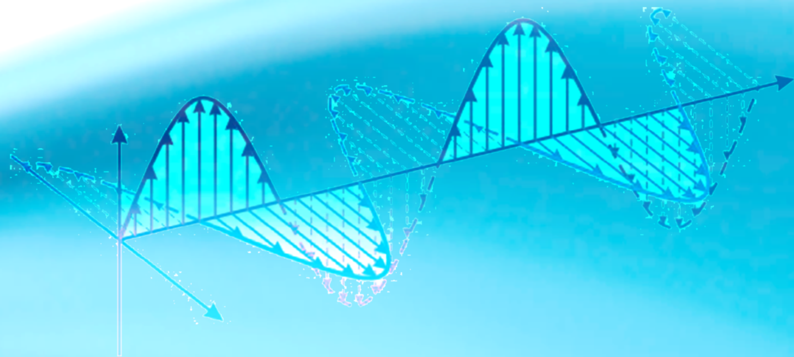
А.С. Климов, А.В. Медовник, Ю.Г. Юшков

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

А.С. Климов, А.В. Медовник, Ю.Г. Юшков

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Учебно-методическое пособие

Томск
Издательство ТУСУРа
2018

УДК 534(075.8)
ББК 22.315.4я73
К492

Рецензенты:

Козырев А.В., д-р физ.-мат. наук, профессор;

Ремнев Г.Е., д-р техн. наук, профессор

Климов, Александр Сергеевич

К492 Колебания и волны : учеб.-метод. пособие / А.С. Климов, А.В. Медовник, Ю.Г. Юшков. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2018. – 122 с.

ISBN 978-5-86889-804-4

Содержит краткую теорию, примеры решения задач, тестовые задания, задачи для аудиторных практических занятий и самостоятельного решения, список рекомендуемой литературы, а также вопросы для самоконтроля по разделу «Колебания и волны» дисциплины «Физика» («Физика для информатики», «Физика и естествознание» и т.п.).

Для студентов очной, очно-заочной и заочной форм обучения всех направлений подготовки.

УДК 534(075.8)
ББК 22.315.4я73

ISBN 978-5-86889-804-4

Введение

Колебания и волны – раздел физики, изучающий колебательные и волновые явления в системах различной природы (механической, электрической, тепловой, биологической и др.). К колебаниям относятся изменения положения в пространстве маятника часов, струны музыкальных инструментов, величины напряжения и тока в электрическом контуре, а также суточной температуры воздуха, сокращения сердечной мышцы и т.д. Примерами волн являются распространение звука в газах и твердых телах, возмущение воды от падающих капель, сейсмические волны – землетрясения, а также свет и радиоволны.

Несмотря на огромное разнообразие колебательных и волновых процессов, им всем присущи некоторые общие закономерности.

Данное учебно-методическое пособие включает краткие теоретические сведения по теории колебаний и волн, примеры решения задач, примеры тестовых вопросов, а также задачи для самоконтроля. Оно может быть использовано преподавателями на практических занятиях для различных вариантов контроля знаний студентов, а также студентами для самостоятельной подготовки к контрольным работам и экзаменам.

1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1.1. Краткая теория

1.1.1. Общие сведения о колебаниях

Колебаниями называются процессы движения или изменения состояния, в той или иной степени повторяющиеся во времени.

В зависимости от физической природы колебательного процесса и механизма его возбуждения различают:

– ***механические колебания*** (колебания маятников, струн, частей машин и механизмов, зданий, мостов и других сооружений, давления воздуха при распространении в нем звука, качка корабля, волнение моря и т. п.);

– ***электромагнитные*** (колебания переменного электрического тока в цепи, колебания векторов электрической напряженности $\vec{E}$ и магнитной индукции $\vec{B}$ переменного электромагнитного поля и т. д.);

– ***электромеханические*** (колебания мембраны телефона, диффузора электродинамического громкоговорителя) и др.

Система, совершающая колебания, называется ***колебательной системой***.

Свободными (собственными) называются колебания, которые происходят в отсутствие переменных внешних воздействий на колебательную систему и возникают вследствие какого-либо начального отклонения этой системы от состояния ее устойчивого равновесия.

Вынужденными колебаниями называются колебания, возникающие в какой-либо системе под влиянием переменного внешнего воздействия (например, колебания силы тока в электрической цепи, вызываемые переменной ЭДС; колебания маятника, вызываемые переменной внешней силой).

Колебания называются ***периодическими***, если значения всех физических величин, характеризующих колебательную систему и изменяющихся при ее колебаниях, повторяются через равные промежутки времени. Наименьший промежуток времени T, удовлетворяющий этому условию, называется ***периодом коле-***

баний. За период колебаний T система совершает одно ***полное колебание***.

Частотой периодических колебаний называется величина $\nu = \dfrac{1}{T}$, равная числу полных колебаний, совершающихся за единицу времени.

Циклической, или ***круговой, частотой*** периодических колебаний называется величина $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$, равная числу полных колебаний, совершающихся за 2π единиц времени.

В электротехнике величину $\omega = 2\pi\nu$ называют угловой частотой.

При периодических колебаниях зависимость колеблющейся величины s от времени t удовлетворяет условию $s(t+T) = s(t)$.

Периодические колебания величины $s(t)$ называются ***гармоническими колебаниями***, если

$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) \text{ или } s(t) = A\cos(\omega t + \varphi_1),$$

где $\omega = 2\pi\nu = \text{const}$ – циклическая, или круговая, частота гармонических колебаний; $A = s_{\max} = \text{const} > 0$ – максимальное значение колеблющейся величины s, называемое ***амплитудой*** колебаний; φ_0 и $\varphi_1 = \varphi_0 - \dfrac{\pi}{2}$ – постоянные величины.

Значение s в произвольный момент времени t определяется значением ***фазы колебаний*** $\Phi(t) = \omega t + \varphi_0$ (соответственно $\Phi_1(t) = \omega t + \varphi_1$). Величины φ_0 и φ_1 представляют собой ***начальные фазы колебаний***, т. е. значения $\Phi(t)$ и $\Phi_1(t)$ в момент начала отсчета времени $(t = 0)$: $\varphi_0 = \Phi(0)$ и $\varphi_1 = \Phi_1(0)$.

Скорость и ускорение гармонически колеблющейся величины $s(t)$ также совершают гармонические колебания с той же циклической частотой:

$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0);$$

$$\frac{ds}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega\sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi),$$

причем *амплитуды скорости* и *ускорения* соответственно равны $A\omega_0$ и $A\omega_0^2$. Начальная фаза *скорости* равна $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$, т. е. разность фаз колебаний ds/dt и s постоянна и равна $\frac{\pi}{2}$ (скорость ds/dt опережает s по фазе на $\frac{\pi}{2}$). Начальная фаза *ускорения* $\frac{d^2s}{dt^2}$ равна $\varphi_0 + \pi$, т. е. ускорение $\frac{d^2s}{dt^2}$ опережает s по фазе на π. Графики зависимости от времени t величин s, ds/dt и $\frac{d^2s}{dt^2}$ при гармонических колебаниях для случая $\varphi_0 = 0$ показаны на рис. 1.1.

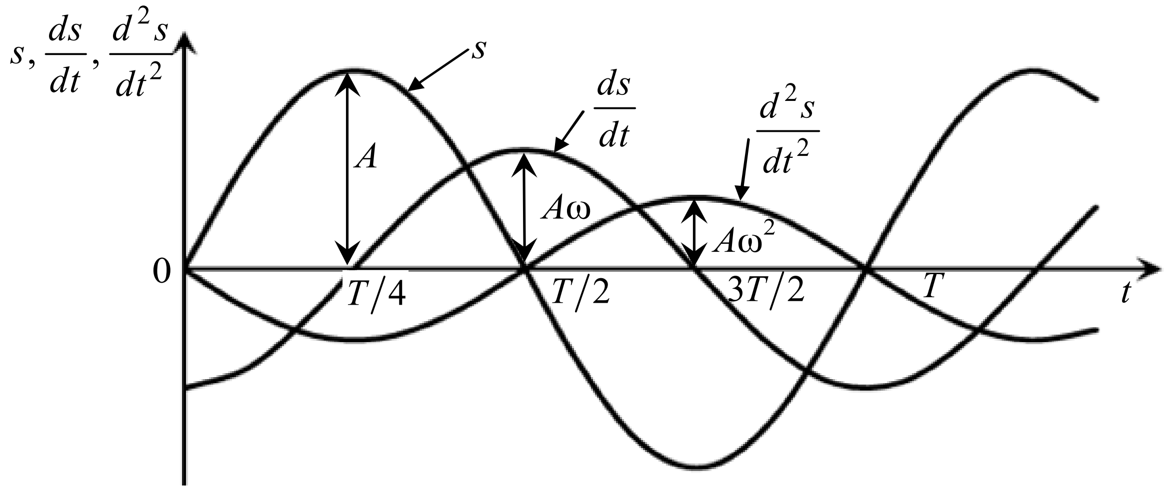


Рис. 1.1

Видно, что гармонически колеблющаяся величина s удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0.$$

Величина s совершает гармонические колебания в том и только в том случае, если она удовлетворяет написанному выше дифференциальному уравнению, называемому ***дифференциальным уравнением гармонических колебаний***.

Гармонические колебания можно изобразить графически в виде вектора на плоскости. Для этого из начала координат 0 на плоскости проводят вектор A (рис. 1.2), модуль которого равен амплитуде A рассматриваемых колебаний и составляет с осью координат $0X$ угол $\varphi = \omega t + \varphi_0$, равный фазе колебаний в данный момент времени t.

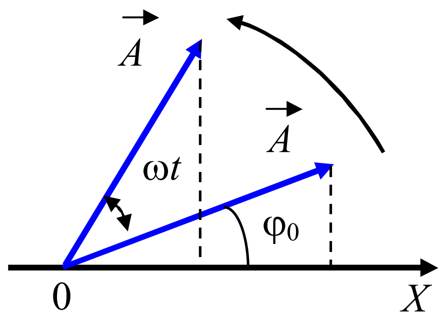


Рис. 1.2

С течением времени угол φ увеличивается так, что вектор A равномерно вращается вокруг точки 0 с угловой скоростью, равной циклической частоте колебаний ω. Соответственно проекция вектора A на вертикальную ось $0X$ совершает гармонические колебания по закону

$$A_x = s = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

Графическое изображение гармонических колебаний посредством вращающегося вектора амплитуды называется ***методом векторных диаграмм***. Им широко пользуются, например, при сложении одинаково направленных гармонических колебаний.

1.1.2. Механические гармонические колебания

Если материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат OX около положения равновесия, принятого за начало координат, то зависимость координаты x точки от времени t имеет вид

$$x = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

Проекции скорости υ и ускорения a точки на ось OX:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos(\omega t + \varphi_0); \;\; a_x = -a_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $\upsilon_0 = A\omega$ – амплитуда скорости; $a_0 = A\omega^2 = \upsilon_0\omega$ – амплитуда ускорения. Сила F, действующая на материальную точку:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{и} \quad F_x = -m\omega^2 x,$$

где m – масса материальной точки. Следовательно, сила F пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону:

$$\vec{F} = -m\omega^2 x\vec{i},$$

где $\vec{i}$ – орт оси OX.

Такая зависимость силы от смещения характерна для упругой силы. Поэтому силы иной физической природы, удовлетворяющие тому же виду зависимости, называются *квазиупругими силами.*

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания

$$W_{\text{К}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{m\omega^2 A^2}{2}\left[\frac{1}{2}\big(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_0)\big)\right]$$

или

$$W_{\text{К}} = \frac{m\omega^2 A^2}{4}\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_0)\right].$$

Кинетическая энергия материальной точки периодически изменяется от 0 до $\frac{m\omega^2 A^2}{2}$, гармонические колебания совершаются с циклической частотой 2ω и амплитудой $\frac{m\omega^2 A^2}{4}$ около среднего значения, равного $\frac{m\omega^2 A^2}{4}$.

Потенциальная энергия материальной точки, гармонически колеблющейся под действием квазиупругой силы, выражается как

$$W_{\text{П}} = -\int_0^x F_x dx = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\sin^2\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

или

$$W_{\text{П}} = \frac{m\omega^2 A^2}{4}\left[1 - \cos\left(2\omega t + 2\varphi_0\right)\right] = \frac{m\omega^2 A^2}{4}\left[1 + \cos\left(2\omega t + 2\varphi_0 + \pi\right)\right].$$

Потенциальная энергия материальной точки периодически изменяется от 0 до $\frac{m\omega^2 A^2}{2}$, совершая гармонические колебания с циклической частотой 2ω и амплитудой $\frac{m\omega^2 A^2}{4}$ около среднего значения, равного $\frac{m\omega^2 A^2}{4}$. Колебания потенциальной и кинетической энергии совершаются со сдвигом по фазе на π, так что полная механическая энергия материальной точки не изменяется при колебаниях:

$$W = W_{\text{К}} + W_{\text{П}} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

Графики зависимости $x(t) = A\cos(\omega t)$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $W_{\text{К}}$, $W_{\text{П}}$ от времени *t* для случая $\varphi_0 = 0$ показаны на рис. 1.3.

Линейный гармонический осциллятор – материальная точка массой *m,* совершающая прямолинейные гармонические колебания под действием упругой силы $\vec{F}_{\text{УПР}} = -kx\vec{i}$. Примером такой системы может служить *пружинный маятник* – груз массой *m,* подвешенный на абсолютно упругой пружине (*k* – коэффициент, характеризующий упругие свойства пружины, **коэффициент жесткости пружины**). Уравнения его движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{и} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

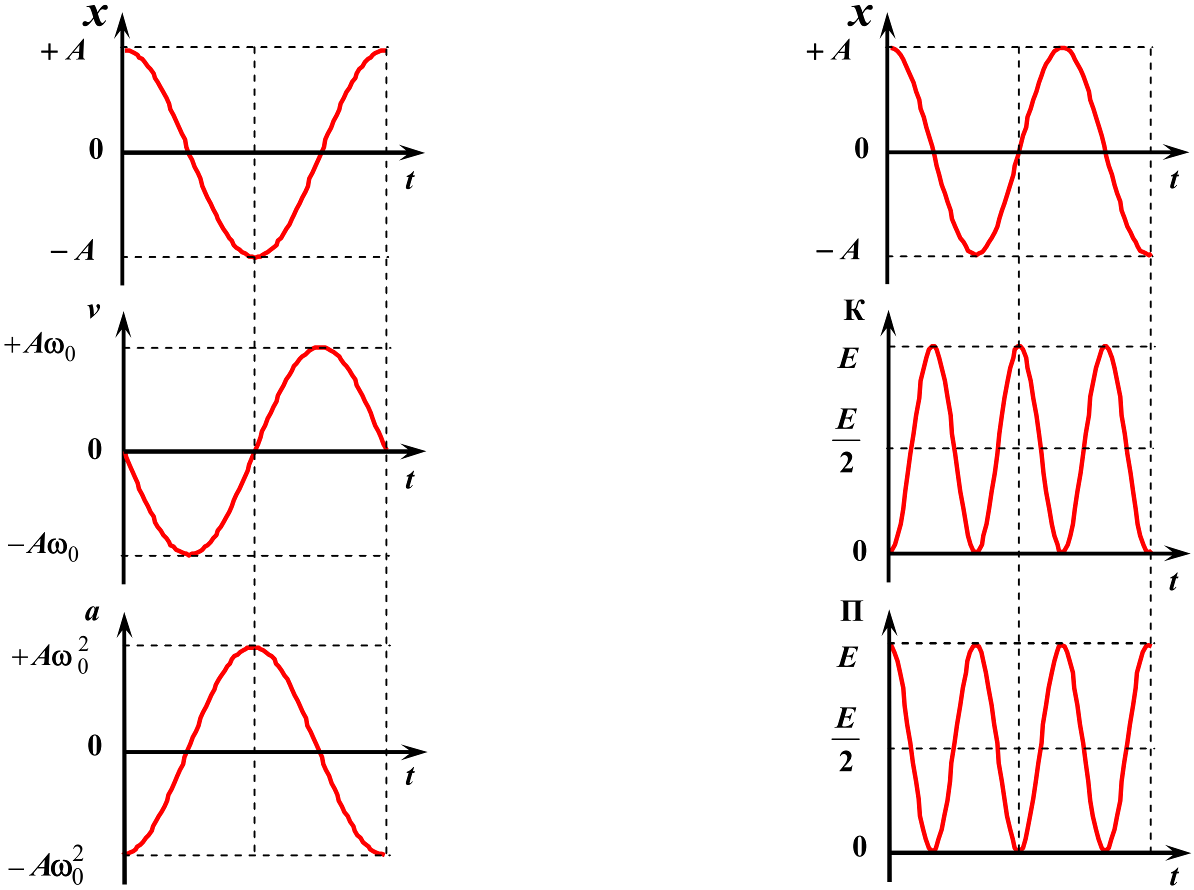


Рис. 1.3

Из этого уравнения следует, что осциллятор (пружинный маятник) совершает гармонические колебания по закону $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ с циклической частотой ω и периодом T:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \;\; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Потенциальная энергия линейного гармонического осциллятора

$$W_{\Pi} = \frac{kx^2}{2}.$$

Физический маятник – твердое тело, имеющее возможность качаться под действием силы тяжести mg вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр тяжести тела (рис. 1.4) и называемой ***осью качания маятника***. Центр тяжести маятника совпадает с его центром инерции C. Точка O пересечения оси качания маятника с вертикальной плоскостью, проходящей через центр тяжести маятника и перпендикулярной к оси качания, называется ***точкой подвеса маятника.***

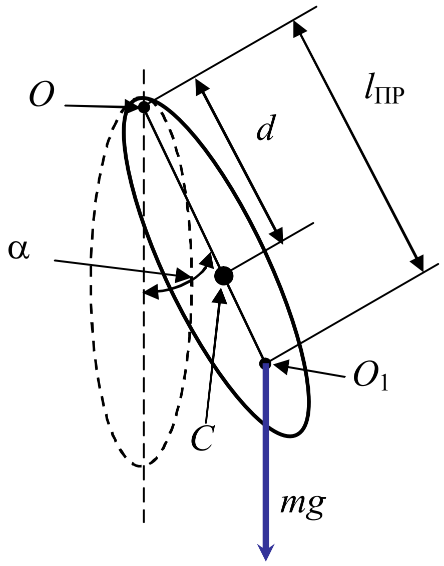


Рис. 1.4

При отсутствии сил трения в подвесе уравнение движения маятника имеет вид

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgd\sin\alpha,$$

где α – угол поворота маятника вокруг оси качания из положения равновесия; m – масса маятника; g – ускорение свободного падения; $d = OC$ – расстояние от центра инерции маятника до оси качания; J – момент инерции маятника относительно той же оси.

При малых колебаниях маятника $\sin\alpha \approx \alpha$ и уравнение движения маятника имеет вид

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgd}{J}\alpha = 0,$$

т.е. угол α удовлетворяет дифференциальному уравнению гармонических колебаний. Таким образом, в отсутствие трения малые колебания физического маятника являются гармоническими:

$$\alpha = -\alpha_0\sin\left(\omega t + \varphi_0\right),$$

где α_0 – амплитуда колебаний угла α;

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}}\ ,\ T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}\ -$$

циклическая частота и период малых колебаний физического маятника.

Математический маятник – материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Математический маятник представляет собой предельный случай физического маятника, вся масса которого сосредоточена в его центре инерции, так что $d = l$ – длина математического маятника. Момент инерции такого маятника относительно оси качания $J = ml^2$. Соответственно циклическая частота и период малых колебаний математического маятника составляют

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\ \text{ и }\ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Малые колебания физического и математического маятников являются примерами *изохронных колебаний*, т. е. колебаний, частоты и периоды которых не зависят от амплитуд.

В общем случае период колебаний физического маятника зависит от его амплитуды α_0:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha_0}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha_0}{2}+\ldots\right]}.$$

Изменение значения T при увеличении α_0 до 15° не превосходит 0,5 %.

Приведенной длиной физического маятника $l_{\text{ПР}}$ называется длина математического маятника, имеющего такой же период колебаний:

$$l_{\text{ПР}} = \frac{J}{md} = d + \frac{J_C}{md} > d,$$

где J_C – момент инерции физического маятника относительно оси, проходящей через центр инерции C маятника и параллельной его оси качания. Точка O_1, лежащая на прямой OC на расстоянии $l_{\text{ПР}}$ от точки подвеса маятника O (см. рис. 1.4), называется *центром качания физического маятника.* Центр качания O_1 и точка подвеса O обладают свойством взаимности: если маятник подвесить так, чтобы его ось качаний проходила через точку O_1, то точка O будет совпадать с новым положением центра качания маятника, т.е. приведенная длина и период колебаний маятника останутся прежними.

1.1.3. Сложение гармонических колебаний

Под ***сложением колебаний*** понимают нахождение результирующего колебания системы в тех случаях, когда эта система одновременно участвует в нескольких колебательных процессах. Различают два предельных случая – сложение колебаний одинакового направления и сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Первый случай соответствует, например, колебаниям грузика 1 (рис. 1.5), который колеблется относительно грузика 2 на пружине *a* и вместе с ним на пружине *b*. Этот же случай реализуется при наложении колебаний скалярных физических характеристик колебательной системы (давления, температуры, плотности, электрического заряда, тока и т. п.).

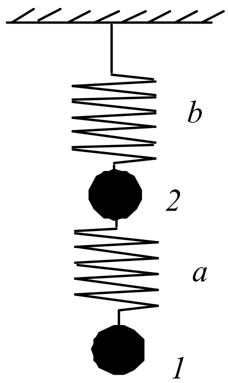


Рис. 1.5

Сложение двух одинаково направленных гармонических колебаний $s_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ и $s_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ можно произвести с помощью метода векторных диаграмм. На рис. 1.6 показаны векторы амплитуд $A_1(t)$ и $A_2(t)$ соответственно первого и второго колебаний в произвольный момент времени t, когда фазы этих колебаний определяются как $\Phi_1(t) = \omega_1 t + \varphi_1$ и $\Phi_2(t) = \omega_2 t + \varphi_2$.

Результирующему колебанию $s = s_1 + s_2$ соответствует вектор $A(t) = A_1(t) + A_2(t)$, проекция которого на горизонтальную ось OX равна s:

$$s = A(t) \sin \Phi(t).$$

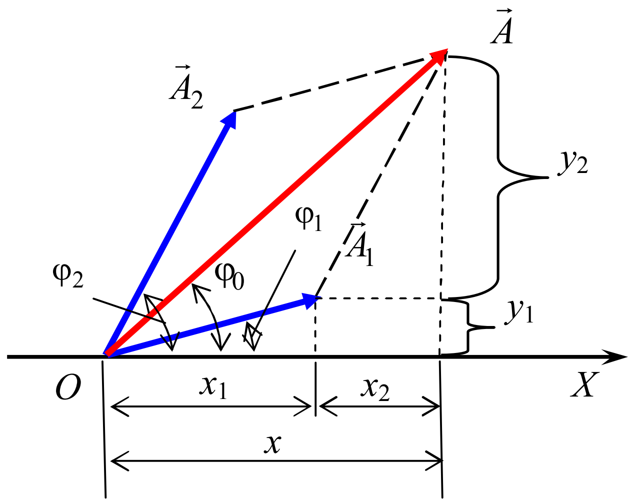


Рис. 1.6

По теореме косинусов

$$\left[A(t)\right]^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[\Phi_2(t) - \Phi_1(t)\right];$$

$$\mathrm{tg}\Phi(t) = \frac{A_1\sin\Phi_1(t) + A_2\sin\Phi_2(t)}{A_1\cos\Phi_1(t) + A_2\cos\Phi_2(t)}.$$

Два гармонических колебания s_1 и s_2 называются ***когерентными***, если разность их фаз не зависит от времени:

$$\frac{d}{dt}\left[\Phi_2(t) - \Phi_1(t)\right] = 0;$$

$$\Phi_2(t) - \Phi_1(t) = \mathrm{const}.$$

Поскольку $\Phi_2(t) - \Phi_1(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$, то циклические частоты когерентных колебаний должны быть одинаковы, т. е. $\omega_2 = \omega_1 = \omega$. В любой момент времени разность фаз когерентных колебаний равна разности их начальных фаз: $\Phi_2(t) - \Phi_1(t) = (\varphi_2 - \varphi_1)$. Соответственно результирующие колебания – гармонические с той же частотой ω, т.е.

$$s = s_1 + s_2 = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

и

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинаковой частоты. Пусть точка M одновременно колеблется вдоль осей координат OX и OY по законам $x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ и $y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$, где x и y – декартовы координаты точки M. Уравнение траектории результирующего движения точки M в плоскости XOY можно найти, исключив из выражений для x и y параметр t:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Траектория имеет форму эллипса (рис. 1.7), причем точка M описывает этот эллипс за время, равное периоду складываемых колебаний.

