символы:  $\forall$  — для всех, для каждого,  $\exists$  — существует,  $\exists!$  — существует единственный,  $\vee$  — или,  $\wedge$  — и,  $\Rightarrow$  — влечет,  $\Leftrightarrow$  — тогда и только тогда, когда.

### §1. Матрицы. Действия с матрицами.

*Матрицей* размера  $m \times n$  называется таблица чисел, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов. Эти числа называют *элементами* матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Обозначения матриц  $A = (a_{ij})$ ,  $A = (a_j^i)$ ,  $A = [a_{ij}]$ ,  $A = [a_j^i]$ .

Матрицы играют важную роль в математике и ее приложениях. Понятие матрицы впервые появилось в середине XIX века в работах Уильяма Гамильтона<sup>1</sup> и Артура Кэли<sup>2</sup>. Сам термин "матрица" ввел в 1850 г.

<sup>1</sup> Уильям Роуэн Гамильтон (William Rowan Hamilton) (1806-1865) — выдающийся ирландский математик XIX века. Гамильтону принадлежит введение в механику наглядного приема изображения изменений величин и направлений скорости точки, совершающей какое-либо движение (годограф). Гамильтон открыл кватернионы, некоммутативную числовую структуру с тремя мнимыми единицами. Следующие 20 лет он посвятил их подробному исследованию. В ходе исследований Гамильтон попутно ввел понятие векторного поля и создал основы векторного анализа. Он открыл векторное произведение, предложил оператор "набла".

<sup>2</sup> Артур Кэли (Arthur Cayley) (1821-1859) — английский математик. Большая часть его работ относится к линейной алгебре, дифференциальным уравнениям и эллиптическим функциям. Кэли ввел принятое ныне обозначение для определителя, сформулировал определение группы. Он развил теорию алгебраических инвариантов, исследовал геометрии  $n$ -мерного пространства. Кэли принадлежит более 200 работ, посвященных самым разнообразным вопросам математики.

Джеймс Сильвестр<sup>3</sup>.

Матричные обозначения получили распространение в современной математике и ее приложениях. Основным применением матриц было решение линейных уравнений. С помощью матриц записываются многие математические соотношения, в том числе, системы алгебраических и дифференциальных уравнений и их решения. В квантовой теории матрицы используются для нахождения значений физических величин. Матричный язык применяют при выполнении различных преобразований. Исчисление матриц развивается также в направлении построения эффективных алгоритмов для численного решения большого количества задач. В информатике матрицы с элементами того или иного типа занимают особое место как структуры для хранения и передачи основной и вспомогательной информации при решении многочисленных прикладных задач, шифрования сообщений в Интернете и т.д. Матрицы в информатике называют массивами. Различают одномерные массивы, содержащие элементы в одной строке и именуемые вектором, двумерные массивы, элементы которых располагаются по строкам и столбцам, которые и называются матрицами, и многомерные массивы сложной структуры. Массивы можно рассматривать как формальное объединение нескольких однотипных объектов (чисел, символов, строк и т.п.), рассматриваемое как единое целое. К необходимости применения массивов мы приходим всякий раз, когда требуется связать и использовать целый ряд родственных величин.

Матрицу размера  $1 \times n$  называют *матрицей-строкой*, а матрицу размера  $m \times 1$  – *матрицей-столбцом*.

Матрицу, все элементы которой равны нулю, называют *нулевой* матрицей. Матрицу размера  $n \times n$  называют *квадратной* матрицей порядка  $n$ . Диагональ квадратной матрицы, идущая от элемента  $a_{11}$  к элементу  $a_{nn}$  называется *главной диагональю*, вторая диагональ называется *побочной*. Квадратная матрица, все элементы которой, не стоящие на

---

<sup>3</sup> Джеймс Джозеф Сильвестр (James Joseph Sylvester) (1814-1897) — английский математик. Известен своими работами в теории матриц, теории чисел и комбинаторике. Сильвестр известен, прежде всего, как алгебраист. Две его работы в этой области стали классическими: это теория элементарных делителей и закон инерции квадратичных форм. Сильвестр был членом Лондонского королевского общества (1841), иностранным членом-корреспондентом Петербургской Академии наук (1872).

главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  равны единице, называется *единичной*. Квадратная матрица, все элементы которой, стоящие ниже (выше) диагонали, равны нулю, называется *треугольной*. Квадратная матрица  $A$  называется *симметричной*, если  $a_{ij} = a_{ji}$ , то есть элементы матрицы симметричные относительно главной диагонали равны. Квадратная матрица  $A$  называется *кососимметричной*, если  $a_{ji} = -a_{ij}$ , то есть элементы матрицы симметричные относительно главной диагонали отличаются знаком. Для любой матрицы  $A$  размера  $m \times n$  можно построить матрицу  $A^T$ , заменив строки матрицы столбцами, а столбцы — строками. Матрица  $A^T$  называется *транспонированной* для матрицы  $A$ . Транспонированная матрица имеет размер  $n \times m$ .

**Пример 1.1.** Если  $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & -9 & 0 & 6 \\ 9 & 11 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ , то  $A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 7 & -9 & 11 \\ 1 & 0 & 8 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ .

Над матрицами можно производить различные операции.

Прежде всего введем понятие равенства матриц. Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы равны. Даны две матрицы  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  размера  $m \times n$ . Тогда  $A = B$ , если  $a_{ij} = b_{ij}$  ( $\forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}$ ).

Матрицы одного размера можно складывать. *Суммой* двух матриц называется матрица того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых. Пусть  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  — матрицы размера  $m \times n$ . Тогда  $C = A + B$ , если  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  ( $\forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}$ ).

Матрицу можно умножать на число. *Произведением матрицы на число* называется матрица, которая получается при умножении всех элементов исходной матрицы на это число. Если  $A = (a_{ij})$ , то  $kA = (ka_{ij})$  ( $\forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}$ ).

**Пример 1.2.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 7 \\ 3 & 9 & 6 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -9 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 5 & 4 & 7 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 1 & 14 & 5 \\ 5 & 3 & 17 \end{pmatrix}, \quad 5A = \begin{pmatrix} 25 & 35 & 35 \\ 15 & -45 & 30 \\ 30 & 55 & 40 \end{pmatrix}.$$

Однако главные применения матриц связаны с операцией их умножения. Эта операция лежит в основе целого раздела линейной алгебры — алгебры матриц.

Пусть даны две матрицы  $A$  размера  $m \times n$  и  $B$  размера  $n \times k$ . Причем число столбцов матрицы  $A$  равно числу строк матрицы  $B$ . В этом случае можно определить произведение матриц  $A$  и  $B$ . Матрица  $C$  размера  $m \times k$  называется **произведением** матриц  $A$  и  $B$ , если любой элемент  $c_{ij}$  этой матрицы равен сумме произведений элементов  $i$ -той строки матрицы  $A$  на соответствующий элемент  $j$ -того столбца матрицы  $B$ , то есть

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}. \quad (1.1)$$

Отметим, что число строк матрицы  $C$  равно числу строк матрицы  $A$ , и число столбцов матрицы  $C$  равно числу столбцов матрицы  $B$ .

**Пример 1.3.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-7) + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + (-1) \cdot (-5) \\ (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-7) + 4 \cdot 3 & (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 24 \\ -13 & -20 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ (-7) \cdot 3 + 2 \cdot (-2) & (-7) \cdot 5 + 2 \cdot 3 & (-7) \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 + (-5) \cdot (-2) & 3 \cdot 5 + (-5) \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 19 & 10 \\ -25 & -29 & 15 \\ 19 & 0 & -23 \end{pmatrix}.$$

**Пример 1.4.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 & 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 & -3 \\ -2 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Произведение  $BA$  не существует, так как число строк матрицы  $A$  не равно числу столбцов матрицы  $B$ .

Операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1)  $A + B = B + A$  — сложение матриц коммутативно. Но  $AB \neq BA$  — умножение матриц не коммутативно (пример 1.4). Более того, не всегда существуют оба произведения (пример 1.5).

2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$  и  $(AB)C = A(BC)$  — сложение и умножение матриц удовлетворяют закону ассоциативности.

3)  $(A + B)C = AC + BC$  и  $C(A + B) = CA + CB$ , если эти произведения существуют. Это свойство называют законом дистрибутивности умножения относительно сложения.

4)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ .

5)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ .

6)  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ .

7)  $A \cdot E = E \cdot A = A$ , где  $A$  — квадратная,  $E$  — единичная матрицы порядка  $n$ .

8)  $(A + B)^T = A^T + B^T$ .

9)  $(AB)^T = B^T \cdot A^T$ .

В приложениях важную роль играет свойство квадратных матриц, называемое неразложимостью. Поясним его смысл.

**Согласованной перестановкой рядов** квадратной матрицы  $A$  называется такая их перестановка, при которой одновременно с перестановкой  $i$ -ой и  $j$ -ой строки меняются местами  $i$ -ый и  $j$ -ый столбцы.

Квадратная матрица  $A$  называется **разложимой**, если согласованными перестановками строк и столбцов ее можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — квадратные матрицы не обязательно одного и того же порядка;  $\mathbf{0}$  — нулевая матрица. В противном случае матрица называется **неразложимой**.

Если  $B = 0$  и при дальнейшем разложении матриц  $A_1$  и  $A_2$  и их частей, стоящих

на диагонали, будет получена матрица вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix},$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_k$  – квадратные неразложимые матрицы не обязательно одного и того же порядка, то матрица  $A$  называется *вполне разложимой*.

### Задания для самостоятельного решения

**Задание 1.1.** Найдите  $A + B$ ,  $A - B$ ,  $2A - 3B$ ,  $5A + 4B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & 9 & -6 \\ 3 & 11 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & -2 & 8 \\ -9 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Задание 1.2.** Найдите произведения матриц  $AB$  и  $BA$ , если

а)  $A = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix};$

б)  $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 13 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$

**Задание 1.3.** Найдите произведения матриц  $AB$  и  $BA$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -3 \\ -2 & 5 & 9 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Задание 1.4.** Найдите произведения матриц  $AB$  и  $BA$ , если

а)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -7 & 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix};$

б)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 4 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}.$

**Задание 1.5.** При каком соотношении между  $k$  и  $m$  будет верно равен-

ство  $AB = BA$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$



**Задание 1.6.** Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ . Вычислите  $A^2$ ,  $A^3$ ,  $A^4$ ,  $E - 2A + A^2$ .

**Задание 1.7.** Найдите матрицу  $B = (E + 2A + 3A^2)(E - A)$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Задание 1.8.** При каком условии на матрицы  $A$  и  $B$  будут верны равенства  $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ ,  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ?

**Задание 1.9.** Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей  $A$ , если

а)  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ , б)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ , в)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , г)  $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ .

## §2. Перестановки.

Дано множество первых  $n$  натуральных чисел  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Это множество можно упорядочить различными способами. Всякое расположение  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  чисел  $1, 2, \dots, n$  в некотором определенном порядке называется **перестановкой** из  $n$  чисел.

**Предложение 2.1.** Число различных перестановок из  $n$  чисел равно  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .

*Доказательство.* Первый элемент  $i_1$  можно выбрать  $n$  способами, элемент для выбора элемента  $i_2$  осталась  $n - 1$  возможность и так далее, элемент  $i_{n-1}$  можно выбрать всего 2 способами, наконец берем последний элемент  $i_n$ . Всего получилось  $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$  различных перестановок.  $\square$

Если в некоторой перестановке поменять местами два числа, а остальные оставить на месте, то получим новую перестановку. Такое преобразование перестановки называется **транспозицией**. Говорят, что в данной перестановке числа  $i$  и  $j$  образуют **инверсию**, если  $i > j$ , но  $i$  стоит в этой перестановке раньше чем  $j$ . Перестановка называется **четной**, если она имеет четное число инверсий, и **нечетной** в противном случае.

**Теорема 2.2.** *Всякая транспозиция меняет четность перестановки.*

*Доказательство.* Дана перестановка  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ . Поменяем местами два соседних элемента  $i_k$  и  $i_{k+1}$ . В этом случае число инверсий изменится на 1, и, значит, изменится и четность перестановки. Чтобы поменять местами элементы  $i_k$  и  $i_{k+m}$  нужно  $2m - 1$  раз переставить соседние элементы. Поэтому число инверсий изменится на нечетное число, и, значит, перестановка сменит четность.  $\square$

**Теорема 2.3.** 1) *Число четных перестановок равно числу нечетных перестановок;*

2) *Любая перестановка может быть получена из любой другой перестановки с помощью нескольких транспозиций.*

### §3. Определители.

Понятие определителя (детерминанта) возникло в связи с необходимостью решения системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными. Определитель матрицы  $A$  обозначается  $|A|$ ,  $\det A$  или  $\Delta$ . Открытие определителей приписывают немецкому математику Г. Лейбницу<sup>4</sup>. Современная теория определителей основывается на работах Ж. Бине<sup>5</sup>, О. Коши<sup>6</sup> и

<sup>4</sup>Готфрид Вильгельм Лейбниц (Gottfried Wilhelm von Leibniz) (1646-1716) — немецкий математик, физик, философ. Основной заслугой Лейбница в области математики является создание (вместе с И. Ньютоном) дифференциального и интегрального исчисления. Он вывел правила дифференцирования, поиска экстремумов. Лейбниц сделал немало открытий и в других областях математики: в комбинаторике, в алгебре (начала теории определителей), в геометрии. В логике, развивая учение об анализе и синтезе, Лейбниц выдвинул идею о применении в логике математической символики и построении логических исчислений, поставил задачу логического обоснования математики. Лейбниц сыграл важную роль в истории создания электронно-вычислительных машин: он предложил использовать для целей вычислительной математики бинарную систему счисления. По просьбе Петра I разработал проекты развития образования и государственного управления в России и проект учреждения Петербургской академии наук.

<sup>5</sup>Жак Филлип Мари Бине (Jacques Philippe Marie Binet) (1786-1856) — французский математик, механик и астроном. Один из создателей матричной алгебры, первым опубликовал правило умножения матриц, изучал линейные разностные уравнения с переменными коэффициентами. Бине принадлежит ряд работ по прикладной математике и механике вращающихся тел.

<sup>6</sup>Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy) (1789-1857) — великий французский математик и механик. Разработал фундамент математического анализа, внес огромный вклад в анализ, алгебру, теорию чисел, арифметику, математическую физику и многие другие области математики; он один из основоположников механики сплошных сред. Коши впервые дал строгое определение основным понятиям математического анализа — пределу, непрерывности, производной, дифференциалу, интегралу, сходимости ряда; вел понятие радиуса сходимости степенного ряда, дал определение интеграла как предела сумм, доказал существование интегралов от непрерывных функций. В теории дифференциальных уравнений Коши впервые поставил задачу о нахождении решения дифференциального уравнения с заданными начальными условиями (называемую с тех пор задачей Коши), дал способ интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Коши занимался геометрией (теория многогранников, поверхности 2-го порядка), алгеброй (симметрические многочлены, свойства определителей), теорией чисел (теорема Ферма о многоугольных числах, закон взаимности). В области комплексного анализа Коши создал теорию интегральных вычетов, а также ее приложения к различным вопросам анализа. Ему принадлежат исследования по тригонометрии, механике, теории упругости, оптике, астрономии. Коши написал свыше 800 работ, полное собрание его сочинений содержит 27 томов. Коши был членом Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и ряда других академий Европы. Имя Коши носят многие математические объекты.

К. Якоби<sup>7</sup>.

Если  $A = (a_{11})$  — матрица первого порядка, то **определителем первого порядка** называется число  $a_{11}$ :  $\Delta_1 = a_{11}$ .

Пусть  $A$  — матрица второго порядка.

**Определителем второго порядка** называется число, которое вычисляется по формуле

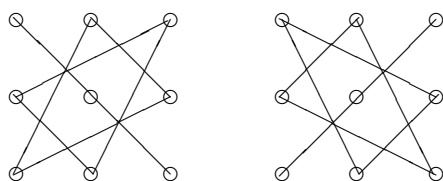
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (3.1)$$

Пусть  $A$  — матрица третьего порядка.

**Определителем третьего порядка** называется число, которое вычисляется по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Это выражение — алгебраическая сумма 6 слагаемых. В каждое слагаемое входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу (3.2), легко запомнить, пользуясь схемой, которая называется **правилом звездочки**. Первая звездочка — это слагаемые, входящие в определитель со знаком "плюс". Вторая звездочка — это слагаемые, входящие в определитель со знаком "минус".



Для вычисления определителя третьего порядка применяют также правило Саррюса<sup>8</sup>: *справа от определителя дописывают первых два столбца и произведения элементов главной диагонали и диагоналей, ей*

<sup>7</sup>Карл Густав Якоби (Carl Gustav Jacob Jacobi) (1804-1851) — немецкий математик, внесший большой вклад в комплексный анализ, линейную алгебру, динамику и другие разделы математики и механики.

<sup>8</sup>Пьер Фредерик Саррюс (Pierre-Frederic Sarrus) (1798-1861) — французский математик. Его работы его относятся к различным областям анализа и геометрии.

параллельных, берут со знаком "плюс"; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком "минус".

**Пример 3.1.** Вычислите определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ .

**Решение .**  $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot 3 + (-5) \cdot 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-6) -$   
 $- 3 \cdot 3 \cdot (-6) - 3 \cdot (-5) \cdot (-1) - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 36 - 15 - 12 + 54 - 15 + 8 = 56.$

Пусть дана квадратная матрица  $A$  порядка  $n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим всевозможные произведения  $n$  элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы  $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$  (\*). Обозначим число инверсий в перестановке  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  через  $s$ , а число инверсий в перестановке  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  через  $t$ . Если в перестановке (\*) поменять местами два сомножителя и подсчитать число инверсий в новых перестановках, то сумма  $s_1 + t_1$  будет иметь ту же четность, что и сумма  $s + t$  (теорема 2.2). Поэтому число  $(-1)^{s+t}$  не зависит от порядка сомножителей. Не нарушая общности, можно произведение (\*) записывать в виде  $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ .

Число различных произведений вида (\*) равно  $n!$  (предложение 2.1).

**Определение 3.1.** *Определителем порядка  $n$  квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  называется число, равное алгебраической сумме  $n!$  всех возможных различных произведений  $n$  элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, умноженных на  $(-1)^{s+t}$ , где  $s$  — число инверсий в перестановке первых, а  $t$  — число инверсий в перестановке вторых индексов перемножаемых элементов матрицы.*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{s+t} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}. \quad (3.3)$$

Квадратная матрица  $A$  называется **невырожденной**, если ее определитель  $\det A \neq 0$ .

### Свойства определителей.

1. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю самой матрицы, то есть  $|A| = |A^T|$ .*

Иными словами, определитель при транспонировании не меняется. Из свойства 1 следует, что строки и столбцы матрицы равноправны. Все свойства и теоремы можно формулировать как для строк, так и для столбцов определителя.

2. *Если все элементы некоторой строки определителя равны 0, то определитель равен 0.*

Это свойство следует из определения, так как в каждом слагаемом есть нулевой сомножитель, и, значит, сумма равна 0.

3. *При перестановке двух строк определитель меняет знак.*

При вычислении определителя по формуле (3.3) при перестановке двух строк каждое слагаемое изменит знак, а, значит, определитель сменит знак.

4. *Определитель, имеющий две одинаковых строки, равен 0.*

Пусть определитель равен  $d$ . Поменяем местами в этом определителе две одинаковых строки. По свойству 3 определитель сменит знак и станет равным  $-d$ . Но так как строки одинаковы, то определитель не изменится, то есть получим  $d = -d$ . Откуда и следует, что  $d = 0$ .

5. *Если все элементы некоторой строки определителя умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число.*

$$\begin{aligned} \Delta' &= \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \sum (-1)^t \lambda a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{3j_n} = \\ &= \lambda \cdot \sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = \lambda \cdot \Delta. \end{aligned}$$

Свойство 5 можно сформулировать следующим образом: *общий множитель всех элементов некоторой строки определителя можно выносить за знак определителя.*

**6.** *Если две строки определителя пропорциональны, то определитель равен 0.*

Для доказательства примените свойства 5 и 4.

**7.** *Если все элементы  $i$ -той строки определителя представимы в виде суммы  $a_{ij} = b_j + c_j$ , то определитель равен сумме определителей  $D = D_1 + D_2$ , причем в  $i$ -той строке определителя  $D_1$  стоят элементы  $b_i$ , в  $i$ -той строке определителя  $D_2$  стоят элементы  $c_i$ , все остальные элементы совпадают с элементами определителя  $D$ .*

Например,

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**8.** *Определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить элементы другой строки, умноженные на некоторое число.*

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A|.$$

**9.** *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей матриц, то есть  $|AB| = |A| \cdot |B|$ .*

**10.** *Определитель диагональной матрицы (а также верхней и нижней треугольных матриц) равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, то есть  $D = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$ .*

**11.** *Определитель вполне разложимой матрицы равен произведению*

определителей матриц, стоящих на ее главной диагонали.

Пусть дана матрица  $A = (a_{ij})$  размера  $m \times n$ . Выберем в матрице  $k$  строк и  $k$  столбцов ( $1 \leq k \leq m$ ;  $1 \leq k \leq n$ ). Из элементов, стоящих на пересечении этих строк и столбцов, построим квадратную матрицу порядка  $k$ . Определитель этой матрицы называется **минором** порядка  $k$  матрицы  $A$ . Минор порядка  $k$  получается из матрицы  $A$  вычеркиванием  $m - k$  строк и  $n - k$  столбцов.

Рассмотрим квадратную матрицу  $A$  порядка  $n$ .

**Определение 3.2.** Минором  $M_{ij}$  матрицы  $A$  порядка  $n$ , соответствующим элементу  $a_{ij}$  называется определитель матрицы порядка  $n - 1$ , получающейся из  $A$  вычеркиванием  $i$ -той строки и  $j$ -того столбца.

Каждая квадратная матрица порядка  $n$  имеет  $n^2$  миноров порядка  $n - 1$ .

**Определение 3.3.** Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  называется число  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

Важное значение для вычисления определителей имеет теорема:

**Теорема 3.1. (Лапласа)**<sup>9</sup>. Определитель  $D$  квадратной матрицы  $A$  равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения.

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}. \quad (3.4)$$

*Доказательство.* 1) Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

---

<sup>9</sup>Пьер Симон маркиз де Лаплас (Pierre-Simon de Laplace) (1749-1827) — французский астроном, математик и физик, член Парижской АН. Лапласу принадлежит ряд основополагающих работ по математике и математической физике. К ним относятся работы по теории дифференциальных уравнений. Он вывел носящее его имя уравнение в частных производных, которое имеет большое значение в теориях потенциала, теплопроводности, электростатики, гидродинамики. Лаплас систематизировал математический фундамент теории вероятностей, ввёл производящие функции, развил также теорию ошибок и приближений методом наименьших квадратов.

у которой все элементы первой строки кроме  $a_{11}$  равны 0. ( $a_{11} \neq 0, a_{1j} = 0, j = \overline{2; n}$ ). Тогда определитель

$$|A| = \sum (-1)^t a_{11} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = a_{11} \sum (-1)^t a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}$$

(под знаком суммы стоит сумма всех возможных различных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца с номерами от 2 до  $n$ , умноженное на  $(-1)^t$ ,  $t$  – число инверсий в перестановке вторых индексов и  $M_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = A_{11}$ ).

2) Пусть теперь в матрице  $A$  в  $i$ -ой строке только один элемент  $a_{ij}$  отличен от нуля

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

( $a_{ij} \neq 0, a_{ik} = 0, k \neq j$ ). Поменяем  $j$ -ый столбец последовательно со столбцами номер  $j-1, j-2, \dots, 1$ , а затем  $i$ -ую строку со строками с номерами  $i-1, i-2, \dots, 1$ . Всего сделаем  $j+i-2$  перестановок строк и столбцов. Получим матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее определитель

$$|A| = (-1)^{i+j-2} |A'| = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}.$$

3) В общем случае представим определитель матрицы  $A$  в виде суммы  $n$  определителей  $|A_j|$  ( $|A| = \sum_{j=1}^n |A_j|$ ), у которых все строки кроме  $i$ -ой одинаковы, а в  $i$ -ой строке каждого определителя только один элемент  $a_{ij} \neq 0$ . Тогда

$$|A| = \sum_{j=1}^n |A_j| = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}. \quad \square$$

**Теорема 3.2.** Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{sj} = a_{i1} A_{s1} + a_{i2} A_{s2} + \dots + a_{in} A_{sn} = 0. \quad (3.5)$$

*Доказательство.* Дана квадратная матрица  $A = (a_{ij})$  порядка  $n$ . Рассмотрим матрицу  $B$ , у которой все строки кроме  $s$ -той совпадают со строками матрицы  $A$ , а в



строке  $s$  стоят числа  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Подсчитаем  $|B|$ , разложив этот определитель по  $s$ -той строке.

$$|B| = c_1 A_{s1} + c_2 A_{s2} + \dots + c_n A_{sn}.$$

Заметим, что если определители отличаются только элементами одной строки (например,  $s$ -ой), то алгебраические дополнения элементов этой строки в обоих определителях равны  $A_{sj}^{(1)} = A_{sj}^{(2)}$  ( $\forall j = \overline{1, n}$ ), так как при разложении определителя по  $s$ -ой строке строка с этим номером вычеркивается. Если положить  $c_j = a_{ij}$ , то в матрице  $B$  будет две одинаковых строки, и, значит,  $|B| = 0$ .  $\square$

**Пример 3.2.** Вычислите двумя способами определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

**Решение .** 1) Вычислим определитель, разложив его по первой строке

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 11 + 3 \cdot (-1) = -27.$$

2) Вычислим определитель, получив нули в первом столбце.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -20 - 7 = -27.$$

**Пример 3.3.** Вычислите определитель  $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 6 \end{vmatrix}$ .

**Решение .** Вычислим определитель, получив нули в первом столбце

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (2 - 6) = -20.$$

Пусть даны матрицы  $A$  размера  $m \times n$  и  $B$  размера  $n \times m$  ( $m \neq n$ ).

Тогда их произведение  $AB$  — квадратная матрица порядка  $m$  и справедлива теорема

**Теорема 3.3. (Бине-Коши)** *Определитель матрицы  $AB$  равен 0, если  $m > n$ , и равен сумме произведений всех миноров порядка  $m$  матрицы  $A$  на соответствующие миноры порядка  $m$  матрицы  $B$ , если  $m < n$ .*

### Задания для самостоятельного решения

**Задание 3.1.** Вычислите определители

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 17 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} -3 & 11 \\ 5 & -21 \end{vmatrix}.$$

**Задание 3.2.** Вычислите определитель  $\begin{vmatrix} x^2 + 2x - 4 & x - 5 \\ x + 7 & 1 \end{vmatrix}$ .

**Задание 3.3.** Решите уравнение  $\begin{vmatrix} 2x - 3 & x + 1 \\ 5 & x + 4 \end{vmatrix} = 1$ .

**Задание 3.4.** Решите неравенства

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x + 7 & x - 11 \\ 5 & x - 9 \end{vmatrix} < 10; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2x + 5 & x - 2 \\ x + 4 & x - 1 \end{vmatrix} > 5.$$

**Задание 3.5.** Вычислите определители

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & -9 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 4 \\ -3 & -4 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \\ 2 & -9 & 15 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 21 \\ 2 & -16 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{д) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & -7 \\ -9 & 6 & -31 \end{vmatrix}.$$

**Задание 3.6.** Запишите разложение определителя по элементам второго

столбца  $\begin{vmatrix} 3 & a & 1 & 2 \\ 5 & b & 4 & 1 \\ 1 & c & -1 & -1 \\ 2 & d & 5 & 3 \end{vmatrix}$ .

