Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Дополнительные главы математики

Курс лекций

(Семестр 4)

Учебное пособие

для специальности 09.03.01

Томск

ТУСУР

2019

Электронное учебное пособие составлено по материалам лекций, проведённых на ФСУ в группах 437-1,2,3 весной 2019 года.

Охвачены следующие темы. Интегралы, зависящие от параметра. Интеграл и преобразование Фурье. Преобразование Лапласа. Кроме того, в ознакомительном порядке даны уравнения математической физики и некоторые численные методы.

Оглавление по темам

Лекция №	Дата	Страница
1	12.02.2019	5
2	26.02.2019	19
3	12.03.2019	30
4	26.03.2019	43
5	09.04.2019	51
6	23.04.2019	58
7	07.05.2019	67
8	21.05.2019	73

ЛЕКЦИЯ 1. 12.02.2019

ГЛАВА 1. Интегралы, зависящие от параметра. Специальные функции.

§ 1. Интегралы, зависящие от параметра.

Рекомендуется повторить тему «двойной интеграл» из 2 семестра.

Вспомним двойной интеграл: $\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy$. Если вычислить только внутреннюю его часть, то есть сделать только одно действие из двух, то формула Ньютона-Лейбница будет применена к x, и остаётся функция, зависящая от y. Обозначим: $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ и назовём эту функцию $I(y)$ интегралом, зависящим от параметра. При этом x называется переменной интегрирования, а y - параметром.

Вспомним, что в двойном интеграле границы внутреннего интеграла могут зависеть от внешней переменной: $\int\limits_c^d \left(\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx \right) dy$.

То есть, возможна более общая ситуация, с границами, зависящими от параметра y: . $I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$. При этом формула Ньютона-Лейбница применяется к x, то есть, вместо x подставляются выражения, зависящие от y, а значит, на выходе всё равно получается некоторая функция от y.

Пример 1. $I(y) = \int\limits_0^1 xydx = \left.\frac{x^2y}{2}\right|_0^1 = \frac{y}{2} - \frac{0}{2} = \frac{y}{2}$.

Пример 2. $I(y) = \int\limits_0^y xydx = \left.\frac{x^2y}{2}\right|_0^y = \frac{y^3}{2} - \frac{0}{2} = \frac{y^3}{2}$.

Задачи на вычисление интеграла от параметра даже легче и короче, чем задачи на двойной интеграл, потому что это внутренняя часть двойного интеграла.

Свойства интегралов, зависящих от параметра.

1. Непрерывность. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $D = \{x \in [a,b], y \in [c,d]\}$, то $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ непрерывная функция на $[c,d]$.

2. Предел. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $D = \{x \in [a,b], y \in [c,d]\}$, то $\lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)dx$.

3. Интегрирование по y. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $D=\{x\in[a,b], y\in[c,d]\}$, то $I(y)$ интегрируема на отрезке $[c,d]$, причём:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

Это следует из свойств двойного интеграла.

4. Дифференцирование по y. Если функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны в прямоугольнике $D=\{x\in[a,b], y\in[c,d]\}$, то $I(y)$ дифференцируема на отрезке $[c,d]$, причём верна формула Лейбница:

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Доказательство. $I'(y)$ по определению производной равна

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}$. Подробнее запишем выражения в числителе.

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\int_a^b f(x,y+\Delta y)dx-\int_a^b f(x,y)dx}{\Delta y} =$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\int\limits_a^b \left(f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\right)dx}{\Delta y}$$, а так как Δy - величина, не зависящая от x, то можно и деление на неё внести внутрь интеграла, и записать так: $\lim_{\Delta y\to 0}\int\limits_a^b \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}dx = \int\limits_a^b \left(\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right)dx$

Но выражение внутри интеграла это как раз и есть частная производная по y, т.е. получили $\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$.

Итак, $I'(y)=\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$.

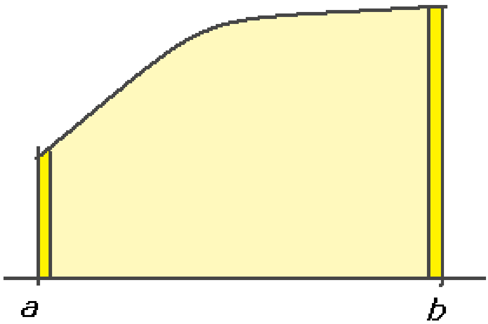
В случае переменных границ, формула Лейбница сильно меняется, приобретая два дополнительных слагаемых. Это связано с тем, что расширение или сужение интервала может оказать даже большее влияние на интеграл, чем рост самой подынтегральной функции. Рассмотрим этот случай отдельно.

Увеличение интервала может происходить из-за того, что правая граница $b(y)$ возрастает, а также в том случае, когда левая граница $a(y)$ убывает.

Свойство 4-А. Пусть $I(y)=\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$, функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны в области $D=\{y\in[c,d], x\in[a(y),b(y)]\}$, а также непрерывны и дифференцируемы функции $a(y)$, $b(y)$. Тогда $I(y)$ дифференцируема на отрезке $[c,d]$, причём верна формула Лейбница:

$$I'(y)=\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)dx+b'(y)f(b(y),y)-a'(y)f(a(y),y).$$

Доказательство. Вспомним, что если верхний параметр - переменная, то производная по нему равна подынтегральной функции. Мы сталкивались с этим в начале темы «определённый интеграл», когда рассматривали функцию $\varPhi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$. Тогда же мы доказывали, что $\varPhi'(x)=f(x)$. Производная по нижнему параметру от $\varPhi(x)=\int\limits_x^b f(t)dt$, наоборот, была бы равна $-f(x)$, так как при его возрастании площадь криволинейной трапеции уменьшается, а при убывании - наоборот, увеличивается.