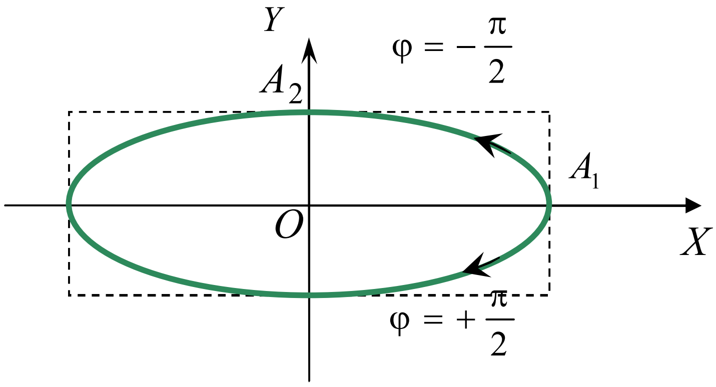


Рис. 1.7

Ориентация в плоскости XOY осей эллипса, а также его размеры зависят от амплитуд A_1 и A_2 складываемых колебаний и разности их начальных фаз $\varphi_2 - \varphi_1$.

Если $\varphi_2 - \varphi_1 = (2m+1)\frac{\pi}{2}$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то оси эллипса совпадают с осями координат OX и OY, а размеры его полуосей равны амплитудам A_1 и A_2:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

Кроме того, если $A_1 = A_2$, то траектория точки M представляет собой окружность.

В тех случаях когда $\varphi_2 - \varphi_1 = m\pi$ (m = 0, ±1, ±2,...), эллипс вырождается в отрезок прямой:

$$y = \pm \frac{A_2}{A_1} x.$$

Знак плюс соответствует четным значениям m, т. е. сложению синфазных колебаний (рис. 1.8), а знак минус – нечетным значениям m, т.е. сложению колебаний, происходящих в противофазе.

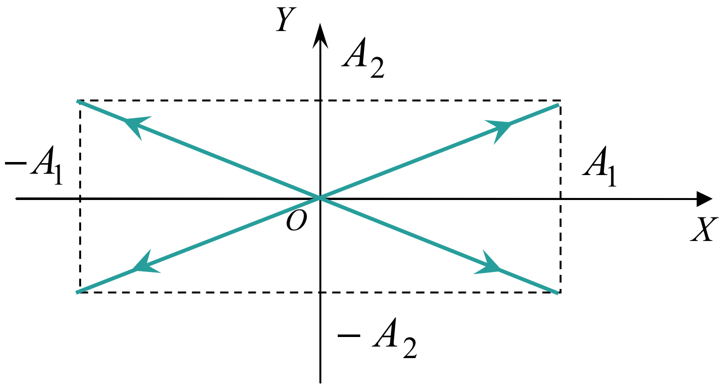


Рис. 1.8

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с циклическими частотами $p\omega$ и $q\omega$, где p и q – целые числа:

$$x = A_1 \sin(p\omega t + \varphi_1);\; y = A_2 \sin(q\omega t + \varphi_2).$$

Значения координат x и y колеблющейся точки M одновременно повторяются через одинаковые промежутки времени T_0, равные общему наименьшему кратному $T_1 = \dfrac{2\pi}{p\omega}$ и $T_2 = \dfrac{2\pi}{q\omega}$ – периодам колебаний вдоль осей OX и OY. Поэтому траектория точки M – замкнутая кривая, форма которой зависит от соотношения амплитуд, частот и начальных фаз складываемых колебаний. Такие замкнутые траектории точки M, одновременно совершающей гармонические колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, называются ***фигурами Лиссажу***.

Фигуры Лиссажу вписываются в прямоугольник, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат OX и OY и расположены по обе стороны от них на расстояниях, соответственно равных A_2 и A_1 (рис. 1.9).

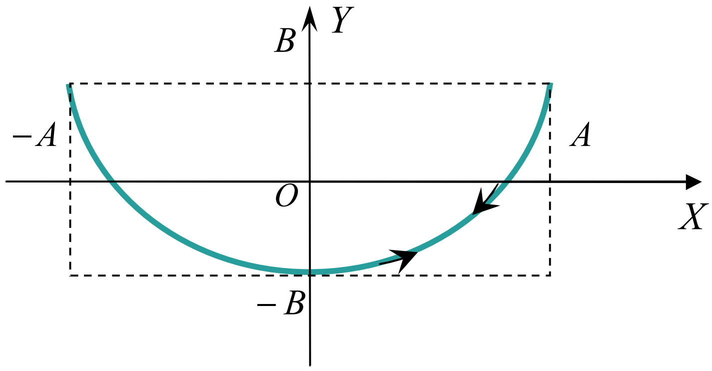


Рис. 1.9

Отношение частот $p\omega$ и $q\omega$ складываемых колебаний равно отношению числа касаний соответствующей им фигуры Лиссажу со стороной прямоугольника, параллельной оси OY, и со стороной, параллельной оси OX.

1.1.4. Затухающие колебания

Затуханием колебаний называется постепенное ослабление колебаний с течением времени, обусловленное потерей энергии колебательной системой. Свободные колебания реальных систем всегда затухают. Затухание свободных механических колебаний вызывается главным образом трением и возбуждением в окружающей среде упругих волн. Затухание в электрических колебательных системах является причиной тепловых потерь в проводниках, образующих систему или находящихся в ее переменном электрическом поле, потерь энергии на излучение электромагнитных волн, а также тепловых потерь в диэлектриках и ферромагнетиках вследствие электрического и магнитного гистерезиса.

Закон затухания колебаний зависит от свойств колебательной системы. Система называется ***линейной***, если параметры, характеризующие существенные в рассматриваемом процессе физические свойства системы, не изменяются в ходе процесса.

Линейные системы описываются линейными дифференциальными уравнениями. Например, пружинный маятник, движущийся в вязкой среде, представляет собой линейную систему, если коэффициент сопротивления среды и упругость пружины не зависят от скорости и смещения маятника. В большинстве случаев реальные колебательные системы достаточно близки по своим свойствам к линейным.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы имеет вид

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2\beta\frac{ds}{dt}+\omega_0^2 s=0,$$

где s – изменяющаяся при колебаниях физическая характеристика системы; $\beta=\mathrm{const}>0$ – *коэффициент затухания*; ω_0 – циклическая частота свободных **незатухающих** колебаний той же системы, т. е. в отсутствие потерь энергии (при $\beta=0$).

Пример. ***Свободные затухающие колебания пружинного маятника***. На маятник массой m, совершающий прямолинейные колебания вдоль оси OX под влиянием силы упругости пружины, действует также сила сопротивления $\vec{F}_{\text{сопр}}=-b\vec{\upsilon}$, где $\vec{\upsilon}$ – скорость маятника, $b=\mathrm{const}>0$ – *коэффициент сопротивления.* Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний маятника

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-b\frac{dx}{dt}-kx,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2 x=0,$$

где $\beta=\dfrac{b}{2m}$; $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Если затухание не слишком велико ($\beta<\omega_0$), то зависимость s от t, удовлетворяющая уравнению затухающих колебаний, имеет вид

$$s=A_0e^{-\beta t}\cos\left(\omega t+\varphi_0\right).$$

Здесь $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а постоянные величины A_0 и φ_0 зависят от начальных условий, т. е. от значений s и ds/dt в начальный момент времени ($t = 0$). График зависимости s от t при $\varphi_0 = 0$ показан на рис. 1.10.

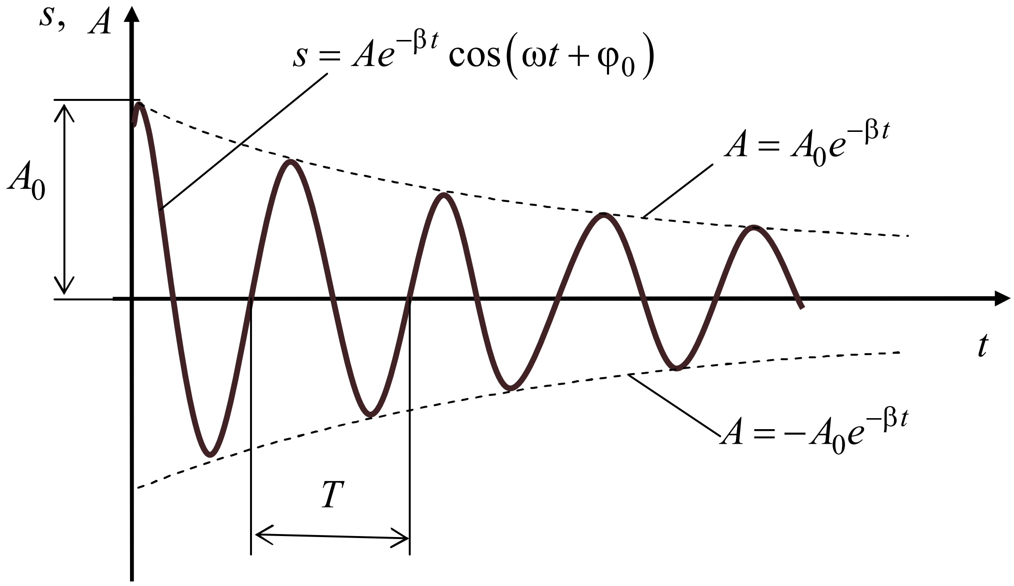


Рис. 1.10

Затухающие колебания не являются периодическими. Например, максимальное значение колеблющейся величины s, достигаемое в некоторый момент времени t_1, впоследствии (при $t > t_1$) никогда не повторяется. Однако при затухающих колебаниях величина s обращается в нуль, изменяясь в одну и ту же сторону (например, убывая), а также достигает максимальных и минимальных значений через равные промежутки времени:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Поэтому величины T и ω условно называют ***периодом (условным периодом)*** и ***циклической частотой (условной циклической частотой) затухающих колебаний***. Величина $A = A_0 e^{-\beta t}$ называется *амплитудой затухающих колебаний*, соответственно A_0 – *начальной амплитудой.* Амплитуда затухающих колебаний уменьшается с течением времени, и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания β.

Промежуток времени $\tau = \dfrac{1}{\beta}$, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз ($e = 2{,}71828$ – основание натурального логарифма), называется ***временем релаксации***.

Логарифмическим декрементом затухания называется безразмерная величина δ, равная натуральному логарифму отношения значений амплитуды затухающих колебаний в моменты времени t и $t + T$ (T – условный период колебании):

$$\delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N},$$

где N – число колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в e раз.

Связь между циклической частотой ω затухающих колебаний системы и логарифмическим декрементом затухания δ:

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2}\,.$$

Добротностью колебательной системы называется безразмерная физическая величина Q, равная произведению 2π на отношение энергии $W(t)$ колебания системы в произвольный момент времени t к убыли этой энергии за промежуток времени от t до $t+T$, т. е. за один условный период затухающих колебаний:

$$Q = 2\pi\frac{W(t)}{W(t)-W(t+T)}.$$

Поскольку энергия $W(t)$ пропорциональна квадрату амплитуды колебаний $A(t)$, то

$$Q = 2\pi\frac{A^2(t)}{A^2(t)-A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1-e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1-e^{-2\delta}}.$$

При малых значениях логарифмического декремента затухания δ добротность колебательной системы $Q = \dfrac{\pi}{\delta}$. При этом условный период затухающих колебаний T практически равен периоду T_0 свободных незатухающих колебаний, так что $Q = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}$. Например, добротность пружинного маятника определяется как $Q = \frac{1}{b}\sqrt{km}$.

При большом коэффициенте затухания происходит не только быстрое уменьшение амплитуды, но и заметное увеличение периода колебаний. Когда сопротивление становится равным критическому, т.е. $\beta = \omega_0$, то круговая частота обращается в нуль ($\omega = 0$), колебания прекращаются – это ***апериодический процесс*** (рис. 1.11).

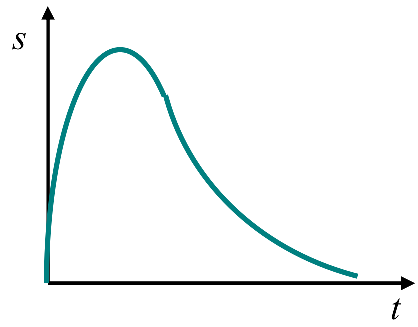


Рис. 1.11

Отличия в следующем: при затучающих колебаниях тело, возвращающееся в положение равновесия, имеет какой-то запас кинетической энергии, в случае же апериодического движения энергия тела при возвращении в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил трения.

1.1.5. Вынужденные механические колебания

Переменная внешняя сила, приложенная к системе и вызывающая ее вынужденные механические колебания, называется *вынуждающей,* или *возмущающей, силой.*

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний простейшей линейной системы (пружинного маятника), происходящих вдоль оси OX под влиянием переменной внешней силы $F(t)$, имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}F_x(t).$$

Если $F_x(t)$ – периодическая функция времени, то после приложения этой силы к маятнику вначале возникает *переходный режим вынужденных колебаний.* Маятник одновременно участвует в двух колебаниях:

$$x = x_1(t) + x_2(t).$$

Первое слагаемое соответствует свободным затухающим колебаниям маятника:

$$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \Psi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Второе слагаемое соответствует незатухающим периодическим колебаниям маятника с частотой, равной частоте возмущающей силы $F_x(t)$.

Амплитудное значение $x_1(t)$, равное $A_0 e^{-\beta t}$, более или менее быстро уменьшается после начала вынужденных колебаний: за время $\tau_0 = \dfrac{4,6}{\beta}$ амплитуда $x_1(t)$ уменьшается в 100 раз. Следовательно, через некоторое время τ после начала колебаний ($\tau \sim \tau_0$) свободные колебания маятника практически прекращаются: $x(t) \approx x_2(t)$. Маятник переходит в состояние ***установившихся вынужденных колебаний***, совершающихся с частотой возмущающей силы.

Если возмущающая сила изменяется по гармоническому закону, т. е. $F_x = F_0 \cos \Omega t$, то установившиеся вынужденные колебания маятника также являются гармоническими с частотой

$$x = A\cos(\Omega t + \varphi_0),$$

где Ω – частота вынужденных колебаний.

Амплитуда этих колебаний A и сдвиг фаз φ_0 между смещением и возмущающей силой зависят от соотношения между циклическими частотами вынужденных колебаний Ω и свободными незатухающими колебаниями маятника ω_0 :

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \text{ и } \operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

При $\Omega = 0$ получим $\varphi_0(0) = 0$ и $A(0) = A_0 = \dfrac{F_0}{m\omega_0^2} = \dfrac{F_0}{k}$ – *статическое смещение* маятника из положения равновесия под действием постоянной силы $F_x = F_0$. При $\Omega \to \infty$ амплитуда $A(\Omega) \to 0$ и $\mathrm{tg}\varphi_0 \to 0$, а $\varphi_0 \to -\pi$. Графики зависимости $A(\Omega)$ при различных значениях коэффициента затухания $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ показаны на рис. 1.12.

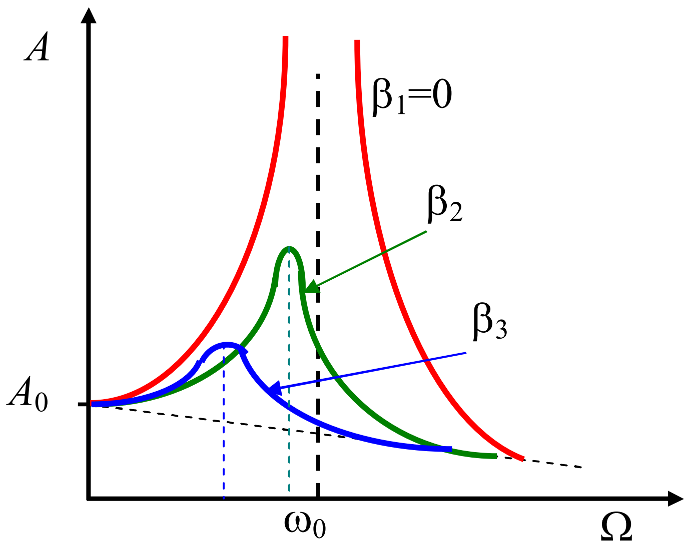


Рис. 1.12

Амплитуда смещения в случае установившихся вынужденных гармонических колебаний маятника достигает максимума при циклической частоте колебаний

$$\Omega_{\text{P}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2},$$

где ω – циклическая частота свободных затухающих колебаний маятника. Частота Ω_{P} называется *резонансной*. Максимальная амплитуда

$$A_{\max} = A(\Omega_{\text{P}}) = \frac{F_0}{2m\beta\omega} = \frac{\pi F_0}{m\delta\omega^2},$$

где δ – логарифмический декремент затухания. Если $\beta \ll \omega_0$, то $\Omega_{\text{P}} \approx \omega_0$, $\varphi_0(\Omega_{\text{P}}) \approx -\dfrac{\pi}{2}$ и $A_{\max} \approx QA_0$, где $Q \approx \dfrac{\pi}{\delta}$ – добротность маятника, а A_0 – статическое смещение.

Резкое возрастание амплитуды вынужденных механических колебаний при приближении циклической частоты возмущающей силы к значению $\Omega_{\text{Р}}$ называется явлением ***механического резонанса.*** Соответственно графики зависимости A от Ω, изображенные на рис. 1.12, называются ***резонансными кривыми***.

По мере увеличения коэффициента затухания β пики на резонансных кривых быстро сглаживаются (при малых β амплитуда $A_{\max} \sim \dfrac{1}{\beta}$), а резонансная частота медленно уменьшается.

Скорость маятника при установившихся вынужденных гармонических колебаниях

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -A\Omega \sin\left(\Omega t + \varphi_0\right) = A_\upsilon \cos\left(\Omega t + \alpha\right).$$

Здесь $A_\upsilon = A\Omega$ и $\alpha = \varphi_0 + \dfrac{\pi}{2}$ – амплитуда скорости и сдвиг фаз между скоростью и возмущающей силой, причем

$$A_\upsilon = \frac{F_0\Omega}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{\dfrac{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2}{\Omega^2} + 4\beta^2}}$$

и

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}\varphi_0 = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\beta\Omega}.$$

Амплитуда скорости максимальна при $\Omega = \omega_0$ и имеет вид

$$\left(A_\upsilon\right)_{\max} = A_\upsilon\left(\omega_0\right) = \frac{F_0}{2m\beta}.$$

В этом случае $\alpha = 0$, т.е. скорость маятника колеблется в одной фазе с возмущающей силой. При $\Omega \to \infty$ амплитуда $A_\upsilon \to 0$ и $\alpha \to -\dfrac{\pi}{2}$, а при $\Omega \to 0$ амплитуда $A_\upsilon \to 0$ и $\alpha \to \dfrac{\pi}{2}$.

Ускорение маятника при установившихся вынужденных гармонических колебаниях

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\Omega^2 \cos\left(\Omega t + \varphi_0\right) = A_a \cos\left(\Omega t + \gamma\right).$$

Здесь $A_a = A\Omega^2$ и $\gamma = \varphi_0 + \pi$ – амплитуда ускорения и сдвиг фаз между ускорением и возмущающей силой, причем

$$A_a = \frac{F_0\Omega^2}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{\left[\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 - 1\right]^2 + \left(\frac{2\beta}{\Omega}\right)^2}}.$$

Амплитуда ускорения максимальна при условии

$$\Omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}} \approx \omega_0\left(1 + \frac{\beta^2}{\omega_0^2}\right).$$

При $\Omega \to 0$ амплитуда $A_a = 0$, а при $\Omega \to \infty$ амплитуда ускорения стремится к значению $A_a(\infty) = \frac{F_0}{m}$.

1.2. Примеры решения задач

Механические колебания

Задача 1

Материальная точка колеблется по гармоническому закону, при этом максимальное отклонение ее от положения равновесия равно 6 см, а полная энергия колебаний $8{,}51 \cdot 10^{-4}$ Дж. При каком смещении от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила, равная $8{,}46 \cdot 10^{-4}$ Н?

Дано:	*Решение*
A = 6 см = $6 \cdot 10^{-2}$ м $W = 8{,}51 \cdot 10^{-4}$ Дж $F = 8{,}46 \cdot 10^{-4}$ Н x – ?	Сила, действующая на точку в любой момент времени t, может быть определена из 2-го закона Ньютона: $F = ma$. (1)

Ускорение точки можно определить как

$$a = \frac{d^2x}{dt^2},$$

где $x = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$ – смещение точки в любой момент времени t (закон изменения координаты).

После взятия двух производных имеем:

$$a = -A\omega^2 \sin\left(\omega t + \varphi_0\right) = -\omega^2 x.$$

Подставим получившееся выражение для a в формулу (1), получаем

$$F = -m\omega^2 x . \qquad (2)$$

Полная энергия свободных колебаний не изменяется с течением времени t и может быть найдена по формуле

$$W = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \qquad (3)$$

Из равенства (2) следует, что $m\omega^2 = -\frac{F}{x}$, подставим получившееся выражение в (3):

$$W = \frac{-FA^2}{2x} \Rightarrow x = \frac{-FA^2}{2W} = \frac{-8,46\cdot 10^{-4}\cdot\left(6\cdot 10^{-2}\right)^2}{2\cdot 8,51\cdot 10^{-4}} = 1,789\cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Ответ: $x = 1,789\cdot 10^{-3}$ м.

Задача 2

Шарик, подвешенный на длинной нити, совершает гармонические колебания с частотой 4 Гц. Через сколько секунд после начала движения кинетическая энергия шарика в первый раз будет равна потенциальной, если начальная фаза равна 12°?

Дано:
$\nu = 4$ Гц
$\varphi_0 = 12°$
t – ?

Решение

При малых углах отклонения колебания математического маятника можно описать с помощью уравнений, справедливых для материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания.

Следовательно, кинетическая и потенциальная энергия определяются следующими выражениями:

$$W_{\text{К}} = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 \left[1 + \cos\left(2\omega t + 2\varphi_0\right)\right];$$

$$W_{\text{П}} = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 \left[1 - \cos\left(2\omega t + 2\varphi_0\right)\right].$$

Из условий задачи:

$$W_{\text{К}} = W_{\text{П}} \Rightarrow 1 + \cos\left(2\omega t + 2\varphi_0\right) = 1 - \cos\left(2\omega t + 2\varphi_0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(2\omega t + 2\varphi_0\right) = 0;$$

$$2\omega t + 2\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n,$$

так как требуется определить момент времени, когда энергии в первый раз будут равны друг другу, то $n = 0$:

$$t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_0\right) = \frac{\frac{\pi}{4} - \varphi_0}{2\pi\nu} = 2{,}292 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

Ответ: $t = 2{,}292 \cdot 10^{-2}$ с.

Задача 3

Во сколько раз уменьшится полная энергия колебаний маятника за 1 мин, если логарифмический декремент затухания равен 0,00752? Период колебаний равен 3 с.

Дано:	Решение
t_1 = 1 мин = 60 с δ = 0,00752 T = 3 с $\dfrac{W_0}{W_1}$ – ?	Полная энергия маятника может быть определена как $$W = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2,$$

где $A = A_0 \exp\left[-\beta t\right]$ – амплитуда колебаний (для данной задачи – амплитуда затухающих колебаний).

Тогда отношение энергии через момент времени, равный t_1, определяется как $\dfrac{W_0}{W_1} = \left(\dfrac{A_0}{A_1}\right)^2 = \left(\exp\left[-\beta t\right]\right)^{-2} = \exp\left[2\beta t_1\right].$

Для нахождения коэффициента затухания β воспользуемся следующей формулой:

$$\delta = \beta T \Rightarrow \beta = \frac{\delta}{T}.$$

В итоге получаем:

$$\frac{W_0}{W_1} = \exp\left[\frac{2\delta t_1}{T}\right] = \exp\left[\frac{2 \cdot 0{,}00752 \cdot 60}{3}\right] = \exp\left[0{,}3008\right] = 1{,}351.$$

Ответ: $\dfrac{W_0}{W_1} = 1{,}351$.