**Задание 3.7.** Вычислите определители

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \\ -2 & 9 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 11 & 7 \\ 3 & -5 & 16 & 10 \\ -2 & -7 & 5 & 13 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -11 & 9 \\ -2 & 5 & 2 & -9 \\ 5 & 1 & -6 & 11 \end{vmatrix}.$$

**Задание 3.8.** Решите уравнение  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x+3 & 7 \\ 1 & 5 & x+5 \end{vmatrix} = 0.$

**Задание 3.9.** Вычислите определитель  $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}.$

**Задание 3.10.** Вычислите определитель  $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^3 & b^3 & c^3 \\ 1 & a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}.$

**Задание 3.11.** Вычислите определители, используя свойства определителей.

а)  $\begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 & a_1 + 2b_2 & a_1 + 2b_3 & a_1 + 2b_4 \\ a_2 + 2b_1 & a_2 + 2b_2 & a_2 + 2b_3 & a_2 + 2b_4 \\ a_3 + 2b_1 & a_3 + 2b_2 & a_3 + 2b_3 & a_3 + 2b_4 \\ a_4 + 2b_1 & a_4 + 2b_2 & a_4 + 2b_3 & a_4 + 2b_4 \end{vmatrix};$

б)  $\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & 1 + x_1y_3 & 1 + x_1y_4 \\ 1 + x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & 1 + x_2y_3 & 1 + x_2y_4 \\ 1 + x_3y_1 & 1 + x_3y_2 & 1 + x_3y_3 & 1 + x_3y_4 \\ 1 + x_4y_1 & 1 + x_4y_2 & 1 + x_4y_3 & 1 + x_4y_4 \end{vmatrix};$

в)  $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \frac{x+z}{2} & \frac{x+y}{2} & \frac{y+z}{2} & 1 \end{vmatrix}.$

**Задание 3.12.** Вычислите определитель порядка  $n$  ( $n > 3$ )

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}, \text{ приведя его к треугольному виду,}$$

#### §4. Обратная матрица.

В школьном курсе алгебры число  $b$  называли *обратным* числу  $a$ , если  $ab = 1$ . Для любого числа  $a \neq 0$  существует единственное обратное число  $b = \frac{1}{a} = a^{-1}$ . Аналогично в линейной алгебре определяется матрица, обратная матрице  $A$ .

**Определение 4.1.** Матрица  $A'$  называется **обратной** для матрицы  $A$ , если произведение этих матриц коммутативно и равно единичной матрице.

$$A \cdot A' = A' \cdot A = E. \quad (4.1)$$

Из определения следует, что обратная матрица может существовать только для квадратной матрицы.

**Теорема 4.1. (О существовании и единственности обратной матрицы)** Любая невырожденная квадратная матрица  $A$  имеет единственную обратную матрицу.

*Доказательство.* 1) Пусть матрица  $A = (a_{ij})$  – невырожденная. Значит,  $|A| \neq 0$ . Докажем, что для этой матрицы существует обратная. Рассмотрим матрицу  $A^* = (A_{ij})$ , составленную из алгебраических дополнений элементов матрицы  $A$ , транспонируем ее и разделим на определитель  $|A|$ . (Матрицу  $A^*$  называют **присоединенной**).

Покажем, что построенная таким способом матрица, является обратной для матрицы  $A$ .

$$A' = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

является обратной матрице  $A$ . Для этого рассмотрим произведение

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{nk} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k} A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{2k} A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{2k} A_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{nk} A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{nk} A_{nk} \end{pmatrix}.$$

По теореме 3.1 все элементы произведения матриц, стоящие на главной диагонали, равны определителю матрицы  $A$ , а остальные элементы полученной матрицы равны нулю по теореме 3.2. Следовательно, произведение

$$A \cdot A' = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично показывается, что произведение  $A' \cdot A = E$ .

2) Теперь докажем единственность обратной матрицы. Пусть матрица  $A''$  также является обратной для матрицы  $A$ . Рассмотрим произведение  $A' \cdot A \cdot A''$ . Имеем

$$A' \cdot A \cdot A'' = (A' \cdot A) \cdot A'' = E \cdot A'' = A'',$$

$$A' \cdot A \cdot A'' = A' \cdot (A \cdot A'') = A' \cdot E = A^{-1}.$$

Из этих равенств следует, что  $A'' = A^{-1}$ . □

Обозначается обратная матрица  $A^{-1}$ .

Условие невырожденности квадратной матрицы является не только достаточным, но и необходимым для существования обратной матрицы.

**Теорема 4.2.** *Если квадратная матрица  $A$  имеет обратную матрицу, то она невырожденная матрица.*

*Доказательство.* Пусть для матрицы  $A$  существует обратная матрица  $A^{-1}$ . Тогда  $A \cdot A^{-1} = E$ . Значит,  $|A \cdot A^{-1}| = |E| = 1$ . По свойству 9 определителей имеем  $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$ . Следовательно,  $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ . Откуда вытекает, что  $|A| \neq 0$ . □

**Пример 4.1.** Найдите матрицу, обратную матрице  $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ .

**Решение .** Вычислим определитель.

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 28 = 2 \neq 0,$$

значит матрица  $A$  невырожденная и для нее существует обратная матрица. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы  $A$ :

$A_{11} = 5$ ,  $A_{12} = -(-4) = 4$ ,  $A_{21} = -(-7) = 7$ ,  $A_{22} = 6$ . Составим присоединенную матрицу  $A^* = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ . Транспонировав ее и разделив на определитель, получим матрицу, обратную матрице  $A$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 3,5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку. Для этого вычислим произведение

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,5 & 3,5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 2,5 - 7 \cdot 2 & 6 \cdot 3,5 - 7 \cdot 3 \\ -4 \cdot 2,5 + 5 \cdot 2 & -4 \cdot 3,5 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

**Пример 4.2.** Найдите матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Решение .** Вычислим определитель.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -10 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -10 & 10 \end{vmatrix} = 30 \neq 0,$$

значит, матрица  $A$  невырожденная и для нее существует обратная матрица. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 17, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5, \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14, & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -10, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 11, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2. \end{aligned}$$

Составим присоединенную матрицу  $A^* = \begin{pmatrix} 17 & -5 & -14 \\ -10 & 10 & 10 \\ 11 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ . Транспонировав ее и разделив на определитель, получим матрицу, обратную матрице  $A$

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 17 & -10 & 11 \\ -5 & 10 & -5 \\ -14 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Проверку выполните самостоятельно, то есть покажите, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 17 & -10 & 11 \\ -5 & 10 & -5 \\ -14 & 10 & -2 \end{pmatrix} = E.$$

Метод вычисления обратной матрицы с использованием алгебраических дополнений можно применять, если порядок матрицы мал.

Для матриц, порядки которых достаточно велики, для вычисления обратной матрицы удобно применять метод Гаусса<sup>10</sup>–Жордана<sup>11</sup>, который состоит в следующем: *Справа к матрице  $A$  припишем единичную матрицу  $E$ . Используя элементарные преобразования матрицы, приведем матрицу  $A$  к единичной матрице. Тогда вторая матрица окажется равной  $A^{-1}$ .* Этим методом можно найти обратную матрицу для невырожденной квадратной матрицы любого порядка.

**Пример 4.3.** Методом Жордана-Гаусса найдите матрицу, обратную

матрице  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ .

<sup>10</sup>Иоганн Карл Фридрих Гаусс (Johann Carl Friedrich Gauss) (1777-1855) — немецкий математик, астроном и геодезист, почетный член Петербургской АН. Считается одним из величайших математиков всех времен, "королем математиков". С именем Гаусса связаны фундаментальные исследования почти во всех основных областях математики: в алгебре, теории чисел, дифференциальной и неевклидовой геометрии, математическом анализе, теории функций комплексного переменного, теории вероятностей, а также в небесной механике, астрономии, физике. Согласно легенде, школьный учитель математики, чтобы занять детей на долгое время, предложил им сосчитать сумму чисел от 1 до 100. Юный Гаусс мгновенно получил результат. До самой старости он привык большую часть вычислений производить в уме. Гаусс доказал возможность построения с помощью циркуля и линейки правильного семнадцатиугольника, нашел критерий возможности построения правильного  $n$ -угольника с помощью циркуля и линейки. В 1815 году публикует первое строгое доказательство основной теоремы алгебры. В его бумагах обнаружены заметки по тому предмету, что позже назвали топологией. В возрасте 62 лет Гаусс начал изучать русский язык, чтобы ознакомиться с трудами Лобачевского.

<sup>11</sup>Мари Эммон Камиль Жордан (Jordan) (1838-1922) — французский математик), издатель "Journal de mathematiques pures et appliquees"(1885-1921), член-корреспондент Петербургской АН. Работы Жордана относятся к алгебре (нормальная жорданова форма матриц), теории функций (понятие функции с ограниченным изменением), а также топологии и кристаллографии.

**Решение** . Припишем справа к матрице единичную матрицу и с помощью элементарных преобразований перенесем единичную матрицу налево.

$$\begin{aligned}
 A &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11/2 & -2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11/2 & -2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7/15 & 1/3 & -1/15 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 17/30 & -1/3 & 11/30 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -7/15 & 1/3 & -1/15 \end{array} \right). \\
 \text{Итак, } A^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{17}{30} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{30} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{7}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 17 & -10 & 11 \\ -5 & 10 & -5 \\ -14 & 10 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Свойства обратной матрицы.

1.  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ ;
2.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ ;
3.  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
4.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

### Задания для самостоятельного решения

**Задание 4.1.** Найдите матрицу, обратную матрице  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ .

**Задание 4.2.** Найдите матрицу, обратную матрице

а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -7 & 15 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ;    б)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ ;

в)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 7 & 13 \\ 3 & -10 & 7 \end{pmatrix}$ ;    г)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Задание 4.3.** Найдите матрицу, обратную матрице

а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 25 & 13 \end{pmatrix}$ ,    б)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 15 & 7 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ .



**Задание 4.4.** При каких значениях  $k$  матрица  $A$  имеет обратную, если

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ k & 1 & -4 \\ 3 & k & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} k & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

## §5. Матричные уравнения.

Пусть  $A$  — невырожденная квадратная матрица.

Поставим задачу: найти такие матрицы  $X$  и  $Y$ , чтобы были справедливы уравнения  $A \cdot X = B$  и  $Y \cdot A = B$  (в общем случае  $X \neq Y$ ).

Так как  $A$  — невырожденная матрица, то для нее существует обратная матрица  $A^{-1}$ . Умножим обе части уравнения  $AX = B$  на матрицу  $A^{-1}$  слева. Получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \text{или} \quad X = A^{-1}B.$$

Аналогично можно получить, что  $Y = BA^{-1}$ .

**Пример 5.1.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ . Решите уравнения  $AX = B$  и  $YA = B$ .

**Решение .** Матрица  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , обратная матрице  $A$  была найдена в примере 4.1.

Найдем матрицы:

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \cdot 7 + 7 \cdot (-3) & 5 \cdot (-2) + 7 \cdot 9 \\ 4 \cdot 7 + 6 \cdot (-3) & 4 \cdot (-2) + 6 \cdot 9 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 14 & 53 \\ 10 & 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 26,5 \\ 5 & 23 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = BA^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \cdot 5 + (-3) \cdot 4 & 7 \cdot 7 + (-3) \cdot 6 \\ (-3) \cdot 5 + 9 \cdot 4 & (-3) \cdot 7 + 9 \cdot 6 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 27 & 37 \\ 21 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,5 & 18,5 \\ 10,5 & 16,5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Этот пример еще раз подтверждает, что умножение матриц не коммутативно.

## Задания для самостоятельного решения

**Задание 5.1.** Решите уравнения  $AX = B$  и  $YA = B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Задание 5.2.** Решите уравнения  $AX = B$  и  $YA = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -10 & 7 \\ 3 & -10 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Задание 5.3.** Решите уравнения

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -7 & 15 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Задание 5.4.** Решите уравнения

$$\text{а) } X \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } X \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -7 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } X \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 3 & -10 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Задание 5.5.** Решите уравнения

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 37 \\ -3 & -38 \end{pmatrix}.$$

**Задание 5.6.** Решите систему матричных уравнений

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

## §6. Системы линейных уравнений.

В школе вы изучали системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Напомню один из методов решения этой системы.

Умножим первое уравнение на  $b_2$ , а второе – на  $-b_1$ , а затем сложим эти уравнения

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1, \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = -b_1c_2. \end{cases}$$

Получим  $(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$ .

Заметим, что  $a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ,  $c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ . Обозначим эти определители через  $\Delta$  и  $\Delta_x$  соответственно.

Равенство для определения  $x$  принимает вид

$$\Delta \cdot x = \Delta_x.$$

Если  $\Delta \neq 0$ , то

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}.$$

Аналогично можно получить, что

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

где  $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ .

Так как уравнение  $ax + by = c$  задает на плоскости прямую, то система двух уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение, если прямые, задающие уравнения, пересекаются; не имеет решений, если прямые параллельны; имеет бесконечно много решений, если прямые совпадают.

Аналитически эти условия можно записать следующим образом:

система имеет единственное решение, если  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ,

система не имеет решений, если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ,

система имеет бесконечно много решений, если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ .

Рассмотрим задачу, при решении которой применяются системы линейных уравнений. Классическая транспортная задача — одна из задач линейного программирования о поиске оптимального распределения однородных объектов. В общем случае под названием транспортная задача, определяется широкий круг задач с единой математической моделью. Для простоты понимания она рассматривается как задача об оптимальном плане перевозок грузов из пунктов отправления в пункты потребления с минимальными затратами на перевозки. Задача была впервые формализована французским математиком Гаспаром Монжем<sup>12</sup>. Существенное продвижение в решении транспортной задачи было сделано советским математиком и экономистом Леонидом Канторовичем<sup>13</sup>. Поэтому иногда эта проблема называется *транспортной задачей Монжа–Канторовича*.

Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из  $m$  пунктов отправления  $A_1, A_2, \dots, A_m$  в  $n$  пунктов назначения  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки. Рассмотрим транспортную задачу, в качестве критерия оптимальности которой взята минимальная стоимость перевозок всего груза. Обозначим через  $c_{ij}$  — тарифы перевозки единицы груза из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения, через  $a_i$  — запасы груза в  $i$ -м пункте отправления, через  $b_j$  — потребности в грузе в  $j$ -м пункте назначения, а через  $x_{ij}$  — количество единиц груза, перевозимого из  $i$ -го

<sup>12</sup>Гаспар Монж, граф де Пелюз (Gaspard Monge, comte de Peluse) (1746-1818) — французский математик, геометр, государственный деятель. Монж разработал основы начертательной геометрии и вариационного исчисления. Он определил, что вода представляет соединение водорода и кислорода.

<sup>13</sup>Леонид Витальевич Канторович (1912-1986) — советский математик и экономист, один из создателей линейного программирования, лауреат Нобелевской премии по экономике "за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов". Развил общую теорию приближенных методов, построил эффективные методы решения операторных уравнений, первым применил функциональный анализ в вычислительной математике, развил идею оптимальности в экономике. Интересный факт: После того, как Л. В. Канторовичем был предложен оптимальный метод распила фанерного листа, этот метод попытались применить к разрезанию стальных листов. После внедрения методов оптимизации на производстве одной из фабрик инженерам удалось улучшить показатели, что привело, однако, к негативным последствиям: а) система социалистического планирования требовала, чтобы в следующем году план был перевыполнен, что было принципиально невозможно при имеющихся ресурсах (поскольку найденное решение было абсолютным максимумом); б) фабрика не выполнила план по металлолому, львиная доля которого складывалась из обрезков стальных листов. Руководство фабрики получило выговор от партии и больше с математиками не связывалось.

пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения. Тогда математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции  $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$  при условиях  $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$  (каждый потребитель получает нужное количество продукта),  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$  (каждый поставщик отгружает весь произведенный продукт) и  $x_{ij} \geq 0$  (условие неотрицательности: поставка от какого-то пункта производства тому или иному пункту потребления может быть равна нулю, но отрицательной, следовать в обратном направлении, быть не может) ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ).

В настоящее время разработано много различных алгоритмов решения транспортной задачи: распределительный метод, метод потенциалов, дельта-метод, метод дифференциальных рент, способ двойного предпочтения, различные сетевые методы. По ним составлены десятки программ. Во многих снабженческих, транспортных и других организациях с их помощью рассчитываются маршруты доставки материалов на строительные площадки, планы длительного прикрепления поставщиков металлопроката к потребителям, планы перевозок топлива. Задачи эти часто усложняются разного рода дополнительными условиями: например, в них включается расчет не только себестоимости перевозок, но и себестоимости производства продукции (производственно-транспортная задача), оптимизируется совместно доставка взаимозаменяемых видов продукции, оптимизируется доставка грузов с промежуточными базами (складами). Кроме того, следует учитывать, что экономико-математическая модель транспортной задачи позволяет описывать множество ситуаций, весьма далеких от проблемы перевозок, в частности, находить оптимальное размещение заказов на производство изделий с разной себестоимостью.

В курсе линейной алгебры мы будем изучать системы линейных урав-

нений с произвольным числом уравнений и неизвестных.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (6.1)$$

Числа  $a_{ij}$  – коэффициенты системы, они образуют матрицу  $A = (a_{ij})$ , называемую **матрицей системы**.

Дополняя матрицу  $A$  столбцом свободных членов, получим **расширенную матрицу системы**

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right). \quad (6.2)$$

Свободные члены отделены от основной матрицы чертой.

Обозначим  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  – матрицу-столбец неизвестных,  $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$  – матрицу-столбец свободных членов. Используя операцию умножения матриц, систему (6.1) можно записать в матричном виде

$$AX = B. \quad (6.3)$$

**Решением** системы (6.1) называется упорядоченный набор чисел  $(x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, \dots, x_n^{\circ})$ , при подстановке которого в систему уравнений вместо неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  каждое уравнение превращается в верное числовое равенство. Система (6.1) называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система (6.1) называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Система линейных уравнений называется **однородной**, если все свободные члены равны нулю ( $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ ), и **неоднородной**, если хотя один из свободных членов отличен от нуля.

При рассмотрении систем линейных уравнений возникают вопросы:

1) имеет ли система хотя бы одно решение (совместна ли система);

- 2) если система совместна, то сколько решений она имеет (система определенная или нет);
- 3) как найти все решения системы.

В курсе линейной алгебры мы рассмотрим три метода решения систем линейных уравнений: матричный метод, метод Крамера и метод Гаусса.

**Пример 6.1.** Решите матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = -4, \\ 3x - 7y + 15z = -16, \\ 4x + y - 2z = 11. \end{cases}$$

**Решение .** Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -7 & 15 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Систему можно записать в матричном виде  $AX = B$  и решить ее через обратную матрицу. Так как матрица  $A$  невырожденная  $|A| = -9 \neq 0$ , то для нее существует

обратная матрица  $A^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 66 & -18 & -3 \\ 31 & -9 & -1 \end{pmatrix}.$

Тогда  $X = A^{-1}B = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 66 & -18 & -3 \\ 31 & -9 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$

то есть  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1.$

### Задания для самостоятельного решения

**Задание 6.1.** Решите матричным способом системы уравнений

а)  $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 28, \\ 3x - y + 2z = 13, \\ x + 2y - z = -7; \end{cases}$       б)  $\begin{cases} 2x - y - z = 3, \\ 3x + y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + z = -4; \end{cases}$

в)  $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 4x + 4y + \quad = 7, \\ 7x - 5y + 15z = 1; \end{cases}$       г)  $\begin{cases} x + y - z = 2, \\ 4x + 3y - 2z = 6, \\ -2x + 5y - 11z = 2; \end{cases}$

д)  $\begin{cases} x - 2y + 4z = 1, \\ 3x - 7y + 13z = -1, \\ 4x + y + 5z = 3. \end{cases}$

## §7. Правило Крамера.

Рассмотрим систему  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (7.1)$$

Запишем соответствующее матричное уравнение  $AX = B$ , где  $A = (a_{ij})$  — матрица системы,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  — матрица-столбец неизвестных,  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$  — матрица-столбец свободных членов.

Если матрица  $A$  — невырожденная ( $\Delta = |A| \neq 0$ ), то для нее существует обратная матрица  $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} (A_{ij})^T$ .

Решим систему (7.1) матричным способом.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} (b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1}) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Определитель  $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$  получается из определителя  $\Delta$

заменой первого столбца столбцом свободных членов. Его называют **дополнительным определителем неизвестной  $x_1$** .



Аналогично получаем, что  $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$ , где определитель

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_1 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

получается из определителя  $\Delta$  заменой  $k$ -го столбца столбцом свободных членов.

Формулы

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \quad (7.2)$$

называют **формулами Крамера**.

Сформулируем доказанную теорему

**Теорема 7.1. (Крамера)**<sup>14</sup> *Если определитель системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера*

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad (k = \overline{1, n})$$

где  $\Delta$  – определитель системы,  $\Delta_k$  – дополнительный определитель неизвестной  $x_k$ .

Из формул (7.2) вытекает следствие.

**Следствие 7.2.** *Если определитель системы  $\Delta$  равен нулю, а хотя бы один из дополнительных определителей неизвестных отличен от нуля, то система решений не имеет.*

**Пример 7.1.** Решите систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = -4, \\ 3x - 7y + 15z = -16, \\ 4x + y - 2z = 11. \end{cases}$$

<sup>14</sup>Габриэль Крамер (Gabriel Cramer) (1704-1752) — швейцарский математик, один из создателей линейной алгебры. Крамер дал алгоритм вычисления определителя, провёл классификацию алгебраических кривых до пятого порядка включительно. Работы Крамера охватывают самые разные темы: геометрия, история математики, философия, приложения теории вероятностей. Самая известная из работ Крамера — трактат "Введение в анализ алгебраических кривых" ("Introduction a l'analyse des lignes courbes algebraique").

**Решение .** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -7 & 15 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  — основная матрица системы. Вычислим

определитель этой матрицы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -7 & 15 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & -18 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -18 \end{vmatrix} = -9.$$

Так как  $\Delta \neq 0$ , то систему можно решать методом Крамера.

Вычислим дополнительные определители для неизвестных системы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -16 & -7 & 11 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 3 & -16 & 15 \\ 4 & 11 & -2 \end{vmatrix} = -9;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 3 & -7 & -16 \\ 4 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 9.$$

По формулам Крамера  $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-18}{-9} = 2$ ,  $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-9}{-9} = 1$ ,  $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{9}{-9} = -1$ .

### Задания для самостоятельного решения

**Задание 7.1.** Решите методом Крамера системы уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - 4y + 3z = 15, \\ 3x - 4y + 5z = 25, \\ 4x + 3y + z = 8. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x - 2y + 4z = -4, \\ 3x - 7y + 15z = -16, \\ 4x + y - 2z = 11; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x - 2y + 4z = 1, \\ 3x - 7y + 13z = -1, \\ 4x + y + 5z = 3. \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -3, \\ 4x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 18. \end{cases}$$

**Задание 7.2.** Исследуйте при каких значениях  $k$  система уравнений будет определенной, неопределенной, несовместной. Решите систему уравнений, когда она является определенной.

$$\text{а) } \begin{cases} (2-k)x + 6y = 1, \\ 6x + (2-k)y = 1 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} kx + (k+6)y = 4, \\ (k-1)x + 2ky = 2. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} (2k-3)x - ky = 3k-2, \\ 5x - (2k+3)y = 5. \end{cases}$$

## §8. Метод Гаусса.

Наиболее удобным для отыскания решений системы линейных уравнений с числовыми коэффициентами на практике является метод последовательного исключения неизвестных или метод Гаусса.

Дана система линейных уравнений (6.1). Рассмотрим преобразования системы, называемые *элементарными преобразованиями*:

- 1) Умножение (деление) обеих частей уравнения на некоторое отличное от нуля число;
- 2) Прибавление к обеим частям  $j$ -ого уравнения соответствующих частей  $i$ -того уравнения, умноженных на некоторое отличное от нуля число;
- 3) Перестановка местами двух уравнений.

Полученная в результате такого преобразования система будет равносильна системе (6.1), то есть они либо обе несовместны, либо обе совместны и имеют одни и те же решения. Может получиться так, что после выполнения нескольких таких преобразований получим уравнение, все коэффициенты которого равны 0. Отбрасывая это уравнение, также получим систему, равносильную исходной.

Рассмотрим метод Гаусса. Идея этого метода состоит в том, чтобы с помощью элементарных преобразований привести систему уравнений к треугольному (ступенчатому) виду. Уравнение, которое будем прибавлять к другим уравнениям назовем *разрешающим уравнением*, а коэффициент при переменной, которую будем исключать из всех уравнений, кроме разрешающего назовем *разрешающим элементом*.

Дана система (6.1). Пусть для определенности  $a_{11} \neq 0$ . Возьмем  $a_{11}$  за разрешающий элемент. Исключим неизвестное  $x_1$  из всех уравнений кроме первого. Для этого будем первое уравнение умножать последовательно на  $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$  и прибавлять к остальным уравнениям системы. Получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases}$$

равносильную исходной. Будем считать, что  $a'_{22} \neq 0$ , тогда неизвестное  $x_2$  можно исключить из всех уравнений системы кроме второго, и так далее, пока не получим систему треугольного или ступенчатого вида, из которой легко находить неизвестные.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a''_{mk}x_k + \dots + a''_{mn}x_n = b''_m. \end{cases}$$

Решать систему методом Гаусса удобно, преобразовывая расширенную матрицу системы.

**Пример 8.1.** Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}.$$

**Решение .** Запишем расширенную матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & | & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & | & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 5 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -0,5 & 0 & | & 0,5 \\ 0 & 0 & 1,5 & 1 & | & 0,5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Итак, } \begin{cases} x_1 = -x_2 + 0,5x_3 + 0,5, \\ x_4 = -1,5x_3 + 0,5. \end{cases}$$

Неизвестные  $x_2$  и  $x_3$  называются *свободными*. Придавая им различные значения, будем получать различные частные решения системы. Например, если положить  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 1$ , то получим  $x_1 = 2$ ,  $x_4 = -1$ , и  $(2; -1; 1; -1)$  — частное решение системы.

### Задания для самостоятельного решения

**Задание 8.1.** Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(x_2 + x_3 + 25000), \\ x_2 = \frac{1}{3}(x_1 + x_3 + 31000), \\ x_3 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_4 + 21000), \\ x_4 = \frac{1}{2}(x_3 + 24000), \end{cases}$$

полученную в примере 6.1 лекции.

## §9. Арифметические векторы и действия над ними.

В школе на уроках геометрии и физики вектор определяли как направленный отрезок, вводили графически сумму и разность векторов, произведение вектора на число. Если ввести в пространстве декартову систему координат, то каждому вектору будет соответствовать упорядоченная тройка чисел  $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ . Обобщая известные из школы факты, можно ввести следующее понятие.

**Определение 9.1.** *Арифметическим  $n$ -мерным вектором называется упорядоченная последовательность  $n$  действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Обозначается вектор*

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (9.1)$$

Числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  называют **координатами вектора**.

Векторы  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  называют **равными**, если их соответствующие координаты равны, то есть  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ .

**Суммой** векторов  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  называется вектор

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n). \quad (9.2)$$

**Произведением** вектора  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  на число  $k$  называется вектор

$$k\bar{a} = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n). \quad (9.3)$$

Вектор  $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$ , все координаты которого равны 0, называется **нулевым**.

Вектор  $-\bar{a} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$  называется **противоположным** вектору  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Два вектора  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  **коллинеарны**, если  $\bar{b} = k\bar{a}$ .

Пример коллинеарных векторов дает таблица обменных курсов валют<sup>15</sup>.

	1 рубль	1 доллар	1 евро
1 рубль	1	0,016	0,014
1 доллар	62,45	1	0,786
1 евро	71,27	1,141	1

Любые две строки или любые два столбца этой матрицы представляют собой коллинеарные вектора.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяют условиям:

1.  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ ;
2.  $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ ;
3.  $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ ;
4.  $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$ ;
5.  $k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$ ;
6.  $(k + l)\bar{a} = k\bar{a} + l\bar{a}$ ;
7.  $(kl)\bar{a} = k(l\bar{a})$ ;
8.  $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$ .

Множество  $n$ -мерных арифметических векторов, в котором введены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющие условиям 1–8, называется **арифметическим  $n$ -мерным векторным пространством** и обозначается  $\mathbb{R}_n$ .

**Пример 9.1.** Пусть вектор  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  — вектор цен на  $n$  видов продукции, вектор  $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  — вектор объема выпуска этой продукции за месяц. Тогда месячный объем товарной продукции (в рублях) равен числу  $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$ .

**Пример 9.2.** Некоторая фирма для строительства офиса взяла кредит в трех банках. Каждый из банков предоставил 150 млн., 130 млн. и 125 млн. рублей под годовую процентную ставку 25%, 30% и 32% соответственно. Получили два вектора: вектор кредитов  $\bar{c} = (150, 130, 125)$  и вектор процентных ставок  $\bar{p} = (25, 30, 32)$ . Тогда в конце года фирме по

<sup>15</sup>по курсу мая 2014 года

кредитам придется уплатить  $150 \cdot 1,25 + 130 \cdot 1,30 + 125 \cdot 1,32 = 521,5$  млн. рублей.

Эти примеры показывают, что полезно ввести еще одно действие над векторами.

**Скалярным произведением** двух векторов  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  называется число, равное сумме произведений их одноименных координат.

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n. \quad (9.4)$$

Свойства скалярного произведения:

- 1)  $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$ ;    2)  $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c})$ ;    3)  $(\alpha \bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$ ;
- 4)  $(\bar{a}, \bar{a}) > 0$  при  $\bar{a} \neq 0$  и  $(\bar{a}, \bar{a}) = 0$  только тогда, когда  $\bar{a} = 0$ .

Два ненулевых вектора  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю, то есть  $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ .

Рассмотрим экономический пример на ортогональность векторов.

Одним из способов определения индекса цен и уровня инфляции является расчет стоимости потребительской корзины, состоящей из 300 видов товаров и услуг, получаемых потребителями. В таблице приведен пример, как можно вычислять индекс цен. Расчет индекса цен проводится по формуле: "Расходы в текущем месяце" делим на "Расходы в предыдущем месяце".

Вид товара	количество	Цена ед. товара в текущем месяце	Расходы в текущем месяце	Цена ед. товара в предыдущем месяце	Расходы в предыдущем месяце
Яйца	15	4	60	3,9	58,5
Молоко	10	34,5	345	33	330
Хлеб	17	28	476	27,6	469,2
Картофель	24	25,5	612	25	600
Сахар	2	41	82	38	76
Общие расходы	—	—	1575	—	1533,7

Таким образом, в нашем случае, индекс инфляции составляет  $\frac{1575}{1533,7} \cdot 100\% - 100\% \approx 2,7\%$ .

Обозначим через  $\bar{q} = (15; 10; 17; 24; 2)$  — вектор количества потребляемых товаров,  $\bar{c} = (4; 34,5; 28; 25,5; 41)$  — вектор цен в текущем месяце,  $\bar{c}_{-1} = (3,9; 33; 27,6; 25; 38)$  — вектор цен в предыдущем месяце.

Индекс цен вычисляется по формуле

$$p = \frac{(\bar{c}, \bar{q})}{(\bar{c}_{-1}, \bar{q})} \cdot 100\%.$$

Откуда  $(100\bar{c}, \bar{q}) = p \cdot (\bar{c}_{-1}, \bar{q})$  или  $(100\bar{c} - p \cdot \bar{c}_{-1}, \bar{q}) = 0$ .

Таким образом, индекс цен можно определить как численный коэффициент  $p$ , который делает вектор  $\bar{q}$  ортогональным вектору  $100\bar{c} - p \cdot \bar{c}_{-1}$ .

Индекс инфляции рассчитывается по формуле

$$i = p - 100 = \frac{(\bar{c}, \bar{q})}{(\bar{c}_{-1}, \bar{q})} \cdot 100 - 100 = \frac{(\bar{c} - \bar{c}_{-1}, \bar{q})}{(\bar{c}_{-1}, \bar{q})} \cdot 100.$$

## §10. Линейная зависимость векторов.

Операции сложения и умножения векторов лежат в основе и находят многочисленные приложения в математике и физике.

Вектор  $\bar{b}$  называется **пропорциональным** вектору  $\bar{a}$ , если существует число  $k \neq 0$  такое, что  $\bar{b} = k\bar{a}$ . Обобщением понятия пропорциональности векторов является понятие их линейной комбинации.

**Определение 10.1.** Пусть дана система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  из пространства  $\mathbb{R}_n$ . Вектор  $\bar{b}$  вида

$$\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_m \bar{a}_m, \quad (10.1)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  — действительные числа называется **линейной комбинацией векторов**  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ .

Говорят также, что вектор  $\bar{b}$  **линейно выражается** через вектора  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ .

Если векторы заданы своими координатами, то используя определение операций над векторами, для любой координаты вектора  $\bar{b}$  получим  $b_i = \lambda_1 \bar{a}_{1i} + \lambda_2 \bar{a}_{2i} + \dots + \lambda_m \bar{a}_{mi}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).



**Определение 10.2.** Система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  ( $m \geq 2$ ) из пространства  $\mathbb{R}_n$  называется **линейно зависимой**, если существуют такие числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , не равные нулю одновременно, что справедливо равенство

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_m \bar{a}_m = \bar{0} \quad (10.2)$$

(линейная комбинация векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  с коэффициентами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  равна нулю). Если равенство (10.2) выполняется только тогда, когда все коэффициенты равны нулю ( $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ ), то система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  называется **линейно независимой**.

Докажем несколько теорем о свойствах линейно зависимых векторов.

**Теорема 10.1.** Система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов этой системы является линейной комбинацией остальных.

*Доказательство.* Необходимость. Пусть система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  линейно зависима. По определению существуют такие числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , не равные нулю одновременно, что  $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_m \bar{a}_m = \bar{0}$ . Пусть для определенности  $\lambda_1 \neq 0$ . Тогда  $\bar{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \bar{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \bar{a}_3 - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1} \bar{a}_m$ . Вектор  $\bar{a}_1$  является линейной комбинацией остальных векторов системы. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для определенности вектор  $\bar{a}_1$  является линейной комбинацией остальных векторов системы, то есть выполнено равенство  $\bar{a}_1 = \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_m \bar{a}_m$  или  $\bar{a}_1 - \lambda_2 \bar{a}_2 - \dots - \lambda_m \bar{a}_m = \bar{0}$ . В линейной комбинации  $\bar{a}_1 - \lambda_2 \bar{a}_2 - \dots - \lambda_m \bar{a}_m = \bar{0}$  не все коэффициенты равны нулю ( $\lambda_1 = 1$ ), значит, система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  линейно зависима.  $\square$

**Теорема 10.2.** Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

*Доказательство.* Дана система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m, \bar{0}$ , содержащая нулевой вектор. Коэффициенты линейной комбинации можно выбрать так:  $0, 0, \dots, 0, 1$ . Линейная комбинация векторов равна нулю  $0\bar{a}_1 + 0\bar{a}_2 + \dots + 0\bar{a}_m + 1\bar{0} = \bar{0}$ , но не все коэффициенты нулевые.  $\square$

**Теорема 10.3.** Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

*Доказательство.* Дана система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ , и ее подсистема  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$  ( $k < m$ ). Так как система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$  линейно зависима, то существуют такие числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , не все равные нулю, что справедливо равенство  $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \dots + \lambda_k\bar{a}_k = \bar{0}$ . Если взять коэффициенты линейной комбинации  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0$ , то получим верное равенство  $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \dots + \lambda_k\bar{a}_k + 0\bar{a}_{k+1} + \dots + 0\bar{a}_m = \bar{0}$ , в которой не все коэффициенты равны 0.  $\square$

**Теорема 10.4.** *Если система векторов линейно независима, то любая ее подсистема также линейно независима.*

*Доказательство.* Доказывать будем методом от противного. Предположим, что в линейно независимой системе векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  существует линейно зависима подсистема. По теореме 10.3 тогда и вся система векторов будет линейно зависима. Получили противоречие. Значит, наше предположение неверно, и система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  линейно независима.  $\square$

**Теорема 10.5.** *Система векторов, содержащая два коллинеарных вектора, линейно зависима. (Докажите эту теорему самостоятельно.)*

Примером линейно независимых векторов являются два неколлинеарных вектора на плоскости. В самом деле, если векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  линейно зависимы и в равенстве  $\lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} = \bar{0}$ , например,  $\lambda_1 \neq 0$ , то  $\bar{b} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\bar{a}$  и, значит, векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  коллинеарны. Также линейно независимыми являются три некопланарных вектора в пространстве  $\mathbb{R}_3$  (векторы называются **компланарными**, если они параллельны некоторой плоскости).

Данное выше определение линейно зависимой системы векторов предполагает, что эта система содержит конечное число векторов. Однако часто приходится рассматривать и бесконечные системы. Мы условимся бесконечную систему считать **линейно зависимой**, если линейно зависимой будет какая-нибудь ее подсистема, и **линейно независимой**, если любая ее подсистема является линейно независимой. С бесконечными линейно независимыми системами мы встретимся в курсе анализа.

Возникает вопрос: сколько линейно независимых векторов может содержать система  $n$ -мерных векторов. Для ответа на него рассмотрим систему векторов

$$\bar{e}_1 = (1; 0; \dots; 0), \bar{e}_2 = (0; 1; \dots; 0), \dots, \bar{e}_n = (0; 0; \dots; 1) \quad (10.3)$$

Эта система векторов линейно независима. Действительно, линейная комбинация векторов (10.3) обращается в 0 только при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . Значит, существует система, состоящая из  $n$  линейно независимых  $n$ -мерных векторов.

А может ли существовать система  $n$ -мерных линейно независимых векторов, число векторов в которой больше  $n$ ? Ответ на поставленный вопрос дает

**Теорема 10.6.** *Всякие  $k$   $n$ -мерных векторов при  $k > n$  линейно зависимы.*

### Задания для самостоятельного решения

**Задание 10.1.** Найдите линейную комбинацию векторов  $3\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + 5\bar{a}_3$ , где  $\bar{a}_1 = (2; -3; -5; 7)$ ,  $\bar{a}_2 = (-3; 4; 6; 1)$ ,  $\bar{a}_3 = (1; -4; -7; 2)$ .

**Задание 10.2.** Решите уравнение  $2\bar{a}_1 - 3\bar{a}_2 - \bar{a}_3 - 7\bar{x} = \bar{a}_4$ , где  $\bar{a}_1 = (1; 2; -3; 4)$ ,  $\bar{a}_2 = (1; 1; 1; -5)$ ,  $\bar{a}_3 = (2; -5; -1; 3)$ ,  $\bar{a}_4 = (2; 1; -2; -1)$ .

**Задание 10.3.** Будет ли линейно независимой система векторов, если

а)  $\bar{a}_1 = (1; 2; -3)$ ,  $\bar{a}_2 = (-1; -1; -1)$ ,  $\bar{a}_3 = (2; 5; -10)$ ;

б)  $\bar{a}_1 = (3; -1; 4)$ ,  $\bar{a}_2 = (1; 2; -1)$ ,  $\bar{a}_3 = (7; 1; 5)$ .

**Задание 10.4.** Докажите, что вектора  $\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\bar{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ,  $\bar{c} = (c_1; c_2; c_3)$  линейно независимы, если матрица составленная из координат этих векторов невырожденная.

**Задание 10.5.** Даны четыре вектора  $\bar{a}_1 = (1; -2; 2)$ ,  $\bar{a}_2 = (-1; 3; -2)$ ,  $\bar{a}_3 = (2; -4; 3)$ ,  $\bar{a}_4 = (5; 1; -9)$ . Покажите, что система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$  линейно независима, а система  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$  линейно зависима. Выразите вектор  $\bar{a}_4$  через вектора  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ .

**Задание 10.6.** Даны четыре вектора  $\bar{a}_1 = (2; 1; -3)$ ,  $\bar{a}_2 = (3; 2; -5)$ ,  $\bar{a}_3 = (1; -1; 1)$ ,  $\bar{a}_4 = (6; 2; -7)$ . Покажите, что система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$  линейно независима, а система  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$  линейно зависима. Выразите вектор  $\bar{a}_4$  через вектора  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ .

**Задание 10.7.** Даны пять векторов  $\bar{a}_1 = (1; 2; -1; -2)$ ,  $\bar{a}_2 = (2; 3; 0; -1)$ ,  $\bar{a}_3 = (1; 2; 1; 4)$ ,  $\bar{a}_4 = (1; 3; -1; 0)$ ,  $\bar{a}_5 = (7; 14; -1; 2)$ . Покажите, что система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$  линейно независима, а система  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5$  линейно зависима. Выразите вектор  $\bar{a}_5$  через вектора  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ .

**Задание 10.8.** Пусть  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  — линейно независимая система векторов. Будут ли линейно зависимыми системы

а)  $\bar{x}, \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$ ;   б)  $\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{z}, \bar{y} + \bar{z}$ ;   в)  $\bar{x} - \bar{y}, \bar{y} - \bar{z}, \bar{z} - \bar{x}$  ?

## §11. Линейные пространства. Базис линейного пространства. Подпространства.

Для построения общей теории систем линейных уравнений недостаточно того аппарата, который мы до этого применяли. Помимо матриц и определителей нам необходимо понятие линейного пространства.

**Определение 11.1.** Множество  $\mathbb{V}$  элементов произвольной природы называется **линейным пространством**, если

а) задана внутренняя операция — сложение элементов пространства (правило, по которому  $\forall x, y \in \mathbb{V}$  ставится в соответствие элемент  $z \in \mathbb{V}$ ), то есть  $z = x + y$ ;

б) задана внешняя операция — умножение элемента на число (правило, по которому  $\forall x \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ) ставится в соответствие элемент  $w \in \mathbb{V}$ ), то есть  $w = \alpha \cdot x$ .

Эти операции удовлетворяют следующим условиям:

I. 1)  $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{V}$ ;

2)  $(x + y) + z = x + y + z, \forall x, y, z \in \mathbb{V}$ ;

3)  $\exists 0 \in \mathbb{V}$  (нулевой элемент), такой что  $0 + x = x, \forall x \in \mathbb{V}$ ;

4)  $\forall x \in \mathbb{V} \exists x' \in \mathbb{V}$  (противоположный элемент), такой что  $x + x' = 0$ ;

II. 5)  $1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{V}$ ;

6)  $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x, \forall x \in \mathbb{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;

7)  $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \forall x \in \mathbb{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;

8)  $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \forall x, y \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

Исходя из определения линейного пространства можно доказать следующие утверждения:

**Предложение 11.1.** 1. В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент;

2.  $\forall x \in \mathbb{V}$  существует единственный противоположный элемент, который равен  $(-1) \cdot x = -x$ ;

3. Произведение  $0 \cdot x = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{V}$ ;

4. Произведение  $\alpha \cdot 0 = 0$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ;

5. Если произведение  $\alpha \cdot x = 0$ , то либо  $\alpha = 0$ , либо  $x = 0$ .

*Доказательство.* Доказывать утверждения 1 и 2 будем от противного.

1. Предположим, что в линейном пространстве существуют два нулевых элемента  $0_1$  и  $0_2$ . Тогда с одной стороны  $0_1 + 0_2 = 0_1$ , с другой стороны  $0_1 + 0_2 = 0_2$ . Откуда следует равенство  $0_1 = 0_2$ .

2. Предположим, что в линейном пространстве для любого элемента  $x$  существуют два противоположных элемента  $x'$  и  $x''$ . Имеем  $x' + x + x'' = (x' + x) + x'' = 0 + x'' = x''$  или  $x' + x + x'' = x' + (x + x'') = x' + 0 = x'$ . Откуда  $x' = x''$ .

3. Пусть  $0 \cdot x = 0$ . Тогда  $0 \cdot x = (\alpha - \alpha)x = \alpha x - \alpha x = 0$ .

4. Пусть  $\alpha \cdot 0 = 0$ . Тогда  $\alpha \cdot (x - x) = \alpha x - \alpha x = 0$ .

5. Пусть  $\alpha \cdot x = 0$ , но  $\alpha \neq 0$ .

Тогда  $x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right) x = \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0$ . □

### Примеры линейных пространств.

1. Множество матриц размера  $m \times n$  с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число.

2. Множество многочленов степени меньше или равной  $n$  с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на число.

3. Множество  $\mathbb{R}_n$   $n$ -мерных векторов с введенными в предыдущем параграфе операциями сложения векторов и умножения вектора на число.

4. Множество  $C[a; b]$  функций, непрерывных на отрезке  $[a; b]$ . Введем на этом множестве операции сложения функций и умножения функции на число по следующим правилам: сумма функций  $f + g$  находится по правилу  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , произведение функции  $f$  на число  $\alpha$  находится по правилу  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ .

**Определение 11.2.** Линейное векторное пространство  $\mathbb{V}$  называется

*$n$ -мерным, если в нем существует  $n$  линейно независимых векторов, а любые  $n + 1$  векторов уже являются линейно зависимыми.*

Другими словами, **размерность пространства** — это максимальное число содержащихся в этом пространстве линейно независимых векторов. Обозначают  $n$ -мерное пространство  $\mathbb{R}_n$ .

**Определение 11.3.** *Максимальная совокупность линейно независимых векторов называется **базисом** линейного векторного пространства.*

**Теорема 11.2.** *Все базисы конечномерного линейного векторного пространства состоят из одного и того же числа векторов.*

**Теорема 11.3.** *Каждый вектор  $\bar{x}$  линейного векторного пространства  $\mathbb{R}_n$  можно представить и притом единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса.*

$$\bar{x} = x_1\bar{f}_1 + x_2\bar{f}_2 + \dots + x_n\bar{f}_n. \quad (11.1)$$

*Доказательство.* Пусть векторы  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$  образуют базис пространства  $\mathbb{R}_n$ . Так как любые  $n + 1$  векторов в  $\mathbb{R}_n$  линейно зависимы, то система  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n, \bar{x}$  будет линейно зависимой. Тогда существуют числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda$ , не равные одновременно нулю, такие что  $\lambda_1\bar{f}_1 + \lambda_2\bar{f}_2 + \dots + \lambda_n\bar{f}_n + \lambda\bar{x} = 0$ . При этом  $\lambda \neq 0$ , ибо в противном случае система  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$  будет линейно зависима. Следовательно,  $\bar{x} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\bar{f}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda}\bar{f}_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda}\bar{f}_n$ . Обозначив  $x_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda}$ , получим

$$\bar{x} = x_1\bar{f}_1 + x_2\bar{f}_2 + \dots + x_n\bar{f}_n.$$

Это выражение  $\bar{x}$  через  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$  единственное, так как если существует другое выражение вектора  $\bar{x}$  через векторы базиса, например,  $\bar{x} = y_1\bar{f}_1 + y_2\bar{f}_2 + \dots + y_n\bar{f}_n$ , то вычитая из этого равенства равенство (11.1), получим  $(y_1 - x_1)\bar{f}_1 + (y_2 - x_2)\bar{f}_2 + \dots + (y_n - x_n)\bar{f}_n = 0$ . В силу линейной независимости векторов  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$ , получим  $y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = \dots = y_n - x_n = 0$  или  $y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n$ .  $\square$

Равенство (11.1) называется **разложением вектора  $\bar{x}$  по базису  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$** . Коэффициенты в разложении вектора по базису называются **координатами вектора** в данном базисе.

В  $n$ -мерном векторном пространстве  $\mathbb{R}_n$  базис состоит из  $n$  векторов. Система векторов (10.3) содержит  $n$  векторов и линейно независима. Значит, эти векторы образуют базис. Базис, состоящий из векторов

$\bar{e}_1 = (1; 0; \dots; 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (0; 1; \dots; 0)$ ,  $\dots$ ,  $\bar{e}_n = (0; 0; \dots; 1)$ , называют **каноническим**.

**Теорема 11.4.** При сложении векторов их координаты (относительно одного базиса) складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

В произвольном  $n$ -мерном пространстве понятие линейной комбинации элементов, их линейной зависимости, базиса пространства вводятся аналогично. После выбора базиса задание любого элемента сводится к заданию упорядоченного набора из  $n$  чисел — координат элемента в данном базисе. Все линейные пространства одной конечной размерности  $n$  устроены одинаково (говорят они **изоморфны**), поэтому обозначать их мы будем также  $\mathbb{R}_n$ .

**Определение 11.4.** Множество  $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}_n$  называется **подпространством**, если оно само является линейным пространством относительно введенных в  $\mathbb{R}_n$  операций, то есть

1.  $\forall x, y \in \mathbb{L}$  их сумма  $x + y \in \mathbb{L}$ ,
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  и  $\forall x \in \mathbb{L}$  произведение  $\alpha x \in \mathbb{L}$ .

Определение 11.4 эквивалентно определению

**Определение 11.5.** Множество  $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}_n$  называется подпространством, если  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $\forall x, y \in \mathbb{L}$  имеем  $\alpha x + \beta y \in \mathbb{L}$ .

Если векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k \in \mathbb{R}_n$ , то **линейной оболочкой** этой системы векторов называется множество их всевозможных линейных комбинаций

$$\mathbb{L}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k) = \{\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k\}.$$

Линейная оболочка является подпространством в  $\mathbb{R}_n$ .

Простейший способ построения подпространств состоит в следующем. Выберем систему векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k \in \mathbb{R}_n$  и рассмотрим линейную оболочку этой системы. Согласно определению 11.4 эта линейная оболочка образует в  $\mathbb{R}_n$  подпространство. Базисом подпространства будет

максимальная линейно независимая подсистема в  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k \in \mathbb{R}_n$ .

### Задания для самостоятельного решения

**Задание 11.1.** Пусть  $\mathbb{L} = \{(x_1; x_2; x_3) | x_3 = 0\}$  ( $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}_3$ ). Проверьте, что  $\mathbb{L}$  — линейное пространство.

**Задание 11.2.** Является ли множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$  относительно обычных операций сложения и умножения чисел линейным пространством?

**Задание 11.3.** Является ли множество целых чисел  $\mathbb{Z}$  относительно обычных операций сложения и умножения чисел линейным пространством?

**Задание 11.4.** Докажите, что множество матриц размера  $m \times n$  относительно обычных операций сложения матриц и умножения матрицы на число образует линейное пространство.

**Задание 11.5.** Докажите, что множество многочленов степени меньше или равной  $n$  с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на число образует линейное пространство.

**Задание 11.6.** Докажите, что множество  $C[a; b]$  функций, непрерывных на отрезке  $[a; b]$ , образует линейное пространство.

**Задание 11.7.** Докажите, что множество положительных чисел  $\mathbb{R}^+ = \{x | x > 0\}$  с операциями сложения  $x \oplus y = xy$  ( $x > 0, y > 0$ ) и умножения на число  $\alpha \odot x = x^\alpha$  образует линейное пространство.

**Задание 11.8.** Проверьте, образуют ли линейное пространство множества векторов из  $\mathbb{R}_n$ , удовлетворяющих условиям

- а)  $\{(x_1; x_2; \dots; x_n) | x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ ;
- б)  $\{(x_1; x_2; \dots; x_n) | x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}$ ;
- в)  $\{(x_1; x_2; \dots; x_n) | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ ;
- г)  $\{(x_1; x_2; \dots; x_n) | x_1 + x_n = 0\}$  ( $n \geq 3$ ).

**Задание 11.9.** Найдите базис линейного пространства квадратных матриц порядка 2. Сколько векторов содержит этот базис?



**Задание 11.10.** В базисе  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$  линейного пространства матриц  $\mathbb{V} = \left( \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} \right)$  найдите координаты элементов  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

## §12. Ранг матрицы.

Дана матрица  $A$  размера  $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы можно рассматривать как  $n$ -мерные вектора, а столбцы как  $m$ -мерные вектора.

**Минором** порядка  $k$  называется определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении выбранных  $k$  строк и  $k$  столбцов матрицы (см. §3).

**Определение 12.1.** Число  $r$  называется **рангом матрицы**, если в матрице существует минор  $M$  порядка  $r$ , отличный от 0, а все миноры порядка  $r + 1$ , если они существуют, равны 0.

Другими словами **рангом матрицы** называется порядок наибольшего отличного от 0 минора матрицы.

Из определения ранга матрицы следует, что ранг матрицы не превосходит меньшего из ее размеров, то есть  $r(A) \leq \min\{m, n\}$ .

В общем случае нахождение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения вычислений матрицу приводят к более простому виду с помощью некоторых преобразований.

**Элементарными** преобразованиями матрицы называют следующие ее преобразования:

- 1) Перестановка двух строк или двух столбцов;
- 2) Умножение всех элементов строки на любое число  $k \neq 0$ ;
- 3) Прибавление ко всем элементам строки другой строки, умноженных на одно и то же число;
- 4) Отбрасывание нулевой строки.

**Теорема 12.1.** При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

С помощью элементарных преобразований матрицу приводят к ступенчатому виду. Ранг новой матрицы вычислить намного легче, так как число миноров, отличных от 0 будет небольшим.

**Пример 12.1.** Найдите с помощью элементарных преобразований ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

**Решение .**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -14 & -16 & -29 \end{pmatrix}.$$

Определитель  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} = -14$ . Следовательно,  $r(A) = 3$ .

Для рангов матриц справедливы следующие свойства:

- 1)  $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ ;      2)  $r(A + B) \geq |r(A) - r(B)|$ ;
- 3)  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ ;
- 4)  $r(AB) = r(A)$ , если  $B$  невырожденная квадратная матрица.

Если ранг  $r(A) = r$ , то минор порядка  $r$ , отличный от 0, называется **базисным**, а входящие в него строки и столбцы **базисными**. Заметим, что о базисных строках и столбцах можно говорить только после выбора базисного минора.

Строки матрицы можно рассматривать как  $n$ -мерные вектора. Поэтому понятия **линейной комбинации** и **линейной зависимости** строк вводятся также как в §10 эти понятия вводились для векторов.

**Теорема 12.2. (теорема о базисном миноре)** *Любая строка (любой столбец) матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк (столбцов).*

*Доказательство.* Пусть  $r(A) = r$ . Не умаляя общности можно считать, что отличный от 0 минор  $M$  стоит в правом верхнем углу (при перестановке строк и столбцов по теореме 12.1 ранг не меняется). Пусть  $s$  и  $t$  — целые числа такие, что  $1 \leq s \leq m$ ,  $1 \leq t \leq n$ .

Рассмотрим определитель порядка  $r + 1$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rt} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sr} & a_{st} \end{vmatrix}$$

Он равен 0. В самом деле, при  $s < r$  в определителе две одинаковых строки, а при  $t < r$  — два одинаковых столбца. Значит,  $D = 0$ . При  $s > r$ ,  $t > r$  определитель  $D = 0$  как минор порядка  $r + 1$ .

Разложим  $D$  по последнему столбцу:

$$D = a_{1t}A_{1t} + a_{2t}A_{2t} + \dots + a_{rt}A_{rt} + a_{st}A_{st} = 0.$$

Алгебраическое дополнение  $A_{st} = M \neq 0$  и не зависит от выбора чисел  $s$  и  $t$ . Обозначим через  $\lambda_{si} = -\frac{A_{it}}{A_{st}}$  ( $i = \overline{1, r}$ ). Тогда  $a_{st} = \lambda_{1s}a_{1t} + \lambda_{2s}a_{2t} + \dots + \lambda_{rs}a_{rt}$  (для всех  $t = \overline{1, n}$ ). Таким образом, строка с номером  $s$  является линейной комбинацией базисных строк.  $\square$

Сформулируем несколько следствий из теоремы о базисном миноре.

**Следствие 12.3.** Если число строк матрицы больше ее ранга  $r$ , то строки матрицы линейно зависимы. Если число строк совпадает с рангом матрицы, то строки матрицы линейно независимы.

**Следствие 12.4.** Определитель квадратной матрицы  $A$  равен 0 тогда и только тогда, когда одна из строк является линейной комбинацией остальных.

*Доказательство.* 1. Необходимость. Пусть  $A$  – матрица порядка  $n$ , определитель которой  $|A| = 0$ . Тогда  $r(A) = r < n$ . После выделения базисного минора в матрице  $A$  найдется строка, не вошедшая в этот минор. По теореме 12.2 она является линейной комбинацией базисных строк.