Задача 4

Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за 3 мин уменьшилась в 6 раз. Во сколько раз она уменьшится за 7 мин?

Дано:

$\dfrac{A_0}{A_1} = 6$

$t_1 = 3$ мин $= 180$ с

$t_2 = 7$ мин $= 420$ с

$\dfrac{A_0}{A_2} - ?$

Решение

Амплитуда затухающих колебаний изменяется по закону

$$A = A_0 \exp\left[-\beta t\right].$$

Отношение амплитуд для любого момента времени может быть определено из следующего выражения:

$$\frac{A_0}{A} = \exp\left[\beta t\right]. \qquad (1)$$

Подставляя время t_1, найдем коэффициент затухания β:

$$\frac{A_0}{A_1} = \exp\left[\beta t_1\right] \Rightarrow \beta = \frac{1}{t_1}\ln\frac{A_0}{A_1}.$$

Введя коэффициент затухания β в формулу (1), найдем искомое отношение амплитуд:

$$\frac{A_0}{A_2} = \exp\left[\beta t_2\right] = \exp\left[\frac{t_2}{t_1}\ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right)\right] = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^{t_2/t_1} = 65{,}41.$$

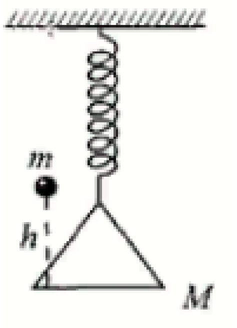
Ответ: $\dfrac{A_0}{A_2} = 65{,}41$.

Задача 5

На чашку весов массой M, подвешенную на пружине с жесткостью k, с высоты h падает небольшой груз массой m. Удар груза о дно чашки является абсолютно неупругим. Чашка в результате падения груза начинает совершать колебания. Определить амплитуду этих колебаний.

Дано:
M
k
h
m
$A - ?$

Решение



Данную задачу решим в общем виде.

Запишем закон сохранения энергии для груза:

$\frac{mv_1^2}{2} = mgh \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$ (скорость груза в момент удара).

Скорость чашки с грузом после удара можем определить с помощью закона сохранения импульса:

$$mv_1 = (m+M)v \Rightarrow v = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}.$$

При ненагруженной чашке

В начальный момент времени пружина растянута на длину l вследствие веса чашки, причем $Mg = kl$.

Положению равновесия чашки будет соответствовать смещение:

$l = \frac{Mg}{k}$ – начальное растяжение пружины.

По закону сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 + (m+M)g(x_0 - l) = \int_l^{x_0} kx dx,$$

$$\frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2}{(m+M)^2} \cdot 2gh + (m+M)g(x_0 - l) = \frac{1}{2}k\left(x_0^2 - l^2\right),$$

где x_0 – максимальное растяжение пружины.

Решаем уравнение относительно x_0:

$$x_0 = \frac{m+M}{k}g \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gh}{(m+M)k}}.$$

При нагруженной чашке

Найдем новое положение равновесия с помощью следующей формулы:

$$(m+M)g = kl' \to l' = \frac{m+M}{k}g \text{ (новое положение равновесия).}$$

В итоге значение амплитуды

$$A = x_0 - l' = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2ghm^2}{(m+M)k}}.$$

Ответ: $A = \sqrt{\dfrac{m^2g^2}{k^2} + \dfrac{2ghm^2}{(m+M)k}}$.

1.3. Задания для решения на практических занятиях

Задачи

1. Материальная точка совершает гармонические колебания, при этом ее полная энергия равна $6{,}42 \cdot 10^{-3}$ Дж, а действующая на нее сила при смещении, равном половине амплитуды, равна 3 Н. Определить максимальное смещение точки от положения равновесия.

2. Грузик, подвешенный на легкой пружине, совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости с амплитудой 4 см. В некоторый момент точка подвеса сама начинает колебаться в вертикальной плоскости с амплитудой 6 см и тем же периодом. Найти разность фаз складываемых колебаний, если амплитуда результирующего колебания равна 3 см.

3. В неподвижном лифте висит маятник, период колебаний которого 6 с. С каким ускорением должен двигаться лифт, чтобы период колебаний этого маятника стал равным 3 с? Ускорение считать положительным, если оно направлено вниз.

4. На доске лежит груз массой 4 кг. Доска совершает гармонические колебания с периодом 1,861 с и амплитудой, равной 1 см. Определить в килограммах вес груза в момент времени,

равный 1/8 периода колебаний. Время отсчитывается от момента, когда доска, поднимаясь, проходит среднее положение.

5. Автомобиль массой 1457 кг при движении по ребристой дороге совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с периодом 0,68 с и амплитудой 14 см. Определить максимальную силу давления, действующую на каждую из четырех рессор автомобиля.

6. Шарик скатывается с высоты 48 см по наклонной плоскости, составляющей угол 33° с горизонтом. Скатившись, он тут же поднимается по другой плоскости, наклоненной под тем же углом к горизонту. Найти частоту колебаний шарика. Трение не учитывать.

7. К потолку лифта на шарнире подвешен стержень за один конец. При этом его второй конец может свободно качаться. Длина стержня 72 см. Определить период колебаний стержня, если лифт движется вверх с ускорением 1,82 м/с^2.

8. К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлиняется на 2 см. Оттягивая этот груз вниз и отпуская его, заставляют груз совершать колебания. Чему должен быть равен коэффициент затухания, если логарифмический декремент затухания равен 1?

9. Материальная точка совершает гармонические колебания. При смещении точки от положения равновесия, равном 1 см, скорость точки равна 7 см/с, а при смещении, равном 3 см, скорость равна 5 см/с. Найти период колебания материальной точки, если в начальный момент времени она находилась в положении равновесия.

10. Маятник, состоящий из легкой нити длиной 96 см с грузом массой 160 г на конце, совершает колебания под воздействием вынуждающей силы, амплитудное значение которой равно 0,0122 Н, и силы сопротивления, пропорциональной скорости: $F = 0,041\upsilon$. Определить добротность системы.

Тестовые вопросы

1. Свободные незатухающие колебания пружинного маятника описываются дифференциальным уравнением…

1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{b}{m}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{k}{m}x=0$;

2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k}{m}x=0$;

3) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{b}{m}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{k}{m}x=\dfrac{F_0}{m}\cos\omega t$,

где b – коэффициент сопротивления; k – жесткость пружины; m – масса колеблющегося груза.

2. По какой из приведенных формул можно рассчитать собственную частоту пружинного маятника:

1) $\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{l_{\text{пр}}}}$; 2) $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$; 3) $\omega_0=\sqrt{\dfrac{\text{g}}{l}}$?

3. Какое из предложенных уравнений описывает изменение ускорения материальной точки, колеблющейся по гармоническому закону $x=A\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)$?

Ответы:

1) $a=A\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0+\dfrac{\pi}{2}\right)$;

2) $\alpha=\alpha_m\omega_0\cos\left(\omega_0 t+\varphi\right)$;

3) $a=-A\omega_0^2\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)$;

4) $a=A\omega_0^2\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)$.

4. От каких параметров зависит период гармонических колебаний математического маятника:

а) массы маятника;

б) длины маятника;

в) ускорения свободного падения?

Ответы: 1) а, б; 2) а, в; 3) б, в.

5. При сложении двух гармонических колебаний одного направления с одинаковыми периодами и равными амплитудами результирующее колебание имеет такую же амплитуду, что и складываемые колебания. При этом разность фаз исходных колебаний равна …

1) $\frac{\pi}{2}$;   2) 0;   3) π;   4) $\frac{2\pi}{3}$.

1.4. Задания для самостоятельного решения

Задачи

1. Тело массой 17 г совершает синусоидальные колебания с нулевой начальной фазой, амплитудой 7 см и коэффициентом затухания 2 с$^{-1}$. Под действием внешней периодической силы установились вынужденные синусоидальные колебания амплитудой 5 см, частотой 31,4 рад/с и начальной фазой $\varphi_0 = \frac{3}{4}\pi$. Найти в системе СИ амплитуду внешней силы.

2. К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлиняется на 2 см. Оттягивая этот груз вниз и отпуская его, заставляют груз совершать колебания. Найти коэффициент затухания, если логарифмический декремент затухания равен 5.

3. Определить амплитуду вынужденных колебаний грузика массой 199 г, подвешенного на пружине с коэффициентом жесткости 29 Н/м, если действует вынуждающая сила с амплитудой 2 Н и частотой в 2 раза большей собственной частоты колебаний груза. Коэффициент затухания равен 8 с$^{-1}$.

4. На сколько процентов следует уменьшить длину математического маятника при подъеме его на высоту 27 км над Землей, чтобы период его колебаний не изменился?

5. За какую часть периода точка, совершающая гармонические колебания, пройдет путь, равный $0{,}301A$, где A – амплитуда колебаний, если в начальный момент точка находилась в положении равновесия?

6. Амплитуда колебаний камертона за 34 с уменьшилась в 51 раз. Найти коэффициент затухания колебаний.

7. Шарик скатывается с высоты 61 см по наклонной плоскости, составляющей угол 40° с горизонтом. Скатившись, он тут же поднимается по другой плоскости, наклоненной под тем же углом к горизонту. Найти частоту колебаний шарика. Трение не учитывать.

8. Какую часть периода отклонение маятника от положения равновесия составляет меньше 2 см, если амплитуда его колебаний равна 7 см?

9. В результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и одинаковыми периодами получается результирующее колебание с тем же периодом и той же амплитудой. Найти разность фаз складываемых колебаний (в градусах).

10. Частица колеблется в среде, для которой логарифмический декремент затухания 5. Во сколько раз следует увеличить сопротивление среды, чтобы колебания были невозможны?

Таблица правильных ответов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,122	13,79	0,01723	0,8477	0,04866	0,1156	0,4556	0,1845	120	1,61

Тесты

1. Период свободных колебаний математического маятника зависит от...

1) массы груза;

2) частоты колебаний;

3) длины его нити.

2. Период свободных колебаний математического маятника равен 5 с. Чему равна частота его колебаний:

1) 0,2 Гц;

2) 20 Гц;

3) 5 Гц?

3. Какое перемещение совершает груз, колеблющийся на нити, за один период:

1) перемещение, равное амплитуде колебаний;

2) перемещение, равное нулю;

3) перемещение, равное двум амплитудам колебаний?

4. Как изменится период колебаний математического маятника при увеличении амплитуды его колебаний в 2 раза:

1) увеличится в 2 раза;

2) уменьшится в 2 раза;

3) не изменится?

5. Как изменится частота колебаний маятника при уменьшении амплитуды его колебаний в 3 раза:

1) уменьшится в 3 раза;

2) увеличится в 3 раза;

3) не изменится?

Таблица правильных ответов на тестовые задания

1	2	3	4	5
3	1	2	3	3

1.5. Вопросы для самоконтроля

1. Что называют свободными колебаниями? Приведите примеры свободных механических колебаний.

2. Получите дифференциальное уравнение собственных колебаний пружинного маятника.

3. Какие колебания называются гармоническими?

4. Введите понятие амплитуды, фазы и начальной фазы колебаний.

5. Что называется частотой колебаний? Введите понятие циклической частоты колебаний.

6. Как связаны между собой частота, циклическая частота и период колебаний?

7. Получите выражение для частоты и периода пружинного маятника.

8. Как можно представить гармоническое колебание с помощью векторной диаграммы?

9. Запишите зависимость от времени скорости и ускорения маятника, совершающего гармонические колебания.

10. Запишите зависимость от времени кинетической, потенциальной и полной энергии пружинного маятника.

11. Что называется математическим маятником и чем определяется его период?

12. Что называется физическим маятником? Запишите выражение для частоты и периода физического маятника.

13. Что представляет собой результат сложения двух гармонических колебаний одинакового направления, одинаковой частоты?

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

2.1. Краткая теория

2.1.1. Свободные гармонические колебания в электрическом колебательном контуре

Примером электрической цепи, в которой могут происходить свободные электрические колебания, служит простейший *колебательный контур* (рис. 2.1), состоящий из конденсатора электроемкостью C и соединенной с ним последовательно катушки индуктивностью L. При замыкании на катушку предварительно заряженного конденсатора в колебательном контуре возникают свободные колебания заряда конденсатора и тока в катушке. Переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью, равной скорости света. Поэтому если линейные размеры контура l не слишком велики ($l \ll \frac{c}{\nu}$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме; ν – частота колебаний в контуре), то можно считать, что в каждый момент времени t сила тока I во всех частях контура одинакова. Такой переменный ток называется *квазистационарным.*

Для возбуждения в контуре колебаний конденсатор предварительно заряжают, сообщая его обкладкам заряды $\pm q$. В момент времени $t = 0$ между обкладками конденсатора возникает электрическое поле, энергия которого равна $\frac{q^2}{2C}$. Вся энергия колебательного контура сосредоточена в конденсаторе. Если теперь замкнуть конденсатор на катушку индуктивности, то в контуре потечет возрастающий со временем ток I. Электрическая энергия конденсатора начнет превращаться в магнитную энергию катушки. Этот процесс закончится, когда конденсатор полностью разрядится, а ток в цепи достигнет максимума. Вся энергия колебательного контура сосредоточится в магнитном поле катушки и составит $\frac{LI^2}{2}$. С этого момента ток, не меняя направления, начнет убывать. Однако он прекратится не сразу – его будет поддерживать ЭДС самоиндукции. Ток будет перезаряжать конденсатор, возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток. Наконец ток прекратится, а заряд на пластинах конденсатора достигнет максимума. С этого момента конденсатор начнет вновь разряжаться, ток потечет в обратном направлении и процесс повторится.

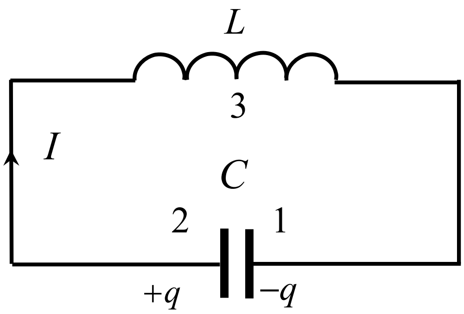


Рис. 2.1

Поскольку мы предполагаем, что потерь энергии нет, в контуре будут совершаться периодические незатухающие колебания: периодически будет изменяться заряд на обкладках конденсатора, напряжение на конденсаторе и сила тока, текущего через катушку индуктивности. Следовательно, в контуре возникают электрические колебания, которые сопровождаются превращениями энергии электрического и магнитного полей.

Найдем уравнение колебаний в контуре без активного сопротивления. Будем искать закон изменения заряда на обкладках конденсатора. Пусть положительным будет такое направление тока в контуре, когда конденсатор заряжается. Сила тока в цепи определяется выражением

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Рассмотрим цепь 1 – 3 – 2 и запишем для нее закон Ома в общем виде для неоднородного участка цепи:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_i,$$

где ε_i – ЭДС, действующая на участке цепи 1 – 2.

ЭДС положительна, так как способствует движению положительно заряженных носителей тока в выбранном направлении. В рассматриваемом случае

$$U_C = \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C}, \quad \varepsilon_i = -L\left(\frac{dI}{dt}\right).$$

Подставим эти значения в выражение для закона Ома, получим:

$$0 = -q/C - L\left(\frac{dI}{dt}\right).$$

Перепишем $\frac{dI}{dt}$ через заряд $\left(\frac{dI}{dt} = \frac{d^2 I}{dt^2}\right)$, тогда

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Если ввести обозначение $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, получим выражение вида

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0,$$

которое представляет дифференциальное уравнение гармонических колебаний в контуре и подобно соответствующим уравнениям механических колебаний. Решением этого уравнения является выражение

$$q = q_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой, определяемой параметрами контура L и C. Эта частота называется *собственной частотой контура* и соответствует собственной частоте гармонического осциллятора. Выражение для периода колебаний называется формулой Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Запишем формулу для напряжения на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_{\max}}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi) = U_{\max}\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Получим выражение для тока в контуре, продифференцировав соотношение для заряда:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_{\max}\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) = I_{\max}\cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\frac{\pi}{2}$. Сопоставление выражений, полученных для заряда, напряжения на конденсаторе и тока в контуре, показывает, что в момент, когда ток достигает наибольшего значения, заряд и напряжение обращаются в нуль и наоборот:

$$U_{\max} = \frac{q_{\max}}{C}; \quad \Rightarrow \quad I_{\max} = \omega_0 q_{\max}; \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$

Тогда можно записать

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{L}{C}}\, I_{\max}.$$

Величина $\sqrt{\frac{L}{C}}$ называется *волновым сопротивлением* колебательного контура.

При свободных гармонических колебаниях в колебательном контуре происходит периодическое преобразование энергии электрического поля конденсатора W_e в энергию магнитного поля катушки индуктивности W_m и наоборот:

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}\sin^2\left(\omega t + \varphi_0\right) = \frac{q_0^2}{4C}\left[1 - \cos\left(2\omega t + 2\varphi_0\right)\right];$$

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}\cos^2\left(\omega t + \varphi_0\right) = \frac{LI_0^2}{4}\left[1 + \cos\left(2\omega t + 2\varphi_0\right)\right].$$

Поэтому колебания, происходящие в электрическом колебательном контуре, часто называют *электромагнитными колебаниями* в контуре.

Значения W_e и W_m изменяются при гармонических электромагнитных колебаниях в пределах от 0 до максимальных значений, соответственно равных $\frac{q_0^2}{2C}$ и $\frac{LI_0^2}{2}$, причем $\frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2}$.

Колебания W_e и W_m сдвинуты по фазе: в те моменты времени, когда $W_e = 0$, $W_m = W_{m\max} = \frac{LI^2}{2}$, и наоборот, когда $W_m = 0$, то $W_e = W_{e\max} = \frac{q_0^2}{2C}$. Полная энергия электромагнитных колебаний в контуре не изменяется с течением времени:

$$W = W_e + W_m = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2} = \text{const}.$$

2.1.2. Затухающие электрические колебания

Реальный контур обладает активным сопротивлением (рис. 2.2).

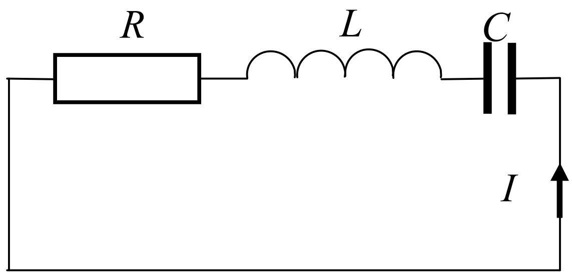


Рис. 2.2

Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего свободные колебания затухают. Учтем фактор затухания в выражении для закона Ома или по второму правилу Кирхгофа для контура:

$$U_R + U_C = \varepsilon_i;$$

$$IR + \frac{q}{C} = -L\left(\frac{dI}{dt}\right).$$

Разделим последнее уравнение на L и заменим ток I на заряд q. В итоге получим:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Введем обозначение $\beta = \frac{R}{2L}$ и, учитывая, что $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, получим окончательно

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 .$$

Это уравнение, как и ожидалось, совпадает с дифференциальным уравнением затухающих механических колебаний. При условии, что $\beta^2 \ll {\omega_0}^2$, т.е. при $\frac{R^2}{4L^2} \ll \frac{1}{LC}$, решение уравнения затухающих колебаний имеет вид

$$q = q_{\max 0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \qquad (2.1)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Если в формулу частоты затухающих колебаний подставить соответствующие выражения для ω_0 и β, получим соотношение

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} .$$

При $R = 0$ получится выражение для собственной частоты незатухающих свободных колебаний в контуре.

Из уравнения для затухающих колебаний легко получить формулу для напряжения на конденсаторе, разделив уравнение (2.1) на емкость C, и выражение для тока в контуре после дифференцирования этого же уравнения. Опуская эти и ряд других несложных преобразований, запишем лишь один результат, полученный после преобразования. Он касается разности фаз между током и падением напряжения на конденсаторе колебательного контура: при наличии активного сопротивления в контуре сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на угол δ, больший чем $\frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \delta < \pi\right)$.

График изменения заряда со временем изображен на рис. 2.3 и подобен соответствующему графику для механических колебаний.

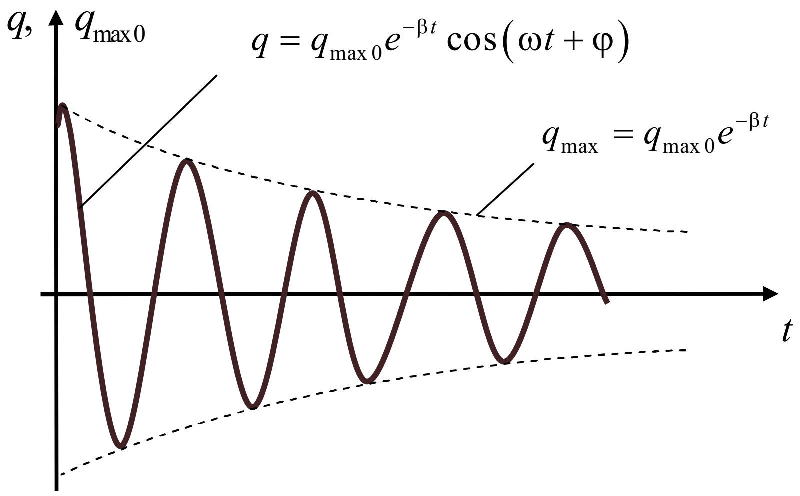


Рис. 2.3

Как и в случае механических колебаний, затухание электрических колебаний характеризуется *логарифмическим декрементом затухания*:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}.$$

Логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний N_e, совершаемых за время, в течение которого амплитуда затухающего колебания уменьшится в e раз (за время релаксации). Если в выражение для логарифмического декремента затухания $\theta = \beta T$ подставить значения для β и T, получим следующую форму записи:

$$\theta = \beta T = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega},$$

т.е. логарифмический декремент затухания определяется параметрами контура и, следовательно, является его характеристикой.

Добротность контура – это величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания:

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e.$$

Добротность контура пропорциональна числу колебаний N_e, совершаемых за время релаксации. Добротность тем выше, чем большее число колебаний успевает совершиться, прежде чем амплитуда уменьшится в e раз.

Добротность контура определяется еще и по-другому:

$$Q = 2\pi \frac{W_t}{W_t - W_{t+T}}$$

это отношение энергии в контуре в данный момент времени к убыли энергии за один период, следующий за этим моментом.

При $\beta^2 \geq \omega_0^2$, т.е. при $\dfrac{R^2}{4L^2} > \dfrac{1}{LC}$, происходит *апериодический разряд* (рис. 2.4).

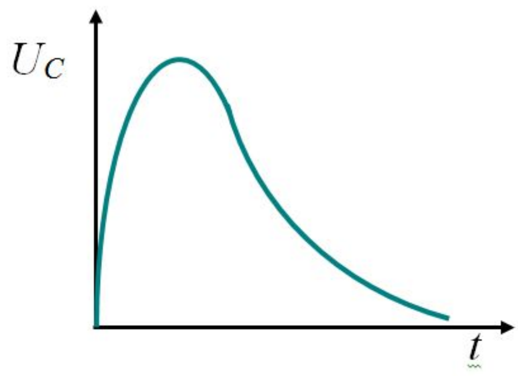


Рис. 2.4

Конденсатор просто разряжается на сопротивление, и колебания не происходят.

Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется ***критическим сопротивлением***:

$$\frac{R_K^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \Rightarrow R_K = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2R_{\text{волнового}}.$$

2.1.3. Вынужденные электрические колебания

Для компенсации потерь в колебательном контуре нужно оказывать на него периодически изменяющееся воздействие. Это можно осуществить, например, включив последовательно с элементами контура переменную ЭДС или, разорвав контур, подать на образовавшиеся контакты переменное напряжение $\varepsilon = \varepsilon_{\max} \cos \omega t$ (рис. 2.5).

Напряжение ε нужно прибавить к ЭДС самоиндукции в исходной формуле для затухающих колебаний.

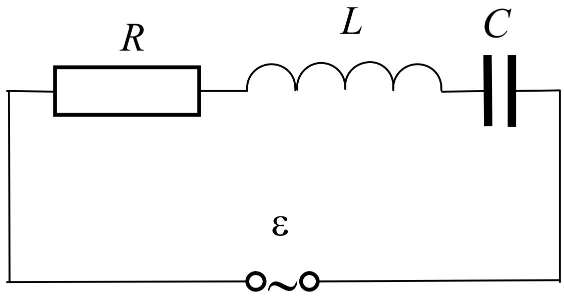


Рис. 2.5

Рассмотрим этот вопрос кратко, используя аналогию с механическими колебаниями.