2. Достаточность. Пусть  $k$ -тая строка матрицы  $A$  является линейной комбинацией строк с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_r$ :  $a_{ki} = \lambda_1 a_{i_1 j} + \lambda_2 a_{i_2 j} + \dots + \lambda_r a_{i_r j}$ . Вычтем из  $k$ -той строки  $i_1$ -ю строку, умноженную на  $\lambda_1$ ,  $i_2$ -ю, умноженную на  $\lambda_2$ , ...,  $i_r$ -ю, умноженную на  $\lambda_r$ . Получим  $a_{kj} - \lambda_1 a_{i_1 j} - \lambda_2 a_{i_2 j} - \dots - \lambda_r a_{i_r j} = 0$ . Значит, определитель  $|A| = 0$ .  $\square$

**Следствие 12.5.** Определитель квадратной матрицы  $A$  равен 0 тогда и только тогда, когда ее строки линейно зависимы.

Так как строки матрицы, входящие в базисный минор, линейно независимы (следствие 12.3), и любая совокупность строк, число которых больше ранга матрицы, линейно зависима, то справедлива теорема

**Теорема 12.6.** Ранг матрицы равен числу ее линейно независимых строк.

Эта теорема может быть взята за определение ранга матрицы.

Теорема о ранге матрицы играет принципиально важную роль в матричном анализе, в частности, при исследовании систем линейных уравнений.

### Задания для самостоятельного решения

**Задание 12.1.** В матрице  $A$  укажите базисный минор, если

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Задание 12.2.** Найдите ранг матрицы  $A$ , если

$$\begin{aligned} \text{а) } A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 4 & -7 & 7 \\ 1 & 5 & -8 & 2 \end{pmatrix}; & \text{б) } A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 13 & 5 \\ 6 & 4 & 19 & 4 \end{pmatrix}; \\ \text{в) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -4 & 11 & 9 \\ 5 & -11 & 27 & 17 \\ 5 & 2 & -1 & 11 \end{pmatrix}; & \text{г) } A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Задание 12.3.** Найдите ранги матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -4 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 8 \\ 3 & 8 & 24 & -28 \end{pmatrix} \text{ и } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & -4 & 9 \\ 3 & 8 & 26 & 10 \end{pmatrix}.$$

**Задание 12.4.** При каких значениях  $m$  и  $n$  ранг матрицы  $A$  равен 2, если

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & m & -6 \\ 1 & 3 & -7 & n \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & m & 7 & -4 \\ n & -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Задание 12.5.** При каких значениях  $p$  и  $q$  ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & -8 \\ 1 & -3 & 7 & -4 & p \\ 7 & 4 & q & 7 & -12 \end{pmatrix} \text{ равен } 2?$$

**Задание 12.6.** При каких значениях  $a$ ,  $b$  и  $c$  ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & a \\ b & 8 & 5 & c & -11 \end{pmatrix} \text{ равен } 2?$$

**Задание 12.7.** Найдите ранг матрицы  $A$  в зависимости от значений  $k$ ,

если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & k+1 & 1 \\ 3 & k^2-4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

### §13. Теорема Кронекера–Капелли.

Рассмотрим систему  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (13.1)$$

Обозначим через  $A = (a_{ij})$  — основную матрицу системы, через  $\tilde{A} = (a_{ij}|b_i)$  — расширенную матрицу системы.

Ответ на вопрос о разрешимости системы (13.1) дает теорема

**Теорема 13.1. (Кронекера-Капелли)** Система (13.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы, то есть  $r(A) = r(\tilde{A})$ .

*Доказательство.* а) Необходимость. Пусть система (13.1) совместна и вектор  $(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$  — ее решение. Тогда, подставив его в систему, получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1^\circ + a_{12}x_2^\circ + \dots + a_{1n}x_n^\circ = b_1, \\ a_{21}x_1^\circ + a_{22}x_2^\circ + \dots + a_{2n}x_n^\circ = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1^\circ + a_{m2}x_2^\circ + \dots + a_{mn}x_n^\circ = b_m. \end{cases}$$

Это означает, что последний столбец матрицы  $\tilde{A}$  является линейной комбинацией остальных столбцов и его вычеркивание не меняет ранга матрицы. Следовательно,  $r(A) = r(\tilde{A})$ .

б) Достаточность. Пусть  $r(A) = r(\tilde{A})$ . Это значит, что базисный минор матрицы  $A$  является базисным минором матрицы  $\tilde{A}$ . Столбец свободных членов, не вошедший в базисный минор, является линейной комбинацией остальных столбцов, то есть

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом вектор  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  является решением системы (13.1), то есть система (13.1) совместна.  $\square$

## §14. Исследование систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (14.1)$$

Найдем ранги  $r(A)$  и  $r(\tilde{A})$  основной и расширенной матриц системы.

Если  $r(A) \neq r(\tilde{A})$ , то система несовместна. Пусть  $r(A) = r(\tilde{A}) = r$ , то есть система совместна. Будем считать, что базисный минор  $M$  расположен в левом верхнем углу. Тогда последние  $m - r$  уравнений являются линейной комбинацией первых  $r$  уравнений (являются следствиями первых уравнений) и система (14.1) примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \quad (14.2)$$

Если  $n = r$ , то по теореме Крамера система имеет единственное решение, так как  $\Delta = M \neq 0$ .

Пусть  $n > r$ . Оставим в левой части системы первые  $r$  неизвестных, остальные перенесем в правую часть.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_r = b_m - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases} \quad (14.3)$$

Неизвестные, коэффициенты при которых не входят в базисный минор, называются *свободными*. Неизвестные, коэффициенты при которых

входят в базисный минор, называются *базисными* или *зависимыми*. Очевидно, число свободных неизвестных равно  $n - r$ .

Решая систему (14.3) любым известным нам способом, найдем зависимые неизвестные

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1}, \dots, x_n), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, \dots, x_n), \end{cases} \quad (14.4)$$

где  $f_i$  – линейные функции от переменных  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ .

По формулам (14.4) находят *общее решение* системы (14.3), а, значит, и системы (14.1). Придавая свободным неизвестным произвольные значения, будем получать *частные решения* системы.

Сформулируем основные теоремы о числе решений системы линейных уравнений:

**Теорема 14.1.** Система линейных уравнений (14.1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранги основной и расширенной матриц совпадают с числом неизвестных, то есть  $r(A) = r(\tilde{A}) = n$  (система является определенной).

**Теорема 14.2.** Система линейных уравнений (14.1) имеет бесконечно много решение тогда и только тогда, когда ранги основной и расширенной матриц совпадают, но меньше числа неизвестных, то есть  $r(A) = r(\tilde{A}) < n$  (система является неопределенной).

При решении системы (14.1) наиболее часто применяют метод Гаусса, причем преобразования выполняют не с самими уравнениями, а с расширенной матрицей системы. Достоинствами метода Гаусса являются: а) меньшая по сравнению с другими методами трудоемкость, б) возможность одновременно исследовать систему на совместность, и если система является совместной, получить ее общее решение.

**Пример 14.1.** Решите систему

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 \quad \quad - 3x_4 = -1, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$



**Решение .** Хотя число уравнений равно числу неизвестных  $m = n$ , но определитель системы  $\Delta = 0$  и по методу Крамера систему решать нельзя.

Будем решать систему методом Гаусса. Преобразуем матрицу  $\tilde{A}$ , найдем ее ранг и сравним с рангом матрицы  $A$ .

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & -5 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & -5 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Значит,  $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$  и по теореме Кронекера-Капелли система совместна. За свободные неизвестные примем  $x_2$  и  $x_4$ . Получим систему

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 + 2x_2 - 2x_4, \\ 2x_3 = -5 - 9x_2 + 7x_4. \end{cases}$$

Ее общее решение имеет вид 
$$\begin{cases} x_1 = -0,5 - 2,5x_2 + 1,5x_4, \\ x_3 = -2,5 - 4,5x_2 + 3,5x_4. \end{cases}$$

**Пример 14.2.** Корм для птицы, составленный из четырех видов зерна, должен содержать 17 единиц вещества А, 35 единиц вещества В, 44 единицы вещества С и 26 единиц вещества D. Известно содержание единиц полезных веществ в 1 кг. зерна каждого вида и цена 1 кг. зерна каждого вида:

Вид	Содержание полезных веществ (ед. в 1 кг.)				Цена 1 кг. (д.е.)
	А	В	С	D	
1	1	3	4	2	5
2	2	4	5	3	7
3	1	1	1	1	2
4	1	3	4	2	5
Итого	17	35	44	26	

Найдите все возможные составы корма, обеспечивающие необходимое количество полезных веществ. Существует ли состав корма, стоимость которого равна 60 д. е.?

**Решение .** Обозначим через  $x_i$  вес зерна  $i$ -того вида ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) и составим систему уравнений для нахождения состава корма на каждый день

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 17, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 35, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 44, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 26. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса. Будем последовательно исключать неизвестные  $x_1$  и  $x_2$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 17 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & | & 35 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & | & 44 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & | & 26 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 17 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & | & -16 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & | & -24 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 17 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 17 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 8 \end{pmatrix}.$$

Ранги основной и расширенной матриц равны. Значит, система имеет решение.

Решение системы

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 - x_4, \\ x_2 = 8 - x_3. \end{cases}$$

Это решение имеет смысл, если все переменные неотрицательны. Тогда необходимо, чтобы  $x_3 \in [0; 8]$ ,  $x_4 \in [0; x_3 + 1]$ .

Ответим на второй вопрос примера. Для этого в систему нужно добавить еще одно уравнение:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 17, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 35, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 44, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 26, \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 60. \end{cases}$$

Решая эту систему,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 17 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & | & 35 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & | & 44 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & | & 26 \\ 5 & 7 & 2 & 4 & | & 60 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 17 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & | & -16 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & | & -24 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & | & -8 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & | & -25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 17 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

получим, что ранги основной и расширенной матриц различны. Значит, эта система решений не имеет. Нельзя составить рацион, стоимость которого равнялась бы 60 д. е. Проверьте, можно ли составить рацион, стоимость которого равнялась бы 61 д. е.

Метод Гаусса применяют при решении компьютерном систем линейных уравнений. Программистский вариант метода Гаусса имеет три отличия от математического:

1. индексы строк и столбцов матрицы начинаются с нуля;
2. недостаточно найти просто ненулевой элемент в столбце. В программировании все действия с вещественными числами производятся приближенно, поэтому можно считать, что точного равенства вещественных чисел вообще не бывает. Поэтому вместо проверки на равенство нулю числа  $a_{ij}$  следует сравнивать его абсолютную величину с достаточно маленьким числом  $\varepsilon$ . Если  $a_{ij} < \varepsilon$ , то следует считать элемент  $a_{ij}$  нулевым.

3. при обнулении элементов  $j$ -го столбца, начиная со строки  $i + 1$ , мы к  $s$ -й строке, где  $s > i$ , прибавляем  $i$ -ю строку, умноженную на коэффициент  $k = -\frac{a_{kj}}{a_{ij}}$ . Такая схема работает хорошо только тогда, когда коэффициент  $k$  по абсолютной величине не превосходит единицы. В противном случае, ошибки округления умножаются на большой коэффициент и, таким образом, растут. Математики называют это явление *неустойчивостью* вычислительной схемы. Если вычислительная схема неустойчива, то полученные с ее помощью результаты не имеют никакого отношения к исходной задаче. Схема Гаусса устойчива, когда коэффициент  $k = -\frac{a_{kj}}{a_{ij}} \leq 1$ . Поэтому при поиске разрешающего элемента в  $j$ -м столбце необходимо найти не первый попавшийся ненулевой элемент, а **максимальный по абсолютной величине**.

#### Задания для самостоятельного решения

Решите методом Гаусса системы уравнений

$$\text{Задание 14.1.} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.2.} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 7x_4 = -1, \\ 4x_1 - 4x_2 + 10x_3 + 11x_4 = 4. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.3.} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 3, \\ x_1 + 13x_2 + 6x_3 + 17x_4 = 2. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.4.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.5.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.6.} \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -1, \\ 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -6. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.7.} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -3. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.8.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 1, \\ 6x_1 + 13x_2 + 16x_3 + 6x_4 = 17. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.9.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -3, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 7, \\ 5x_1 + 12x_2 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 - 18x_4 = -16. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.10.} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 3, \\ 6x_1 - 5x_2 + 17x_3 + 4x_4 = 7. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.11.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 11, \\ 4x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 13. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.12.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 18. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.13.} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 6x_5 = 4, \\ 6x_1 + 13x_2 - 16x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 16. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.14.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 + 14x_2 - 8x_3 - 15x_4 + 23x_5 = 3. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.15.} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 4, \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 3, \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 6. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.16.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 + 4x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 + 6x_5 = -11, \\ 5x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 13. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.17.} \begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 - 6x_2 - 5x_3 - 5x_4 - x_5 = -1, \\ 4x_1 - 19x_2 + x_3 + 11x_4 + 5x_5 = 7. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.18.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5 = 3, \\ 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 12x_5 = 5, \\ 7x_1 + 16x_2 - x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 9. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.19.} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 3, \\ 7x_1 - x_2 + 12x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases}$$

$$\text{Задание 14.20.} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 3, \\ 7x_1 - x_2 + 12x_3 - 3x_4 = 12. \end{cases}$$

### §15. Системы линейных однородных уравнений.

Рассмотрим систему  $m$  линейных однородных уравнений с  $n$  неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (15.1)$$

Система (15.1) всегда совместна так как имеет нулевое (тривиальное) решение  $(0, 0, \dots, 0)$ . Поэтому интересен вопрос, при каких условиях система имеет нетривиальные решения. Ответ на этот вопрос дает

**Теорема 15.1.** *Для того чтобы система линейных однородных уравнений имела нетривиальные решения необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных, то есть  $r(A) = r < n$ . (Доказать самостоятельно.)*

**Следствие 15.2.** *Если в системе (15.1) число уравнений совпадает с числом неизвестных ( $m = n$ ), то система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель системы равен 0, то есть  $\Delta = 0$ .*

Решения системы линейных однородных уравнений (15.1) обладают свойствами:

1. Если вектор  $X = (x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$  является решением системы, то для любого числа  $k$  вектор  $kX = (kx_1^\circ, kx_2^\circ, \dots, kx_n^\circ)$  также является решением этой системы;

2. Если векторы  $X = (x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$  и  $Y = (y_1^\circ, y_2^\circ, \dots, y_n^\circ)$  являются решениями системы, то вектор  $X + Y = (x_1^\circ + y_1^\circ, x_2^\circ + y_2^\circ, \dots, x_n^\circ + y_n^\circ)$  также является решением этой системы.

Из этих свойств вытекает теорема

**Теорема 15.3.** *Любая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы.*

Так как решение системы линейных однородных уравнений с  $n$  неизвестными есть  $n$ -мерный вектор и линейная комбинация решений является решением системы, то множество решений системы линейных однородных уравнений образует линейное пространство, которое является подпространством в пространстве  $\mathbb{R}_n$ . Базис пространства решений системы линейных однородных уравнений называется **фундаментальной системой решений**. То есть решения, входящие в фундаментальную систему решений, линейно независимы и любое решение системы является линейной комбинацией решений из фундаментальной системы.

**Теорема 15.4.** *Если ранг матрицы  $A$  системы линейных однородных уравнений (15.1) равен  $r$  и меньше числа неизвестных  $n$ , то фундаментальная система решений системы (15.1) существует и содержит  $n - r$  решений.*

*Доказательство.* Пусть ранг матрицы  $A$  равен  $r$  и меньше числа неизвестных  $r < n$ . Пусть базисный минор  $M \neq 0$  стоит в левом верхнем углу. Перенеся свободные неизвестные  $x_{r+1}, \dots, x_n$  в первых  $r$  уравнениях в правую часть, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}.$$

Зададим свободные неизвестные  $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 0$ , получим решение системы  $(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_r^1, 1, 0, \dots, 0)$ . Аналогично, задавая свободные неизвестные  $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, \dots, x_n = 0$ , получим решение  $(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_r^2, 0, 1, \dots, 0)$  и так далее. Так найдем  $k = n - r$  решений системы

$$e_1 = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_r^1, 1, 0, \dots, 0);$$

$$e_2 = (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_r^2, 0, 1, \dots, 0);$$

... ..

$$e_k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_r^k, 0, 0, \dots, 1).$$

Эти  $k$  решений линейно независимы, так как ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_r^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_r^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \dots & \alpha_r^k & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

равен  $k$ . В этой матрице есть минор порядка  $k$ , отличный от нуля, например, содержащий последние  $k$  столбцов.

Решения  $e_1, e_2, \dots, e_k$  образуют фундаментальную систему решений. Общее решение системы (15.1) имеет вид

$$X = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_k e_k. \quad \square$$

**Пример 15.1.** Решите систему однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 6x_4 + 17x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 - 11x_4 + 9x_5 = 0. \end{cases}$$

**Решение .** Методом Гаусса найдем ранг матрицы системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 5 & 8 & 8 & -6 & 17 \\ 1 & 3 & 10 & -11 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & 18 & -21 & 12 \\ 0 & 2 & 12 & -14 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 10 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен 2 (в матрице есть минор порядка 2, отличный от нуля). Неизвестные  $x_3, x_4$  и  $x_5$  — свободные неизвестные, перенесем их в правую часть и получим решение системы

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 10x_4 + 3x_5, \\ x_2 = -6x_3 + 7x_4 - 4x_5. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений системы заданной линейных однородных уравнений имеет вид  $e_1 = (8; -6; 1; 0; 0)$ ,  $e_2 = (-10; 7; 0; 1; 0)$ ,  $e_3 = (3; -4; 0; 0; 1)$  и ее общее решение  $X = c_1 \cdot e_1 + c_2 \cdot e_2 + c_3 \cdot e_3 = c_1(8; -6; 1; 0; 0) + c_2(-10; 7; 0; 1; 0) + c_3(3; -4; 0; 0; 1)$ .

### Задания для самостоятельного решения

Решите системы однородных уравнений



$$\text{Задание 15.1.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Задание 15.2.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 11x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Задание 15.3.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Задание 15.4.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Задание 15.5.} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 14x_4 = 0, \\ 12x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 26x_4 = 0, \\ 9x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 22x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Задание 15.6.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 11x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Задание 15.7.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 11x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Задание 15.8.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 7x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

**Задание 15.9.** Докажите, что если система  $n + 1$  линейных уравнений

с  $n$  неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \dots + a_{n+1,n}x_n = b_{n+1} \end{cases}$$

совместна, то определитель  $n + 1$ -го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & b_n \end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов и свободных членов системы, равен 0.

## §16. Метрические и евклидовы пространства.

**Определение 16.1.** *Линейное пространство  $\mathbb{V}$ , в котором для любых двух элементов  $x, y$  определено число  $\rho(x, y)$  (расстояние между точками или **метрика**), удовлетворяющее условиям:*

1.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
2.  $\rho(x, y) > 0$  при  $x \neq y$  и  $\rho(x, x) = 0$ ;
3.  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$  (неравенство треугольника)

называется **метрическим пространством**.

Расстояние можно вводить различными способами, при этом будем получать различные метрические пространства. Например, можно ввести расстояние через скалярное произведение. Скалярное произведение

векторов в  $n$ -мерном арифметическом пространстве было введено в § 9

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

где  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , и там же рассмотрены его свойства.

Линейное пространство  $\mathbb{R}_n$ , в котором введено скалярное произведение называется **евклидовым** и обозначается  $\mathbb{E}_n$ .

**Длиной (нормой)** вектора  $\bar{x}$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{E}_n$  называется число  $|\bar{x}| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ . Длина вектора  $\bar{x}$  вычисляется по формуле

$$|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Для длины вектора справедливы свойства:

1.  $|\bar{x}| = 0$ , при  $\bar{x} = 0$ ;
2.  $|\alpha \bar{x}| = |\alpha| \cdot |\bar{x}|$ ;
3.  $|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$  (неравенство треугольника);
4.  $|(\bar{x}, \bar{y})| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|$  (неравенство Коши-Буняковского);

Докажем неравенство Коши-Буняковского. Рассмотрим вектор  $\lambda \bar{x} - \bar{y}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ). По свойству 4 определения 16.1  $(\lambda \bar{x} - \bar{y}, \lambda \bar{x} - \bar{y}) \geq 0$ . То есть  $\lambda^2(\bar{x}, \bar{x}) - 2\lambda(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y}) \geq 0$ . Квадратный трехчлен принимает неотрицательные значения, значит его дискриминант  $D \leq 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} D/4 &= (\bar{x}, \bar{y})^2 - (\bar{x}, \bar{x})(\bar{y}, \bar{y}) \leq 0 \\ (\bar{x}, \bar{y})^2 &\leq (\bar{x}, \bar{x})(\bar{y}, \bar{y}) = |\bar{x}|^2 \cdot |\bar{y}|^2. \end{aligned}$$

Извлекая квадратный корень, получим неравенство Коши-Буняковского.

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что дробь

$$-1 \leq \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|} \leq 1.$$

Поэтому данную дробь можно считать косинусом некоторого угла  $\varphi$ :

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|}$$

Угол  $\varphi$  назовем **углом** между векторами  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ .

Вектор, длина которого равна 1, называется **нормированным**. Два вектора, скалярное произведение которых равно 0, называются **ортogonalными**.

Справедливо следующее утверждение:

**Теорема 16.1.** *Всякая система  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ , векторы которой попарно ортогональны, линейно независима.*

*Доказательство.* Рассмотрим линейную комбинацию данных векторов  $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_m\bar{a}_m = 0$  (\*). Найдем, при каких значениях коэффициентов  $\alpha_i$  она обращается в 0. Умножим (\*) скалярно на  $\bar{a}_i$ .  $\alpha_1(\bar{a}_1, \bar{a}_i) + \dots + \alpha_i(\bar{a}_i, \bar{a}_i) + \dots + \alpha_m(\bar{a}_m, \bar{a}_i) = 0$ . Получим  $\alpha_i(\bar{a}_i, \bar{a}_i) = 0$ , так как  $(\bar{a}_i, \bar{a}_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Таким образом, для каждого  $i = \overline{1, m}$  имеем  $\alpha_i = 0$ . Система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  линейно независима.  $\square$

**Определение 16.2.** *Векторы  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  образуют в пространстве  $\mathbb{E}_n$  ортонормированный базис, если длина каждого равна 1 и векторы попарно ортогональны, то есть  $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0$  при  $i \neq j$  и  $|\bar{e}_i| = 1$  для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

**Теорема 16.2.** *Во всяком  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{E}_n$  существует ортонормированный базис.*

Примером ортонормированного базиса является канонический базис:  $\bar{e}_1 = (1; 0; \dots; 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (0; 1; \dots; 0)$ ,  $\dots$ ,  $\bar{e}_n = (0; 0; \dots; 1)$ .

## §17. Формулы перехода от одного базиса к другому.

Пусть в пространстве  $R_n$  заданы два базиса

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  — "старый" базис и  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$  — "новый" базис.

Так как векторы  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  образуют базис, то векторы  $\bar{f}_j = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}) = \sum_{i=1}^n c_{ij}\bar{e}_i$  можно выразить через этот базис.

Из координат векторов  $\{\bar{f}_j\}$  ( $j = \overline{1, n}$ ) составим матрицу  $C$ , записывая координаты векторов  $\{\bar{f}_j\}$  в столбцы

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}. \quad (17.1)$$

Матрицу  $C$  называют **матрицей перехода** от базиса  $\{\bar{e}_i\}$  к базису  $\{\bar{f}_j\}$ .

Матрица  $C$  – невырожденная. Векторы  $\{f_j\}$  линейно независимы, значит, ранг матрицы  $C$  равен  $n$  или  $|C| \neq 0$ . В матричной форме формулы перехода от базиса  $\{\bar{e}_i\}$  к базису  $\{\bar{f}_j\}$  можно записать

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)C. \quad (17.2)$$

Аналогично, так как  $\{\bar{f}_j\}$  – базис, выразим через него векторы  $\bar{e}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}) = \sum_{j=1}^n a_{ji}\bar{f}_j$ . Матрица  $A$ , элементы которой координаты векторов  $\bar{e}_i$ , записанные в столбцы, является матрицей перехода от базиса  $\{\bar{f}_j\}$  к базису  $\{\bar{e}_i\}$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} ..$$

Тогда формулы перехода от базиса  $\{\bar{f}_j\}$  к базису  $\{\bar{e}_i\}$  имеют вид

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)A. \quad (17.3)$$

Из (17.2) и (17.3) следует, что  $A = C^{-1}$ .

Выведем формулы, связывающие координаты вектора в "старом" и "новом" базисах. Пусть  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \xi_i \bar{e}_i$  и  $\bar{x} = \sum_{j=1}^n \eta_j \bar{f}_j$ . Тогда

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^n \eta_j \bar{f}_j = \sum_{j=1}^n \eta_j \left( \sum_{i=1}^n c_{ij} \bar{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \eta_j c_{ij} \right) \bar{e}_i = \sum_{i=1}^n \xi_i \bar{e}_i$$

или в координатной форме

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \eta_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + \eta_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \eta_n \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \dots \\ c_{nn} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix}.$$

Формулы вычисления координат вектора при изменении базиса

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}. \quad (17.4)$$

**Пример 17.1.** В базисе  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  заданы векторы  $\bar{f}_1 = (1; 3; 1)$ ,  $\bar{f}_2 = (1; 2; -1)$ ,  $\bar{f}_3 = (2; 8; 7)$ . Докажите, что векторы  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$  образуют базис. Найдите координаты вектора  $\bar{x} = (1; 7; 10)$  в новом базисе.

**Решение .** Составим матрицу  $C$  перехода от "старого" базиса к "новому":

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Если векторы } \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3 \text{ линейно независимы, то столбцы матрицы } C \text{ линейно независимы, то есть } r(C) = 3 \text{ или } |C| \neq 0.$$

Если векторы  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$  линейно независимы, то столбцы матрицы  $C$  линейно независимы, то есть  $r(C) = 3$  или  $|C| \neq 0$ .

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -1.$$

Матрица  $C$  невырожденная и является матрицей перехода от "старого" базиса к "новому". Найдем матрицу  $C^{-1}$ , обратную к  $C$ .

$$C^{-1} = - \begin{pmatrix} 22 & -9 & 4 \\ -13 & 5 & -2 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 9 & -4 \\ 13 & -5 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Формулы перехода от базиса  $\{\bar{e}_i\}$  к базису  $\{\bar{f}_j\}$  имеют вид

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдем координаты вектора  $\bar{x}$  в "новом" базисе:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 9 & -4 \\ 13 & -5 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак,  $\bar{x} = (1; -2; 1)$ .

Пусть базисы  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  и  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$  пространства  $\mathbb{E}_n$  ортонормированы, то есть векторы базисов единичные и попарно ортогональны:  $|\bar{e}_i| = 1, |\bar{f}_i| = 1, (\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0, (\bar{f}_i, \bar{f}_j) = 0$ .

Пусть заданы координаты векторов  $\bar{f}_i = (q_{1i}, q_{2i}, \dots, q_{ni})$  в "старом" базисе ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Тогда для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$  имеем  $|\bar{f}_i|^2 = (q_{1i})^2 + (q_{2i})^2 + \dots + (q_{ni})^2 = 1$  и  $(\bar{f}_i, \bar{f}_j) = q_{1i}q_{1j} + q_{2i}q_{2j} + \dots + q_{ni}q_{nj} = 0$  при  $i \neq j$ .

Матрица перехода от базиса  $\{\bar{e}_i\}$  к базису  $\{\bar{f}_j\}$  имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \quad (17.5)$$

**Определение 17.1.** Матрица, в которой сумма квадратов элементов каждого столбца равна 1, а сумма произведений соответствующих элементов двух столбцов равна 0 называется **ортогональной**.

Справедливы следующие теоремы:

**Теорема 17.1.** Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису является ортогональной.

**Теорема 17.2.** Матрица, обратная ортогональной матрице, совпадает с транспонированной, то есть  $Q^{-1} = Q^T$ .

*Доказательство.* Вычислим произведение

$$Q^T \cdot Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1n} & q_{2n} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} = E. \quad \square$$

**Следствие 17.3.** Определитель ортогональной матрицы равен  $\pm 1$  ( $|Q| = \pm 1$ ).

*Доказательство.*  $|Q^{-1} \cdot Q| = |Q^T \cdot Q| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 = 1.$  □

### Задания для самостоятельного решения

**Задание 17.1.** В каноническом базисе даны три вектора  $\bar{a} = (3; -2)$ ,  $\bar{b} = (-2; 1)$ ,  $\bar{c} = (7; -4)$ . Докажите, что векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  можно принять за новый базис. Найдите координаты вектора  $\bar{c}$  в новом базисе.

**Задание 17.2.** В каноническом базисе даны четыре вектора  $\bar{a} = (3; -2; 1)$ ,  $\bar{b} = (-1; 1; -2)$ ,  $\bar{c} = (2; 1; -3)$ ,  $\bar{d} = (11; -6; 5)$ . Докажите, что векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  можно принять за новый базис. Запишите

матрицу перехода от старого базиса к новому. Найдите координаты вектора  $\bar{d}$  в новом базисе.

**Задание 17.3.** В каноническом базисе даны четыре вектора  $\bar{a} = (2; 1; 0)$ ,  $\bar{b} = (1; -1; 2)$ ,  $\bar{c} = (2; 2; -1)$ ,  $\bar{d} = (3; 7; -7)$ . Докажите, что любую тройку векторов можно принять за новый базис. Найдите координаты каждого из векторов в базисе, состоящем из остальных трех векторов.

**Задание 17.4.** В каноническом базисе даны четыре вектора  $\bar{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ,  $\bar{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}; \frac{1}{\sqrt{11}}; -\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$ ,  $\bar{c} = \left(\frac{7}{\sqrt{66}}; -\frac{4}{\sqrt{66}}; \frac{1}{\sqrt{66}}\right)$ ,  $\bar{d} = (1; 2; 1)$ . Докажите, что векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  образуют ортонормированный базис. Найдите координаты вектора  $\bar{d}$  в этом базисе.

## §18. Линейный оператор.

Одно из фундаментальных понятий алгебры матриц — это понятие линейного оператора.

Рассмотрим два линейных пространства  $\mathbb{R}_n$  и  $\mathbb{R}_m$ . Отображение, ставящее любому вектору  $\bar{x} \in \mathbb{R}_n$  единственный вектор  $\bar{y} \in \mathbb{R}_m$  называется **оператором** из  $\mathbb{R}_n$  в  $\mathbb{R}_m$  ( $A : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_m$ ). Обозначается оператор  $\bar{y} = A(\bar{x})$  или просто  $\bar{y} = A\bar{x}$ . Вектор  $\bar{y}$  называется **образом** вектора  $\bar{x}$ .

**Определение 18.1.** Оператор  $A : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_m$  называется **линейным**, если для любых двух векторов  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}_n$  и любого действительного числа  $\alpha$  выполняются условия:

- 1)  $A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y}$  ;
- 2)  $A(\alpha\bar{x}) = \alpha A\bar{x}$ .

Условия 1) и 2) можно объединить:

**Определение 18.2.** Оператор  $A$  называется **линейным**, если для любых векторов  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}_n$  и любых чисел  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  выполнено условие  $A(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha A\bar{x} + \beta A\bar{y}$ .

Если  $\mathbb{R}_m = \mathbb{R}_n$  то отображение  $A : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$  называется **преобразованием** пространства  $\mathbb{R}_n$ .



### Примеры линейных операторов.

1. Тожественный оператор  $I$ :  $I\bar{x} = \bar{x}$  для всех векторов  $\bar{x} \in \mathbb{R}_n$ ;
2. нулевой оператор:  $A\bar{x} = \bar{0}$  для всех векторов  $\bar{x} \in \mathbb{R}_n$ ;
3. оператор проектирования:  $P : \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_2$  и  $P\bar{a} = \bar{b}$ , если  $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\bar{b} = (a_1, a_2)$ .
4. оператор подобия:  $A\bar{x} = k\bar{x}$  для всех векторов  $\bar{x} \in \mathbb{R}_n$ ;
5. оператор поворота на угол  $\varphi$ :  $A\bar{x} = (r \cos(\alpha + \varphi), r \sin(\alpha + \varphi))$  для всех векторов  $\bar{x} = (r \cos \alpha, r \sin \alpha) \in \mathbb{R}_n$ ;
6. оператор дифференцирования:  $f(x) \rightarrow f'(x)$ ;
7. оператор интегрирования:  $f(x) \rightarrow F(x)$ , где  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$  на  $[a; b]$ .

Если из того, что  $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$  следует, что  $A\bar{x}_1 \neq A\bar{x}_2$ , и для любого вектора  $\bar{y} \in \mathbb{R}_m$  существует вектор  $\bar{x} \in \mathbb{R}_n$  такой, что  $\bar{y} = A\bar{x}$ , то говорят, что оператор  $A$  действует **взаимно-однозначно**.

Пусть заданы два линейных оператора  $A : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$  и  $B : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$ .

**Суммой** линейных операторов  $A$  и  $B$  называется оператор  $A + B$ , действующий по закону  $(A + B)(\bar{x}) = A\bar{x} + B\bar{x}$ .

**Произведением** линейного оператора  $A$  на число  $\alpha$  называется оператор  $\alpha A$ , действующий по закону  $(\alpha A)\bar{x} = \alpha(A\bar{x})$ .

**Произведением** линейных операторов  $A$  и  $B$  называется оператор  $AB$ , действующий по закону  $(AB)\bar{x} = A(B\bar{x})$ . В общем случае  $AB \neq BA$ .

Линейный оператор  $B$  называется **обратным** оператору  $A$ , если произведение  $AB = I$  (тождественный оператор). Обозначается обратный оператор  $A^{-1}$ .

**Теорема 18.1.** *Для того чтобы для линейного оператора  $A$  существовал обратный оператор необходимо и достаточно, чтобы оператор  $A$  действовал взаимно-однозначно.*

Определим как действует линейный оператор  $A : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_m$ .

Выберем в пространстве  $\mathbb{R}_n$  базис  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ , а в пространстве  $\mathbb{R}_m$  базис  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m$ .

Найдем образы базисных векторов

$$\begin{aligned}
A\bar{e}_1 &= a_{11}\bar{f}_1 + a_{21}\bar{f}_2 + \dots + a_{m1}\bar{f}_m = \sum_{j=1}^m a_{j1}\bar{f}_j = (a_{11}; a_{21}; \dots; a_{m1}); \\
A\bar{e}_2 &= a_{12}\bar{f}_1 + a_{22}\bar{f}_2 + \dots + a_{m2}\bar{f}_m = \sum_{j=1}^m a_{j2}\bar{f}_j = (a_{12}; a_{22}; \dots; a_{m2}); \\
\dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots; \\
A\bar{e}_n &= a_{1n}\bar{f}_1 + a_{2n}\bar{f}_2 + \dots + a_{mn}\bar{f}_m = \sum_{j=1}^m a_{jn}\bar{f}_j = (a_{1n}; a_{2n}; \dots; a_{mn}).
\end{aligned}$$

Из чисел  $a_{ji}$  составим матрицу  $A$ , записывая координаты векторов  $A\bar{e}_i$  в столбцы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (18.1)$$

$A$  — матрица размера  $m \times n$ . Матрица  $A$  называется **матрицей линейного оператора**  $A$ . Таким образом, каждому линейному оператору можно поставить в соответствие матрицу. Задание матрицы полностью определяет линейный оператор.

Выведем формулу для вычисления координат образа произвольного вектора  $\bar{x}$ . Пусть оператор  $A: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_m$ . Выберем базисы  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  в пространстве  $\mathbb{R}_n$ , и  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m$  в пространстве  $\mathbb{R}_m$ .

Пусть  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{e}_i$  — произвольный вектор в  $\mathbb{R}_n$ ,  $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{j=1}^m y_j \bar{f}_j \in \mathbb{R}_m$  — образ вектора  $\bar{x}$ ,  $A = (a_{ij})$  — матрица линейного оператора  $A$ . Тогда

$$\bar{y} = A\bar{x} = A\left(\sum_{i=1}^n x_i \bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i A\bar{e}_i = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} \bar{f}_j\right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i\right) \bar{f}_j.$$

Запишем эти выкладки подробнее в координатах

$$\begin{aligned}
\bar{y} = A\bar{x} &= x_1(a_{11}\bar{f}_1 + a_{21}\bar{f}_2 + \dots + a_{m1}\bar{f}_m) + x_2(a_{12}\bar{f}_1 + a_{22}\bar{f}_2 + \dots + a_{m2}\bar{f}_m) + \\
&\dots + x_n(a_{1n}\bar{f}_1 + a_{2n}\bar{f}_2 + \dots + a_{mn}\bar{f}_m) = (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n})\bar{f}_1 + \\
&+ (x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n})\bar{f}_2 + \dots + (x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_n a_{mn})\bar{f}_m.
\end{aligned}$$

В силу единственности разложения вектора  $\bar{y}$  по базису имеем

$y_j = \sum_{i=1}^n x_i a_{ji}$  или в координатной

$$\begin{cases} y_1 = x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n}, \\ y_2 = x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n}, \\ \dots \qquad \qquad \qquad \dots \qquad \dots \\ y_m = x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_n a_{mn} \end{cases} \quad (18.2)$$

и матричной форме

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{pmatrix}^T = A \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T. \quad (18.3)$$

Мы показали, что для задания линейного оператора  $A : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_m$  достаточно задать образы базисных векторов. Заданием этих образов оператор определяется однозначно.

Сформулируем несколько теорем о линейных операторах:

**Теорема 18.2.** Пусть  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  – базис в пространстве  $\mathbb{R}_n$ ,  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$  – произвольные вектора в пространстве  $\mathbb{R}_m$ . Тогда существует единственный оператор  $A : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_m$  такой что  $A\bar{e}_i = \bar{f}_i$ .

Так как все операции над линейными операторами можно свести к операциям над матрицами операторов, то справедлива теорема

**Теорема 18.3.** Матрица произведения операторов  $AB$  равна произведению матриц операторов  $A$  и  $B$ .

В пространстве  $\mathbb{R}_n$  базис можно выбрать различными способами, но тогда и матрицы оператора в разных базисах будут разными. Связь между матрицами оператора в разных базисах выражается теоремой

**Теорема 18.4.** Матрицы  $A$  и  $A^*$  линейного оператора  $A$  в базисах  $\{\bar{e}_i\}$  и  $\{\bar{f}_j\}$  связаны соотношением  $A^* = C^{-1}AC$ , где  $C$  – матрица перехода от базиса  $\{\bar{e}_i\}$  к базису  $\{\bar{f}_j\}$ .

**Теорема 18.5.** Определитель матрицы линейного оператора не меняется при переходе к новому базису.

**Пример 18.1.** Докажите, что оператор  $A$ , действующий по закону  $A\bar{x} = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, 2x_2 - 3x_3)$ , линейный. Найдите матрицу оператора в каноническом базисе и образ вектора  $\bar{a} = (3; 2; -1)$  двумя способами.

**Решение .** Докажем линейность оператора  $A$ .

$$1) (2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), (x_1 + y_1) + (x_3 + y_3), 2(x_2 + y_2) - 3(x_2 + y_3)) = \\ = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, 2x_2 - 3x_3) + (2y_1 + y_2 + y_3, y_1 + y_2, 2y_2 - 3y_3),$$

то есть  $A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y}$  ;

$$2) A(\alpha\bar{x}) = (2\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3, \alpha x_1 + \alpha x_2, 2\alpha x_2 - 3\alpha x_3) = \\ = \alpha(2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, 2x_2 - 3x_3) = \alpha A\bar{x}.$$

По определению оператор  $A$  — линейный.

Найдем матрицу оператора. Для этого найдем образы базисных векторов  $A\bar{e}_1 = (2, 1, 0)$ ,  $A\bar{e}_2 = (1, 1, 2)$ ,  $A\bar{e}_3 = (1, 0, -3)$  и составим матрицу оператора

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найдем образ вектора  $\bar{a}$ , подставив его координаты в формулу, которой задается оператор:  $A\bar{a} = (6 + 2 - 1; 3 + 2; 2 + 3) = (7; 5; 5)$  и используя матрицу оператора

$$A\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

### Задания для самостоятельного решения

**Задание 18.1.** Оператор  $A$  действует в пространстве  $\mathbb{R}_3$  по закону  $A\bar{x} = (2x_1 - x_2 + 4x_3; x_1 + 5x_2 - x_3; 7x_1 + 4x_2 + x_3)$ . Проверьте, будет ли оператор  $A$  линейным. Если оператор линейный, найдите его матрицу.

**Задание 18.2.** Оператор  $A$  действует в пространстве  $\mathbb{R}_3$  по закону  $A\bar{x} = (7x_1 + 2x_2 + x_3; -x_1 + 3x_2 - 2x_3; 5x_1 + x_2 - 4x_3)$ . Найдите образ вектора  $\bar{a} = (-1; 4; 2)$  двумя способами.

**Задание 18.3.** Оператор  $A$  действует в пространстве  $\mathbb{R}_3$  по закону  $A\bar{x} = (2x_1 - x_2 + 4x_3; x_1 + 5x_2 - x_3; 7x_1 + 4x_2 + x_3)$ . Найдите образы векторов  $\bar{a} = (-1; 3; -5)$  и  $\bar{b} = (-4; 1; -2)$  двумя способами.

**Задание 18.4.** Оператор  $A$  действует в пространстве  $\mathbb{R}_3$  по закону  $A\bar{x} = [\bar{c}, \bar{x}]$ , где  $\bar{c} = (-1; 4; 3)$ . Проверьте, будет ли оператор  $A$  линейным. Если оператор линейный, найдите его матрицу. Найдите образ вектора  $\bar{a} = (2; -1; 2)$ .

**Задание 18.5.** Оператор  $A$  действует в пространстве  $\mathbb{R}_3$  по закону

$A\bar{x} = [\bar{x}, \bar{c}]$ , где  $\bar{c} = (-1; 3; 2)$ . Проверьте, будет ли оператор  $A$  линейным. Если оператор линейный, найдите его матрицу.

**Задание 18.6.** Оператор  $A$  действует в пространстве  $\mathbb{R}_3$  по закону  $A\bar{x} = (2x_1 - x_2 + 4; x_1 + x_2 - x_3; 7x_1 + 4x_2 + x_3)$ . Проверьте, будет ли оператор  $A$  линейным. Если оператор линейный, найдите его матрицу.

**Задание 18.7.** Оператор  $A$  действует в пространстве  $\mathbb{R}_3$  по закону  $A\bar{x} = (x_1x_2 + x_3; x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + x_2 - x_3)$ . Проверьте, будет ли оператор  $A$  линейным. Если оператор линейный, найдите его матрицу.

**Задание 18.8.** Оператор  $A$  действует в пространстве  $\mathbb{R}_3$  по закону  $A\bar{x} = (x_1 + x_3 - 1; x_2 - x_3 + 1; 2x_1 + x_2 - x_3)$ . Проверьте, будет ли оператор  $A$  линейным. Если оператор линейный, найдите его матрицу.

**Задание 18.9.** Оператор  $A$  действует в пространстве  $\mathbb{R}_3$  по закону  $A\bar{x} = (\bar{x}, \bar{c})$ , где  $\bar{c} = (2; -1; 4)$ . Проверьте, будет ли оператор  $A$  линейным. Если оператор линейный, найдите его матрицу.

**Задание 18.10.** Оператор  $A$  действует в пространстве  $\mathbb{R}_3$  по закону  $A\bar{x} = (\bar{x}, \bar{c})\bar{c}$ , где  $\bar{c} = (3; 2; -1)$ . Проверьте, будет ли оператор  $A$  линейным. Если оператор линейный, найдите его матрицу.

**Задание 18.11.** Докажите, что оператор дифференцирования функций одной переменной является линейным.

## §19. Элементы теории многочленов.

*Многочленом* от переменной  $x$  называется выражение вида

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (19.1)$$

где  $n$  — целое неотрицательное число,  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  — любые числа; причем  $a_0 \neq 0$ . Число  $n$  называется *степеню многочлена*  $f(x)$ . Коэффициент  $a_0$  — называют *старшим коэффициентом* многочлена  $f(x)$ , а сам одночлен  $a_0x^n$  — его *старшим членом*. Коэффициент  $a_n$  называется *свободным членом*. Многочлен, старший коэффициент которого

равен 1, называется **приведенным**. Многочлены, как и любые алгебраические выражения, можно складывать, вычитать и умножать по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных.

Вместо переменной  $x$  в многочлен  $f(x)$  можно подставить любое число  $c$ . В результате получится некоторое число. Это число называется **значением многочлена  $f(x)$  при  $x = c$**  (или в точке  $c$ ) и обозначается через  $f(c)$ . Число  $c$  называется **корнем многочлена  $f(x)$** , если значение многочлена в точке  $c$  равно нулю.

Введем понятие равенства многочленов. Два многочлена называются **равными**, если они имеют одинаковую степень и их соответствующие коэффициенты равны. Такое равенство многочленов называется **равенством в алгебраическом смысле**, то есть если

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m$$

и многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  равны, то  $m = n$  и  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ .

Однако многочлен  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  можно рассматривать как функцию. Два многочлена  $f(x)$  и  $g(x)$  называются **равными**, если для любого  $c \in \mathbb{R}$   $f(c) = g(c)$ . Такое равенство многочленов называется **равенством в функциональном смысле**.

Нетрудно доказать, что эти определения эквивалентны.

Для многочленов можно ввести операцию деления многочлена на многочлен. Будем говорить, что многочлен  $f(x)$  **делится** на многочлен  $g(x) \neq 0$ , если существует такой многочлен  $q(x)$ , что выполняется равенство

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) \tag{19.2}$$

Если  $f(x)$  делится на  $g(x)$ , то это принято записывать так  $f(x):g(x)$ . Многочлен  $q(x)$  в равенстве (19.2) называется **частным** от деления  $f(x)$  на  $g(x)$ . Заметим, что многочлен  $q(x)$  в равенстве (19.2) определяется однозначно.

Делимость многочленов своими свойствами похожа на делимость целых чисел. Перечислим некоторые свойства деления многочленов:

1) если два многочлена  $f(x)$  и  $p(x)$  делятся на  $g(x)$ , то их сумма и разность также делятся на  $g(x)$ ;

2) если  $f(x)$  делится на  $g(x)$  и  $h(x)$  — некоторый многочлен, то и произведение  $f(x)h(x)$  делится на  $g(x)$ ;

3) если  $f(x)$  делится на  $g(x)$ , а  $g(x)$  делится на  $h(x)$ , то  $f(x)$  делится на  $h(x)$ ;

4) степень частного равна разности степеней делимого и делителя;

5) любой многочлен делится на многочлен нулевой степени, то есть любой многочлен делится на число;

6) нулевой многочлен делится на любой многочлен, отличный от нуля.

Укажем на еще одну важную аналогию.

**Теорема 19.1. (о делении с остатком).** Для любого многочлена  $f(x)$  и любого ненулевого многочлена  $g(x)$  существует единственная пара многочленов  $q(x)$  и  $r(x)$ , для которой выполняется равенство

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \quad (19.3)$$

где многочлен  $r(x)$  либо нулевой, либо имеет степень, меньшую чем степень  $g(x)$ .

На практике для нахождения частного и остатка обычно применяют метод вычисления, названный "деление углом".

Ясно, что  $f(x)$  делится на  $g(x)$  тогда и только тогда, когда остаток  $r(x)$  от деления  $f(x)$  на  $g(x)$  равен нулю.

Рассмотрим деление многочлена  $f(x)$  на линейный двучлен  $x - \alpha$ .

**Теорема 19.2. (Безу)**<sup>16</sup> Остаток от деления многочлена  $f(x)$  на двучлен  $x - \alpha$  равен значению многочлена  $f(x)$  в точке  $x = \alpha$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный многочлен  $f(x)$  и разделим его с остатком на двучлен  $x - \alpha$ . Так как степень этого двучлена равна 1, то остаток либо равен нулю, либо имеет нулевую степень. И в том и в другом случае остаток  $r$  есть число.

<sup>16</sup>Этьен Безу (Bezout) (1730-1783) — французский математик, член Парижской АН. Основные работы относятся к высшей алгебре. С его именем связаны многие теоремы алгебры, касающиеся свойств многочленов, и теория уравнений со многими неизвестными. Развил метод неопределенных множителей: его именем назван способ решения систем уравнений, основанный на этом методе. Наряду с Г.Краммером, Безу разрабатывал теорию определителей, развивал теорию исключения неизвестных из системы уравнений. Он доказал теорему о том, что две кривые порядка  $m$  и  $n$  пересекаются не более чем в  $m - n$  точках.

Значит, многочлен можно записать в виде  $f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$ . Положив в этом тождестве  $x = \alpha$ , получим, что  $f(\alpha) = r$ .  $\square$

Рассмотрим несколько следствий из этой теоремы.

**Следствие 19.3.** *Многочлен  $f(x)$  делится на  $x - \alpha$  тогда и только тогда, когда число  $\alpha$  является его корнем.*

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) \quad (19.4)$$

**Следствие 19.4.** *Если  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  - различные корни многочлена  $f(x)$ , то  $f(x)$  делится на произведение  $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k)$ .*

$$f(x) = ((x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k)) \cdot q(x) \quad (19.5)$$

**Следствие 19.5.** *Число различных корней многочлена, отличного от нуля, не больше чем его степень.*

Теорема Безу позволяет найти остаток от деления многочлена  $f(x)$  на двучлен  $x - \alpha$ . Но при решении некоторых задач необходимо знать не только остаток, но и частное. При делении многочлена на двучлен  $x - \alpha$  для отыскания частного и остатка применяют метод, называемый "схемой Горнера".

Частное от деления многочлена  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  на двучлен  $x - \alpha$  будет иметь степень на 1 меньше. Запишем частное в виде  $g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ , и пусть остаток равен  $r$ . Коэффициенты частного и остаток вычисляются по формулам:

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1 + \alpha b_0, \quad b_2 = a_2 + \alpha b_1, \dots, \quad b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2}, \\ r = a_n + \alpha b_{n-1}.$$

Схему Горнера удобно записывать в виде таблицы

коэффициенты делимого					
	$a_0$	$a_1$	$\dots$	$a_{n-1}$	$a_n$
$\alpha$	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + \alpha b_0$	$\dots$	$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2}$	$r = a_n + \alpha b_{n-1}$
коэффициенты частного					остаток

Если число  $\alpha$  является корнем многочлена  $f(x)$ , то по теореме Безу  $f(x)$  делится на  $x - \alpha$ . При этом может оказаться, что число  $\alpha$  является



корнем частного, тогда  $f(x)$  будет делиться на  $(x - \alpha)^2$  и так далее. В таких случаях число  $\alpha$  называется **кратным корнем многочлена**.

Число  $\alpha$  называется **корнем кратности  $k$**  многочлена  $f(x)$ , если  $f(x)$  делится на  $(x - \alpha)^k$ , но не делится на  $(x - \alpha)^{k+1}$ , то есть  $f(x) = (x - \alpha)^k \cdot q(x)$  и  $q(\alpha) \neq 0$ . Корни кратности 1 называют **простыми** корнями.

В теории многочленов важным является вопрос о существовании корней многочлена. Ответ на этот вопрос дает *основная теорема* алгебры многочленов.

**Теорема 19.6. (основная теорема алгебры многочленов).** *Всякий многочлен степени  $n \geq 1$  с комплексными коэффициентами<sup>17</sup> имеет, по крайней мере, один комплексный корень.*

Приведенная выше теорема впервые была строго доказана Гауссом и часто называется поэтому теоремой Гаусса. Большой интерес представляют следствия, которые вытекают из основной теоремы алгебры многочленов.

**Следствие 19.7.** *Всякий многочлен степени  $n \geq 1$  с комплексными коэффициентами раскладывается в произведение  $n$  линейных множителей.*

**Следствие 19.8.** *Всякий многочлен степени  $n \geq 1$  с комплексными коэффициентами имеет  $n$  корней, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность.*

**Следствие 19.9.** *Всякий многочлен степени  $n \geq 1$  с действительными коэффициентами раскладывается в произведение линейных двучленов и квадратных трехчленов с отрицательными дискриминантами, имеющими действительные коэффициенты.*

В случае многочленов с целыми коэффициентами всегда можно отыскать его рациональные, в частности, целые корни, если, конечно, они существуют. Способ отыскания рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами дается следующей теоремой.

<sup>17</sup>Комплексным числом называется число вида  $a + bi$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $i^2 = -1$ .

**Теорема 19.10.** Если несократимая дробь  $\frac{p}{q}$  является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то его свободный член делится на  $p$ , а старший коэффициент делится на  $q$ .

Из этой теоремы вытекает важное

**Следствие 19.11.** Все рациональные корни приведенного многочлена с целыми коэффициентами — целые и являются делителями свободного члена.

## §20. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.

Пусть оператор  $A : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$  (отображает  $\mathbb{R}_n$  в себя).

**Определение 20.1.** Вектор  $\bar{x} \neq 0$  называется **собственным вектором**, а число  $\lambda$  — **собственным числом** линейного оператора  $A$ , если они связаны соотношением

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \quad (20.1)$$

(говорят, что в этом случае собственный вектор  $\bar{x}$  отвечает собственному числу  $\lambda$ ).

Из определения следует, что собственный вектор  $\bar{x} \neq 0$  при действии оператора  $A$  переходит в коллинеарный вектор. В связи с этим понятие собственного вектора является полезным и удобным при изучении многих вопросов матричной алгебры и ее приложений.

Возникает вопрос: при каких условиях линейный оператор имеет собственные векторы. Так у оператора подобия все векторы собственные, а оператор поворота на угол  $\varphi \neq \pi$  не имеет собственных векторов.

Найдем условия, при которых линейный оператор имеет собственные векторы.

Пусть  $A : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$  и  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$  — собственный вектор линейного оператора  $A$ , то есть  $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$  и  $A$  — матрица этого оператора. Перепишем равенство (20.1) в координатном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{array} \right. \quad \text{или}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{array} \right.$$

В матричном виде эта система имеет вид:

$$(A - \lambda E)\bar{x} = 0. \quad (20.2)$$

Система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен 0.

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (20.3)$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (20.4)$$

Определитель  $|A - \lambda E|$  является многочленом степени  $n$  относительно  $\lambda$  и называется **характеристическим многочленом**, а равенство (20.3) называется **характеристическим уравнением** оператора  $A$ . Решим уравнение (найдем его корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ). Подставляя найденные собственные значения  $\lambda_i$  в систему (20.2), найдем собственные векторы  $\bar{x}_i$ , отвечающие собственным числам  $\lambda_i$ .

Все вычисления корректны, так как справедлива теорема:

**Теорема 20.1.** *Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса.*

*Доказательство.* Пусть  $A$  — матрица оператора  $A$  в базисе  $\{\bar{e}_i\}$ ,  $A^*$  — матрица оператора  $A$  в базисе  $\{\bar{f}_j\}$ ,  $C$  — матрица перехода от базиса

$\{\bar{e}_i\}$  к базису  $\{\bar{f}_j\}$ . По теореме 19.4  $A^* = C^{-1}AC$ . Рассмотрим и преобразуем характеристический многочлен  $|A^* - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda C^{-1}EC| = |C^{-1}(A - \lambda E)C| = |C^{-1}||A - \lambda E||C| = |A - \lambda E||C^{-1}C| = |A - \lambda E|$ .  $\square$

**Пример 20.1.** Найдите собственные числа и собственные векторы оператора  $A\bar{x} = (2x_1 + 3x_2, 2x_1 + x_2, x_1 - 3x_2 + 2x_3)$ .

**Решение .** Найдем образы векторов канонического базиса:  $A\bar{e}_1 = (2, 2, 1)$ ;  $A\bar{e}_2 = (2, 1, 0)$ ;  $A\bar{e}_3 = (1, -3, 2)$  и запишем матрицу оператора в этом базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по третьему столбцу, получим уравнение  $(2 - \lambda)((2 - \lambda)(1 - \lambda) - 6) = 0$  или  $(2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$ . Решив его, найдем собственные числа оператора:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 4$ ,  $\lambda_3 = 2$ .