Уравнение вынужденных электрических колебаний имеет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=\frac{\varepsilon_{\max}}{L}\cos\omega t.$$

Мы имеем уже неоднородное линейное *дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.* Решение неоднородного дифференциального уравнения представим в виде его частного решения для установившихся колебаний. Оно, как и для механических вынужденных колебаний, имеет вид

$$q=q_{\max}\cos(\omega t+\psi),$$

где $q_{\max}$ – амплитуда заряда на конденсаторе; ψ (пси) – разность фаз между колебаниями заряда и внешней ЭДС.

Выражения для постоянных величин $q_{\max}$ и ψ, как и для механических колебаний, запишем без вывода:

$$q_{\max}=\frac{\varepsilon_{\max}/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}.$$

Если в формулу теперь подставить значения ω_0 и β, получим выражения, записанные через параметры контура:

$$q_{\max}=\frac{\varepsilon_{\max}}{\omega\sqrt{R^2+\left[\omega L-1/(\omega C)\right]^2}},\quad \psi=\operatorname{arctg}\frac{R}{1/(\omega C)-\omega L}.$$

Соотношения для постоянных величин $q_{\max}$ и ψ можно использовать для анализа параметров вынужденных колебаний в контуре. Как и в случае затухающих свободных колебаний ограничимся лишь общими выводами о сдвиге фаз колебаний тока и напряжения на элементах контура:

– напряжение на емкости отстает по фазе от тока на угол $\dfrac{\pi}{2}$;

– напряжение на активном сопротивлении изменяется в фазе с током;

– напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

Величина $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(R_L - R_C\right)^2}$ называется полным сопротивлением цепи (или ***импедансом***).

Величина $X = R_L - R_C = \omega L - \dfrac{1}{\omega C}$ называется реактивным сопротивлением цепи.

При последовательном соединении L, C, R и $X = 0$ $\left(\omega L = \dfrac{1}{\omega C}\right)$ наблюдается резонанс напряжений. При этом угол сдвига фаз между током и напряжением обращается в нуль.

На конденсаторе напряжение достигает максимума при круговой частоте $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Полное сопротивление $Z = R$ и тогда $U = U_R$, а U_C и U_L одинаковы по величине и противоположны по фазе:

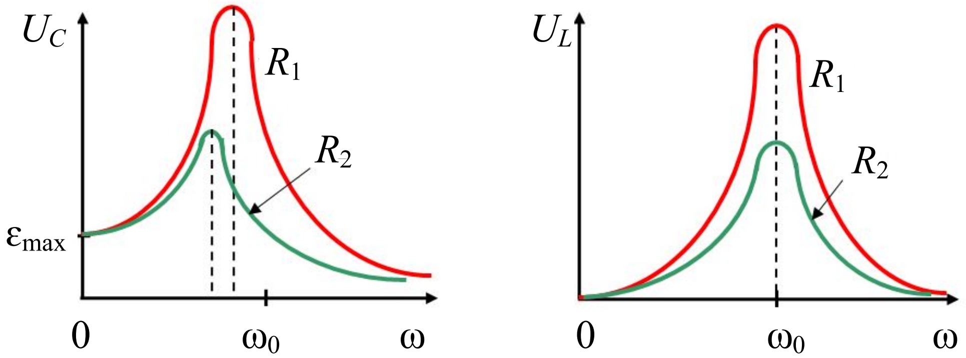
$$\left(U_L\right)_{\text{рез}} = \left(U_C\right)_{\text{рез}}.$$

Такой вид резонанса называется ***резонансом напряжений*** или ***последовательным резонансом***. Можно записать:

$$\left(U_L\right)_{\text{рез}} = \left(U_C\right)_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\, I_{\max} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\, U_{\max} = QU_{\max}.$$

При резонансе на емкости можно получить напряжение с амплитудой $QU_{\max} >> U_{\max}$ в узком диапазоне частот. Это свойство используется в усилителях напряжения.

Ниже приведены графики зависимостей напряжения на конденсаторе и тока через индуктивность (напряжения на резисторе) от частоты (рис. 2.6).



$R_1 < R_2$

Рис. 2.6

2.1.4. Переменный электрический ток

Установившиеся вынужденные электрические колебания можно рассматривать как протекание в цепи, обладающей емкостью, индуктивностью и активным сопротивлением R, переменного тока. Под действием внешнего напряжения (оно играет роль внешней ЭДС ε)

$$U = U_{\max} \cos \omega t . \qquad (2.2)$$

Ток в цепи изменяется по закону

$$I = I_{\max} \cos(\omega t - \varphi); \qquad (2.3)$$

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - 1/(\omega C)\right]^2}}, \quad \text{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \qquad (2.4)$$

Задача сводится к определению амплитуды силы тока и сдвига тока по фазе относительно напряжения U.

Полученное выражение для амплитуды силы тока $I_{\max}(\omega)$ можно формально трактовать как закон Ома для амплитудных значений тока и напряжения. Стоящую в знаменателе выражения (2.4) величину, имеющую размерность сопротивления, называют ***полным сопротивлением*** или ***импедансом***:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,. \tag{2.5}$$

Видно, что при $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ сопротивление Z минимально и равно активному сопротивлению R. Величину, стоящую в круглых скобках формулы (2.5), называют ***реактивным сопротивлением***:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \tag{2.6}$$

а ωL – ***индуктивным сопротивлением*** и обозначают следующим образом:

$$R_L = \omega L.$$

Величину $R_C = \dfrac{1}{\omega C}$ называют ***емкостным сопротивлением***

$$X = R_L - R_C \quad \Rightarrow \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}. \tag{2.7}$$

Заметим, что индуктивное сопротивление растет с увеличением частоты ω, а емкостное сопротивление уменьшается. Когда говорят, что в цепи отсутствует емкость, то это надо понимать как отсутствие емкостного сопротивления $\dfrac{1}{\omega C}$, которое обращается в нуль, если $C \to \infty$ (при замене конденсатора закороченным участком цепи).

Важно отметить тот факт, что хотя реактивное сопротивление измеряют в тех же единицах, что и активное сопротивление, между ними существует принципиальное отличие. Оно заключается в том, что только активное сопротивление определяет необратимые процессы в цепи, такие, например, как преобразование электромагнитной энергии в джоулеву теплоту.

Рассмотрим мощность, выделяемую в цепи переменного тока.

Мгновенное значение мощности равно произведению мгновенных значений напряжения и тока:

$$P(t) = UI = U_{max} I_{max} \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi). \quad (2.8)$$

Воспользуемся формулой $\cos(\omega t - \varphi) = \cos\omega t \cos\varphi + + \sin\omega t \sin\varphi$ и преобразуем равенство (2.8) к следующему виду:

$$P(t) = U_{max} I_{max} \left(\cos^2 \omega t \cos\varphi + \sin\omega t \cos\omega t \sin\varphi\right).$$

Практическое значение имеет среднее за период колебания значение мощности.

Учтем и запомним на будущее, что $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin^2 \omega t \rangle = = \frac{1}{2}$, $\langle \sin\omega t \cos\omega t \rangle = 0$. Получим

$$\langle P \rangle = \frac{U_{max} I_{max}}{2} \cos\varphi. \quad (2.9)$$

Это выражение можно привести к другому виду, если рассмотреть векторную диаграмму (рис. 2.7).

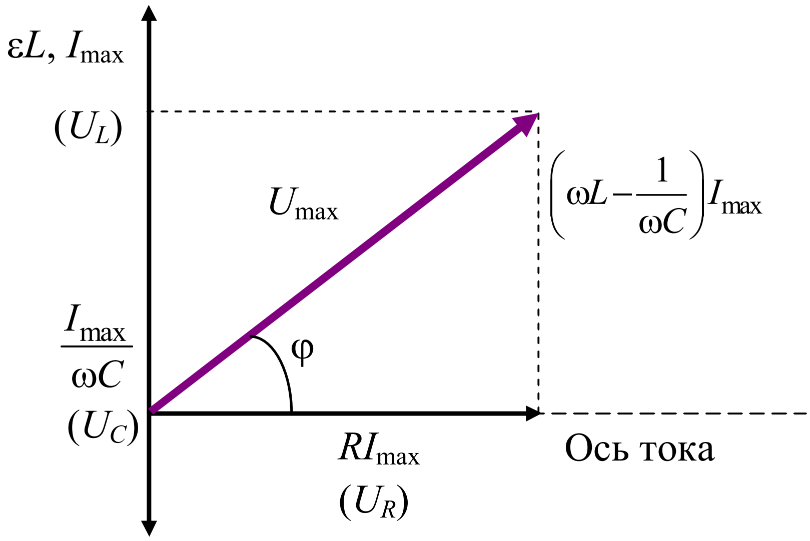


Рис. 2.7

Из векторной диаграммы следует, что $U_{max} \cos\varphi = RI_{max}$. Поэтому получим

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_{max}^2 R. \quad (2.10)$$

Такую же мощность развивает ток $I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$.

Величины

$$I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \qquad (2.11)$$

называются ***действующими*** (или ***эффективными***) значениями тока и напряжения. *Все амперметры и вольтметры градуированы по действующим значениям тока и напряжения*.

Выражение средней мощности (2.9), переписанное через действующие значения напряжения и тока, имеет следующий вид:

$$\langle P \rangle = UI\cos\varphi. \qquad (2.12)$$

Множитель cosφ называется *коэффициентом мощности*. Таким образом, выделяемая в цепи мощность зависит не только от напряжения и силы тока, но и от сдвига фаз между током и напряжением.

При $\varphi = \pi / 2$ значение $\langle P \rangle = 0$, какими бы ни были величины U и I. В этом случае энергия, передаваемая за четверть периода от генератора во внешнюю цепь, в точности равна энергии, передаваемой из внешней цепи в генератор в течение следующей четверти периода, а вся энергия бесполезно «колеблется» между генератором и внешней цепью.

Зависимость мощности от коэффициента cosφ необходимо учитывать при проектировании линий электропередачи на переменном токе. Если питаемые нагрузки имеют большое реактивное сопротивление X, то cosφ может быть заметно меньше единицы. В этих случаях для передачи потребителю нужной мощности (при данном напряжении генератора) необходимо увеличивать ток I, а это приводит к возрастанию бесполезных потерь энергии в подводящих проводах. Поэтому следует всегда распределять нагрузки, индуктивности и емкости так, чтобы коэффициент cosφ был по возможности близок к единице. Для этого достаточно сделать реактивное сопротивление X как можно меньше, т.е. обеспечить равенство индуктивного и емкостного сопротивлений ($RL = RC$).

В заключение заметим, что понятие активного сопротивления шире, чем понятие электрического сопротивления проводников, образующих цепь. Последнее обусловливает переход энергии тока только в джоулеву теплоту, но возможны и другие превращения этой энергии, например в механическую работу (электромоторы). Активное сопротивление тогда уже не сводится к электрическому сопротивлению, а обычно превосходит его.

2.2. Примеры решения задач

Электрические колебания

Задача 1

Колебательный контур с емкостью $6{,}80 \cdot 10^{-9}$ Ф настроен на частоту 791 кГц. Максимальное напряжение на конденсаторе равно 84 В. Пренебрегая активным сопротивлением контура, определите максимальный ток в контуре.

Дано:	*Решение*
$C = 6{,}80 \cdot 10^{-9}$ Ф $\nu = 791 \cdot 10^{3}$ Гц $U_{max} = 84$ В I_{max} – ?	Максимальный ток в контуре может быть определен как $I_{max} = q_{max}\omega = q_{max} 2\pi\nu.$

Максимальный заряд на обкладках конденсатора

$$q_{max} = CU_{max}.$$

В итоге получаем:

$$I_{max} = q_{max}\omega = q_{max} \cdot 2\pi\nu = CU_{max} \cdot 2\pi\nu =$$

$$= 6{,}8 \cdot 10^{-9} \cdot 84 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 791 \cdot 10^{3} = 2{,}837 \text{ А}.$$

Ответ: 2,837 А.

Задача 2

Контур состоит из катушки с индуктивностью $6{,}35 \cdot 10^{-2}$ Гн, сопротивлением 9 Ом и конденсатора емкостью $1{,}50 \cdot 10^{-9}$ Ф. Найти логарифмический декремент затухания колебаний в контуре и волновое сопротивление контура.

Дано:	*Решение*
$C = 1{,}50 \cdot 10^{-9}$ Ф $L = 6{,}35 \cdot 10^{-2}$ Гн $R = 9$ Ом δ – ? ρ –?	Если затухание невелико, то логарифмический декремент затухания для электромагнитного контура может быть найдет по следующей формуле:

$$\delta = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}} = 3{,}14\cdot 9\cdot\sqrt{\frac{1{,}5\cdot 10^{-9}}{6{,}35\cdot 10^{-2}}} = 4{,}346\cdot 10^{-3}.$$

Волновое сопротивление контура

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = 6506\ \text{Ом}.$$

Ответ: $\delta = 4{,}346\cdot 10^{-3}$, $\rho = 6506$ Ом.

Задача 3

Какая часть запасенной энергии сохранится в контуре через 6,3 с, если собственная частота колебаний контура составляет $20\cdot 10^6$ рад/с, а добротность контура равна 586?

Дано:	*Решение*
$t = 6{,}3$ с $\omega_0 = 20\cdot 10^6$ рад/с $Q = 586$ $\frac{W_з}{W_п} = ?$	1. Запишем уравнение затухающих колебаний заряда на конденсаторе: $q(t) = q_0 e^{-\beta t}$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний.

2. Формула нахождения добротности:

$$Q = \frac{\pi}{\delta},$$

где $\delta = \beta T$;

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{1}{v_0}.$$

Из этих двух формул следует:

$$\beta = \frac{\omega_0}{2Q} = 17{,}065\cdot 10^3.$$

3. Найдем отношение запасенной энергии к полной:

$$\frac{W_з}{W_п} = \left(\frac{q_з}{q_п}\right)^2 = \exp^{2\beta t} = 1{,}24.$$

Ответ: $\frac{W_з}{W_п} = 1{,}24$.

Задача 4

Контур состоит из катушки с индуктивностью $4{,}84 \cdot 10^{-2}$ Гн и сопротивлением 86 Ом и конденсатора емкостью $8{,}43 \cdot 10^{-7}$ Ф. Какую мощность должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания, при которых максимальное напряжение на конденсаторе равно 4,123 В?

Дано:

$L = 4{,}84 \cdot 10^{-2}$ Гн

$R = 86$ Ом

$C = 8{,}43 \cdot 10^{-7}$ Ф

$U_{m_c} = 4{,}123$ В

P – ?

Решение

Используя закон Джоуля – Ленца, можно вычислить мощность, которая выделяется в виде тепла на активном сопротивлении R контура:

$$P = I^2 R, \qquad (1)$$

где I – действующее значение силы тока.

Это и будет потребляемая контуром мощность, которую необходимо восполнять для компенсации потерь на активном сопротивлении.

Действующее значение силы тока можно определить по следующей формуле:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_{m_c} \omega C}{\sqrt{2}} = \frac{U_{m_c}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{C}{L}},$$

где $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Подставив получившееся выражение в формулу (1), получаем:

$$P = \frac{U_{m_c}^2 RC}{2L} = \frac{(4{,}123)^2 \cdot 86 \cdot 8{,}43 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 4{,}84 \cdot 10^{-2}} = 0{,}01273 \text{ Вт} = 12{,}73 \text{ мВт}.$$

Ответ: $P = 12{,}73$ мВт.

Задача 5

В цепь колебательного контура, содержащего катушку индуктивностью L = 0,2 Гн и активным сопротивлением R = 9,7 Ом, а также конденсатор емкостью C = 40 мкФ, подключено внешнее переменное напряжение с амплитудным значением U_m = 180 В и частотой ω = 314 рад/с. Определите: 1) амплитудное значение силы тока I_m в цепи; 2) разность фаз φ

между током и внешним напряжением; 3) амплитудное значение напряжения U_{Lm} на катушке; 4) амплитудное значение U_{m_c} на конденсаторе.

Дано:	*Решение*
L = 0,2 Гн R = 9,7 Ом C = 40 мкФ U_m = 180 В ω = 314 рад/с I_m – ? φ – ? U_{L_m} – ? U_{C_m} –?	Находим амплитудное значение переменного тока в цепи контура: $$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} =$$ $$= \frac{180}{\sqrt{(9,7)^2 + \left(314 \cdot 0,2 - \frac{1}{314 \cdot 4 \cdot 10^{-5}}\right)^2}} = 9,27 \text{ А}.$$

Сдвиг фаз между напряжением и силой тока

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{314 \cdot 0,2 - \frac{1}{314 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}}{9,7}\right) = -60°.$$

Далее находим амплитудное значение напряжения на катушке.

При $C \to \infty$ $U_{L_m} = I_m\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 9,27 \cdot \sqrt{(9,7)^2 + (314 \cdot 0,2)^2} =$ = 589 В.

Амплитудное значение на конденсаторе можем найти по следующей формуле:

при $L \to 0,\ R \to 0$ $\quad U_{C_m} = I_m\sqrt{\left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2} = I_m \frac{1}{\omega C} =$

$$= 9,27 \cdot \frac{1}{314 \cdot 4 \cdot 10^{-5}} = 738 \text{ В}.$$

Ответ: I_m = 9,27 А; φ = –60°; U_{L_m} = 589 В; U_{C_m} = 738 В.

2.3. Задания для решения на практических занятиях

Задачи

1. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью 800 пФ и катушку с индуктивностью 2 мкГн. Каков период собственных колебаний контура?

2. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L. Как изменится период свободных электромагнитных колебаний в этом контуре, если электроемкость конденсатора и индуктивность катушки увеличить в 3 раза?

3. Амплитуда силы тока при свободных колебаниях в колебательном контуре 100 мА. Какова амплитуда напряжения на конденсаторе колебательного контура, если емкость этого конденсатора 1 мкФ, а индуктивность катушки 1 Гн? Активным сопротивлением пренебречь.

4. Заряд на обкладках конденсатора колебательного контура изменяется по закону $q = 3 \cdot 10^{-7} \cos 800\pi t$. Индуктивность контура 2 Гн. Пренебрегая активным сопротивлением, найдите электроемкость конденсатора и максимальное значение энергии электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки индуктивности.

5. Рамка площадью S = 3000 см^2 имеет N = 200 витков и вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ Тл. Максимальная ЭДС в рамке 1,5 В. Определите время одного оборота.

6. В цепь переменного тока с частотой ν = 500 Гц включена катушка индуктивностью L = 10 мГн. Определите емкость конденсатора, который надо включить в эту цепь, чтобы наступил резонанс.

7. Контур с индуктивностью $9{,}94 \cdot 10^{-2}$ Гн, активным сопротивлением 26,99 Ом и некоторой емкостью возбуждается короткими электрическими импульсами. С какой максимальной

частотой их можно подавать, чтобы возникающие колебания не накладывались друг на друга? Колебания не накладываются, если их амплитуда за период между импульсами уменьшается не менее чем в 10 раз.

8. Контур состоит из катушки индуктивностью $3{,}42\cdot10^{-2}$ Гн и сопротивлением 16 Ом и конденсатора емкостью $5{,}92\cdot10^{-9}$ Ф. Найти логарифмический декремент затухания колебаний в контуре.

9. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $6{,}75\cdot10^{-3}$ Ф и катушки индуктивностью $1{,}14\cdot10^{-7}$ Гн. На какую длину волны настроен контур? Активным сопротивлением контура пренебречь.

10. В колебательной системе возбуждаются вынужденные колебания частотой 85 Гц. При увеличении возбуждающей частоты в 7 раз амплитуда колебаний не изменилась. Найти собственную частоту колебаний системы, пренебрегая коэффициентом затухания.

Тесты

1. Примером автоколебательной системы является:
1) колебательный контур;
2) математический маятник;
3) генератор на транзисторе;
4) физический маятник.

2. Конденсатор колебательного контура заряжен так, что заряд на одной из его обкладок составляет $+q$. Через какое минимальное время после замыкания конденсатора на катушку заряд на той же обкладке конденсатора станет равным $-q$, если период свободных колебаний в контуре T:
1) $T/2$;
2) $2T$;
3) T;
4) $T/4$?

3. Период колебаний в колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкостью 100 мкФ и катушки индуктивностью 10 нГн, равен:

1) 10^{-5} с;

2) $6{,}28 \cdot 10^{-5}$ с;

3) 10^{-6} с;

4) $6{,}28 \cdot 10^{-6}$ с.

4. Уравнение силы тока от времени в колебательном контуре имеет вид $I = 10^{-4} \cos\left(\omega t + \pi/2\right)$. Какой будет энергия конденсатора и катушки в тот момент времени, когда сила тока в цепи составит 10^{-4} А:

1) энергия конденсатора max, а энергия катушки равна 0;

2) энергия конденсатора равна 0, а энергия катушки max;

3) энергия между конденсатором и катушкой распределена поровну;

4) энергия конденсатора и катушки равны 0?

5. Магнитный поток, пронизывающий рамку, с течением времени изменяется по закону $\Phi = 0{,}01 \cos 314t$. Какое уравнение будет выражать зависимость ЭДС, возникающей в рамке, от времени:

1) $e = 3{,}14 \sin 314t$;

2) $e = 3{,}14\pi \sin 314t$;

3) $e = -3{,}14 \sin 314t$;

4) $e = 0{,}01 \cos 314t$?

6. Действующее значение напряжения в цепи переменного тока 220 В. Какова амплитуда напряжения:

1) 157 В;

2) 220 В;

3) 311 В;

4) 440 В?

7. Как изменится индуктивное сопротивление цепи переменного тока, если период колебаний увеличить в 2 раза:

1) уменьшится в 2 раза;

2) увеличится в 2 раза;

3) увеличится в 4 раза;

4) не изменится?

8. Как изменится емкостное сопротивление цепи переменного тока, если заполнить конденсатор, включенный в цепь, диэлектриком с диэлектрической проницательностью $\varepsilon > 1$:

1) увеличится;

2) уменьшится;

3) не изменится;

4) результат зависит от рода вещества?

2.4. Задания для самостоятельного решения

Задачи

1. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}003$ Гн и плоского воздушного конденсатора, состоящего из двух дисков радиусом $r = 1{,}2$ см, расположенных на расстоянии $d = 0{,}3$ мм друг от друга. Найдите частоту контура.

2. Переменный ток через сопротивление $R = 10$ Ом задан формулой $I(t) = 0{,}42\sin(0{,}628t)$ А. Какое количество теплоты выделяется на сопротивлении за время, равное периоду изменения тока?

3. Индуктивность, емкость и сопротивление колебательного контура равны соответственно 74 Гн, 24 мкФ, 33 Ом. При какой частоте внешней ЭДС амплитудное значение напряжения на конденсаторе максимально? Ответ дать в радианах в секунду.

4. Колебательный контур с конденсатором емкостью 1 мкФ настроен на частоту 400 Гц. Если подключить к нему параллельно второй конденсатор, то частота колебаний в контуре становится равной 200 Гц. Определите емкость (в микрофарадах) второго конденсатора.

5. В колебательном контуре к конденсатору параллельно присоединили другой конденсатор, втрое большей емкости, после чего частота колебаний контура уменьшилась на 300 Гц. Найдите первоначальную частоту колебаний контура.

6. Максимальная разность потенциалов на конденсаторе в колебательном контуре составляет 100 В. Какой будет максимальная сила тока, если конденсатор имеет емкость 36 мкФ, а катушка обладает индуктивностью 0,01 Гн?

7. К конденсатору, заряд которого 250 пКл, подключили катушку индуктивности. Определите максимальную силу тока (в миллиамперах), протекающего через катушку, если циклическая частота свободных колебаний в контуре равна $8 \cdot 10^7$ рад/с.

8. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $7{,}69 \cdot 10^{-7}$ Ф и катушки индуктивностью 0,211 Гн. Через какой промежуток времени после начала зарядки конденсатора его энергия в 12 раз превысит энергию катушки индуктивности? Сопротивлением контура пренебречь.

9. Напряжение, при котором зажигается или гаснет неоновая лампа, включенная в сеть переменного тока, соответствует действующему значению напряжения в этой сети. В течение каждого полупериода лампа горит 2/3 мс. Найдите частоту переменного тока.

10. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $7 \cdot 10^{-9}$ Ф и катушки, намотанной из медной проволоки диаметром 2 мм. Длина катушки 28 см. Найти логарифмический декремент затухания колебаний.

Ответы на задачи:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,8	8,82	23,73	3	600	6	20	$5{,}195 \cdot 10^{-4}$	375	$4{,}76 \cdot 10^{-3}$

Тесты

1. Периодические изменения заряда, силы тока, напряжения называются:

1) механическими колебаниями;

2) электромагнитными колебаниями;

3) свободными колебаниями;

4) вынужденными колебаниями.

2. Резонанс в колебательном контуре возникает, если:

1) частота внешнего напряжения совпадает с собственной частотой;

2) амплитуда внешнего напряжения совпадает с собственной частотой;

3) фаза внешнего напряжения совпадает с собственной частотой;

4) период колебания внешнего напряжения совпадает с собственной частотой.

3. Колебательный контур состоит:

1) из конденсатора и резистора;

2) конденсатора и лампы;

3) конденсатора и катушки индуктивности;

4) конденсатора и вольтметра.

4. Если сопротивление колебательного контура равна нулю, то полная энергия электромагнитного поля:

1) уменьшается;

2) равна нулю;

3) не меняется;

4) увеличивается.

5. Устройство, которое повышает или понижает напряжение, называется:

1) генератором;

2) конденсатором;

3) трансформатором;

4) колебательным контуром.

Ответы на тестовые задания:

1	2	3	4	5
2	1	3	3	3

2.5. Вопросы для самоконтроля

1. Что представляет собой колебательный контур?

2. Как могут возникнуть в контуре свободные электромагнитные колебания?

3. Получите дифференциальное уравнение гармонических электромагнитных колебаний.

4. По какому закону изменяется заряд на обкладках конденсатора в идеальном колебательном контуре?

5. Запишите выражение для частоты и периода электромагнитных колебаний.

6. Найдите закон изменения силы тока в цепи контура и напряжения на обкладках конденсатора.

7. Изобразите электромагнитные колебания с помощью векторной диаграммы.

8. Какие периодические превращения энергии происходят в электромагнитном колебательном контуре?

9. Проведите аналогию между механическими и электромагнитными колебаниями.

10. Чем обусловлено затухание свободных электромагнитных колебаний, происходящих в реальном колебательном контуре?

11. Получите дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний и запишите его решение.

12. Приведите характеристики затухающих электромагнитных колебаний.

3. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

3.1. Краткая теория

3.1.1. Продольные и поперечные волны в упругой среде

Тело называется *упругим*, а его деформации, вызываемые внешними воздействиями, называются *упругими деформациями*, если они полностью исчезают после прекращения этих воздействий. Согласно *закону Гука* упругие деформации прямо пропорциональны вызывающим их внешним воздействиям, т. е. зависят от них линейно. При достаточно малых деформациях все тела практически можно считать упругими.

Упругими, или ***механическими, волнами*** называются механические возмущения (деформации), распространяющиеся в упругой среде. Тела, воздействущие на среду и вызывающие эти возмущения, называются *источниками волн.* Например, зрители в театре слышат речь и пение актеров, звучание музыкальных инструментов благодаря доходящим до них колебаниям давления воздуха, вызываемым этими источниками звука.

Звуковыми, или ***акустическими, волнами***, называются упругие волны малой интенсивности, т. е. слабые механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Звуковые волны, воздействуя на органы слуха человека, способны вызывать звуковые ощущения, если частоты ν соответствующих им колебаний лежат в пределах $16-2\cdot10^4$ Гц *(слышимые звуки).* Упругие волны с частотами $\nu < 16$ Гц называются ***инфразвуком***, а с частотами $\nu > 2\cdot10^4$ Гц – ***ультразвуком*** (часто упругие волны с $\nu > 2\cdot10^9$ Гц называют ***гиперзвуком***).

Распространение упругих волн в среде не связано с переносом вещества. В неограниченной среде оно состоит в вовлечении в вынужденные колебания все более и более удаленных от источника волн частей среды. При этом можно отвлечься от дискретного (молекулярного) строения среды, рассматривая ее как *сплошную среду,* непрерывно распределенную в пространстве и обладающую определенными упругими свойствами. Под *частицей* такой среды, совершающей вынужденные колебания, понимают малый элемент ее объема, размеры которого, однако, во много раз больше межмолекулярных расстояний, так что в нем содержится очень большое число молекул. Практически частицы среды можно считать точечными, так как даже в газе межмолекулярные расстояния крайне малы (порядка 10^{-8} м при нормальных условиях).

Упругая волна называется ***продольной***, если частицы среды колеблются в направлении распространения волны. Продольные волны связаны с объемной деформацией упругой среды и потому могут распространяться в любой среде – твердой, жидкой и газообразной. Примером являются звуковые волны в воздухе.

Упругая волна называется ***поперечной***, если частицы среды колеблются, оставаясь в плоскостях, перпендикулярных к направлению распространения волны. Поперечные волны связаны с деформацией сдвига упругой среды и, следовательно, могут образовываться и распространяться только в средах, обладающих упругостью формы, т. е. в твердых телах. Примером поперечных волн могут служить волны, распространяющиеся вдоль струн музыкальных инструментов.

Особое место занимают ***поверхностные волны*** – распространяющиеся вдоль свободной поверхности жидкости (или поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей) возмущения, возникающие под влиянием внешних воздействий (падения тел, движения судов, ветра и т. п.). В образовании и распространении этих волн определяющую роль играют силы поверхностного натяжения и тяжести. В поверхностных волнах частицы жидкости одновременно совершают поперечные и продольные колебания, описывая эллиптические или более сложные траектории.

Среда называется ***однородной***, если ее физические свойства, существенные в рассматриваемых задачах, не изменяются от точки к точке. Среда, однородная в отношении одних физических свойств, может быть неоднородной в отношении других. Например, монокристаллическое тело однородно по своим упругим свойствам и в то же время оптически неоднородно для рентгеновских лучей.

Среда называется ***изотропной,*** если ее физические свойства, существенные в рассматриваемых задачах, одинаковы во всех направлениях. Среда, изотропная в отношении одних физических свойств, может быть анизотропной в отношении других. Например, кристаллы кубической системы оптически изотропны, а в отношении упругих свойств – анизотропны. Газы и жидкости в отсутствие внешних полей изотропны в отношении любых физических свойств.

Среда называется ***линейной,*** если между величинами, характеризующими рассматриваемое внешнее воздействие на среду и вызываемыми им изменениями состояния среды, существует прямо пропорциональная связь. Например, упругая среда, подчиняющаяся закону Гука, линейна по своим механическим свойствам. Диэлектрик является линейной средой по своим электрическим свойствам, если его диэлектрическая проницаемость не зависит от напряженности электрического поля. Аналогично магнетик – линейная среда по своим магнитным свойствам, если его магнитная проницаемость не зависит от магнитной индукции поля.

3.1.2. Уравнение бегущей волны

Бегущими волнами называются волны, которые переносят энергию в пространстве.

Уравнением упругой волны называется зависимость от координат и времени скалярных или векторных величин, характеризующих колебания среды при прохождении в ней рассматриваемой волны. Например, для волн в твердой среде такой величиной может служить вектор смещения частицы среды из положения равновесия или три его проекции на оси координат. Для характеристики продольных волн в газе или жидкости обычно пользуются избыточным давлением колеблющейся среды, равным разности между ее переменным и равновесным давлениями.

Упругая волна называется ***синусоидальной,*** или ***гармонической,*** если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими. Частота этих колебаний называется ***частотой волны***. Колебания давления в газообразной или жидкой среде при распространении в ней синусоидальной волны также совершаются по гармоническому закону с частотой, равной частоте волны. В поперечной синусоидальной волне частицы среды могут одновременно гармонически колебаться с частотой волны вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений, каждое из которых перпендикулярно направлению распространения волны. В зависимости от характера поляризации результирующих колебаний различают следующие *типы поляризации поперечных синусоидальных волн: эллиптическую, циркулярную* (или *круговую), линейную* (или *плоскую).*

Механические возмущения (деформации) распространяются в упругой среде с конечной скоростью υ. Поэтому возмущение, вызываемое источником волн в момент времени t_0, достигает произвольной точки *M* среды в момент времени $t > t_0$. Разность $t - t_0 = \dfrac{l}{\upsilon}$ тем больше, чем больший путь *l* проходит волна от источника до точки *M*. Соответственно колебания в точке *M* отстают по фазе от колебаний источника волн.

Волновой поверхностью**,** или ***фронтом волны****,* называется геометрическое место точек, в которых фаза колебаний имеет одно и то же значение. Для всех точек одной волновой поверхности разность $t - t_0$ одинакова. Через каждую точку среды, охваченной волновым движением, можно провести одну волновую поверхность, соответствующую значению фазы колебаний в этой точке в рассматриваемый момент времени. Множеству различных значений фазы колебаний соответствует семейство волновых поверхностей.

Волна называется ***плоской*****,** если ее волновые поверхности представляют совокупность плоскостей, параллельных друг другу. В ***сферической*** волне волновые поверхности – это множество концентрических сфер.

Пусть плоская гармоническая волна распространяется со скоростью υ вдоль оси x. Графически такая волна изображается в виде функции кси $\xi(x,t)$ для фиксированного момента времени и представляет собой зависимость смещения ξ точек с различными значениями x от положения равновесия, x – это расстояние от источника колебаний O, на котором находится, например, частица B. Рисунок 3.1 дает мгновенную картину распределения возмущений вдоль направления распространения волны.

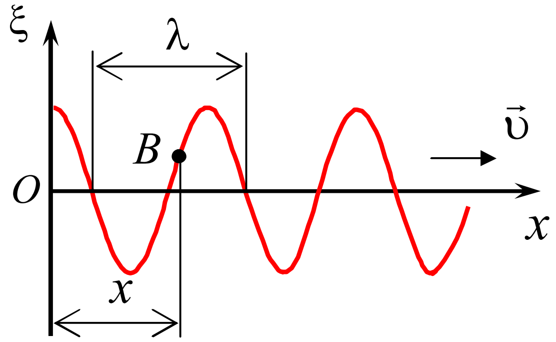


Рис. 3.1

Расстояние λ, на которое распространяется волна за время, равное периоду T колебаний частиц среды, называется ***длиной волны***:

$$\lambda = \upsilon T,$$

где υ – скорость распространения волны.

Уравнения плоской и сферической волн

Уравнение волны – это выражение, определяющее зависимость смещения колеблющейся частицы, участвующей в волновом процессе, от координаты ее равновесного положения и времени:

$$\xi = f(x, y, z, t) = \xi(x, y, z; t). \tag{3.1}$$

Эта функция должна быть периодической как относительно времени t, так и относительно координат x, y, z. Кроме того, точки, отстоящие на расстоянии λ друг от друга, колеблются одинаковым образом.

Найдем вид функции ξ в случае плоской волны.

Рассмотрим плоскую гармоническую волну, распространяющуюся вдоль положительного направления оси x в среде, не поглощающей энергию. В этом случае волновые поверхности будут перпендикулярны оси x. Все величины, характеризующие колебательное движение частиц среды, зависят только от времени t и координаты x. Смещение ξ будет зависеть только от x и t: $\xi = \xi(x,t)$. Пусть колебание точки с координатой $x = 0$ (источник колебаний) задается функцией $\xi = \xi(0,t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$.

Задача: найти вид колебания точек в плоскости, соответствующей произвольному значению x. Для того чтобы пройти путь от плоскости $x = 0$ до этой плоскости, волне требуется время $\tau = x/\upsilon$. Следовательно, колебания частиц, лежащих в плоскости x, будут отставать по фазе на время τ от колебаний частиц в плоскости $x = 0$. Тогда уравнение колебаний частиц в плоскости x будет иметь вид

$$\xi(x,t) = A\cos\left[\omega(t-\tau)+\varphi_0\right] = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)+\varphi_0\right]. \qquad (3.2)$$

В итоге получили уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении возрастания x:

$$\xi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)+\varphi_0\right], \qquad (3.3)$$

где A – амплитуда волны; ω – циклическая частота; φ_0 – начальная фаза, которая определяется выбором начала отсчета x и t; $\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right]$ – фаза плоской волны.

Пусть фаза волны будет величиной постоянной (зафиксируем значение фазы в уравнении волны):

$$\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0 = \text{const}.$$

Сократим это выражение на ω и продифференцируем. В итоге получим:

$$dt - \frac{dx}{v} = 0 \text{ или } \upsilon = \frac{dx}{dt}.$$

Таким образом, скорость υ распространения волны в уравнении плоской волны есть не что иное, как скорость распространения фиксированной фазы волны. Такую скорость называют ***фазовой***.

Для синусоидальной волны скорость переноса энергии равна фазовой скорости. Но синусоидальная волна не несет никакой информации, а любой сигнал – это модулированная волна, т.е. не синусоидальная (не гармоническая). При решении некоторых задач получается, что фазовая скорость больше скорости света. Здесь нет парадокса, так как скорость перемещения фазы не есть скорость передачи (распространения) энергии. Энергия и масса не могут двигаться со скоростью больше, чем скорость света c.

Обычно уравнению плоской волны придают симметричный относительно x и t вид. Для этого вводится величина $k = 2\pi/\lambda$, которая называется ***волновым числом***. Преобразуем выражение для волнового числа. Запишем его в виде $k = \omega/v$ $\left(\lambda = \upsilon T, \quad k = \dfrac{2\pi}{\upsilon T} = \dfrac{\omega}{\upsilon}\right)$. Подставим это выражение в уравнение плоской волны:

$$\xi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right] = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \varphi_0\right).$$

Окончательно получим:

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0). \tag{3.4}$$

Это уравнение плоской волны, распространяющейся в сторону возрастания x. Противоположное направление распространения волны будет характеризоваться уравнением, в котором поменяется знак перед членом kx:

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_0).$$

Удобна запись уравнения плоской волны в следующем виде:

$$\xi = \operatorname{Re} A \cdot \exp\left[i\left(\omega t - kx + \varphi_0\right)\right].$$

Обычно обозначение Re опускают, подразумевая, что берется только вещественная часть соответствующего выражения. Кроме этого, вводится комплексное число

$$\widehat{A} = A\exp(i\varphi_0).$$

Это число называется комплексной амплитудой, его модуль дает амплитуду, а аргумент – начальную фазу волны.

Таким образом, уравнение плоской незатухающей волны можно представить в следующем виде:

$$\xi = \widehat{A}\exp\left[i\left(\omega t - kx\right)\right].$$

Все рассмотренное выше относилось к среде, где отсутствовало затухание волны. В случае затухания волны в соответствии с законом Бугера (Пьер Бугер, французский ученый (1698–1758)) амплитуда волны будет уменьшаться при ее распространении. Тогда уравнение плоской волны будет иметь следующий вид:

$$\xi\left(x,t\right) = A_0 e^{-\alpha x}\cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right), \qquad (3.5)$$

где α – коэффициент затухания волны, это величина, обратная расстоянию, при котором амплитуда волны уменьшается в e раз; A_0 – амплитуда колебаний в точке с координатами $x = 0$.

Уравнение сферической волны. Будем считать источник колебаний точечным. Это возможно, если ограничиться рассмотрением волны на расстоянии, много большем размеров источника. Волна от такого источника в изотропной и однородной среде будет ***сферической***. Точки, лежащие на волновой поверхности радиусом r, будут колебаться с фазой

$$\Phi = \omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) + \varphi_0 .$$

Амплитуда колебаний в этом случае, даже если энергия волны не поглощается средой, не будет оставаться постоянной. Она убывает с расстоянием от источника по закону $\frac{1}{r}$. Следовательно, уравнение сферической волны имеет вид

$$\xi\left(r,t\right) = \frac{A}{r}\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right), \text{ или } \xi\left(r,t\right) = \frac{A}{r}\cos\left(\omega t - kr + \varphi_0\right). \qquad (3.6)$$

В силу сделанных предположений уравнение справедливо только при значениях r, значительно превышающих размеры источника волн. Уравнение (3.6) неприменимо для малых значений r, так как при $r \to 0$ амплитуда устремилась бы к бесконечности, а это абсурд.

При наличии затухания в среде уравнение сферической волны запишется следующим образом:

$$\xi(r,t)=\frac{A_0 e^{-\alpha r}}{r}\cos(\omega t-kr+\varphi_0).$$

Групповая скорость

Строго монохроматическая волна представляет собой бесконечную во времени и пространстве последовательность «горбов» и «впадин»:

$$E=E_0\cos(\omega t-kx+\varphi_0). \qquad (3.7)$$

Фазовая скорость этой волны $\upsilon=\dfrac{\omega}{k}$ или $\upsilon=\lambda\nu$.

С помощью такой волны нельзя передать сигнал, так как в любой точке волны все «горбы» одинаковы. Сигнал должен отличаться, быть знаком (меткой) на волне. Но тогда волна уже не будет гармонической и не будет описываться уравнением (3.7). Сигнал (импульс) можно представить согласно теореме Фурье в виде суперпозиции гармонических волн с частотами, заключенными в некотором интервале $\Delta\omega$ (рис. 3.2). Суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, называется ***волновым пакетом*** или ***группой волн***.

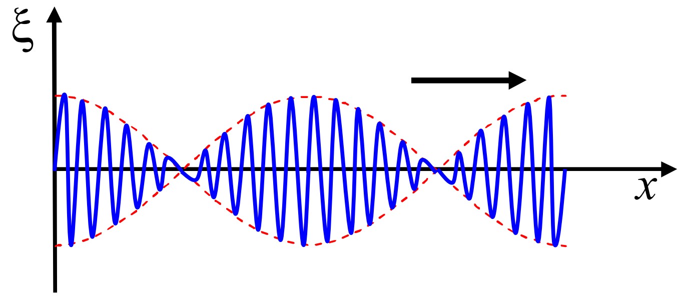


Рис. 3.2

Выражение для группы волн может быть записано следующим образом:

$$E(x,t)=\int\limits_{\omega-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega+\frac{\Delta\omega}{2}} E_{0\omega}\cos(\omega t-k_\omega x+\varphi_\omega)\,d\omega\,.$$

Присутствие в формуле ω подчеркивает, что эти величины зависят от частоты.

Этот волновой пакет может быть суммой волн с мало отличающимися частотами. Там, где фазы волн совпадают, наблюдается усиление амплитуды, а там, где фазы противоположны, наблюдается гашение амплитуды (результат интерференции). Такая картина представлена на рис. 3.2. Чтобы суперпозицию волн можно было считать группой волн, необходимо выполнение следующего условия: $\Delta\omega \ll \omega_0$.

В недиспергирующей среде все плоские волны, образующие волновой пакет, распространяются с одинаковой фазовой скоростью υ. Дисперсия – это зависимость фазовой скорости синусоидальной волны в среде от частоты. В отсутствие дисперсии скорость перемещения волнового пакета совпадает с фазовой скорость υ. В диспергирующей среде каждая волна диспергирует со своей скоростью. Поэтому волновой пакет с течением времени расплывается, его ширина увеличивается (рис. 3.3).

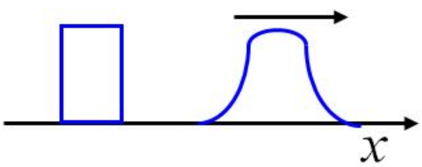


Рис. 3.3

Если дисперсия невелика, то расплывание волнового пакета происходит не слишком быстро. Поэтому движению всего пакета можно приписать некоторую скорость U.

Скорость, с которой перемещается центр волнового пакета (точка с максимальным значением амплитуды), называется ***групповой скоростью***.

В диспергирующей среде $\upsilon \neq U$. Вместе с движением самого волнового пакета происходит движение «горбов» внутри самого пакета. «Горбы» перемещаются в пространстве со скоростью υ, а пакет в целом со скоростью U.

Рассмотрим подробнее движение волнового пакета на примере суперпозиции двух волн с одинаковой амплитудой и разными частотами ω (разными длинами волн λ).

Запишем уравнения двух волн. Примем для простоты начальные фазы $\varphi_0 = 0$:

$$E_1 = E_0 \cos\left(\omega t - kx\right),$$

$$E_2 = E_0 \cos\left[\left(\omega + \Delta\omega\right)t - \left(k + \Delta k\right)x\right].$$

Здесь $k = \dfrac{\omega}{\upsilon_1} \Rightarrow \left(k + \Delta k\right) = \dfrac{\omega + \Delta\omega}{\upsilon_2}$.

Пусть $\Delta\omega \ll \omega$, соответственно $\Delta k \ll k$.

Сложим колебания и проведем преобразования с помощью тригонометрической формулы для суммы косинусов

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

В первом косинусе пренебрежем $\Delta\omega t$ и Δkx, которые много меньше других величин. Учтем, что $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, тогда

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\frac{\omega t - kx + \omega t + \Delta\omega t - kx - \Delta kx}{2} \times$$

$$\times \cos\frac{\omega t - kx - \omega t - \Delta\omega t + kx + \Delta kx}{2} =$$

$$= 2E_0 \cos\left(\frac{2\omega t - 2kx}{2}\right)\cos\left(\frac{-\Delta\omega t + \Delta kx}{2}\right).$$

Окончательно запишем:

$$E = \left[2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\right]\cos\left(\omega t - kx\right). \qquad (3.8)$$

Множитель в квадратных скобках изменяется от времени и координаты значительно медленнее, чем второй множитель. Следовательно, выражение (3.8) можно рассматривать как уравнение плоской волны с амплитудой, описываемой первым сомножителем. Графически волна, описываемая выражением (3.8), представлена на рисунке 3.2:

$$A_{\text{Амплитуда}} = \left[2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\right].$$

Результирующая амплитуда получается в результате сложения волн, следовательно, будут наблюдаться максимумы и минимумы амплитуды.

Максимум амплитуды будет определяться следующим условием:

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x_{\max} = \pm m\pi, \tag{3.9}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$; $x_{\max}$ – координата максимальной амплитуды.

Косинус принимает максимальное значение по модулю через π.

Каждый из этих максимумов можно рассматривать как центр соответствующей группы волн.

Разрешив равенство (3.9) относительно $x_{\max}$, получим

$$x_{\max} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t + \text{const} \quad \Rightarrow \quad \text{const} = 2m\pi.$$

Так как фазовая скорость $\upsilon = \dfrac{\omega}{k}$, то $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k} = U$ называется групповой скоростью. С такой скоростью перемещается максимум амплитуды волнового пакета. В пределе выражение для групповой скорости будет иметь следующий вид:

$$U = \frac{d\omega}{dk}.$$

Это выражение справедливо для центра группы произвольного числа волн.

Отметим: при точном учете всех членов разложения (для произвольного числа волн) из выражения для амплитуды следует, что волновой пакет со временем расплывается.

Выражению для групповой скорости можно придать другой вид:

$$\omega = \upsilon k,$$

следовательно, выражение для групповой скорости можно записать как

$$U = \frac{d(\upsilon k)}{dk} = \upsilon + k\frac{d\upsilon}{dk}, \tag{3.10}$$

$\dfrac{d\upsilon}{dk}$ – неявное выражение, так как υ и k зависят от длины волны λ:

$$\frac{d\upsilon}{dk}=\frac{d\upsilon}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk},\quad \lambda=\frac{2\pi}{k}\quad\Rightarrow\quad k=\frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\frac{d\lambda}{dk}=-\frac{2\pi}{k^2}=-\frac{\lambda}{k}\text{ , тогда }\frac{d\upsilon}{dk}=-\frac{d\upsilon}{d\lambda}\frac{\lambda}{k}.$$

Подставим полученное выражение в формулу (3.10) и получим

$$U=\upsilon+k\left(-\frac{\lambda}{k}\frac{d\upsilon}{d\lambda}\right)=\upsilon-\lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}.$$

Это так называемая формула Рэлея. Джон Уильям Рэлей (1842–1919) – английский физик, нобелевский лауреат 1904 года, получивший премию за открытие аргона.

Из этой формулы следует, что в зависимости от знака производной $\frac{d\upsilon}{d\lambda}$ групповая скорость может быть больше или меньше фазовой.

В отсутствии дисперсии $\frac{d\upsilon}{d\lambda}=0 \quad\Rightarrow\quad U=\upsilon$.

Максимум интенсивности приходится на центр группы волн, поэтому скорость переноса энергии равна групповой скорости.