Чтобы найти собственные векторы, для каждого значения  $\lambda$  решим систему

$$(A - \lambda E)X = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & -3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Рассмотрим  $\lambda_1 = -1$ . Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{Ее общее решение} \begin{cases} x_2 = -x_1, \\ x_3 = -\frac{4}{3}x_1. \end{cases}$$

Получили собственный вектор  $\bar{c}_1 = (3, -3, -4)$  (можно взять любой коллинеарный ему вектор).

Рассмотрим  $\lambda_2 = 4$ . Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{Ее общее решение} \begin{cases} x_2 = -1,5x_1, \\ x_3 = -0,5x_1. \end{cases}$$

Получили собственный вектор  $\bar{c}_2 = (2, -3, -1)$ .

Рассмотрим  $\lambda_3 = 2$ . Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases} \quad \text{Ее общее решение} \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Получили собственный вектор  $\bar{c}_3 = (0, 0, 1)$  ( $x_3$  – свободное неизвестное).

Собственные векторы оператора  $A$ :  $\bar{c}_1 = (3, -3, -4)$  отвечает собственному числу  $\lambda_1 = -1$ ,  $\bar{c}_2 = (2, -3, -1)$  отвечает собственному числу  $\lambda_2 = 4$ ,  $\bar{c}_3 = (0, 0, 1)$  отвечает

собственному числу  $\lambda_3 = 2$ .

**Пример 20.2.** Найдите собственные числа и собственные векторы мат-

рицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ .

**Решение .** Для матрицы  $A$  составим и решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ 4 & -1 - \lambda & 2 \\ 8 & -4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по первому строке, получим уравнение  $(3 - \lambda)((-1 - \lambda)(5 - \lambda) + 8) + 1(4(5 - \lambda) - 16) + 1(-16 - 8(-1 - \lambda)) = 0$  или  $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0$ . Решив его, найдем собственные числа оператора:  $\lambda_{1,2} = 1$ ,  $\lambda_3 = 5$ .

Чтобы найти собственные векторы, для каждого значения  $\lambda$  решим систему

$$(A - \lambda E)X = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ 4 & -1 - \lambda & 2 \\ 8 & -4 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Рассмотрим  $\lambda = 1$ . Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 8x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{Ее общее решение } x_3 = x_2 - 2x_1.$$

Получили, что собственному числу  $\lambda = 1$  отвечают две линейно независимых собственных вектора  $\bar{c}_1 = (1, 0, -2)$  и  $\bar{c}_2 = (0, 1, 1)$ .

Рассмотрим  $\lambda = 5$ . Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0, \\ 8x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases} \quad \text{Ее общее решение } \begin{cases} x_2 = 2x_1, \\ x_3 = 4x_1. \end{cases}$$

Получили собственный вектор  $\bar{c}_3 = (1, 2, 4)$ .

Собственные векторы оператора  $A$ :  $\bar{c}_1 = (1, 0, -2)$  и  $\bar{c}_2 = (0, 1, 1)$  отвечают собственному числу  $\lambda = 1$ ,  $\bar{c}_3 = (1, 2, 4)$  отвечает собственному числу  $\lambda = 5$ .

Рассмотрим свойства собственных чисел и собственных векторов линейного оператора  $A$ .

1) Если собственный вектор  $\bar{x} \neq 0$  отвечает собственному числу  $\lambda$ , то для любого числа  $\alpha \neq 0$  вектор  $\alpha\bar{x}$  также будет собственным вектором.

Действительно,  $A(\alpha\bar{x}) = \alpha A\bar{x} = \alpha(\lambda\bar{x}) = \lambda(\alpha\bar{x})$ .

2) *Линейная комбинация собственных векторов оператора  $A$ , отвечающих одному собственному числу  $\lambda$ , также является собственным вектором этого оператора.*

Если  $\bar{x} \neq 0$  и  $\bar{y} \neq 0$  – собственные векторы, отвечающие одному числу  $\lambda$ , то для любых чисел  $\alpha$  и  $\beta$  вектор  $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \neq 0$  также будет собственным вектором. Действительно,  $A(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha A\bar{x} + \beta A\bar{y} = \alpha\lambda\bar{x} + \beta\lambda\bar{y} = \lambda(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y})$ .

3) *Множество собственных векторов, отвечающих одному собственному числу  $\lambda$  вместе с нулевым вектором образует линейное подпространство в пространстве  $\mathbb{R}_n$ .*

Определитель  $|A - \lambda E|$  является многочленом степени  $n$  относительно  $\lambda$ . По теореме Безу, если  $\lambda_0$  – корень многочлена, то есть  $P(\lambda_0) = 0$ , то  $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda)$ , где  $Q(\lambda_0) \neq 0$ . Если  $k = 1$ , то  $\lambda_0$  – простой корень многочлена, если  $k > 1$ , то  $\lambda_0$  – корень многочлена кратности  $k$ .

4) *Если  $\lambda_0$  – корень характеристического многочлена кратности  $k$ , то ему соответствует не более  $k$  собственных векторов.*

5) *Собственные векторы  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$  линейного оператора  $A$ , отвечающие различным собственным числам  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  линейно независимы.*

6) *Число, отличных от нуля собственных чисел матрицы  $A$ , равно ее рангу. В частности, все собственные числа матрицы  $A$  отличны от нуля только тогда, когда матрица  $A$  невырожденная.*

Наиболее простыми линейными операторами являются операторы, которые имеют  $n$  линейно независимых собственных векторов  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ , относящихся к различным собственным числам  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Приняв векторы  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  за базис (это можно сделать, так как они линейно независимы), и вычислив их образы  $A\bar{e}_i = \lambda_i\bar{e}_i$ , найдем матрицу линейного оператора в этом базисе

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Справедлива теорема

**Теорема 20.2.** *Матрица линейного оператора в базисе, состоящем из собственных векторов этого оператора, имеет диагональный вид.*

Верно и обратное утверждение:

**Теорема 20.3.** *Если матрица линейного оператора  $A$  в некотором базисе является диагональной, то все векторы этого базиса — собственные векторы линейного оператора.*

Из теорем 20.2 и 20.3 следует важное условие, достаточное для того, что для оператора  $A$  существовал базис, состоящий из собственных векторов.

**Теорема 20.4.** *Если оператор  $A$  имеет  $n$  различных действительных собственных значений, то в линейном пространстве  $\mathbb{R}_n$  существует базис из собственных векторов линейного оператора и матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид.*

Собственные числа линейного оператора обладают следующими свойствами:

1) *Сумма собственных чисел матрицы  $A$  равна следу этой матрицы, то есть сумме ее диагональных элементов.*

2) *Произведение собственных чисел матрицы  $A$  равно определителю этой матрицы.*

3) *Если  $\lambda_0$  — собственное число невырожденной матрицы  $A$ , то  $1/\lambda_0$  — собственное число матрицы  $A^{-1}$ .*

Рассмотрим линейный оператор  $A$ , матрица которого является симметрической. Собственные числа и собственные вектора такого оператора обладают свойствами:

1. *Все собственные числа симметричной матрицы действительны.*
2. *Собственные векторы симметричной матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

Для примера рассмотрим матрицу второго порядка. Пусть  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  — симметрическая матрица порядка 2. Характеристиче-

ское уравнение этой матрицы имеет вид  $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$  или  $\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0$ . Дискриминант полученного квадратного уравнения  $D = (a - c)^2 + 4b^2$  неотрицателен. Значит, уравнение имеет два действительных корня.

**Пример 20.3.** Найдите собственные числа и собственные векторы опе-

ратора  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Решение .** Матрица  $A$  — симметрическая. Покажем, что собственные числа этой матрицы действительные, а собственные вектора, соответствующие различным собственным числам, попарно ортогональны.

Составим и решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по первому столбцу, получим уравнение  $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$ . Решив его, найдем собственные числа оператора:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 5$ . Найдем собственные векторы.

Собственные векторы оператора  $A$ :  $\bar{c}_1 = (2, 1, -1)$  отвечает собственному числу  $\lambda_1 = -1$ ,  $\bar{c}_2 = (1, -1, 1)$  отвечает собственному числу  $\lambda_2 = 2$ ,  $\bar{c}_3 = (0, 1, 1)$  отвечает собственному числу  $\lambda_3 = 5$ .

Проверим, что собственные векторы ортогональны. Так  $(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 0$ ,  $(\bar{c}_1, \bar{c}_3) = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$ ,  $(\bar{c}_2, \bar{c}_3) = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$ . Из равенства нулю скалярных произведений следует попарная ортогональность векторов  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ .

### Задания для самостоятельного решения

**Задание 20.1.** Проверьте, что вектор  $\bar{a} = (1; -1; -1; -1)$  является соб-

ственным вектором линейного оператора  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Задание 20.2.** Известно, что для некоторого вектора  $A\bar{a} = -4\bar{a}$ . Найдите собственное число, отвечающее вектору  $\bar{a}$ .



**Задание 20.3.** Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора  $A\bar{x} = (3x_1 + 4x_2; 5x_1 + 2x_2)$ .

**Задание 20.4.** Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора  $A\bar{x} = (2x_1 + x_3; 2x_1 + 3x_2 + 5x_3; 2x_1 + 3x_3)$ .

**Задание 20.5.** Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора  $A\bar{x} = (2x_1 - 3x_2 + 2x_3; 4x_2 + 3x_3; 2x_2 - x_3)$ .

**Задание 20.6.** Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора  $A\bar{x} = (3x_1 + 4x_2; x_1 - 2x_2; 2x_1 + x_2 - x_3)$ .

**Задание 20.7.** Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора  $A\bar{x} = (5x_1 + x_2 + 2x_3; 2x_2; 4x_1 - 2x_2 + 3x_3)$ .

**Задание 20.8.** Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора  $A\bar{x} = (4x_1 - x_2 - x_3; 6x_2; 2x_1 + 5x_2 + x_3)$ .

**Задание 20.9.** Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора  $A\bar{x} = (x_1 + x_2 - 2x_3; 4x_1 + x_2 + 3x_3; -x_3)$ .

**Задание 20.10.** Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора  $A\bar{x} = (x_1 - 5x_2 - 5x_3; 2x_1 - x_2 + 4x_3; x_1 + 7x_2 + 11x_3)$ .

**Задание 20.11.** Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора  $A\bar{x} = (5x_1 + 6x_2 + 3x_3; -x_1 + x_3; x_1 + 2x_2 - x_3)$ .

**Задание 20.12.** Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора  $A\bar{x} = (3x_1 + x_2; -4x_1 - x_2; 4x_1 - 8x_2 - 2x_3)$ .

**Задание 20.13.** Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора  $A\bar{x} = (-x_2 + x_3; -x_1 + 3x_2 + 2x_3; x_1 + 2x_2 + 3x_3)$ .

## §21. Квадратичные формы.

При решении различных прикладных задач часто приходится исследовать квадратичные формы.

**Определение 21.1.** *Квадратичной формой*  $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от  $n$  переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (21.1)$$

Будем считать, что коэффициенты квадратичной формы  $a_{ij}$  — действительные числа, причем  $a_{ij} = a_{ji}$ . Матрица  $A = (a_{ij})$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), составленная из коэффициентов квадратичной формы, называется *матрицей квадратичной формы*. Матрица  $A$  является симметричной.

В матричной записи квадратичная форма имеет вид

$$L = XAX^T, \quad (21.2)$$

где  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — матрица-строка переменных.

**Пример 21.1.** Запишите в матричном виде квадратичную форму  $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 14x_2x_3 + 3x_2^2 - 9x_3^2$ .

**Решение .** Найдем матрицу квадратичной формы. Ее диагональные элементы равны коэффициентам при квадратах переменных, то есть 4, 1,  $-3$ , а другие — половине соответствующих коэффициентов квадратичной формы. Поэтому матрица квадратичной формы имеет вид  $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & -9 \end{pmatrix}$  и квадратичную форму можно

записать

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Выясним, как изменяется квадратичная форма при невырожденном линейном преобразовании переменных.

Пусть матрицы-столбцы переменных  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  и  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  связаны соотношением  $X = CY$ , где  $C = (c_{ij})$  — невырожденная матрица порядка  $n$ .

При невырожденном линейном преобразовании переменных  $X = CY$  матрица квадратичной формы принимает вид

$$A^* = C^T A C.$$

Квадратичная форма  $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  называется **канонической** (имеет канонический вид), если  $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .

$$L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2. \quad (21.3)$$

Матрица квадратичной формы, заданной в каноническом виде, является диагональной.

Справедлива теорема.

**Теорема 21.1.** Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.

**Пример 21.2.** Приведите к каноническому виду квадратичную форму  $L(x, y) = 3x^2 - 12xy + 2y^2$ .

**Решение .** Сначала выделим полный квадрат при переменной  $x$ :

$$L(x, y) = 3(x^2 - 4xy + 4y^2) - 12y^2 + 2y^2 = 3(x - 2y)^2 - 10y^2.$$

Получили, что невырожденное линейное преобразование  $x_1 = x - 2y$ ,  $y_1 = y$  приводит данную квадратичную форму к виду:  $L_1(x_1, y_1) = 3x_1^2 - 10y_1^2$ .

Можно преобразовать квадратичную форму и другим способом.

$L(x, y) = 2(y^2 - 6xy + 9x^2) - 18x^2 + 2x^2 = 2(3x - y)^2 - 15x^2$ . Итак, выполнив преобразование  $x_2 = x$ ,  $y_2 = 3x - y$ , получим другой канонический вид квадратичной формы  $L(x_2, y_2) = -15x_2^2 + 2y_2^2$ .

**Пример 21.3.** Приведите к каноническому виду квадратичную форму  $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$ .

**Решение .** Сначала выделим полный квадрат при  $x_1$ , а затем при  $x_2$ :

$$\begin{aligned} L &= \left[ x_1^2 - 2x_1 \left( \frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3) \right) + \left( \frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3) \right)^2 \right] - \left( \frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3) \right)^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = \\ &= \left( x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 \right)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 + 6x_2x_3 - 4x_3^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = \left( x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 \right)^2 - \\ &- \frac{9}{4} \left( x_2^2 - \frac{32}{9}x_2x_3 + \frac{256}{81}x_3^2 \right) + \frac{9}{4} \cdot \frac{256}{81}x_3^2 - 3x_3^2 = \left( x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 \right)^2 - \frac{9}{4} \left( x_2 - \frac{16}{9}x_3 \right)^2 + \\ &+ \frac{37}{9}x_3^2. \end{aligned}$$

Получили, что невырожденное линейное преобразование  $y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3$ ,  $y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3$ ,  $y_3 = x_3$  приводит данную квадратичную форму к виду:

$$L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2.$$

Можно преобразовать квадратичную форму и другим способом. Так, выполнив преобразование  $z_1 = x_1$ ,  $z_2 = 2x_1 + x_2 + x_3$ ,  $z_3 = \frac{7}{2}x_1 + x_2$ , получим другой канонический вид квадратичной формы  $L_2(z_1, z_2, z_3) = \frac{37}{4}z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ .

Мы видим, что канонический вид квадратичной формы не является однозначно определенным. Одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду разными способами. Однако полученные различными способами канонические формы обладают рядом общих свойств.

**Теорема 21.2. (Закон инерции квадратичных форм)** *Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами канонического вида квадратичной формы не зависит от способа приведения квадратичной формы к этому виду.*

Следует отметить, что *ранг матрицы квадратичной формы*, называемый также *рангом квадратичной формы*, равен числу отличных от нуля коэффициентов канонического вида квадратичной формы и не меняется при линейных преобразованиях.

Векторы ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называются **главными осями квадратичной формы**. Главные оси квадратичной формы совпадают с ортонормированным базисом, состоящим из собственных векторов, канонические коэффициенты – с собственными числами матрицы квадратичной формы.

В примере 21.3 матрица является симметричной, поэтому ее можно рассматривать как матрицу квадратичной формы  $L(x, y, z) = 3y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz + 4yz$ . Собственные числа и собственные векторы этой квадратичной формы:  $\bar{c}_1 = (2, 1, -1)$  отвечает собственному числу  $\lambda_1 = -1$ ,  $\bar{c}_2 = (1, -1, 1)$  отвечает собственному числу  $\lambda_2 = 2$ ,  $\bar{c}_3 = (0, 1, 1)$  отвечает собственному числу  $\lambda_3 = 5$ . По теореме 21.6 векторы  $\bar{c}_1$ ,  $\bar{c}_2$  и  $\bar{c}_3$  линейно независимы. Ранее мы показали, что эти векторы попарно ортогональны. Нормируем вектора:

$$|\bar{c}_1| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}, \text{ тогда } \bar{c}'_1 = (2/\sqrt{6}; -1/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6});$$

$$|\bar{c}_2| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}, \text{ тогда } \bar{c}'_2 = (1/\sqrt{3}; -1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3});$$

$$|\bar{c}_3| = \sqrt{0 + 1 + 1} = \sqrt{2}, \text{ тогда } \bar{c}'_3 = (0; 1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}).$$

Векторы  $\bar{c}'_1$ ,  $\bar{c}'_2$ ,  $\bar{c}'_3$  образуют ортонормированный базис.

**Теорема 21.3.** Ранг квадратичной формы не меняется при невырожденных линейных преобразованиях.

Квадратичная форма  $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется **положительно (отрицательно) определенной**, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, справедливо неравенство

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 \quad (L(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0).$$

**Теорема 21.4.** Для того, чтобы квадратичная форма  $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$  была положительно (отрицательно) определенной необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа  $\lambda_i$  матрицы  $A$  квадратичной формы были положительны (отрицательны).

В ряде случаев при установлении знакопостоянства квадратичной формы удобно бывает применить следующий критерий.

**Теорема 21.5. (критерий Сильвестра)** Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны, то есть  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ . Квадратичная форма будет отрицательно определенной, если знаки главных миноров чередуются, причем  $\Delta_1 < 0$ .

**Пример 21.4.** Дана квадратичная форма  $L(x_1, x_2) = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$ . Докажем, что она является знакоопределенной (то есть положительной или отрицательной).

**Решение .** Запишем матрицу квадратичной формы  $A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ .

1 способ. Найдем собственные числа этой матрицы. Для этого решим характеристическое уравнение  $|A - \lambda E| = 0$ , то есть  $\begin{vmatrix} 13 - \lambda & -3 \\ -3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$  или  $\lambda^2 - 18\lambda + 56 = 0$ . Получили, что  $\lambda_1 = 14, \lambda_2 = 4$ . Так как корни характеристического уравнения положительны, то квадратичная форма положительно определена.

2 способ. Согласно критерию Сильвестра  $\Delta_1 = 13 > 0, \Delta_2 = 56 > 0$ . Значит, квадратичная форма положительно определена.

**Пример 21.5.** Дана квадратичная форма  $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 3x_3^2$ . Докажем, что она является знакоопределенной (то есть

положительной или отрицательной).

**Решение** . Найдем матрицу квадратичной формы  $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Согласно критерию Сильвестра  $\Delta_1 = 4 > 0$ ,  $\Delta_2 = 7 > 0$ ,  $\Delta_3 = 5 > 0$ . Квадратичная форма положительно определена.

## Глава II

# Векторная алгебра

### §1. Векторы. Линейные операции над векторами.

Векторы — мощный инструмент математики и физики. На языке векторов формулируются основные законы механики и электродинамики. Отметим, что в физике векторная величина обладает размерностью. Размерность вектора — это размерность его модуля.

Пусть задано линейное пространство, элементами которого являются точки, и в котором введено расстояние между точками.

**Вектором** в заданном пространстве называется упорядоченная пара точек  $A$  и  $B$  или, что тоже самое, направленный отрезок, соединяющий эти точки. Обозначается вектор  $\overline{AB}$ , точка  $A$  — начало вектора, точка  $B$  — конец вектора. Вектор можно обозначать и одной малой латинской буквой, например  $\vec{a}$ .

Изображается вектор отрезком со стрелкой на конце. Начало вектора называют точкой его приложения. Если точка  $A$  является началом вектора  $\overline{AB}$ , то мы будем говорить, что вектор  $\overline{AB}$  приложен в точке  $A$ .

**Модулем (длиной) вектора  $\overline{AB}$**  называется расстояние между точками  $A$  и  $B$ .

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется **нулевым вектором**. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Для того чтобы задать ненулевой вектор необходимо задать его направление и длину.

Величины, которые характеризуются только числом, называют **скалярными**. Величины, характеризующиеся числом и направлением, называют **векторными**.

Векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  называют **сонаправленными** ( $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ ), если они лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала.

Векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  называют **противоположно направленными** ( $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$ ), если они лежат по разные стороны от прямой, соединяющей их начала.

Два ненулевых вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называют **коллинеарными (параллельными)**, если они лежат на одной или на параллельных прямых.

Три ненулевых вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  называют **компланарными**, если они параллельны некоторой плоскости (лежат в одной плоскости).

Два вектора  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  **равны** ( $\overline{AB} = \overline{CD}$ ), если они коллинеарны, сонаправлены и их модули равны:  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ,  $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ ,  $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ .

Векторы, начало которых можно приложить в любой точке, называются **свободными**. Отложить вектор  $\vec{a}$  от точки  $A$  — это значит построить вектор  $\overline{AB}$ , равный вектору  $\vec{a}$ .

Вектор  $\vec{a}$ , длина которого равна 1, называется **единичным (нормированным)**.

**Углом между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$**  называется угол между коллинеарными им векторами, отложенными из одной точки (угол считается положительным, если движение от вектора  $\vec{a}$  к вектору  $\vec{b}$  производится против часовой стрелки).

Если угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $90^\circ$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **ортогональными (перпендикулярными)**.

Во множестве векторов введем операции сложения и вычитания векторов и операцию умножения вектора на число.

**Суммой** векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  называется вектор  $\vec{s}$ , получающийся следующим образом: от точки  $A_0$  откладываем вектор  $\vec{a}_1$ , от конца  $A_1$  получившегося вектора  $\overline{A_0A_1} = \vec{a}_1$  откладываем вектор  $\vec{a}_2$  и так далее. Суммой  $\vec{s}$  является вектор  $\overline{A_0A_n}$ , соединяющий начальную точку  $A_0$  с точкой  $A_n$  концом последнего вектора.



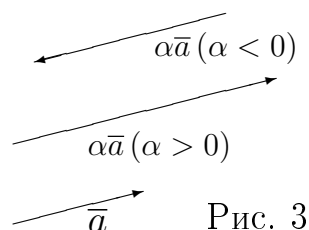
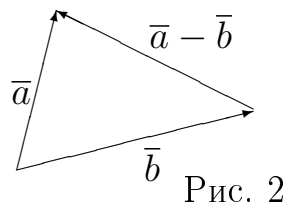
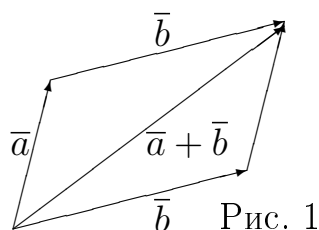
Сумму двух векторов можно также находить по "правилу параллелограмма" (Рис. 1).

Операция вычитания векторов определяется как операция, обратная операции сложения.

**Разностью**  $\bar{a} - \bar{b}$  векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называют такой вектор  $\bar{d}$ , который в сумме с вектором  $\bar{b}$  дает вектор  $\bar{a}$ , то есть  $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$ , если  $\bar{b} + \bar{d} = \bar{a}$ . Чтобы построить вектор  $\bar{d}$  нужно векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  отложить от одной точки, соединить концы получившихся векторов и направить вектор от конца вычитаемого к концу уменьшаемого (Рис. 2).

**Произведением** ненулевого вектора  $\bar{a}$  на число  $\alpha$  называется вектор  $\bar{b}$ , который коллинеарен вектору  $\bar{a}$ , сонаправлен с ним, если  $\alpha > 0$  и противоположен, если  $\alpha < 0$  и его модуль равен произведению модуля вектора  $\bar{a}$  на модуль числа  $\alpha$ , то есть 1)  $\bar{b} \parallel \bar{a}$ ; 2)  $\bar{b} \uparrow\uparrow \bar{a}$ , если  $\alpha > 0$ ,  $\bar{b} \uparrow\downarrow \bar{a}$ , если  $\alpha < 0$ ; 3)  $|\bar{b}| = |\alpha| \cdot |\bar{a}|$  (Рис. 3).

Вектор  $\bar{b}$  называется **противоположным** вектору  $\bar{a}$ , если  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{0}$ . Обозначается вектор, противоположный вектору  $\bar{a}$ , через  $-\bar{a}$ .



Во множестве геометрических векторов выполняются все аксиомы линейного пространства, то есть множество векторов (направленных отрезков) образует линейное пространство.

Выражение  $k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \dots + k_n\bar{a}_n$  называется **линейной комбинацией векторов**  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ . Если линейная комбинация  $k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \dots + k_n\bar{a}_n = \bar{0}$  тогда и только тогда, когда  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ , то такие вектора называют **линейно независимыми**. Максимальная система линейно независимых векторов образует **базис**.

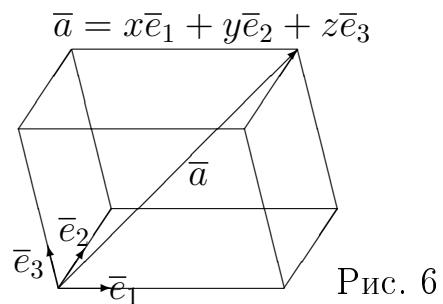
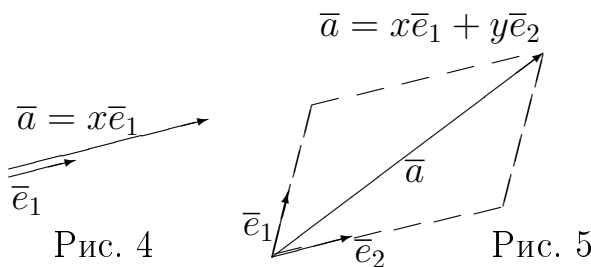
Понятию линейной зависимости векторов в  $\mathbb{V}_3$  можно дать геометрическую характеристику.

*Для того чтобы два ненулевых вектора были линейно зависимы необ-*

ходимо и достаточно чтобы они были коллинеарны. Таким образом, за базис пространства  $\mathbb{V}_1$  — множества векторов лежащих прямой можно взять любой ненулевой вектор  $\bar{e}_1$  этой прямой. Тогда  $\bar{a} = x\bar{e}_1$ .

Для того чтобы три ненулевых вектора были линейно зависимы необходимо и достаточно чтобы они были компланарны. Таким образом, за базис пространства  $\mathbb{V}_2$  — множества векторов лежащих в плоскости можно взять два любых ненулевых неколлинеарных вектора  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$ . Тогда любой вектор представим в виде

$$\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2. \quad (1.1)$$



В пространстве  $\mathbb{V}_3$  любые четыре вектора линейно зависимы, поэтому в качестве базиса можно взять любые три некопланарных вектора  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ . Тогда любой вектор представим в виде

$$\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3. \quad (1.2)$$

Коэффициенты разложения вектора по базису называются **координатами** вектора в данном базисе.

Координаты вектора в данном базисе определяются однозначно.

Базис пространства  $\mathbb{V}_n (n = 1, 2, 3)$  называется **декартовым**, если базисные вектора являются единичными и взаимно ортогональными.

Если задана декартова система координат, то на плоскости  $\mathbb{V}_2$  базис состоит из векторов  $\bar{i}, \bar{j}$ , а в пространстве  $\mathbb{V}_3$  — из векторов  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ . В этом случае любой вектор можно задать своими координатами:  $\bar{a} = (x; y; z)$  или  $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ . **Координаты точки** — это координаты ее радиус-вектора, то есть вектора соединяющего начало координат и точку.

Линейные операции над векторами сводятся к линейным операциям над их координатами.

Считаем, что нам задана декартова система координат: начало координат — точка  $O(0; 0; 0)$  и оси координат  $OX, OY, OZ$  (базисные вектора  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ).