Понятие групповой скорости применимо только при условии, когда поглощение волны в среде невелико. При значительном затухании волн понятие групповой скорости утрачивает смысл. Этот случай наблюдается в области аномальной дисперсии.

Наложение волн. Стоячие волны

При распространении в упругой среде одновременно нескольких волн возникает их наложение. При этом волны не возмущают друг друга: колебания частиц среды оказываются векторной суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. Следовательно, волны при наложении подчиняются ***принципу суперпозиции***.

Если две волны одной природы и одинаковой частоты, распространяющиеся вдоль одной прямой, приходят в какую-либо точку пространства, обладая постоянной разностью фаз, то такие волны называются ***когерентными***.

Рассмотрим практически важный случай, когда две гармонические волны с одинаковой частотой ω и амплитудой A распространяются вдоль оси x в противоположных направлениях. Пусть начальные фазы волн равны нулю. Запишем уравнения этих волн:

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx),\ \xi_2 = A\cos(\omega t + kx).$$

Суперпозиция этих волн дает:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\left[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)\right].$$

Преобразуем выражение, воспользовавшись тригонометрической формулой для суммы косинусов:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2}\right).$$

Учтем, что $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

В итоге получим так называемое уравнение ***стоячей волны***:

$$\xi = 2A\cos(kx)\cos(\omega t).$$

Также учтем, что $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ и запишем:

$$\xi = \left(2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t. \qquad (3.11)$$

В выражение для фазы не входит координата, поэтому формулу можно переписать следующим образом:

$$\xi = A^*\cos\omega t,$$

где $A^* = 2A\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x$. Это амплитуда стоячей волны.

В точках, где координаты удовлетворяют условию $\dfrac{2\pi}{\lambda}x = \pm n\pi,\ n = 0,1,2,3,\ldots$, т.е. $\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x = 1$, амплитуда колебаний равна максимальному значению. Эти точки называются ***пучностями*** стоячей волны (рис. 3.4). В пучности $A^* = 2A$.

Координаты пучностей $x_{\text{пучности}} = \pm n\frac{\lambda}{2}.$

В точках, где координаты удовлетворяют условию $\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ n = 0,1,2,3,\ldots,$ или $\cos\frac{2\pi}{\lambda}x = 0,$ амплитуда колебаний равна нулю (минимальному значению). Эти точки называются ***узлами*** стоячей волны. В узле $A^* = 0$.

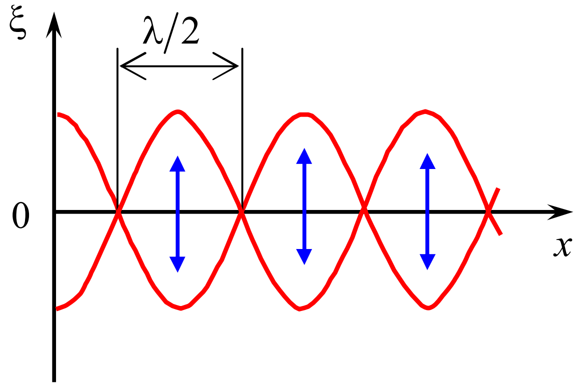


Рис. 3.4

Координаты узлов $x_{\text{узла}} = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}.$

Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают.

Расстояние между соседними узлами или пучностями равно λ/2. Пучности и узлы сдвинуты относительно друг друга на λ/4. Из уравнения стоячей волны в форме (3.11) следует, что сомножитель $\left(2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ при переходе через нулевое значение меняет знак, т.е. фазы колебаний по разные стороны от узла отличаются на π.

В стоячей волне в отличие от бегущей отсутствует перенос энергии, поскольку встречные бегущие волны одинаковой амплитуды переносят равную по величине энергию в противоположных направлениях. Энергия колебания между двумя узлами остается постоянной, совершается лишь превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот. Другими словами, нет никакого распространения возмущения вдоль оси x. Именно поэтому такая волна называется стоячей.

3.1.3. Распространение волн в твердых телах

Распространения волн в твердых телах – это распространение в них деформаций (рис. 3.5).

Приложим сжимающие или растягивающие силы F. Возьмем произвольное сечение C. Для равновесия необходимо равенство сил в сечении C. Эти силы возникают при деформации стержня и действуют в любом его сечении.

Сила, отнесенная к единице площади стержня, называется напряжением.

В случае растяжения напряжение называется натяжением: $T = \dfrac{F}{S}$.

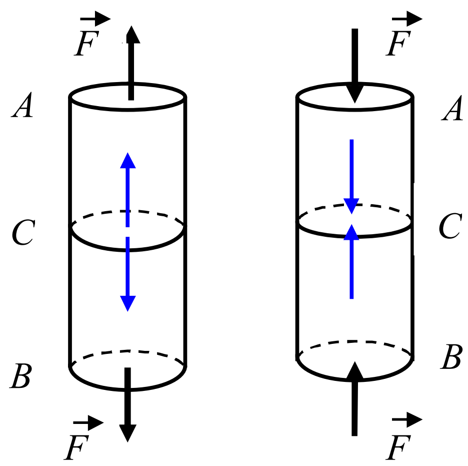


Рис. 3.5

В случае сжатия напряжение называется давлением: $P = \dfrac{F}{S}$.

Ясно, что $P = -T$.

Пусть l_0 – длина недеформированного стержня. Тогда после приложения силы F его длина станет равной $l = l_0 + \Delta l$, а величина $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$ будет называться относительным удлинением.

Из опыта известно, что при не слишком больших деформациях имеют место следующие соотношения, которые называются законом Гука (Роберт Гук, английский физик (1635–1703)). Для нормальных напряжений они имеют вид

$$T = E\frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{и} \quad P = -E\frac{\Delta l}{l_0},$$

где E – постоянная, зависящая только от механических свойств материала. Она называется модулем Юнга (Томас Юнг, английский физик (1773–1829)). Физический смысл модуля Юнга заключается в следующем. ***Модуль Юнга равен такому нормальному напряжению, при котором относительное удлинение равно единице, т.е.*** $\Delta l = l_0$. Закон Гука справедлив только для малых деформаций.

Скорость распространения упругой продольной деформации определяется как

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где ρ – плотность материала.

Для поперечных волн скорость распространения деформации будет равна

$$\upsilon = \sqrt{\frac{J}{\rho}},$$

где J – модуль сдвига. Его физический смысл заключается в следующем: ***модуль сдвига равен такому тангенциальному напряжению, при котором угол сдвига оказывается равным 45°*** (рис. 3.6).

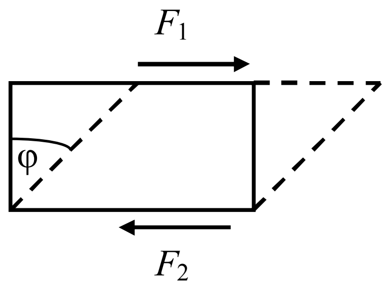


Рис. 3.6

3.1.4. Распространение волн в газах

Волна в газе представляет собой распространяющуюся в пространстве последовательность чередующихся областей сжатия и разряжения газа. Следовательно, давление в каждой точке пространства испытывает периодически изменяющееся отклонение ΔP от среднего значения P, совпадающего с давлением, которое существует в газе в отсутствие волн. Мгновенное значение давления в некоторой точке пространства можно представить в следующем виде:

$$P' = P + \Delta P;$$

$$P >> \Delta P.$$

Пусть волна распространяется вдоль оси x (рис. 3.7). Рассмотрим объем газа в цилиндре с площадью основания S и высотой Δx. Смещение ξ частиц с разными x в каждый момент времени оказывается различным: если основание цилиндра с координатой x имеет в некоторый момент времени смещение ξ, то смещение основания с координатой $x + \Delta x$ будет $\xi + \Delta\xi$. Поэтому рассматриваемый объем деформируется – он получает удлинение $\Delta\xi$ ($\Delta\xi > 0$) или относительное удлинение $\Delta\xi / \Delta x$. Величина $\Delta\xi / \Delta x$ дает среднюю деформацию цилиндра. Вследствие того что ξ меняется с изменением x не по линейному закону, истинная деформация в различных сечениях цилиндра будет неодинаковой. Чтобы получить деформацию в сечении x, нужно устремить Δx к нулю. Масса газа, заключенная в объеме цилиндра, равна $\rho S\Delta x$, где ρ – плотность невозмущенного волной газа. Ввиду малости Δx проекцию ускорения на ось x для всех точек цилиндра можно считать одинаковой и равной $\partial^2\xi / \partial t^2$.

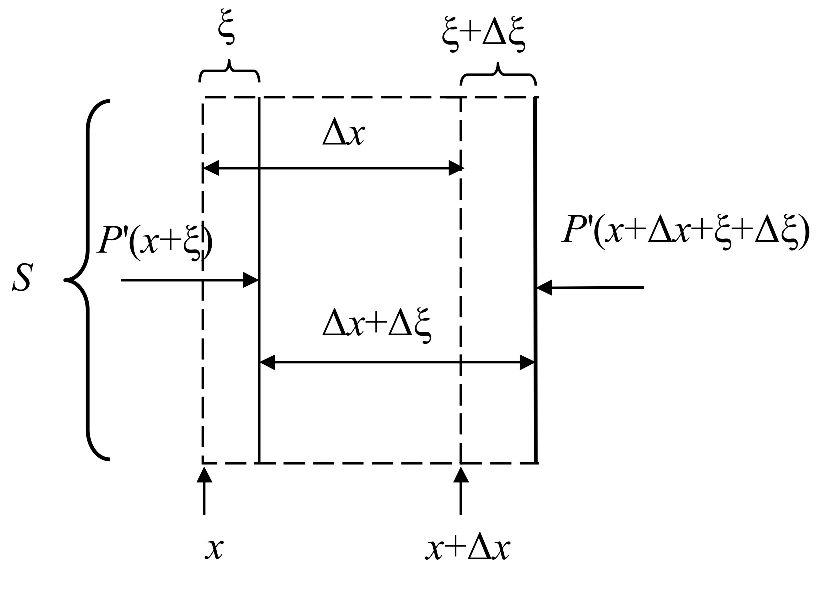


Рис. 3.7

Проекция силы на ось x будет

$$F_x = -\frac{\partial P'}{\partial x} S\Delta x.$$

Будем иметь в виду, что $\Delta\xi << \Delta x$.

Запишем для этого объема газа уравнение второго закона Ньютона:

$$\rho S\Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P'}{\partial x} S\Delta x.$$

Сократим выражение на $S\Delta x$:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P'}{\partial x}. \qquad (3.12)$$

В полученном нами дифференциальном уравнении содержатся две неизвестные функции: ξ и P'. Выразим одну из этих функций через другую. Для этого найдем связь между давлением газа P' и относительным изменением его объема $\frac{\partial \xi}{\partial x}$. Эта связь зависит от характера сжатия (или расширения) газа. В акустической волне сжатие и расширение газа следуют друг за другом так часто, что смежные участки среды не успевают обмениваться теплом и процесс можно считать адиабатическим. При адиабатическом процессе связь между давлением и объемом дается следующим уравнением:

$$PV^{\gamma} = \mathrm{const}, \qquad (3.13)$$

где γ – отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме. Тогда в соответствии с формулой (3.13) можно записать:

$$P(S\Delta x)^{\gamma} = P'\left[S(\Delta x + \Delta\xi)\right]^{\gamma} =$$

$$= P'\left[S\left(\Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x\right)\right]^{\gamma} = P'(S\Delta x)^{\gamma}\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\gamma}.$$

Сократим формулу на $(S\Delta x)^{\gamma}$ и получим:

$$P = P'\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\gamma}.$$

Воспользуемся тем, что по предположению $\partial\xi/\partial x << 1$, разложим выражение в скобках $\left(1+\partial\xi/\partial x\right)^{\gamma}$ в ряд по степеням $\partial\xi/\partial x$ и пренебрежем членами высших порядков малости. В результате получим

$$P = P'\left(1+\gamma\frac{\partial\xi}{\partial x}\right).$$

Решим это уравнение относительно P':

$$P' = \frac{P}{1+\gamma\dfrac{\partial\xi}{\partial x}} \approx P\left(1-\gamma\frac{\partial\xi}{\partial x}\right).$$

(Мы воспользовались формулой $(1+x)^{-1} \approx 1-x$, справедливой для x << 1.) Из найденного нами соотношения легко получить выражение для ΔP:

$$\Delta P = P' - P = -\gamma P\frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{3.14}$$

Поскольку γ – величина порядка единицы, то из выражения (3.14) вытекает, что $\left|\partial\xi/\partial x\right| \approx \left|\Delta P/P\right|$. Таким образом, условие $\partial\xi/\partial x << 1$ означает, что отклонение давления от среднего значения много меньше самого давления. Это действительно так: для самых громких звуков амплитуда колебаний давления воздуха не превышает 1 мм рт. ст., в то время как атмосферное давление P имеет величину порядка 10^3 мм рт. ст.

Продифференцируем формулу (3.14) по x и получим

$$\frac{\partial P'}{\partial x} = -\gamma P\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.$$

Подставим значение $\partial P'/\partial x$ в формулу (3.12), получим некоторое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\gamma P}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Это волновое уравнение. Мы его рассмотрим несколько позже. Величина, обратная выражению перед второй производной по времени, дает фазовую скорость звуковых волн в газе. Тогда имеем

$$\upsilon = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}. \tag{3.15}$$

(Напомним, что P и ρ – давление и плотность невозмущенного волной газа.)

При атмосферном давлении и обычных температурах большинство газов по своим свойствам близки к идеальному газу. Поэтому из уравнения Менделеева – Клапейрона $PV = \frac{m}{\mu} RT$ получаем отношение $\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$ (здесь R – газовая постоянная; T – термодинамическая температура; μ – масса одного моля газа). Подставим это значение в равенство (3.15) и получим формулу для скорости звука в газе:

$$\upsilon = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}.$$

Из этой формулы следует, что скорость звука пропорциональна корню квадратному из температуры и не зависит от давления.

Вычислим значение скорости звука в воздухе при комнатной температуре (T = 290 К). Для воздуха $\gamma = 1{,}4$, $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Газовая постоянная равна 8,31 Дж/(моль·К). Подставим эти значения в формулу для скорости звука в газе и получим

$$\upsilon = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 8{,}31 \cdot 290}{29 \cdot 10^{-3}}} = 340 \text{ м/с}.$$

Найденное нами значение скорости звука в воздухе хорошо согласуется со значением, полученным опытным путем.

Скорость звука в жидкости определяется как

$$\upsilon = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

где K – объемный модуль упругости жидкости; ρ – ее плотность.

3.1.5. Энергия упругой волны

Пусть в некоторой точке среды в направлении ***x*** распространяется плоская волна

$$\xi = A\cos\left(\omega t - kx\right). \quad (3.16)$$

Выделим в среде элементарный объем ΔV, чтобы в его пределах скорость смещения частиц среды $\partial\xi/\partial t$ и деформация среды $\partial\xi/\partial x$ были постоянны.

Объем ΔV обладает кинетической энергией

$$\Delta W_{\text{К}} = \frac{\rho}{2}\Delta V\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 \quad (3.17)$$

($\rho\Delta V$ – масса этого объема).

Этот объем обладает также и потенциальной энергией.

Для понимания вспомним.

Относительное смещение $\varepsilon = \alpha\dfrac{F}{S}$, α – коэффициент пропорциональности.

Модуль Юнга $E = 1/\alpha$. Нормальное напряжение $T = F/S$. Отсюда $\varepsilon = \dfrac{T}{E}$:

$$F = \frac{\varepsilon S}{\alpha} = ES\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{ES}{l_0}\Delta l = \kappa\Delta l,$$

где $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$, $\kappa = \dfrac{ES}{l_0}$. В нашем случае $\varepsilon = \dfrac{\partial\xi}{\partial x}$.

Потенциальная энергия

$$W_{\text{П}} = \frac{1}{2}\kappa\left(\Delta l\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{ES}{l_0}\left(\Delta l\right)^2\cdot\frac{l_0}{l_0} = \frac{1}{2}ESl_0\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 = \frac{1}{2}EV\varepsilon^2.$$

В нашем случае имеем:

$$\Delta W_{\text{П}} = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\Delta V. \quad (3.18)$$

Вспомним также, что $\upsilon=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, тогда $E=\rho\upsilon^2$ подставим в (3.18):

$$\Delta W_{\Pi}=\frac{\rho\upsilon^2}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\Delta V. \qquad (3.19)$$

Для полной энергии получим:

$$\Delta W=\Delta W_{\mathrm{K}}+\Delta W_{\Pi}=\frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2+\upsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right]\Delta V.$$

Разделив выражение на элементарный объем ΔV, получим формулу объемной плотности энергии волны

$$W_0=\frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2+\upsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right]. \qquad (3.20)$$

Получим из равенства (3.16) $\dfrac{\partial\xi}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial t}&=-A\omega\sin\left(\omega t-kx\right),\\ \frac{\partial\xi}{\partial x}&=Ak\sin\left(\omega t-kx\right).\end{aligned} \qquad (3.21)$$

Подставим формулу (3.21) в (3.20) и учтем, что $\text{к}^2\upsilon^2=\omega^2$, получим

$$W_0=\rho A^2\omega^2\sin^2\left(\omega t-kx\right). \qquad (3.22)$$

Из равенства (3.22) следует, что объемная плотность энергии в каждый момент времени в разных точках пространства различна. В данной точке пространства W_0 изменяется по закону квадрата синуса, а среднее значение этой величины от периодической функции $\left\langle\sin^2\omega t\right\rangle=\dfrac{1}{2}$. Следовательно, средняя величина объемной плотности энергии определится как

$$\left\langle W_0\right\rangle=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2. \qquad (3.23)$$

Выражение (3.23) очень похоже на выражение для полной энергии колеблющегося тела $W = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$. Следовательно, среда, в которой распространяется волна, обладает запасом энергии. Эта энергия передается от источника колебаний в разные точки среды.

Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется потоком энергии.

Если через данную поверхность за время dt переносится энергия dW, то поток энергии Ф будет равен:

$$\Phi = \frac{dW}{dt},$$

$[\Phi]$ – измеряется в ваттах.

Для характеристики течения энергии в разных точках пространства вводится векторная величина, которая называется ***плотностью потока энергии***. Она численно равна потоку энергии через единичную площадку, размещенную в данной точке пространства перпендикулярно направлению переноса энергии. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением переноса энергии:

$$\Phi_{W_0} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S_\perp} = \frac{W}{S_\perp \cdot t}.$$

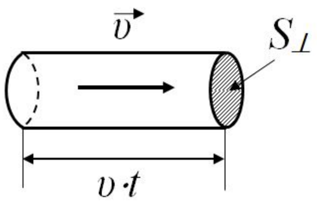


Рис. 3.8

Эта характеристика энергии, переносимой волной, была введена русским физиком Н.А. Умовым (1846–1915) в 1874 году. Рассмотрим поток энергии волны (рис. 3.8).

Поток энергии волны $\Phi_{W_0} = \frac{W}{S_\perp t}$.

Энергия волны $W = W_0 S_\perp \upsilon t$, где W_0 – объемная плотность энергии.

Тогда получим

$$\Phi_{W_0} = \frac{W_0 S_\perp \upsilon t}{S_\perp t} = W_0 \upsilon.$$

Так как волна распространяется в определенном направлении, то можно записать:

$$\vec{\Phi}_{W_0} = W_0 \vec{v}.$$

Это ***вектор плотности потока энергии*** или поток энергии через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны в единицу времени. Такой вектор называется вектором Умова:

$$\vec{\Phi}_{W_0} \sim \sin^2 \omega t.$$

Тогда среднее значение вектора Умова

$$\left\langle \vec{\Phi}_{W_0} \right\rangle = \left\langle W_0 \right\rangle \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \vec{v}.$$

Интенсивность волны I – среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой волной.

Очевидно:

$$d\Phi = \vec{\Phi}_{W_0} \cdot d\vec{S};$$

$$\Phi = \int_S \vec{\Phi}_{W_0} \cdot d\vec{S}.$$

Соответственно

$$I = \left\langle \Phi \right\rangle = \int_S \left\langle \vec{\Phi}_{W_0} \right\rangle \cdot d\vec{S}.$$

3.1.6. Звук

Звук есть колебание упругой среды, воспринимаемое ухом человека.

Учение о звуке называется ***акустикой***.

Физиологическое восприятие звука – громкий, тихий, высокий, низкий, приятный, противный – является отражением его физических характеристик. Гармоническое колебание определенной частоты воспринимается как музыкальный тон.

Частота звука соответствует высоте тона.

Ухо воспринимает диапазон частот от 16 Гц до 20000 Гц. При частотах меньше 16 Гц – инфразвук, а при частотах больше 20 кГц – ультразвук.

Несколько одновременных звуковых колебаний есть созвучие: приятное – консонанс, неприятное – диссонанс. Большое число одновременно звучащих колебаний с разными частотами – шум.

Как мы уже знаем, под интенсивностью звука понимают среднее по времени значение плотности потока энергии, которую несет с собой звуковая волна. Для того чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью, которая называется ***порогом слышимости*** (рис. 3.9, кривая 1).

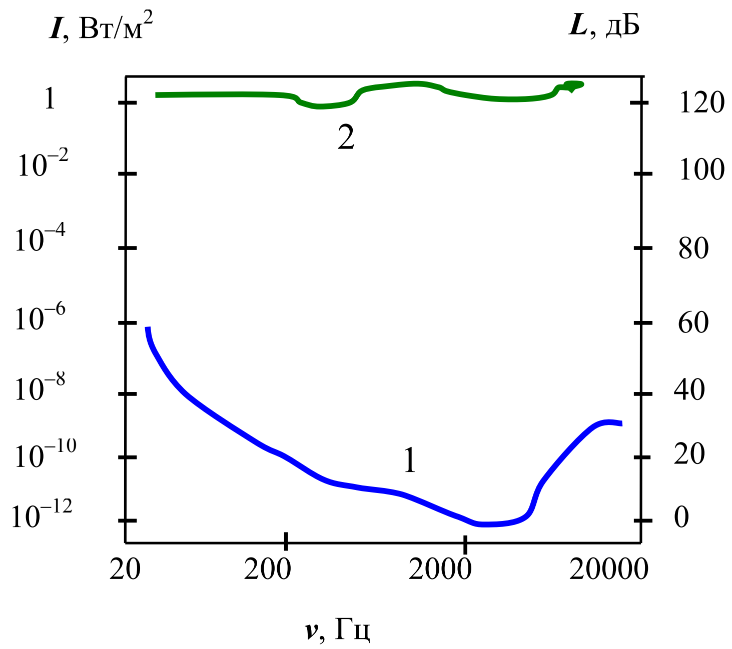


Рис. 3.9

Порог слышимости несколько различен для разных людей и значительно зависит от частоты звука. Наиболее чувствительно человеческое ухо к частотам от 1 кГц до 4 кГц. В этой области порог слышимости составляет в среднем 10^{-12} Вт/м^2. При других частотах порог слышимости лежит выше.

При интенсивностях порядка 1–10 Вт/м^2 волна перестает восприниматься как звук, вызывая в ухе лишь ощущение боли и давления. Значение интенсивности, при котором это происходит, называется ***порогом болевого ощущения*** (рис. 3.9, кривая 2). Порог болевого ощущения, так же как и порог слышимости, зависит от частоты.

Таким образом, громкие звуки отличаются по своей мощности от самых слабых более чем в 10^{12} раз. Поэтому ухо человека не чувствительно к малым изменениям силы звука. Для ощущения изменения громкости интенсивность звуковой волны должна изменяться не менее чем на 10–20 %. Поэтому в качестве характеристики интенсивности выбирают не саму силу звука, а следующую величину, которая называется уровнем силы звука (или уровнем громкости) и измеряется в белах в честь американского электротехника А.Г. Белла (1847–1922), одного из изобретателей телефона:

$$L = \lg\frac{I}{I_0},$$

где $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2 – нулевой уровень (порог слышимости).

$1\ \text{Б} = 10 I_0$.

Пользуются и в 10 раз более мелкой единицей – децибел (дБ):

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0}.$$

С помощью этой формулы может быть выражено уменьшение интенсивности (затухания) волны на некотором пути. Например, затухание в 20 дБ означает, что интенсивность волны уменьшается в 100 раз.

Энергия, которую несут с собой звуковые волны, крайне мала. Например, чтобы нагреть стакан с водой от комнатной температуры до кипения звуковой волной с уровнем громкости 70 дБ (в этом случае в секунду водой будет поглощаться примерно $2\cdot 10^{-7}$ Вт) потребуется время порядка десяти тысяч лет.

Ультразвуковые волны могут быть получены в виде направленных пучков подобно пучкам света. Направленные ультразвуковые пучки нашли широкое применение в гидролокации. Идея была выдвинута французским физиком П. Ланжевеном (1872–1946) во время первой мировой войны (в 1916 году). Кстати, метод ультразвуковой локации позволяет летучей мыши хорошо ориентироваться при полете в темноте.

Эффект Доплера для звуковых волн

Известно, что при приближении к неподвижному наблюдателю быстро движущегося электропоезда его звуковой сигнал кажется более высоким, а при удалении от наблюдателя – более низким, чем тот же сигнал от неподвижного электропоезда. Это явление впервые теоретически обосновал в 1824 году австрийский физик Христиан Доплер (1803–1853).

Звуковой эффект Доплера – это изменение частоты волны, принимаемой приемником, при движении источника волн или приемника относительно среды, в которой распространяются волны.

Существует также оптический эффект Доплера. Его мы рассмотрим несколько позже.

Разберем подробнее звуковой эффект Доплера.

Пусть источник и приемник звука движутся вдоль соединяющей их прямой x. Скорости движения источника и приемника относительно среды, в которой распространяется волна, обозначим соответственно $\upsilon_{\text{ист}}$ и $\upsilon_{\text{пр}}$. Скорости положительны, если источник и приемник сближаются и отрицательны, если удаляются. Скорость распространения волны – υ. Частота колебаний источника равна ν. Если источник и приемник покоятся относительно среды, то частота принимаемого сигнала будет равна частоте колебаний источника ν. Если же источник или приемник, или оба движутся относительно среды, в которой распространяется волна, то частота колебаний ν', воспринимаемых приемником, оказывается отличной от частоты источника: $\nu' \neq \nu$.

Рассмотрим источник звука A и приемник B. Пусть они будут неподвижны относительно друг друга и относительно среды. За 1 с через наблюдателя (приемник) пройдет ν колебаний:

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda},$$

где υ – скорость распространения волны в среде.

1. Пусть теперь наблюдатель (приемник) движется к источнику со скоростью $\upsilon_{\text{пр}}$ (рис. 3.10).

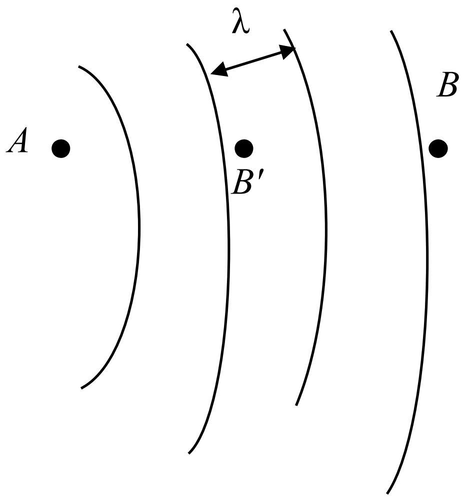


Рис. 3.10

Через 1 с наблюдатель окажется в точке B', пройдя путь $\upsilon_{\text{пр}}$. Через наблюдателя (приемник) пройдет некоторое количество колебаний (волн) и плюс еще столько, на какое число длин волн он продвинулся:

$$\nu' = \nu + \frac{\upsilon_{\text{пр}}}{\lambda} = \nu + \frac{\upsilon_{\text{пр}}}{\upsilon}\nu = \nu\left(\frac{\upsilon + \upsilon_{\text{пр}}}{\upsilon}\right).$$

В общем случае

$$\nu' = \nu\frac{\upsilon \pm \upsilon_{\text{пр}}}{\upsilon},$$

в числителе будет плюс, когда приемник приближается, а минус – когда удаляется.

2. Пусть теперь источник движется от наблюдателя со скоростью $\upsilon_{\text{ист}}$.

За время одного периода T колебания распространяются на длину волны λ (рис. 3.11).

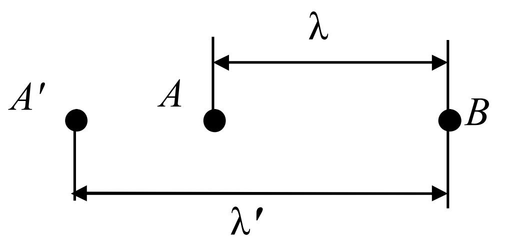


Рис. 3.11

Следующее колебание источник начнет, уже находясь в точке A'. Поэтому волна будет иметь длину λ':

$$\lambda' = \lambda + \upsilon_{\text{ист}} T.$$

Так как длина волны изменилась, то, следовательно, изменилась и частота. Она стала равной ν', так как фазовая скорость распространения волны $\boldsymbol{\upsilon}$ определяется лишь свойствами упругой среды:

$$\lambda' = \frac{\upsilon}{\nu'}; \qquad \frac{\upsilon}{\nu'} = \frac{\upsilon}{\nu} + \frac{\upsilon_{\text{ист}}}{\nu},$$

отсюда имеем

$$\nu' = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_{\text{ист}}} \nu.$$

В общем случае

$$\nu' = \frac{\upsilon}{\upsilon \pm \upsilon_{\text{ист}}} \nu.$$

В самом общем случае, когда движутся и источник, и приемник, можно записать

$$\nu' = \nu \frac{\upsilon \pm \upsilon_{\text{пр}}}{\upsilon \pm \upsilon_{\text{ист}}},$$

где υ – скорость звука в среде.

Если источник и приемник движутся навстречу друг другу, то имеем

$$\nu' = \nu \frac{\upsilon + \upsilon_{\text{пр}}}{\upsilon - \upsilon_{\text{ист}}}.$$

Если они удаляются друг от друга, то можно записать

$$\nu' = \nu \frac{\upsilon - \upsilon_{\text{пр}}}{\upsilon + \upsilon_{\text{ист}}}.$$

Акустический или звуковой эффект Доплера широко используется в гидролокации. Первые гидролокаторы были разработаны в 1916 году во время первой мировой войны совместно французским ученым П. Ланжевеном и россиянином К.В. Шиловским.

Волновое уравнение

В области волновых процессов существуют уравнения, называемые ***волновыми,*** которые описывают все возможные волны независимо от их конкретного вида. По смыслу волновое уравнение подобно основному уравнению динамики, которое описывает все возможные движения материальной точки. Уравнение любой конкретной волны является решением волнового уравнения. Получим его. Для этого продифференцируем дважды по t и по всем координатам уравнение плоской волны $\xi = A\cos\left(\omega t - kx\right)$:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos\left(\omega t - kx\right) = -\omega^2\xi\,, \tag{3.24}$$

отсюда получим

$$\xi = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \tag{3.25}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -k_x^2 A\cos\left(\omega t - kx\right) = -k_x^2\xi,\\ \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = -k_y^2 A\cos\left(\omega t - kx\right) = -k_y^2\xi,\\ \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -k_z^2 A\cos\left(\omega t - kx\right) = -k_z^2\xi.\end{gathered} \tag{3.26}$$

Сложим уравнения (3.26):

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\xi = -k^2\xi. \tag{3.27}$$

Заменим ξ в формуле (3.24) из уравнения (3.25), получим

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Учтем, что $\upsilon = \frac{\omega}{k}$, отсюда $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{\upsilon}$:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \text{ или } \nabla^2\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \tag{3.28}$$

Это и есть волновое уравнение. В этом уравнении υ – фазовая скорость; $\nabla^2\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}$ – квадрат оператора набла, или оператор Лапласа.

Всякая функция, удовлетворяющая уравнению (3.28), описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при второй производной смещения от времени, дает фазовую скорость волны.

Легко убедиться, что волновому уравнению удовлетворяют уравнения плоской и сферической волн, а также любое уравнение вида

$$f\left(x, y, z; t\right) = f\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0\right).$$

Для плоской волны, распространяющейся в направлении x, волновое уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

Это одномерное волновое уравнение второго порядка в частных производных, справедливое для однородных изотропных сред с пренебрежимо малым затуханием.

3.2. Примеры решения задач

Задача 1

Скорость звука в воде 1450 м/с. На каком расстоянии находятся ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний равна 622 Гц?

Дано:	Решение
υ =1450 м/с ν = 622 Гц L = ?	Длину волны можно определить по формуле $\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}$, где υ – скорость звука в воде; ν – частота колебаний.

Точки находятся в противофазе, если расстояние между ними равно половине длины волны, отсюда следует:

$$L=\frac{\lambda}{2}=\frac{\upsilon}{2\nu}=\frac{1450}{2\cdot 622}=1{,}166 \text{ м}.$$

Ответ: L = 1,166 м.

Задача 2

Определить отношение интенсивностей звуков с уровнем громкости 40 дБ и 20 дБ.

Дано:

L_1 = 40 дБ; L_2 = 20 дБ

$\frac{I_1}{I_2}-?$

Решение

Для того чтобы определить отношение интенсивностей звуков, необходимо воспользоваться формулой нахождения уровня громкости

$$L_{12}=\lg\frac{I_1}{I_2},$$

где $L_{12}=L_1-L_2=2\text{ Б}$.

Выражая I_1/I_2, получаем:

$$\frac{I_1}{I_2}=10^{L_{12}}=10^2=100.$$

Ответ: $\frac{I_1}{I_2}=100.$

Задача 3

Средняя квадратичная скорость $\langle\upsilon_{кв}\rangle$ молекул двухатомного газа при некоторых условиях составляет 480 м/с. Определите скорость υ распространения звука в газе при тех же условиях.

Дано:

$\langle\upsilon_{кв}\rangle$ = 480 м/с

$i=5$

$\upsilon-?$

Решение

Для нахождения скорости распространения звука в газе можно воспользоваться формулой

$$\upsilon=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}.$$

Температуру и молярную массу можно найти, воспользовавшись формулой для определения средней квадратичной скорости молекул газа:

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Учитывая, что $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}$, получаем:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{i+2}{i}} \frac{\langle \upsilon_{кв} \rangle}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5+2}{5}} \frac{480}{\sqrt{3}} = 328 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 328$ м/с.

Задача 4

Два катера движутся навстречу друг другу. С первого катера, движущегося со скоростью $\upsilon_1 = 10$ м/с, посылается ультразвуковой сигнал частотой $\nu_1 = 50$ кГц , который распространяется в воде. После отражения от второго катера сигнал принят первым катером с частотой $\nu_2 = 52$ кГц. Принимая скорость распространения звуковых колебаний в воде равной 1,54 км/с, определите скорость движения второго катера.

Дано:	*Решение*
$\upsilon_1 = 10$ м/с $\nu_1 = 50$ кГц $= 5 \cdot 10^4$ Гц $\nu_2 = 52$ кГц$= 5{,}2 \cdot 10^4$ Гц $\upsilon = 1{,}54$ км/с$=1540$ м/с $\upsilon_2 - ?$	Воспользуемся формулами для акустического эффекта Доплера. Частота волны воспринимаемая вторым катером (первый катер источник, второй – приемник): $$\nu_1' = \frac{\upsilon + \upsilon_2}{\upsilon - \upsilon_1} \nu_1. \qquad (1)$$

После отражения от второго катера, который теперь является источником, волна распространяется в сторону первого катера и воспринимается им с частотой

$$\nu_2 = \frac{\upsilon + \upsilon_1}{\upsilon - \upsilon_2} \nu_1'. \qquad (2)$$

Подставляя формулу (2) в (1), получаем:

$$\nu_2 = \frac{\upsilon + \upsilon_1}{\upsilon - \upsilon_2} \cdot \frac{\upsilon + \upsilon_2}{\upsilon - \upsilon_1} \nu_1. \qquad (3)$$

Приведем выражение (3) к виду

$$\frac{\upsilon+\upsilon_2}{\upsilon-\upsilon_2}=\frac{\upsilon-\upsilon_1}{\upsilon+\upsilon_1}\cdot\frac{v_2}{v_1}$$

и решим его:

$$\upsilon_2=\frac{b-1}{b+1}\upsilon,$$

где

$$b=\frac{\upsilon-\upsilon_1}{\upsilon+\upsilon_1}\cdot\frac{v_2}{v_1}=\frac{1540-10}{1540+10}\cdot\frac{52\cdot10^3}{50\cdot10^3}=1,0267;$$

$$\upsilon_2=\frac{b-1}{b+1}\upsilon=\frac{1,0266-1}{1,0266+1}\cdot1540=20,21\ \text{м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_2 = 20,21$ м/с.

Задача 5

Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью v = 10 м/с. Амплитуда колебаний точек шнура A = 5 см, а период колебаний T = 1 с. Запишите уравнение волны и определите: 1) длину волны; 2) фазу колебаний, смещение, скорость и ускорение точки, расположенной на расстоянии x_1 = 9 м от источника колебаний в момент времени t_1 = 2,5 с.

Дано:
v =10 м/с
A = 5 см
T = 1 с
x_1 = 9 м
t_1 = 2,5 с
$\varepsilon\ (x,t)$ – ?
λ – ?
φ – ?
ε – ?
$\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}$ – ?
$\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}$ – ?

Решение

Длина волны равна расстоянию, которое эта волна проходит за 1 период и может быть найдена из соотношения:

$$\lambda = vT = 10\cdot1 = 10\ \text{м}.$$

Уравнение волны имеет вид:

$$\varepsilon = A\cos\left(\omega t-\omega x/v\right).$$

Фаза колеблющейся точки с координатой X в момент времени t определяется выражением

$$\varphi=\omega t-\omega x/v.$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi/T$, получаем

$$\varphi=\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)=\frac{2\pi}{1}\left(2,5-\frac{9}{10}\right)=3,2\pi\ \text{рад}.$$

Для определения смещения точки подставляем амплитуду и получившуюся фазу в уравнение волны:

$$\varepsilon = A\cos(\varphi) = 0,05\cos(3,2\pi) = -4,045 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Скорость точки находим, взяв первую производную от смещения по времени:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -A\omega \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) = -A\frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) =$$

$$= -0,05\frac{2 \cdot 3,14}{1} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot 3,14}{1}\left(2,5 - \frac{9}{10}\right)\right) = -0,1846 \text{ м/с}.$$

Ускорение определяется как вторая производная от смещения:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) =$$

$$= -0,05 \cdot \left(\frac{2 \cdot 3,14}{1}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot 3,14}{1}\left(2,5 - \frac{9}{10}\right)\right) = -1,595 \text{ м/с}^2.$$

Ответ:

$\varepsilon = 0,05 \cdot \cos(3,2\pi t - 0,32\pi x)$, м

$\lambda = 10$ м

$\varphi = 3,2\pi$ рад

$\varepsilon = -4,045 \cdot 10^{-3}$ м

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -0,1846$ м/с

$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = -1,595$ м/с^2.

3.3. Задания для решения на практических занятиях

Задачи

1. Подводная лодка, погружаясь вертикально, излучает короткие звуковые импульсы гидролокатора длительностью 51 мкс в направлении дна. Длительность отраженных сигналов, измеренных гидроакустиком на лодке, равна 50,8 мкс. Определить

скорость погружения лодки. Скорость звука в воде 1500 м/с. Дно горизонтально.

2. Гармоническая звуковая волна, порождаемая точечным изотропным источником, распространяется в однородной изотропной среде. Коэффициент затухания волны равен $144 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$. Найти отношение интенсивностей волны на расстояниях 4 м и 17 м от источника звука.

3. Найти, во сколько раз скорость распространения звуковых волн в твердом теле, модуль сдвига которого равен 17 ГПа, а плотность – 6915 кг/м^3, больше, чем в воздухе. Температура воздуха равна 12 $^{\circ}$C.

4. Амплитуда давления звуковой волны 9 Па. Найти поток энергии, падающий в 1 с в ухо человека. Площадь уха считать равной 4 см^2. Ухо расположено перпендикулярно к направлению распространения волны. Плотность воздуха при нормальных условиях равна 1,3 кг/м^3. Газ считать идеальным. Ответ дать в микроваттах.

5. Волны какой длины будут создавать в вакууме колебания заряда, которые происходят в колебательном контуре с последовательно соединенными емкостью 212 пФ, индуктивностью 824 мкГн и активным сопротивлением 88 Ом при резонансе напряжения?

6. Во сколько раз скорость распространения продольных звуковых волн в металлическом стержне диаметром 6 мм больше скорости распространения поперечных звуковых волн, если модуль Юнга для этого металла равен 17 гПа, а плотность 6605 кг/м^3? Сила натяжения стержня 178 Н. Стержень рассматривать как натянутый шнур.

7. Уравнение незатухающих гармонических колебаний дано в виде $X = 8\sin(271 \cdot t)$ см, где t – время в секундах. Найти смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии 79 см от источника колебаний, для момента t = 3 мс после начала колебаний. Скорость распространения колебаний 4913 м/с. Ответ дать в сантиметрах.

8. В однородной среде распространяется плоская упругая волна. Длина волны равна 23 см, а коэффициент затухания волны равен 0,06 1/м. Найти разность фаз волны в точках, для которых отношение амплитуд смещения частиц среды равно.

9. В водороде при температуре 335 К и атмосферном давлении распространяется звуковая волна. На каком расстоянии находятся ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний равна 14 кГц? Ответ дать в сантиметрах.

10. Локомотив, движущийся со скоростью 145 км/ч, дает гудок длительностью 6,37 с. Найти продолжительность гудка для неподвижного относительно полотна железной дороги наблюдателя, если локомотив приближается к нему. Скорость звука в воздухе 330 м/с.

Тесты

1. Что такое волна или волновой процесс?

Ответы:

1) это наложение двух и более колебаний в пространстве, в результате чего происходит перераспределение их энергии;

2) это процесс сложения однонаправленных колебаний, в которых участвует один колеблющийся объект;

3) это процесс распространения колебаний в пространстве.

2. По характеру колебаний волны бывают…

а) плоскими;

б) поперечными;

в) продольными;

г) сферическими.

Ответы: 1) а, б; 2) а, в; 3) б, в; 4) б, г; 5) а, г.

3. В водороде со скоростью 350 м/с распространяется звуковая волна. Определить расстояние между ближайшими точками (в сантиметрах), колебания в которых совершаются в противоположных фазах, если частота колебаний равна 1 кГц.

4. Уравнение плоской синусоидальной волны имеет вид $\zeta = 0{,}01\sin\left(10^3 t - 2x\right)$. Чему равна скорость распространения волны (ответ дать в метрах, деленных на секунду)?

5. Как связаны между собой амплитуда A и энергия W, переносимая волной?

Ответы: 1) $W \approx \sqrt{A}$; 2) $W \sim A$; 3) $W \sim A^2$; 4) $W \sim A^3$.

6. Некоторое тело приближается к неподвижному наблюдателю со скоростью 50 м/с и издает звук частотой 600 Гц. Звук какой частоты будет восприниматься наблюдателем? Скорость звука принять равной 350 м/с.

3.4. Задания для самостоятельного решения

Задачи

1. Источник звука с частотой 6 кГц приближается к неподвижному резонатору, настроенному на волну с длиной 2,13 см. С какой скоростью должен двигаться источник звука, чтобы возбуждаемые им звуковые волны вызвали колебания резонатора? Температура воздуха 280 К. Воздух считать идеальным газом с молярной массой 29 кг/кмоль.

2. Амплитуда давления звуковой волны 10 Па. Найти поток энергии, падающий за 1 с в ухо человека. Площадь уха считать равной 4 см^2. Ухо расположено перпендикулярно к направлению распространения волны. Плотность воздуха при нормальных условиях равна 1,3 кг/м^3. Газ считать идеальным. Ответ дать в микроваттах.

3. За какое время звуковая волна пройдет расстояние 1702 м, если на этом расстоянии температура воздуха изменяется линейно от 252 К до 251 К? Воздух считать идеальным двухатомным газом с молярной массой 29 кг/кмоль.

4. Определите, во сколько раз будет отличаться длина звуковой волны при переходе из воздуха в воду. Считать, что скорость распространения звука в воздухе 340 м/с, в воде 1450 м/с.

5. В водороде при температуре 272 К и атмосферном давлении распространяется звуковая волна. На каком расстоянии находятся ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний равна 13 кГц? Ответ дать в сантиметрах.

6. Источник звука с частотой 1 кГц приближается к неподвижному резонатору, настроенному на волну с длиной 2,50 см. С какой скоростью должен двигаться источник звука, чтобы возбуждаемые им звуковые волны вызвали колебания резонатора? Температура воздуха 287 К. Воздух считать идеальным газом с молярной массой 29 кг/кмоль.

7. При помощи эхолота измерялась глубина моря. Какова была глубина моря, если промежуток времени между возникновением звука и его приемом оказался равным 0,16 с? Коэффициент сжимаемости воды равен $4{,}6 \cdot 10^{-10}$ 1/Па, а плотность морской воды – 1030 кг/м^3.

8. Источник звуковых колебаний, частота которых равна 53 кГц, движется со скоростью 25 м/с. Волны, дойдя до неподвижной преграды, отражаются от нее и регистрируются приемником, движущимся вместе с источником. Какую частоту колебаний регистрирует приемник, если скорость звуковых волн равна 340 м/с? Ответ дать в килогерцах.

9. Плоская волна, возбуждаемая вибратором, колеблющимся по закону $X = 70\sin(49{,}09t)$ см, где t – время, распространяется со скоростью 1567 м/с. Определить длину стоячей волны, образующейся в результате интерференции волны, идущей от вибратора, и волны, отраженной от преграды.

10. Электромагнитная волна с частотой 48 ГГц переходит из вакуума в немагнитную среду с относительной диэлектрической проницаемостью, равной 73. На сколько сантиметров при этом изменится длина волны?

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
207,4	6,88	5,358	4,3	4,83	3,14	116,2	16,41	100	0,5518

Тесты

1. Что такое волна или волновой процесс?

Ответы:

1) это наложение двух и более колебаний в пространстве, в результате чего происходит перераспределение их энергии;

2) это процесс сложения однонаправленных колебаний, в которых участвует один колеблющийся объект;

3) это процесс распространения колебаний в пространстве.

2. Какое из предложенных выражений является волновым дифференциальным уравнением некоторой плоской упругой волны?

Ответы:

1) $\Delta\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t}$; 2) $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$;

3) $\Delta\vec{E} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$, $\quad \Delta\vec{H} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$,

где υ – фазовая скорость волны.

3. По характеру колебаний волны бывают…

а) плоскими, б) поперечными, в) продольными, г) сферическими.

Ответы: 1) а, б; 2) а, в; 3) б, в; 4) б, г; 5) а, г.

4. По форме волновой поверхности волны разделяют на…

а) сферические; б) продольные; в) цилиндрические; г) поперечные; д) плоские.

Ответы: 1) а, б, в; 2) а, в, г; 3) б, в, г; 4) в, г, д; 5) а, в, д; 6) б, в, д.

5. Как связаны между собой амплитуда A и энергия W, переносимая волной?

Ответы:

1) $W \sim \sqrt{A}$; 2) $W \sim A$; 3) $W \sim A^2$; 4) $W \sim A^3$.

Ответы на тестовые задания

1	2	3	4	5
3	2	3	5	3

3.5. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется волной?

2. Какие волны называются продольными?

3. Какие волны называются поперечными?

4. В какой среде могут распространяться продольные и поперечные волны?

5. Получите уравнение плоской волны.

6. Что называется фазой волны?

7. Дайте определение волновой поверхности.

8. Какой волновой процесс называется плоской волной?

9. Какая волна называется сферической?

10. Дайте определение длины волны.

11. Запишите соотношения между длиной волны, циклической частотой, частотой и периодом волны.

12. Что называется волновым числом?

13. Как выглядит график зависимости смещения частиц от координаты?

14. Почему скорость распространения фазы волны называется фазовой скоростью?

4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

4.1. Краткая теория

4.1.1. Общие положения

Электромагнитными волнами называются возмущения электромагнитного поля (т. е. переменного электромагнитного поля), распространяющиеся в пространстве. Утверждение о существовании электромагнитных волн является непосредственным следствием уравнений Максвелла.

Рассмотрим однородную нейтральную $(\rho = 0)$ непроводящую ($\vec{j} = 0$) среду, например вакуум. Для этой среды можно записать:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \; \vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Если рассматривается любая иная однородная нейтральная непроводящая среда, то в записанные выше уравнения следует добавить ε и μ.