Сумма, разность и произведение вектора на число в координатной форме записываются следующим образом:

если  $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1), \bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$ , то

$$\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2), \quad (1.3)$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2), \quad (1.4)$$

$$\alpha\bar{a} = (\alpha x_1; \alpha y_1; \alpha z_1). \quad (1.5)$$

Выведем формулу для вычисления координат вектора, если известны координаты его начала и конца. Пусть  $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$ . Тогда

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (1.6)$$

Чтобы найти координаты вектора из координат конца вектора нужно вычесть координаты начала вектора.

**Пример 1.1.** Даны три вектора  $\bar{p} = (-1; 1; 3), \bar{q} = (1; 3; -2), \bar{r} = (3; -1; 2)$ . Найдите разложение вектора  $\bar{a} = (2; -2; 15)$  по базису  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ .

**Решение** . Покажем, что векторы  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$  линейно независимы. Для этого вычислим определитель матрицы, составленной из координат векторов.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 11 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = -42.$$

Следовательно, данные вектора линейно независимы и они образуют базис. По формуле (1.2) разложение вектора по базису имеет вид  $\bar{a} = x\bar{p} + y\bar{q} + z\bar{r}$ . Запишем это равенство в координатной форме

$$\begin{cases} -x + y + 3z = 2, \\ x + 3y - z = -2, \\ 3x - 2y + 2z = 15. \end{cases}$$

Решение системы  $x = 3, y = -1, z = 2$  и искомое разложение имеет вид  $\bar{a} = 3\bar{p} - \bar{q} + 2\bar{r}$ .

## §2. Деление отрезка в данном отношении.

Будем говорить, что точка  $C$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $\lambda$ , если  $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$ . Если  $C \in AB$ , то вектора  $\overline{AC} \uparrow \overline{CB}$  и  $\lambda > 0$  (рис. 7). Если

$C \notin AB$ , то вектора  $\overline{AC} \uparrow \downarrow \overline{CB}$  и  $\lambda < 0$  (рис. 8).

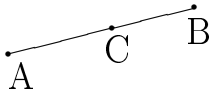


Рис.7

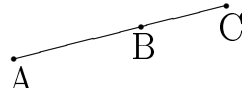


Рис.8

Пусть точки  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ ,  $C(x; y; z)$  заданы своими координатами и точка  $C$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $\lambda$ , тогда  $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$ .

Запишем это равенство в координатной форме:

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1), \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1). \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем координаты точки  $C$ :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (2.1)$$

Если  $C$  — середина отрезка  $AB$ , то  $\lambda = 1$  и  $C \left( \frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$ .

**Пример 2.1.** Отрезок  $AB$ , концы которого находятся в точках  $A(-1; 4; 7)$  и  $B(11; 7; -2)$  разделили на три равные части. Найдите координаты точек деления.

**Решение .** По условию задачи  $AC = 0,5CB$ ,  $AD = 2DB$ . Обозначим координаты точек деления  $C(x_C, y_C, z_C)$  и  $D(x_D, y_D, z_D)$ .

Найдем координаты точки  $C$ . Для этой точки  $\lambda = 0,5$ . По формуле (2.1) имеем  $x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}$ ;  $y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}$ ;  $z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}$ .

Следовательно,  $x_C = \frac{-1 + 0,5 \cdot 11}{1 + 0,5} = 3$ ;  $y_C = \frac{4 + 0,5 \cdot 7}{1 + 0,5} = 5$ ;  $z_C = \frac{7 + 0,5 \cdot (-2)}{1 + 0,5} = 4$  и  $C(3; 5; 4)$ .

Аналогично для точки  $D$   $\lambda = 2$  и  $x_D = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}$ ;  $y_D = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}$ ;  $z_D = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}$ .

Следовательно,  $x_D = \frac{-1 + 2 \cdot 11}{1 + 2} = 7$ ;  $y_D = \frac{4 + 2 \cdot 7}{1 + 2} = 6$ ;  $z_D = \frac{7 + 2 \cdot (-2)}{1 + 2} = 1$  и  $D(7; 6; 1)$ .

**Пример 2.2.** Точки  $A(-1; 4; 7)$ ,  $B(5; 3; 2)$ ,  $C(-3; 1; 5)$  являются вершинами параллелограмма  $ABCD$ . Найдите его четвертую вершину  $D$ .

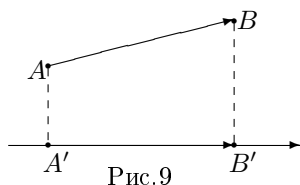
**Решение .** 1 способ. В параллелограмме противоположные стороны параллельны и равны, следовательно равны вектора  $\overline{AB}$  и  $\overline{DC}$ . Обозначим координаты точки  $D(x; y; z)$ . Тогда  $\overline{AB} = (6; -1; -5)$ ,  $\overline{DC} = (-3 - x; 1 - y; 5 - z)$ . Приравняв соответствующие координаты векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{DC}$ , получим, что  $x = -9$ ,  $y = 2$ ,  $z = 10$ .

2 способ. Точка  $P$  пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  параллелограмма делит их пополам. Обозначим координаты точки  $D(x; y; z)$ . Точка  $P$  — середина  $AC$ , следовательно,  $x_P = \frac{-1 - 3}{2} = -2$ ,  $y_P = \frac{4 + 1}{2} = 2,5$ ,  $z_P = \frac{7 + 5}{2} = 6$ . С другой стороны точка

$P$  — середина отрезка  $BD$ , следовательно,  $x_P = \frac{5+x}{2}$ ,  $y_P = \frac{3+y}{2}$ ,  $z_P = \frac{2+z}{2}$ . Приравняв соответствующие координаты точки  $P$ , получим, что  $x = -9$ ,  $y = 2$ ,  $z = 10$ .

### §3. Проекция вектора на ось.

**Осью** называется прямая с заданным на ней вектором  $\bar{e}$  (для удобства рассуждений будем считать, что  $|\bar{e}| = 1$ ). **Ортогональной проекцией** точки  $A$  на ось  $l$  называется основание перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на ось. **Ортогональной проекцией** вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$  называется вектор  $\overline{A'B'}$ , где  $A'$  — проекция точки  $A$ ,  $B'$  — проекция точки  $B$  на ось. **Скалярной проекцией** вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$  называется координата вектора  $\overline{A'B'}$  относительно вектора  $\bar{e}$ . Обозначается  $\text{пр}_l \overline{AB} = p$ ,  $\overline{A'B'} = p\bar{e}$ .



**Свойства проекции вектора на ось.**

1.  $\text{пр}_l \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между векторами  $\bar{a}$  и  $\bar{e}$ ,
2.  $\text{пр}_l(\bar{a} + \bar{b}) = \text{пр}_l \bar{a} + \text{пр}_l \bar{b}$ ,      3.  $\text{пр}_l(k\bar{a}) = k \cdot \text{пр}_l \bar{a}$ ,
4. Если  $\overline{A'B'} \uparrow \uparrow \bar{e}$ , то  $\text{пр}_l \overline{AB} > 0$ , если  $\overline{A'B'} \uparrow \downarrow \bar{e}$ , то  $\text{пр}_l \overline{AB} < 0$ .

### §4. Скалярное произведение векторов.

Перейдем к рассмотрению операции умножения векторов. Здесь имеются две возможности. Можно определить произведение векторов так, чтобы результатом являлось число (скаляр), а можно так, чтобы результатом явился вектор. В этом параграфе мы рассмотрим первую возможность.

Пусть в пространстве  $\mathbb{V}_3$  задана правая декартова система координат.

**Скалярным произведением** двух ненулевых векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между

ними:

$$|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a}, \bar{b}). \quad (4.1)$$

Если хотя бы один из сомножителей нулевой вектор, то скалярное произведение равно нулю.

Обозначается скалярное произведение векторов  $(\bar{a}, \bar{b})$  или просто  $\bar{a} \cdot \bar{b}$ .

**Свойства скалярного произведения.**

1.  $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ ;
2.  $(k\bar{a}, \bar{b}) = k(\bar{a}, \bar{b})$ ;
3.  $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ ;
4.  $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$ ;
5.  $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2 > 0$ , если  $\bar{a} \neq 0$ ,  $\bar{0} \cdot \bar{0} = 0$ ;
6. Если  $\bar{a} \neq 0$ ,  $\bar{b} \neq 0$ , то  $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$ , то есть скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда когда они ортогональны.

Пусть векторы заданы в декартовой системе своими координатами  $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$ . Тогда скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

Действительно,  $\bar{a} \cdot \bar{b} = (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k})(x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) = x_1x_2\bar{i}\bar{i} + x_1y_2\bar{i}\bar{j} + x_1z_2\bar{i}\bar{k} + y_1x_2\bar{j}\bar{i} + y_1y_2\bar{j}\bar{j} + y_1z_2\bar{j}\bar{k} + z_1x_2\bar{k}\bar{i} + z_1y_2\bar{k}\bar{j} + z_1z_2\bar{k}\bar{k} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ , так как  $\bar{i}\bar{j} = \bar{i}\bar{k} = \bar{j}\bar{k} = 0$ ,  $\bar{i}\bar{i} = \bar{j}\bar{j} = \bar{k}\bar{k} = 1$ .

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (4.2)$$

Скалярное произведение применяют

1. Для вычисления длины вектора. Если  $\bar{a} = (x; y; z)$ , то

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.3)$$

2. Для нахождения расстояния между точками  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$ . Так как  $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ , то

$$|AB| = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (4.4)$$

3. Для вычисления угла между векторами. Если  $\varphi$  — угол между векторами  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , то

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}. \quad (4.5)$$

4. Для вычисления направляющих косинусов вектора, то есть косинусов углов между вектором и осями координат. Если  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, которые вектор  $\bar{a} = (x; y; z)$  образует с осями  $OX, OY, OZ$  соответственно, то

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\bar{a}|}, \cos \beta = \frac{y}{|\bar{a}|}, \cos \gamma = \frac{z}{|\bar{a}|}. \quad (4.6)$$

Заметим, что направляющие косинусы вектора связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4.7)$$

5. Для вычисления проекции вектора на ось

$$\text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|}. \quad (4.8)$$

6. Для вычисления работы силы  $\bar{F}$  по перемещению материальной точки из точки  $M$  в точку  $N$ . Так как работа равна произведению силы, приложенной к точке, на путь, то

$$A = \bar{F} \cdot \overline{MN}. \quad (4.9)$$

Если к точке  $M$  приложены две силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , то работа суммы сил  $\bar{F}_1 + \bar{F}_2$  равна сумме работ этих сил

$$A = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) \cdot \overline{MN} = \bar{F}_1 \cdot \overline{MN} + \bar{F}_2 \cdot \overline{MN}.$$

7. Для вычисления кинетической энергии тела массы  $m$  движущегося со скоростью  $\bar{v} = (x; y; z)$ . Из физики известно, что кинетическая энергия вычисляется по формуле  $E = \frac{m}{2}(\bar{v}, \bar{v}) = \frac{m}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ .

**Пример 4.1.** Дан вектор  $\bar{a} = (-2; 6; -3)$ . Вычислите направляющие косинусы этого вектора.

**Решение .** Найдем модуль вектора  $|\bar{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-3)^2} = 7$ . Тогда по формулам (4.6) имеем  $\cos \alpha = -\frac{2}{7}$ ,  $\cos \beta = \frac{6}{7}$ ,  $\cos \gamma = -\frac{3}{7}$ .

**Пример 4.2.** Вектор  $\bar{a}$  образует с осями  $OX$  и  $OY$  углы  $45^\circ$  и  $120^\circ$  соответственно. Найдите его координаты, если  $|\bar{a}| = 6$ .

**Решение .** Найдем косинус угла, который вектор  $\bar{a}$  образует с осью  $OZ$ . Так как  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos \beta = -\frac{1}{2}$ , то  $\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$ . Тогда  $x = |\bar{a}| \cdot \cos \alpha = 3\sqrt{2}$ ,  $y = |\bar{a}| \cdot \cos \beta = 3$ ,  $z = |\bar{a}| \cdot \cos \gamma = \pm 3$ . Условию задачи удовлетворяют два вектора  $\bar{a}_1 = (3\sqrt{2}; 3; 3)$  и  $\bar{a}_2 = (3\sqrt{2}; 3; -3)$ .

**Пример 4.3.** При каком значении  $k$  векторы  $\bar{a} = (k; -4; 7)$  и  $\bar{b}(-3; 9; k)$  ортогональны.

**Решение .** По свойству 6 вектор  $\bar{a}$  ортогонален вектору  $\bar{b}$ , если  $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ . Вычислим скалярное произведение по формуле (4.2):  $\bar{a} \cdot \bar{b} = -3k - 36 + 7k = 4k - 36 = 0$ . Следовательно,  $k = 9$ .

**Пример 4.4.** Найдите работу, которую производит сила  $\bar{F} = (4; -1; 7)$ , когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки  $A(3; 11; -5)$  в точку  $B(10; 7; 4)$ .

**Решение .** Найдём путь, пройденный материальной точкой, под действием силы  $\bar{F}$ :  $\overline{AB} = (7; -4; 9)$ . По формуле (4.9) вычислим работу силы  $A = \bar{F} \cdot \overline{AB} = 28 + 4 + 63 = 95$ .

## §5. Векторное произведение векторов.

Перейдем к рассмотрению второй возможности, то есть рассмотрим произведение векторов результатом которого будет вектор.

Тройку векторов  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  будем называть *правой*, то есть из конца вектора  $\bar{c}$  поворот вектора  $\bar{a}$  к вектору  $\bar{b}$  на меньший угол производится против часовой стрелки.

Пусть в пространстве  $\mathbb{V}_3$  задана правая декартова система координат, то есть тройка векторов  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  правая.

**Векторным произведением** двух ненулевых векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называется вектор  $\bar{c}$ , такой что 1)  $\bar{c} \perp \bar{a}$ ,  $\bar{c} \perp \bar{b}$ ; 2)  $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ ; 3) тройка векторов  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  — правая.

Если хотя бы один из сомножителей нулевой вектор, то векторное произведение равно нулевому вектору.

Обозначается векторное произведение  $[\bar{a}, \bar{b}]$  или  $\bar{a} \times \bar{b}$ .

Реальным прообразом понятия векторного произведения является известное в механике понятие линейной скорости материальной точке при вращении ее вокруг оси. Здесь двум векторам угловой скорости  $\bar{\omega}$  и радиус вектору точки  $\bar{r}$  соответствует третий вектор линейная скорость точки  $\bar{v}$ , перпендикулярный двум первым  $|\bar{v}| = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{r}| \cdot \cos(\widehat{\bar{\omega}, \bar{r}})$ .

**Свойства векторного произведения.**

1.  $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$ , векторное произведение векторов антикоммутативно,



то есть при перемене мест сомножителей произведение меняет знак,

$$2. (\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}, \quad 3. [k\bar{a}, \bar{b}] = k[\bar{a}, \bar{b}],$$

4.  $|\bar{a} \times \bar{b}| = S_{\text{параллелограмма}}$ , то есть модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах,

5. Если  $\bar{a} \neq 0, \bar{b} \neq 0$ , то  $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$ , то есть векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти вектора коллинеарны.

Если вектора заданы координатами  $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1), \bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$ , то

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \times (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) = x_1x_2\bar{i} \times \bar{i} + x_1y_2\bar{i} \times \bar{j} + x_1z_2\bar{i} \times \bar{k} \\ &+ y_1x_2\bar{j} \times \bar{i} + y_1y_2\bar{j} \times \bar{j} + y_1z_2\bar{j} \times \bar{k} + z_1x_2\bar{k} \times \bar{i} + z_1y_2\bar{k} \times \bar{j} + z_1z_2\bar{k} \times \bar{k} = \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)\bar{i} \times \bar{j} + (x_1z_2 - x_2z_1)\bar{i} \times \bar{k} + (y_1z_2 - z_2y_1)\bar{j} \times \bar{k} = (x_1z_2 - x_2y_1)\bar{k} - \\ &- (x_1z_2 - x_2z_1)\bar{j} + (y_1z_2 - y_2z_1)\bar{i} = \bar{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

так как  $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}, \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}, \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$ .

Применив формулу разложения определителя по первой строке, получим формулу вычисления векторного произведения векторов, заданных своими координатами:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (5.1)$$

Векторное произведение применяют

1. Для вычисления площади параллелограмма или треугольника.
2. Для нахождения высоты параллелограмма или треугольника.
3. Для вычисления момента силы  $\bar{F}$ , приложенной к точке  $B$  относительно точки  $A$ .

Момент  $\bar{M} = \bar{M}_A(\bar{F})$  силы  $\bar{F}$ , приложенной к точке  $B$ , относительно точки  $A$  вычисляется по формуле  $\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$ , где  $\bar{r} = \bar{AB}$  вектор-рычаг силы  $\bar{F}$ . Направление силы  $\bar{F}$  можно определить по правилу правого буравчика (Рис. 10).

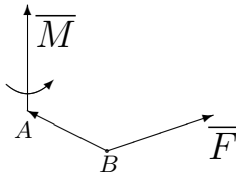


Рис. 10

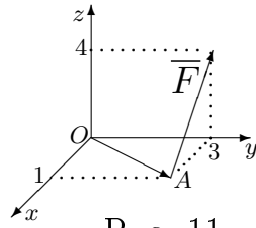


Рис. 11

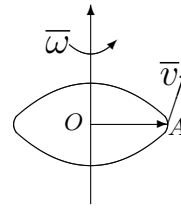


Рис. 12

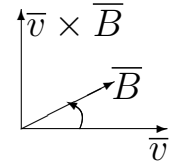


Рис. 13

4. Для нахождения линейной скорости  $\bar{v} = \bar{\omega} \times \overline{OM}$  вращения точки по окружности. Вектор угловой скорости  $\bar{\omega}$  точки перпендикулярен к плоскости окружности и его направление определяется по правилу правого буравчика при вращении его рукоятки в сторону скорости  $\bar{v}$  (Рис. 12).

5. Сила Лоренца  $\bar{F} = q(\bar{v} \times \bar{B})$  действует в магнитном поле  $B$  на движущийся со скоростью  $\bar{v}$  заряд  $q$ . Укажем направление силы Лоренца в случае положительного заряда. Векторы  $\bar{F}$ ,  $\bar{v} \times \bar{B}$  имеют одинаковое направление, так отличаются на положительный множитель  $q$ . Направление вектора  $\bar{v} \times \bar{B}$  находим по правилу правого буравчика: поворачиваем первый вектор  $\bar{v}$  в кратчайшем направлении к вектору  $\bar{B}$ . Поступательное движение буравчика покажет направление векторного произведения (Рис. 13).

**Пример 5.1.** Найдите модуль векторного произведения векторов  $3\bar{p} - 2\bar{q}$  и  $2\bar{p} + 5\bar{q}$ , если  $|p| = 4$ ,  $|q| = 3$  и угол между векторами  $\bar{p}$  и  $\bar{q}$  равен  $60^\circ$ .

**Решение .** По свойствам векторного произведения имеем  $(3\bar{p} - 2\bar{q}) \times (2\bar{p} + 5\bar{q}) = 6(\bar{p} \times \bar{p}) - 10(\bar{q} \times \bar{p}) + 15(\bar{p} \times \bar{q}) - 10(\bar{q} \times \bar{q}) = \bar{0} + 10(\bar{q} \times \bar{p}) + 15(\bar{q} \times \bar{p}) + \bar{0} = 25(\bar{q} \times \bar{p})$ . Тогда  $|25(\bar{q} \times \bar{p})| = 25 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 300 \cdot 0,5 = 150$ .

**Пример 5.2.** Дано  $A(-1; 4; 7)$ ,  $B(3; 8; 3)$ ,  $C(2; -3; 1)$ . Найдите высоту  $CH$  треугольника  $ABC$ , опущенную из вершины  $C$  на основание  $AB$ .

**Решение .** Найдем векторы, которые являются сторонами треугольника  $\overline{AB} = (4; 4; -4)$ ,  $\overline{AC} = (3; -7; -6)$ , вычислим векторное произведение этих векторов  $\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 4 & -4 \\ 3 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 12\bar{j} - 40\bar{k}$  и найдем его модуль  $|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{4^2 + 12^2 + (-40)^2} = \sqrt{1760} = 4\sqrt{110}$ .

Найдем площадь треугольника  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| = 2\sqrt{110}$ .

Из школы известна формула  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH$ , используя которую найдем высоту. Основание треугольника  $|\overline{AB}| = 4\sqrt{3}$ , и  $2\sqrt{110} = 2\sqrt{3} \cdot CH$  и  $CH = \frac{\sqrt{330}}{3}$ .

**Пример 5.3.** Найдите момент  $\overline{M}_0(\overline{F})$  силы  $\overline{F} = (-1; 0; 4)$  относительно начала координат  $O$ , если известно, что сила  $\overline{F}$  приложена к точке  $A(1; 3; 0)$  (Рис. 11).

**Решение .** Сделаем чертеж. Построим вектор-рычаг  $\overline{OA} = (1; 3; 0)$  и силу  $\overline{F}(-1; 0; 4)$ , приложенную  $A(1; 3; 0)$ . Находим момент силы согласно формуле

$$\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12\bar{i} - 4\bar{j} - 3\bar{k}.$$

**Пример 5.4.** Точка  $M$  движется по окружности с постоянной угловой скоростью  $\overline{\omega} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$  вокруг оси, проходящей через начало координат. Найдите скорость  $\overline{v}$  этой точки в момент, когда  $x = 1, y = 2, z = 1$ .

**Решение .** Применим формулу  $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{OM}$ , где  $\overline{OM} = (-1; 2; 1)$  — радиус-вектор точки  $M$ . Линейную скорость точки найдем через векторное произведение

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{OM} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\bar{i} - 2\bar{j} - 7\bar{k} = (3; -2; -7).$$

## §6. Смешанное произведение векторов.

Пусть в пространстве  $\mathbb{V}_3$  задана правая декартова система координат. **Смешанным произведением** трех ненулевых векторов  $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$  называется скалярное произведение вектора  $\overline{c}$  на векторное произведение векторов  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$

$$([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}). \quad (6.1)$$

Если хотя бы один из векторов равен нулю, то смешанное произведение равно нулю.

**Свойства смешанного произведения.**

1.  $([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}])$ , то есть смешанное произведение не зависит от способа расстановки скобок, поэтому смешанное произведение записывают  $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$  или  $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$ ;
2.  $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = -\overline{b} \cdot \overline{a} \cdot \overline{c}$ , то есть при перемене мест сомножителей произведение меняет знак (смешанное произведение векторов антикоммутативно);
3.  $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{a} = \overline{c} \cdot \overline{a} \cdot \overline{b}$ , то есть при циклической перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется;
4.  $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} = \overline{a} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d}$ ;
5.  $(k\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = k(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ ;

6.  $|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}| = V_{\text{параллелепипеда}}$  то есть модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда;

7. Если  $\bar{a} \neq 0$ ,  $\bar{b} \neq 0$ ,  $\bar{c} \neq 0$ , то  $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$  тогда и только тогда, когда векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  лежат в одной плоскости, то есть смешанное произведение трех ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

Если векторы заданы координатами  $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$ ,  $\bar{c} = (x_3; y_3; z_3)$ , то

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]) = x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Применив формулу разложения определителя по первой строке, получим формулу вычисления смешанного произведения векторов, заданных своими координатами:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (6.2)$$

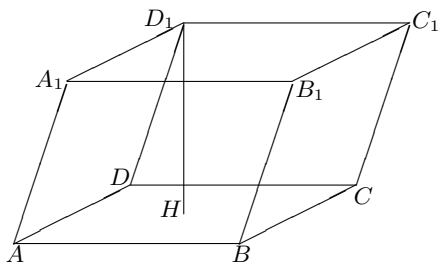


Рис. 14

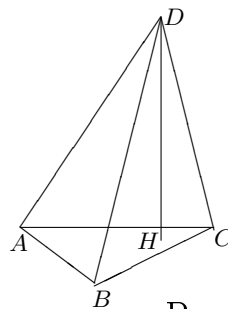


Рис. 15

Смешанное произведение применяют для вычисления объема параллелепипеда; пирамиды; призмы; тетраэдра и для нахождения высоты этих тел (Рис. 14, рис. 15).

**Пример 6.1.** Точки  $A(-1; -3; 1)$ ,  $B(2; 1; -1)$ ,  $C(7; 0; -2)$  и  $D(5; 3; 10)$  являются вершинами тетраэдра. Найдите его объем.

**Решение .** Найдем три вектора, на которых как на сторонах построен тетраэдр:  $\overline{AB} = (3; 4; -2)$ ,  $\overline{AC} = (8; 3; -3)$ ,  $\overline{AD} = (6; 6; 9)$ .

Смешанное произведение этих векторов  $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 8 & 3 & -3 \\ 6 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -285$ .

Тогда  $V_{\text{тетраэдра}} = \frac{|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|}{6} = 47,5$ .

## Глава III

# Аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия изучает свойства геометрических объектов при помощи аналитического метода, в основе которого лежит метод координат. Метод координат представляет собой мощный аппарат, позволяющий привлекать для исследования геометрических объектов методы алгебры и математического анализа. Основные понятия геометрии (точки, прямые линии и плоскости) относятся к числу начальных понятий.

### §1. Понятие об уравнениях линий и поверхностей.

Пусть на плоскости  $\mathbb{V}_2$  задана декартова система координат  $OXY$ . Равенство  $F(x, y) = 0$  называют уравнением *линии*  $L$  в заданной системе координат, если координаты всех точек  $L$  удовлетворяют этому уравнению, а координаты точек, не принадлежащих  $L$ , уравнению не удовлетворяют. Например, уравнение окружности с центром в точке  $(a; b)$  радиуса  $R$  задается уравнением

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Пусть в пространстве  $\mathbb{V}_3$  задана декартова система координат  $OXYZ$ . Равенство  $F(x, y, z) = 0$  называют уравнением *поверхности*  $S$ , если координаты всех точек  $S$  удовлетворяют этому уравнению, а координаты точек, не принадлежащих  $S$ , уравнению не удовлетворяют. Например, уравнение сферы с центром в точке  $(a; b; c)$  радиуса  $R$  задается уравне-

нием

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Пусть имеем две поверхности  $S_1$  и  $S_2$ , которые задаются уравнениями  $F_1(x, y, z) = 0$  и  $F_2(x, y, z) = 0$ . Множество точек, принадлежащих поверхностям  $S_1$  и  $S_2$  (поресечению поверхностей), и следовательно, удовлетворяющих обоим уравнениям, задает в пространстве линию, то есть линию в пространстве можно представить как пересечение двух поверхностей. Существует еще один способ задать линию в пространстве. Представим себе, что линия — это траектория движения точки. Тогда в каждый момент времени известны координаты точки:  $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_0; t_1]$ . Если не принимать во внимание физический смысл переменной  $t$  (время), то мы можем задавать координаты точки, как функции некоторой переменной — параметра. Тогда уравнения 
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$
 где  $t \in [\alpha; \beta]$  называются *параметрическими* уравнениями линии в пространстве.

## §2. Прямая на плоскости.

Пусть на плоскости  $\mathbb{V}_2$  задана декартова система координат  $OXY$ . Из школьного курса геометрии известно, что прямая на плоскости задается уравнением первого порядка и уравнение первого порядка задает на плоскости прямую. Перечислим основные способы, которыми можно задать конкретную прямую на плоскости.

**I.** Уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0)$  перпендикулярно вектору  $\bar{n} = (A; B)$  (Рис. 1).

Так как через заданную точку  $M_0(x_0; y_0)$  прямой можно восстановить единственный перпендикуляр к данной прямой, то задание точки на прямой и вектора, перпендикулярного этой прямой, определяют прямую однозначно. Вектор  $\bar{n} = (A; B)$  называют **нормальным** вектором прямой или **нормалью**.

Если  $M(x; y)$  — произвольная точка прямой, то вектор  $\bar{n}$  перпендикулярен вектору  $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ . Следовательно, скалярное произведение  $(\overline{M_0M}, \bar{n}) = 0$ . В координатной форме уравнение имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (2.1)$$

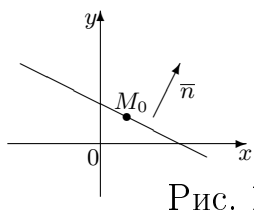


Рис. 1

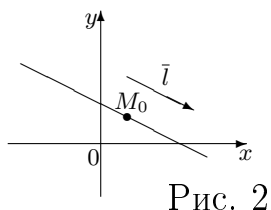


Рис. 2

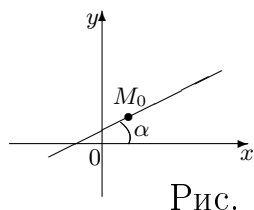


Рис. 3

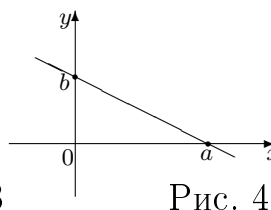


Рис. 4

### II. Общее уравнение прямой.

Это уравнение получим, раскрыв в уравнении (2.1) скобки и приведя подобные.

$$Ax + By + C = 0. \quad (2.2)$$

Рассмотрим три частных случая, когда уравнение (2.2) является неполным, то есть какой-либо из коэффициентов равен нулю.

1) Если  $C = 0$ , то уравнение имеет вид  $Ax + By = 0$  и определяет прямую, проходящую через начало координат так как координаты точки  $O(0, 0)$  удовлетворяют данному уравнению.

2) Если  $B = 0, A \neq 0$ , то уравнение имеет вид  $Ax + C = 0$  и определяет прямую, параллельную оси ординат. Разрешив это уравнение относительно переменной  $x$ , получим уравнение вида  $x = a$ , где  $a = -\frac{C}{A}$  — величина отрезка, который отсекает прямая на оси абсцисс. Если  $a = 0 (C = 0)$ , то прямая совпадает с осью  $OY$ . Таким образом, прямая  $x = 0$  определяет ось ординат.

3) Если  $A = 0, B \neq 0$ , то уравнение имеет вид  $By + C = 0$  и определяет прямую, параллельную оси абсцисс. Разрешив это уравнение относительно переменной  $y$  получим уравнение вида  $y = b$ , где  $b = -\frac{C}{B}$  — величина отрезка, который отсекает прямая на оси ординат. Если  $b = 0 (C = 0)$ , то прямая совпадает с осью  $OX$ . Таким образом, прямая  $y = 0$  определяет ось абсцисс.

III. Уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0)$  параллельно вектору  $\bar{l} = (m; n)$  (Рис. 2).

Так как через данную точку плоскости проходит единственная прямая, параллельная заданной прямой (5 постулат Евклида), то прямую можно задать, указав точку, через которую она проходит, и вектор ей параллельный. Вектор  $\bar{l} = (m; n)$  называют **направляющим** вектором прямой.

Если  $M(x; y)$  — произвольная точка прямой, то вектор  $\bar{l}$  коллинеарен вектору  $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$  и по свойству коллинеарных векторов

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) называют также **каноническим** уравнением прямой.

**IV.** Уравнение прямой, проходящей через две точки  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ .

Из известной из школьного курса геометрии аксиомы, что через две точки плоскости проходит прямая, и притом только одна, следует, что прямую можно задать, указав две точки на плоскости.

Если  $M(x; y)$  — произвольная точка прямой, то из коллинеарности векторов  $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$  и  $\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$  получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (2.4)$$

**V.** Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0)$  параллельно вектору  $\bar{l} = (m; n)$ .

Приравняв в уравнении (2.3) каждую дробь параметру  $t$  и выразив переменную через параметр, получим уравнение ( $t \in (-\infty; \infty)$ )

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases} \quad (2.5)$$

**VI.** Уравнение прямой с угловым коэффициентом (Рис. 3).

Пусть в уравнении (2.2) коэффициент  $B \neq 0$ . Имеем  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ . Обозначим  $-\frac{A}{B} = k$ ,  $-\frac{C}{B} = b$ . Тогда

$$y = kx + b. \quad (2.6)$$

Выясним геометрический смысл коэффициентов  $k$  и  $b$ . Преобразовав уравнение (2.6) к виду  $\frac{x}{1} = \frac{y - b}{k}$ , заметим, что вектор  $\bar{l} = (1; k)$  является



направляющим вектором прямой. Обозначим через  $\alpha$  угол между вектором  $\vec{l}$  и положительным направлением оси  $OX$ . Тогда  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , то есть равен тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси  $OX$ . Поэтому коэффициент  $k$  называется **угловым коэффициентом** прямой. Так как точка  $(0; b)$  принадлежит прямой, то коэффициент  $b$  определяет точку пересечения прямой с осью  $OY$ .

**VII.** Уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0)$  с угловым коэффициентом  $k$ .

Точка  $M_0(x_0; y_0)$  удовлетворяет уравнению прямой. Подставив ее координаты в уравнение (2.6), получим

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (2.7)$$

**VIII.** Уравнение прямой в отрезках (Рис. 4).

Пусть  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ ,  $C \neq 0$ . В уравнении (2.2) перенесем  $C$  в правую часть  $Ax + By = -C$  и разделим обе части уравнения на  $-C$ . Обозначив  $-\frac{C}{A} = a$ ,  $-\frac{C}{B}$  получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (2.8)$$

Выясним геометрический смысл коэффициентов  $a$  и  $b$ . Положим  $y = 0$ . Тогда  $\frac{x}{a} = 1$ . Из этого равенства следует, что точка  $(a; 0)$  принадлежит прямой. Аналогично, если  $x = 0$ , то  $\frac{y}{b} = 1$ . Из этого равенства следует, что точка  $(0; b)$  принадлежит прямой. Таким образом,  $a$  и  $b$  — это отрезки, которые прямая отсекает на осях координат.

**IX.** Нормальное уравнение прямой.

Пусть  $\vec{n} = (A; B)$  — нормальный вектор прямой, заданной уравнением (2.1). Найдем его модуль  $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$  и разделим все коэффициенты уравнения (2.1) на найденный модуль.

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \quad (2.9)$$

Заметим, что в уравнении (2.9) коэффициенты при  $x$  и  $y$  задают координаты единичного вектора нормали.

Пусть заданы две прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ . Если векторы  $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$  и  $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$  не коллинеарны, то пря-

мые пересекаются и точку их пересечения можно найти, решив систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Угол между прямыми  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  определяется как угол между их нормальными векторами  $\bar{n}_1 = (A_1; B_1)$  и  $\bar{n}_2 = (A_2; B_2)$ . Обозначим угол между прямыми через  $\varphi$ . Тогда

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} \quad (2.10)$$

Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$ , то тангенс угла  $\varphi$  между этими прямыми можно найти по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}. \quad (2.11)$$

Из формул (2.10) и (2.11) можно вывести условия *параллельности и перпендикулярности* двух прямых.

1а. Прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  параллельны, если  $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$ ;

1б. Прямые  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  параллельны, если  $k_1 = k_2$ .

2а. Прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  перпендикулярны, если  $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ ;

2б. Прямые  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  перпендикулярны, если  $k_1k_2 = -1$ .

Найдем расстояние  $d$  от точки  $M_0(x_0; y_0)$  до прямой  $Ax + By + C = 0$ . Выберем на прямой точку  $M_1(x_1; y_1)$ . Тогда расстояние от точки до прямой равно  $\operatorname{pr}_{\bar{n}} \overline{M_1M_0} = \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ . Раскрыв скобки и вспомнив, что  $Ax_1 + By_1 = -C$ , получим

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.12)$$

### §3. Плоскость в пространстве.

I. Уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  перпендикулярно вектору  $\bar{n} = (A; B; C)$  (Рис. 5).

Если  $M(x; y; z)$  — произвольная точка плоскости, то векторы  $\bar{n}$  и  $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$  перпендикулярны. Следовательно, скалярное произведение  $(\overline{M_0M}, \bar{n}) = 0$  и уравнение плоскости в координатах имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3.1)$$

## II. Общее уравнение плоскости.

Раскрыв в уравнении (3.1) скобки, получим

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (3.2)$$

III. Уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  параллельно бивектору  $\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\bar{b} = (b_1; b_2; b_3)$  (Рис. 6).

Если  $M(x; y; z)$  — произвольная точка плоскости, то векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$  компланарны. Значит, их смешанное произведение равно нулю.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3)$$

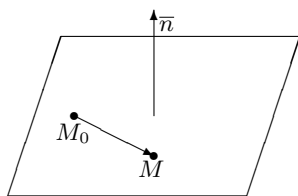


Рис. 5

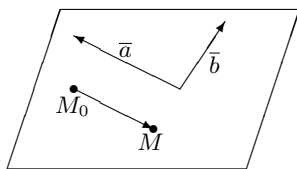


Рис. 6

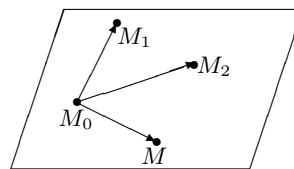


Рис. 7

IV. Уравнение плоскости, проходящей через три точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  и  $M_3(x_3; y_3; z_3)$  (Рис. 7).

Согласно аксиоме стереометрии через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

Если  $M(x; y; z)$  — произвольная точка плоскости, то векторы  $\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$ ,  $\overline{M_2M_1} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$  и  $\overline{M_3M_1} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$  компланарны. Значит, их смешанное

произведение равно нулю.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Угол между плоскостями  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  определяется как угол между их нормальными векторами  $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$  и  $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ . Обозначим этот угол через  $\varphi$ . Тогда

$$\cos \varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}. \quad (3.5)$$

Из формулы (3.5) можно вывести условия *параллельности и перпендикулярности* двух плоскостей.

Плоскости  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  параллельны, если  $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$ ;

Плоскости  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  перпендикулярны, если  $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ .

Расстояние от точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  можно найти, рассуждая как при выводе формулы (2.12).

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.6)$$

Три плоскости пересекаются в одной точке, если их нормальные векторы не компланарны. Точку пересечения плоскостей можно найти, решив систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

#### §4. Прямая в пространстве.

##### I. Общее уравнение прямой в пространстве.

Две непараллельные плоскости всегда имеют общую точку и пересекаются по прямой, проходящей через эту точку. Поэтому, общее уравнение

прямой в пространстве — это линия пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

II. Уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  параллельно вектору  $\bar{l} = (m; n; p)$ .

Если  $M(x; y; z)$  — произвольная точка прямой, то векторы  $\bar{l}$  и  $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$  параллельны и уравнение искомой прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (4.2)$$

Вектор  $\bar{l}$  называется **направляющим** вектором прямой, а уравнение (4.2) часто называют **каноническим** уравнением прямой.

III. Уравнение прямой, проходящей через две точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ .

Если  $M(x; y; z)$  — произвольная точка прямой, то векторы  $\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$  и  $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$  параллельны и уравнение искомой прямой имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (4.3)$$

IV. Параметрическое уравнение прямой.

Приравняв в уравнении (4.2) каждую дробь параметру  $t$  и выразив переменную через параметр, получим уравнение

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \quad (4.4)$$

Угол между прямыми  $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$  и  $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$  определяется как угол между их направляющими векторами  $\bar{l}_1 = (m_1; n_1; p_1)$  и  $\bar{l}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ . Обозначим этот угол через  $\varphi$ . Тогда

$$\cos \varphi = \frac{\bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2}{|\bar{l}_1| \cdot |\bar{l}_2|}. \quad (4.5)$$

Из формулы (4.5) следуют *условие параллельности и перпендикулярности двух прямых*.

Прямые  $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$  и  $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$  параллельны, если  $\vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2$ ;

Прямые  $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$  и  $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$  перпендикулярны, если  $\vec{l}_1 \perp \vec{l}_2$ .

## §5. Кривые второго порядка.

Уравнение вида  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  задает на плоскости  $OXY$  кривую второго порядка. Существенный недостаток общего уравнения состоит в том, что почти всегда не понятно, какую линию оно задает. Поэтому в курсе аналитической геометрии рассматривается типовая задача приведения уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду. Канонический вид уравнения — это его стандартный вид, когда ясно, какой геометрический объект оно определяет. Кроме того, канонический вид очень удобен для решения многих практических заданий.

**I. Окружность** называется геометрическое место точек, равноудаленных от фиксированной точки — центра окружности. Каноническое уравнение окружности с центром в точке  $M_0(a; b)$  радиуса  $r$  имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (5.1)$$

**II. Эллипсом** называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек (фокусов) постоянна.

Выберем систему координат так, чтобы фокусы эллипса лежали на оси  $OX$  на одинаковом расстоянии от начала координат (Рис. 8). Обозначим расстояние между фокусами  $|F_1F_2| = 2c$ , тогда  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$ . Если  $M(x; y)$  — произвольная точка эллипса, то  $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ , где  $a > c$ . Имеем  $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$ . Возводя обе части равенства в квадрат и обозначив  $a^2 - c^2 = b^2$ , получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.1)$$

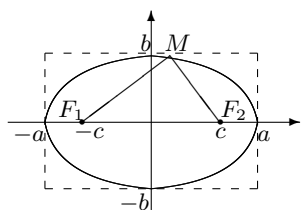


Рис. 8

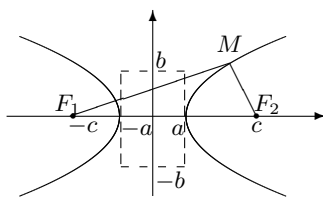


Рис. 9

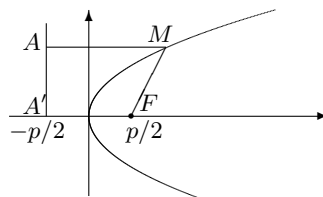


Рис. 10

Оси  $OX$  и  $OY$  являются осями симметрии, а начало координат  $O(0; 0)$  — центром симметрии эллипса. Так как  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq b$ , то эллипс ограниченная кривая, расположенная внутри прямоугольника, ограниченного прямыми  $x = \pm a$ ,  $y = \pm b$ . Число  $a$  называют *большой* полуосью, а число  $b$  — *малой* полуосью эллипса.

*Эксцентриситетом* эллипса называют отношение  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ , равное отношению фокусного расстояния к большой полуоси эллипса. Эксцентриситет может принимать значения в пределах  $0 \leq \varepsilon < 1$ .

Выясним, как форма эллипса зависит от его эксцентриситета. Для этого зафиксируем левую и правую вершины рассматриваемого эллипса, то есть, значение большой полуоси  $a$  будет оставаться постоянным. Пусть значение эксцентриситета стремится к единице, то есть  $c \rightarrow a$ . Это значит, что фокусы эллипса будут приближаться по оси абсцисс к боковым вершинам. Таким образом, чем ближе значение эксцентриситета эллипса к единице, тем эллипс более продолговат. Пусть теперь значение эксцентриситета стремится к нулю, то есть  $c \rightarrow 0$ . Это значит, что фокусы эллипса приближаются к центру. Таким образом, чем ближе значение эксцентриситета к нулю, тем эллипс больше похож на окружность. Заметим, что окружность — это частный случай эллипса, когда  $c = 0$ .

*Директрисами* эллипса называются прямые  $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ , параллельные малой оси эллипса и отстоящие от нее на расстояние  $\frac{a}{\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  — эксцентриситет эллипса. Очевидно, что директрисы не пересекают эллипс, так как  $\varepsilon < 1$  и  $\frac{a}{\varepsilon} > a$ .

Одним из самых замечательных свойств эллипса является его оптическое свойство, состоящее в том, что прямые, соединяющие точку эллипса с его фокусами, пересекают касательную к эллипсу под равными углами. Это значит, что луч, пущенный из одного фокуса, после отражения

попадет в другой.

**III. Гиперболой** называется геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух фиксированных точек (фокусов) постоянна.

Выберем систему координат так, чтобы фокусы гиперболы лежали на оси  $OX$  на одинаковом расстоянии от начала координат (Рис. 9). Обозначим расстояние между фокусами  $|F_1F_2| = 2c$ , тогда  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$ . Если  $M(x; y)$  — произвольная точка гиперболы, то  $||F_1M| - |F_2M|| = 2a$ , где  $a < c$ . Имеем  $|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a$ . Возводя обе части равенства в квадрат и обозначив  $c^2 - a^2 = b^2$ , получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.2)$$

Оси  $OX$  и  $OY$  являются осями симметрии, а начало координат  $O(0; 0)$  — центром симметрии гиперболы. Гипербола расположена вне полосы  $|x| < a$ . Число  $a$  называют *действительной* полуосью, а число  $b$  — *мнимой* полуосью гиперболы. Точки пересечения гиперболы с осью абсцисс называют *вершинами* гиперболы.

Прямоугольник со сторонами  $2a$  и  $2b$ , расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершинах, часто называют основным прямоугольником гиперболы. Диагонали основного прямоугольника (неограниченно продолженные) являются асимптотами гиперболы и определяются уравнениями  $y = \pm \frac{b}{a}x$ . Асимптоты делят координатную плоскость на 4 части, в двух из которых находятся ветви кривой.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ , равное отношению фокусного расстояния к действительной полуоси гиперболы. Так как расстояние от центра до фокуса больше расстояния от центра до вершины  $c > a$ , то эксцентриситет гиперболы всегда больше единицы ( $\varepsilon > 1$ ). По аналогии с эллипсом, зафиксировав значение  $a$ , можно показать, что при увеличении эксцентриситета ветви гиперболы "распрямляются" к оси  $OY$  и в предельном случае они стремятся занять



положение двух прямых, проходящих через вершины гиперболы параллельно оси ординат; если же значение эксцентриситета приближается к единице, то ветви гиперболы "сплющиваются" к оси  $OX$ .

*Директрисами* гиперболы называются прямые  $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ , параллельные оси  $OY$  и отстоящие от нее на расстояние  $\frac{a}{\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  — эксцентриситет гиперболы.

На практике часто встречается гипербола с равными полуосями. Если  $a = b$ , то каноническое уравнение заметно упрощается  $\frac{x^2 - y^2}{a^2} = 1$ . Вместе с ним упрощаются и уравнения асимптот  $y = \pm x$ . Эксцентриситет равносторонней гиперболы равен 1.

**IV. Параболой** называется геометрическое место точек, равноудаленных от фиксированной точки (фокуса) и фиксированной прямой (директрисы).

Выберем систему координат так, чтобы фокус параболы лежал на оси  $OX$ , директриса была перпендикулярна оси  $OX$  и фокус и директриса были расположены на одинаковом расстоянии от начала координат (Рис. 10). Обозначим расстояние между фокусом и директрисой  $|FA'| = p$ , тогда  $F(p/2; 0)$ ,  $A'(-p/2; 0)$ ,  $A(-p/2; y)$ . Если  $M(x; y)$  — произвольная точка параболы, то  $|MA| = |MF|$ . Имеем  $\sqrt{(x + p/2)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{(x - p/2)^2 + (y - 0)^2}$ . Возводя обе части равенства в квадрат, получим каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px. \quad (5.3)$$

Директриса параболы задается уравнением  $x = -\frac{p}{2}$ . Очевидно, что при увеличении параметра  $p$  ветви графика будут "раздаваться" вверх и вниз, бесконечно близко приближаясь к оси  $OY$ . При уменьшении же значения  $p$  они начнут сжиматься и параболола будет вытягиваться вдоль оси  $OX$ .

## §6. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду.

Как мы уже знаем, кривая второго порядка в общем виде задается уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{01}x + a_{02}y + c = 0.$$

Уравнение можно привести к каноническому виду, перейдя к новой системе координат. Этот процесс разобьем на два этапа:

1. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Первые три слагаемых в уравнении кривой образуют квадратичную форму  $L[x, y] = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ , матрица которой

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Из курса алгебры мы знаем, что векторы ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называются главными осями квадратичной формы. Главные оси квадратичной формы совпадают с ортонормированным базисом, состоящим из собственных векторов, канонические коэффициенты — с собственными числами матрицы квадратичной формы. (Действительно, так как матрица  $A$  симметричная, то ее собственные числа действительные и различные, а собственные векторы, соответствующие этим числам ортогональны, следовательно, линейно независимы).

Если в качестве главных осей взять собственные вектора квадратичной формы, то кривая примет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + a_1 x_1 + b_1 y_1 + c = 0.$$

Для того чтобы найти собственные числа и собственные векторы квадратичной формы, решим характеристическое уравнение  $|A - \lambda E| = 0$  и для каждого  $\lambda$  решим матричное уравнение  $(A - \lambda E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ . Собственные вектора  $\bar{i}_1, \bar{j}_1$  выберем так, чтобы они образовывали правую пару (кратчайший поворот вектора  $\bar{i}_1$  к вектору  $\bar{j}_1$  выполняется против часовой стрелки) и длина каждого вектора была равна 1.

Матрицу перехода от базиса  $\bar{i}, \bar{j}$  к базису  $\bar{i}_1, \bar{j}_1$  обозначим через  $Q$ . Матрица  $Q$  является ортогональной. Используя формулу перехода к новому базису

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

выразим "старые" координаты через "новые":

$$\begin{cases} x = c_{11}x_1 + c_{12}y_1, \\ y = c_{21}x_1 + c_{22}y_1. \end{cases}$$

Отметим, что тип кривой второго порядка определяется типом квадратичной формы. Если  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ , то кривая — эллипс, если  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ , то кривая — гипербола, если  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ , то кривая — парабола.

2. Отыскание нового начала координат, то есть параллельный перенос системы координат.

**Пример 6.1.** Приведите уравнение кривой  $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$  к каноническому виду.

**Решение .** Рассмотрим квадратичную форму  $L[x, y] = 2x^2 - 4xy + 5y^2$ . Запишем ее матрицу  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$  и решим характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2 - \lambda)(5 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6.$$

Если  $\lambda_1 = 1$ , то  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y = 0$  и возьмем собственный вектор  $\bar{i}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ .

Если  $\lambda_2 = 6$ , то  $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - y = 0$  и возьмем собственный вектор  $\bar{j}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ .

Запишем матрицу перехода от базиса  $\bar{i}, \bar{j}$  к базису  $\bar{i}_1, \bar{j}_1$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \text{ Тогда } Q^{-1} = Q^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Выразим "старые" координаты через "новые"

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{2x_1 - y_1}{\sqrt{5}}, \\ y = \frac{x_1 + 2y_1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

и "новые" через "старые"

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2x + y}{\sqrt{5}}, \\ y_1 = \frac{-x + 2y}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Подставим в уравнение кривой выражение  $x$  и  $y$  через  $x_1$  и  $y_1$ :

$$2 \left( \frac{2x_1 - y_1}{\sqrt{5}} \right)^2 - 4 \frac{2x_1 - y_1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{x_1 + 2y_1}{\sqrt{5}} + 5 \left( \frac{x_1 + 2y_1}{\sqrt{5}} \right)^2 + \frac{8(2x_1 - y_1)}{\sqrt{5}} - \frac{2(x_1 + 2y_1)}{\sqrt{5}} + 9 = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные получим уравнение, не содержащие произведение переменных и коэффициенты которого при квадратах переменных равны собственным числам квадратичной формы (что нам и требовалось получить)

$$x_1^2 + 6y_1^2 + \frac{14x_1 - 12y_1}{\sqrt{5}} + 9 = 0.$$

Выделим полные квадраты для переменных  $x_1$  и  $y_1$ :

$$\left( x_1 + \frac{14x_1}{\sqrt{5}} + \frac{49}{5} \right) + 6 \left( y_1 - \frac{2y_1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5} \right)^2 - \frac{49}{5} - \frac{6}{5} + 9 = 0 \quad \text{или}$$

$$\left( x_1 + \frac{7}{\sqrt{5}} \right)^2 + 6 \left( y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 - 2 = 0.$$

Введем новые переменные, то есть перейдем к новой системе координат, выполнив параллельный перенос осей координат

$$x_2 = x_1 + \frac{7}{\sqrt{5}}, \quad y_2 = y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Получили каноническое уравнение эллипса  $x_2^2 + 6y_2^2 - 2 = 0$  или

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{y_2^2}{1/3} = 1,$$

полуоси которого равны  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{\frac{1}{3}}$ .

Формула перехода к новым координатам примет вид:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2x + y + 7}{\sqrt{5}}, \\ y_2 = \frac{-x + 2y - 1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

# Литература

- [1] Линейная алгебра. Аналитическая геометрия (для экономических специальностей) Учебное пособие. / И.Э. Гриншпон, Л.А. Гутова, Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинникова; Федеральное агентство по образованию, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – Томск: ТУСУР, 2007. – 247 с.
- [2] Магазинников, Л.И. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие. / Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинникова; Министерство образования Российской Федерации, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – Томск: ТМЦДО, 2003. – 176 с.
- [3] Головина М.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – Москва: Наука. – 1979. – 392 с.
- [4] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Москва: Наука. 1974. – 320 с.
- [5] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – Москва: Физматгиз. – 1963. 432 с.
- [6] Ильин В.А. Линейная алгебра. вып. 6. / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк; Москва: Наука. – 1978. – 304 с.
- [7] Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – Москва: Наука. 1975. – 400 с.
- [8] Бугров Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. / Я.С. Бугров, С.М. Никольский; Москва: Наука. – 1980. – 176 с.

- [9] Гриншпон И.Э. Многочлены от одной переменной (теория и практика). Учебное пособие. / И.Э. Гриншпон, С.Я. Гриншпон; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – Томск: ТУСУР, 2011. – 78 с.
- [10] Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М.Тришин, М.Н. Фридман; Москва: ЮНИТИ, 2003. – 471 с.
- [11] Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов. Учебное пособие. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.
- [12] Коршунова Н.И. Математика в экономике. Учебное пособие. / Н.И. Коршунова, В.С. Плясунов – Москва: Вита-Пресс, 1996. – 367 с.
- [13] Солодовников А.С. Математика для экономистов. Учебник. В 2 ч. **Ч.1.** / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов; – Москва: Финансы и статистика. 2001. – 224 с.
- [14] Идельсон А.В. Аналитическая геометрия. Линейная алгебра. Учебное пособие. В 6 т. **Т. 1** / А.В. Идельсон, И.А. Блюмкина; – Москва: ИНФРА-М. 2000. –200 с.

# Оглавление

<b>I</b>	<b>Линейная алгебра</b>	<b>1</b>
§1.	Матрицы. Действия с матрицами. . . . .	1
§2.	Перестановки. . . . .	7
§3.	Определители. . . . .	8
§4.	Обратная матрица. . . . .	18
§5.	Матричные уравнения. . . . .	23
§6.	Системы линейных уравнений. . . . .	25
§7.	Правило Крамера. . . . .	30
§8.	Метод Гаусса. . . . .	33
§9.	Арифметические векторы и действия над ними. . . . .	35
§10.	Линейная зависимость векторов. . . . .	38
§11.	Линейные пространства. Базис линейного пространства. Подпространства. . . . .	42
§12.	Ранг матрицы. . . . .	47
§13.	Теорема Кронекера–Капелли. . . . .	52
§14.	Исследование систем линейных уравнений. . . . .	53
§15.	Системы линейных однородных уравнений. . . . .	60
§16.	Метрические и евклидовы пространства. . . . .	64
§17.	Формулы перехода от одного базиса к другому. . . . .	66
§18.	Линейный оператор. . . . .	70
§19.	Элементы теории многочленов. . . . .	75

§20. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. . . . .	80
§21. Квадратичные формы. . . . .	87
<b>II Векторная алгебра</b>	<b>93</b>
§1. Векторы. Линейные операции над векторами. . . . .	93
§2. Деление отрезка в данном отношении. . . . .	97
§3. Проекция вектора на ось. . . . .	99
§4. Скалярное произведение векторов. . . . .	99
§5. Векторное произведение векторов. . . . .	102
§6. Смешанное произведение векторов. . . . .	105
<b>III Аналитическая геометрия</b>	<b>107</b>
§1. Понятие об уравнениях линий и поверхностей. . . . .	107
§2. Прямая на плоскости. . . . .	108
§3. Плоскость в пространстве. . . . .	112
§4. Прямая в пространстве. . . . .	114
§5. Кривые второго порядка. . . . .	116
§6. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду. . . . .	120