Запишем дифференциальные уравнения Максвелла в общем виде:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \; \mathrm{div}\,\vec{B} = 0, \; \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \; \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho.$$

Для рассматриваемой среды эти уравнения имеют вид

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \; \mathrm{div}\,\vec{B} = 0, \; \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \; \mathrm{div}\,\vec{D} = 0.$$

Запишем эти уравнения следующим образом:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \; \mathrm{rot}\vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \; \mathrm{div}\,\vec{H} = 0, \; \mathrm{div}\,\vec{E} = 0.$$

Любые волновые процессы должны описываться волновым уравнением, которое связывает вторые производные по времени и координатам. Из записанных выше выражений путем несложных преобразований можно получить следующую пару уравнений:

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \; \nabla^2 \vec{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Эти соотношения представляют собой идентичные волновые уравнения для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Вспомним, что в волновом уравнении $\left(\nabla^2\xi = \dfrac{1}{\upsilon^2}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)$ множитель перед второй производной в правой части – это величина, обратная квадрату фазовой скорости волны. Следовательно, $\varepsilon_0\mu_0 = \dfrac{1}{\upsilon^2}$. Оказалось, что в вакууме эта скорость для электромагнитной волны равна скорости света:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot4\pi\cdot10^{-7}}} = 2{,}9986\cdot10^{8}\ \text{м}/\text{с}.$$

Тогда волновые уравнения для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ можно записать как

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \nabla^2\vec{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}.$$

Полученные уравнения указывают на то, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость которых в вакууме равна скорости света.

Математический анализ уравнений Максвелла позволяет сделать вывод о структуре электромагнитной волны, распространяющейся в однородной нейтральной непроводящей среде при отсутствии токов и свободных зарядов. В частности, можно сделать вывод о векторной структуре волны. Электромагнитная волна является ***строго поперечной волной*** в том смысле, что характеризующие ее векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ***перпендикулярны к вектору скорости волны*** $\vec{c}$, т.е. к направлению ее распространения (рис. 4.1).

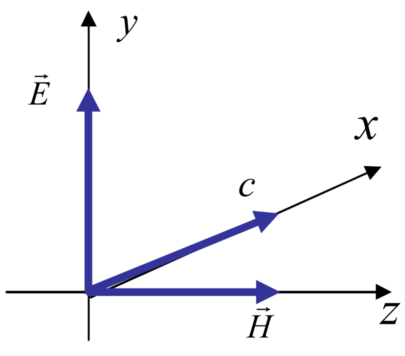


Рис. 4.1

Векторы $\vec{c}$, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в том порядке, в котором они записаны, образуют ***правовинтовую ортогональную тройку векторов***. В природе существуют только правовинтовые электромагнитные волны и не существует левовинтовых волн. В этом состоит одно из проявлений законов взаимного создания переменных магнитных и электрических полей.

Из уравнений Максвелла следует также, что в электромагнитной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ всегда колеблются в ***одинаковых фазах***, а мгновенные значения E и H в любой точке пространства связаны соотношением $E\sqrt{\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu_0}$.

Рассмотрим для простоты вид и свойства одномерного волнового уравнения электромагнитной волны в однородной нейтральной непроводящей среде. Пусть электромагнитная волна будет строго монохроматической и распространяется в направлении x. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны направлению распространения волны, следовательно, их проекции на ось x равны нулю. Волновые уравнения такой волны будут иметь вид

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}_y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \tag{4.1}$$

Этим уравнениям удовлетворяют плоские линейно поляризованные монохроматические волны

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \; H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \tag{4.2}$$

Мгновенная картина электромагнитной волны в некоторый момент времени изображена на рис. 4.2.

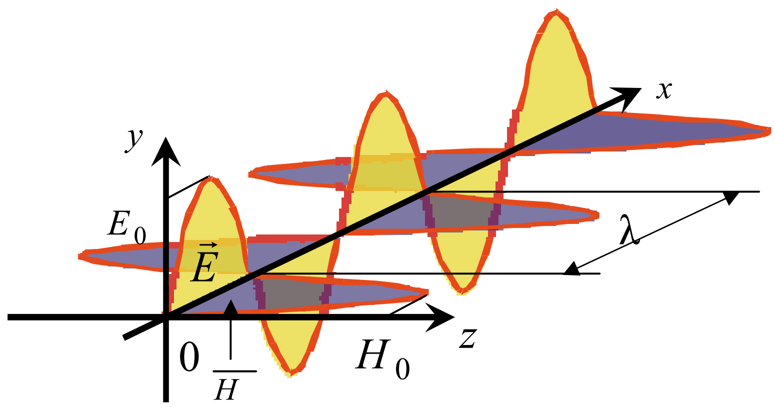


Рис. 4.2

Индексы y и z в формуле (4.2) означают, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей y и z; E_0 и H_0 – соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω – частота волны;

$k = \dfrac{\omega}{\upsilon}$ – волновое число; φ_0 – начальные фазы колебаний в точках с координатой $x = 0$ (колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят в одной фазе, так что в обоих уравнениях φ_0 одинаково).

4.1.2. Энергия электромагнитных волн

Электромагнитное поле обладает энергией. Поэтому распространение электромагнитных волн связано с переносом энергии электрического и магнитного полей, подобно тому как распространение упругих волн в веществе связано с переносом механической энергии.

Вспомним, что было сделано для упругих волн:

$$\vec{\Phi}_{W_0} = W_0 \cdot \vec{\upsilon},$$

здесь $\vec{\Phi}_{W_0}$ – ***вектор плотности потока энергии*** или поток энергии через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны в единицу времени, он называется вектором Умова.

Рассмотрим электромагнитные волны.

Электромагнитные волны переносят в пространстве энергию. Объемная плотность энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей энергии электрического и магнитного полей:

$$W_0 = W_{0\text{эл}} + W_{0\text{магн}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}.$$

Поскольку мгновенные значения E и H связаны соотношением $E\sqrt{\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu_0}$, то выражение для объемной плотности энергии электромагнитной волны в произвольный момент времени в рассматриваемой точке пространства можно представить в виде

$$W_0 = \frac{E\sqrt{\varepsilon_0}E\sqrt{\varepsilon_0}}{2} + \frac{H\sqrt{\mu_0}H\sqrt{\mu_0}}{2} = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}EH.$$

Поскольку $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{\upsilon^2}$, то $W_0 = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}EH = \frac{1}{c}EH$.

Умножив полученное выражение для W на скорость волны c, получим модуль плотности потока энергии:

$$S = W_0 c = EH.$$

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Поэтому направление вектора $\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен $E \cdot H$. Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\vec{S} = \left[\vec{E},\vec{H}\right].$$

Вектор $\vec{S}$ называется ***вектором Пойнтинга***.

Вектор Пойнтинга получен нами применительно к электромагнитной волне. На самом деле этот вектор является универсальным: он описывает движение электромагнитной энергии в любых условиях. Например, вектор определяет обмен энергией между полями, непосредственно создающими ток в проводе, и электромагнитным полем за пределами провода.

Запишем выражение для плотности энергии бегущей гармонической электромагнитной волны в вакууме:

$$W = \varepsilon_0 E_m^2 \cos^2\left(\omega t - kx\right);$$

плотность потока энергии

$$S = Wc = c\varepsilon_0 E_m^2 \cos^2\left(\omega t - kx\right) = \varepsilon_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} E_m^2 \cos^2\left(\omega t - kx\right).$$

Окончательно запишем: $S = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m^2 \cos^2\left(\omega t - kx\right)$.

4.1.3. Интенсивность электромагнитной волны

Для периодической волны более информативным, чем мгновенное значение вектора Пойнтинга, является значение, усредненное по периоду волны. Это ***интенсивность*** электромагнитной волны I:

$$I = \langle S \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m^2 \int_0^T \cos^2(\omega t - kx)\,dt .$$

Интегрирование квадрата косинуса по периоду дает величину $\frac{T}{2}$. При усреднении по периоду среднее значение квадрата косинуса равно $\frac{1}{2}$, следовательно, окончательно запишем:

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m^2 .$$

Импульс электромагнитной волны

Перенос энергии электромагнитной волной сопровождается и переносом импульса. Импульс электромагнитного поля можно описать следующим образом:

$$P = \frac{W}{c},$$

где W – энергия электромагнитного поля.

Запишем это выражение для плотностей импульса и энергии, т.е. для величин, отнесенных к единице объема:

$$p = W_0 / c .$$

Если умножить и разделить числитель и знаменатель этого выражения на c, получим в числителе плотность потока энергии $W_0 c$, которая равна модулю вектора Пойнтинга. В векторном виде получим следующее выражение для вектора потока импульса электромагнитной волны:

$$\vec{p} = \frac{1}{c^2}\left[\vec{E}, \vec{H}\right].$$

4.2. Примеры решения задач

Задача 1

В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет 50 мВ/м. Определите интенсивность волны I, т.е. среднюю энергию, проходящую через единицу поверхности в единицу времени.

Дано:

$\varepsilon = 1,\ \mu = 1$

$E_0 = 50\dfrac{\text{мВ}}{\text{м}} = 5\cdot 10^{-2}$ В/м

$I - ?$

Решение

Интенсивность электромагнитной волны – это средняя энергия, проходящая через единицу поверхности за единицу времени:

$$I = \langle S \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_0^2 = \sqrt{\frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1}} = \left(50\cdot 10^{-3}\right)^2 = 3{,}32\cdot 10^{-6}\ \text{Вт/м}^2.$$

Ответ: $I = 3{,}32$ мкВт/м^2.

Задача 2

После того как между внутренним и внешним проводниками кабеля поместили диэлектрик, скорость распространения электромагнитных волн в кабеле уменьшилась на 63%. Определите диэлектрическую восприимчивость вещества прослойки.

Дано:

$\dfrac{c - v}{c} = 0{,}63$

$\chi = ?$

Решение

Преобразуем формулу к виду

$$1 - \frac{v}{c} = 0{,}63, \qquad (1)$$

где c – скорость электромагнитных волн в вакууме; v – фазовая скорость электромагнитных волн в среде.

Фазовая скорость электромагнитных волн определяется выражением

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $c = \dfrac{v}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$; ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные соответственно; ε и μ – электрическая и магнитная проницаемости среды соответственно. При $\mu = 1$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \qquad (2)$$

Диэлектрическая восприимчивость вещества определяется формулой

$$\chi = \varepsilon - 1. \qquad (3)$$

Используя выражения (2) и (3), получаем

$$v = \frac{c}{\sqrt{\chi + 1}}.$$

Подставляем получившуюся формулу в равенство (1):

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\chi + 1}} = 0{,}63.$$

Итоговая формула для вычисления восприимчивости вещества имеет вид

$$\chi = \left(\frac{1}{1 - 0{,}63} \right)^2 - 1 = 6{,}3.$$

Ответ: $\chi = 6{,}3$.

Задача 3

Электромагнитная волна с частотой ν = 5 МГц переходит из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью ε = 2 в вакуум. Определите приращение ее длины.

Дано:
v = 5 МГц = $= 5 \cdot 10^6$ Гц
$\varepsilon = 2$
$\mu = 1$
$\Delta\lambda = ?$

Решение

Длина волны в вакууме определяется по формуле

$$\lambda_0 = \frac{c}{v}.$$

Длина волны в среде, отличной от вакуума, будет меньше за счет убывания скорости ее распространения и будет вычисляться по формуле

$$\lambda = \frac{\upsilon}{v} = \frac{c}{nv},$$

где n – абсолютный показатель преломления, который определяется как корень из произведения магнитной и диэлектрической проницаемостей среды: $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

Тогда, заменив этим соотношением абсолютный показатель преломления в предыдущей формуле, можно получить следующее выражение для длины волны в немагнитной среде (μ=1):

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{1}{v}.$$

Приращение длины волны можно найти как разницу между значениями длины волны в вакууме и длины волны в некоторой среде:

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda.$$

Таким образом, результирующая формула для нахождения приращения длины волны будет иметь вид

$$\Delta\lambda = \frac{c}{v} - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}v} = \frac{c}{v}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \frac{3\cdot 10^8}{5\cdot 10^6}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 17{,}57 \text{ м.}$$

Ответ: $\Delta\lambda$ = 17,57 м.

Задача 4

В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна 10 В/м. Определите амплитуду напряженности магнитного поля волны.

Дано:	*Решение*
E_0 =10 В/м E =1 μ =1 H_0 = ?	Модули векторов напряженности электрического и магнитного полей связаны между собой соотношением $$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H. \qquad (1)$$

Значения относительной диэлектрической и относительной магнитной проницаемостей для вакуума будут равны единице.

Поэтому соотношение (1) примет следующий вид:

$$\sqrt{\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}H.$$

Учитывая, что напряженности магнитного и электрического полей достигают максимальных значений в заданной точке пространства в один момент времени (одинаковая фаза волны), получаем:

$$\sqrt{\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu_0}H_0.$$

Определим из этого выражения амплитудное значение напряженности магнитного поля волны:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0 = \sqrt{\frac{8,85\cdot 10^{-12}}{4\pi\cdot 10^{-7}}}10 = 26,53 \text{ мА/м}.$$

Ответ: $H_0 = 26,53$ мА/м.

Задача 5

Рассмотрите суперпозицию двух плоских монохроматических электромагнитных волн с одинаковыми амплитудами E_0 и H_0, распространяющихся вдоль оси x в противоположных направлениях. Начальную фазу прямой и обратной волн примите равной нулю. Определите координаты пучностей и узлов:

1) для электрического вектора E;

2) магнитного вектора H стоячей волны.

Дано:	*Решение*
$E_1 = E_0\cos(\omega t - kx)$ – прямая волна	1. Согласно принципу суперпозиции общая напряженность электрического поля
$E_2 = E_0\cos(\omega t + kx)$ – отраженная волна	$E = E_1 + E_2 =$
1) $x_п = ?$ $x_у = ?$	$= E_0\left[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)\right] =$
2) $x_п = ?$ $x_у = ?$	$= 2E_0\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t.$

При суперпозиции двух сигналов, близких по частоте и амплитуде, образуются пучности и узлы, которые являются участками волны, где колебания имеют наибольшую и наименьшую амплитуды соответственно.

Общая формула для пучностей электрического вектора стоячей волны выглядит следующим образом:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi.$$

Выразим из нее координаты пучностей электрического вектора стоячей волны:

$$x_{\text{п}} = \pm m\frac{\lambda}{2}.$$

Узлы стоячей волны удовлетворяют следующему уравнению:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm(m+1)\pi.$$

Выразим из него координаты узлов:

$$x_{\text{у}} = \pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}.$$

2. Принцип суперпозиции справедлив также и для магнитных полей:

$$H = H_1 + H_2 = H_0\left[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx + \pi)\right] =$$

$$= H_0\left[\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)\right] = 2H_0 \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t.$$

Запишем общую формулу для пучностей магнитного вектора стоячей волны:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm(m+1)\pi.$$

Выразим из нее координаты пучностей магнитного вектора стоячей волны:

$$x_{\text{у}} = \pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}.$$

Узлы стоячей волны удовлетворяют следующему уравнению:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi.$$

Выразим из него координаты узлов:

$$x_{\text{п}} = \pm m\frac{\lambda}{2}.$$

Из полученных уравнений видно, что пучности E совпадают с узлами H и наоборот.

4.3. Задания для решения на практических занятиях

1. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 3{,}0$ МГц переходит из вакуума в немагнитную среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4{,}0$. Найти приращение ее длины волны.

2. Плоская электромагнитная волна с частотой $\nu = 10$ МГц распространяется в слабо проводящей среде с удельной проводимостью $\sigma = 10$ мСм/м и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 9$. Найти отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения.

3. Плоская электромагнитная волна $E = E_m \cos(\omega t - kr)$ распространяется в вакууме. Считая векторы E_m и k известными, найти вектор H как функцию времени t в точке с радиусом-вектором $r = 0$.

4. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна $E = E_m \cos(\omega t - kr)$, где $E_m = E_m e_y, k = k e_x$, e_x, e_y – орты осей x, y. Найти вектор H в точке с радиусом-вектором $r = x e_x$ в момент: а) $t = 0$; б) $t = t_0$. Рассмотреть случай, когда $E_m = 160$ В/м, $k = 0{,}51$ м$^{-1}$, $x = 7{,}7$ м и $t_0 = 33$ нс.

5. Найти средний вектор Пойнтинга $\langle S \rangle$ у плоской электромагнитной волны $E = E_m \cos(\omega t - kr)$, если волна распространяется в вакууме.

6. В вакууме в направлении оси x установилась стоячая электромагнитная волна, электрическая составляющая которой $E = \ = E_m \cos kx \cos \omega t$. Найти магнитную составляющую волны $B(x,t)$. Изобразить примерную картину распределения электрической и магнитной составляющих волны (E и B) в моменты $t = 0$ и $t = T/4$, где T – период колебаний.

7. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна $E = 745 \cos(\omega t - 0{,}74x)$ В/м, где ω – круговая частота; t – время. Найти модуль вектора напряженности магнитного поля в точке с координатой 29 м в момент времени $t = 343$ нс.

8. Найти среднюю мощность излучения электрона, совершающего гармонические колебания с амплитудой a = 0,10 нм и частотой $\omega = 6{,}5\cdot10^{14}$ рад/с.

9. Определить длину электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен идеальный колебательный контур, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора U_{Cm} = 40 В, а максимальное значение силы тока в контуре I_m = 5 мА. Емкость конденсатора C = 1,5 мкФ. Скорость света в вакууме $c = 3\cdot10^8$ м/с.

4.4. Задания для самостоятельного решения

Задачи

1. В однородной и изотропной среде с ε = 5,00 и μ = 1,00 распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны E_m =10,0 В/м. Найти: а) амплитуду напряженности магнитного поля волны H_m; б) фазовую скорость v волны.

2. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой вектора напряженности электрического поля E_0 = 0,775 В/м. На пути волны, перпендикулярно направлению ее распространения, располагается диск радиусом r = 0,632 м, полностью поглощающий излучение. Какую мощность поглощает диск?

3. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с частотой $\omega = 10^{10}$ $с^{-1}$. Амплитуда электрического вектора волны E_m = 0,5 В/м. На пути волны располагается поглощающая волну поверхность, имеющая форму полусферы радиусом r = 0,2 м, обращенная своей вершиной в сторону распространения волны. Какую энергию W поглощает эта поверхность за одну минуту?

4. При падении плоской волны на преграду часть энергии волны уходит за преграду, а часть отражается. В образовавшейся отраженной волне отношение амплитуды колебаний в максиму-

ме к амплитуде в минимуме равно 9. Какая часть энергии падающей волны уходит за преграду?

5. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 51 мкГн и конденсатора электроемкостью 350 нФ. Величина емкости может изменяться от указанного значения на 11%. Определить величину абсолютного изменения длины волны, на которую может резонировать контур.

6. В вакууме вдоль оси OX распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны равна 47 мА/м. Определить интенсивность волны.

7. Найти среднюю мощность излучения электрона, совершающего гармонические колебания с амплитудой 0,21 нм и круговой частотой 2,78e14 1/с.

8. Найти коэффициент затухания электромагнитной волны, если на расстояниях 8 м и 19 м от точечного изотропного источника интенсивности порождаемой им волны отличаются друг от друга в 7,25 раза.

9. В однородной среде с плотностью 1351 кг/м^3 возникла продольная стоячая волна вида $q = 10\cos 4x \cos 3t$ см, где t – время в секундах; x – координата в метрах. Найти максимальную величину объемной плотности кинетической энергии волны в точке с координатой $x = 1$ м.

10. Плоская электромагнитная волна с частотой ν = 10 МГц распространяется в слабо проводящей среде с удельной проводимостью σ = 10 мСм/м и диэлектрической проницаемостью ε = 9. Найти отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения.

Таблица правильных ответов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22,361; $1{,}342 \cdot 10^8$	10^{-3}	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$	0,36	877	0,416	$7{,}491 \cdot 10^{-16}$	$1{,}141 \cdot 10^{-2}$	26	1,61

Тесты

1. Согласно теории Максвелла электромагнитные волны излучаются:

1) только при равномерном движении электронов по прямой;

2) только при гармонических колебаниях заряда;

3) только при равномерном движении заряда по окружности;

4) при любом неравномерном движении заряда.

2. Что такое волна или волновой процесс?

Варианты ответа:

1) это наложение двух и более колебаний в пространстве, в результате чего происходит перераспределение энергии колебаний в пространстве;

2) это процесс распространения колебаний в пространстве;

3) это процесс сложения однонаправленных колебаний, в которых участвует один колеблющийся объект.

3. При каких условиях движущийся электрический заряд излучает электромагнитные волны?

Варианты ответа:

1) только при гармонических колебаниях;

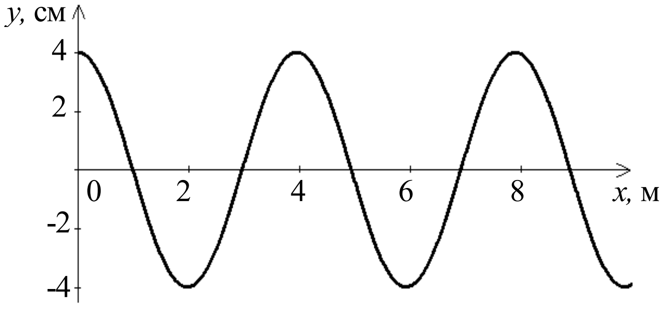
2) только при движении по окружности;

3) при равномерном движении с большой скоростью;

4) при любом движении с ускорением.

4. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси OX со скоростью 600 м/с, имеет вид $\xi = 0{,}01\sin(\omega t - 1{,}57x)$. Частота колебаний ν в (c^{-1}) равна…

5. На рисунке представлен профиль поперечной упругой бегущей волны, распространяющейся со скоростью $\upsilon = 40$ м/с. Циклическая частота волны равна …



1) 31,4 рад/с;

2) 62,8 рад/с;

3) 12,56 рад/с;

4) 25,12 рад/с.

6. Радиостанция работает на частоте 60 МГц. Скорость распространения электромагнитных волн $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Найдите длину электромагнитных волн, излучаемых антенной радиостанции:

1) 0,5 м;
2) 5 м;
3) 6 м;
4) 10 м.

7. В первых экспериментах по изучению распространения электромагнитных волн в воздухе были измерены длина волны λ = 50 см и частота излучения ν = 500 МГц. На основе этих неточных значений скорость света примерно равна:

1) 100 000 км/с;
2) 200 000 км/с;
3) 250 000 км/с;
4) 300 000 км/с.

Ответы на тестовые задания

1	2	3	4	5	6	7
4	2	4	150	2	2	3

4.5. Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте основные положения электромагнитной теории Максвелла.

2. Что называется электромагнитной волной?

3. Запишите формулу для скорости распространения электромагнитной волны.

4. К какому типу волн относятся электромагнитные волны?

5. Что называется плотностью потока электромагнитного излучения?

6. Какова связь между интенсивностью излучения и скоростью распространения электромагнитного излучения?

7. Как плотность потока электромагнитного излучения зависит от расстояния до источника?

8. Как плотность потока электромагнитного излучения зависит от частоты излучения?

Рекомендуемая литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики : учеб. пособие для втузов : в 3 т. / И.В. Савельев. – 7-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2007. – Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – 496 с.

2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы / И.Е. Иродов. – 8-е изд., стер. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 309 с.

3. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы : учеб. пособие для вузов / И.Е. Иродов. – 5-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 319 с.

4. Иродов И.Е. Волновые процессы. Основные законы : учеб. пособие / И.Е. Иродов. – 3-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 263 с.

5. Иродов И.Е. Задачи по общей физике : учеб. пособие для вузов / И.Е. Иродов. – 7-е изд., стер. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 431 с.

6. Чертов А.Г. Задачник по физике : учеб. пособие для втузов / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – 8-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматлит, 2007. – 640 с.

7. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики : учеб. пособие для втузов / В.С. Волькенштейн. – 12-е изд., испр. – М.: Наука, 1990. – 396 с.

Оглавление

Учебное издание

Климов Александр Сергеевич
Медовник Александр Владимирович
Юшков Юрий Георгиевич

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 06.11.2018. Формат 60×84 1/16
Усл.-печ. л. 7,21. Тираж 100 экз. Заказ 445.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. (3822) 533018.