Запишем $I(y)$ как функцию от трёх величин: $y, a(y), b(y)$.

$I(y) = \Phi(y, a(y), b(y))$. По формуле полной производной,

$$\frac{d\Phi}{dy} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{db}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial a}\frac{da}{dy} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\cdot 1 + \frac{\partial \Phi}{\partial b}b'(y) + \frac{\partial \Phi}{\partial a}a'(y) =$$

$$I'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)dx + b'(y) f(b(y), y) - a'(y) f(a(y), y) .$$

Геометрический смысл: скорость роста площади криволинейной трапеции зависит как от высоты функции f , так и от скорости движения правой границы вправо, либо левой границы влево.

Пример 3. Вспомним пример 2. $I(y) = \int\limits_0^y xydx = \frac{y^3}{2}$. Вычислим $I'(y)$ двумя способами: без формулы Лейбница и с помощью неё, и сравним результаты.

А). $I'(y) = \left(\frac{y^3}{2}\right)' = \frac{3y^2}{2}$.

Б). $I'(y) = \int\limits_0^y (xy)'_y dx + 1 \cdot y \cdot y - 0 = \int\limits_0^y xdx + y^2 = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^y + y^2 = \frac{y^2}{2} + y^2 =$

$\frac{3y^2}{2}$. Результаты совпали.

Как видим, скорость движения правой границы здесь оказывает даже более весомое влияние,чем рост самой функции: без учёта правой границы было бы всего $\frac{y^2}{2}$, то есть результат был бы тогда в 3 раза меньше, чем на самом деле.

Несобственные интегралы от параметра.

Интервал по x может быть неограниченным, в связи с этим возникает понятие «несобственный интеграл, зависящий от параметра».

Определение. Интеграл $I(y) = \int\limits_a^{\infty} f(x, y)dx$ называется несобственным интегралом 1-го рода, зависящим от параметра:

При каждом значении $y = y_0$ он может быть либо сходящимся, либо расходящимся. Множество значений y, при которых этот интеграл называется сходящимся, называется его областью сходимости.

Пример 4. Найти $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} dx$.

Решение. $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{y} arctg \left. \frac{x}{y} \right|_0^{\infty} =$

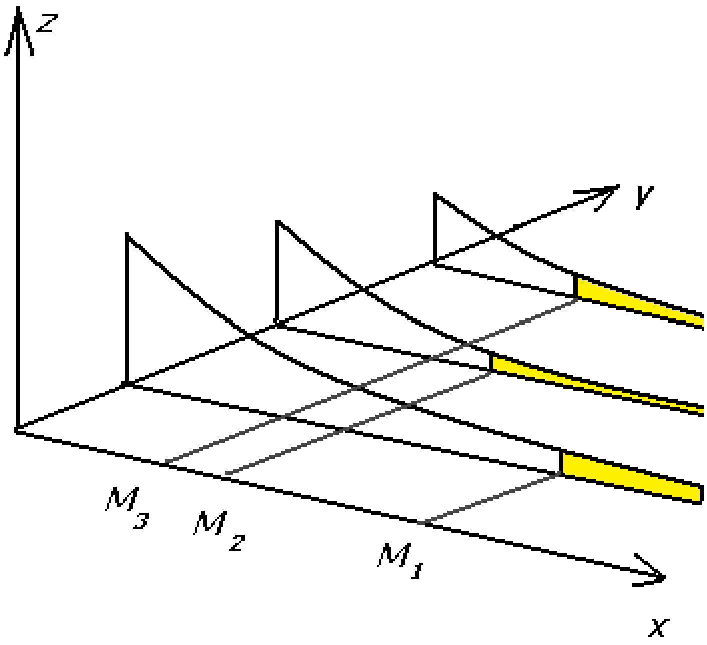
При $y > 0$: $= \frac{1}{y}\left(arctg(+\infty) - arctg(0)\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{y}\frac{\pi}{2}$

При $y < 0$: $= \frac{1}{y}\left(arctg(-\infty) - arctg(0)\right) = \frac{1}{y}\left(-\frac{\pi}{2} - 0\right) = -\frac{1}{y}\frac{\pi}{2}$, но за счёт отрицательности y эта дробь всё равно положительна.

Рассмотрим понятие сходимости при фиксированном $y = y_0$ подробнее. Несобственный интеграл сходится, означает $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M > a$, так что $\left| \int_M^{\infty} f(x, y_0) dx \right| < \varepsilon$.

Но константа M может зависеть от значения $y = y_0$.

Рассмотрим график функции $f(x, y)$ - поверхность. Разобьём её на сечение вдоль оси $0x$.



В каждом сечении, начиная с некоторого M, остаточная часть интеграла по модулю меньше, чем ε. Если это M различное при разных y, то сходимость является **поточечной**, а если существует такое M, что результат меньше, чем ε во всех сечениях одновременно, то сходимость называется **равномерной**.

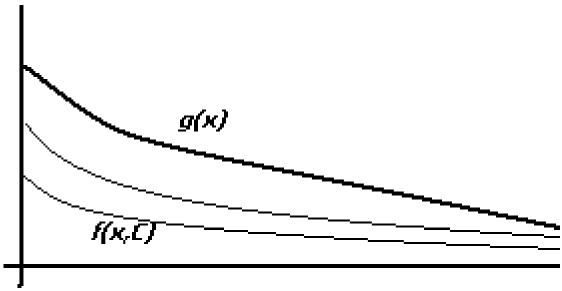
Теорема Вейерштрасса (признак равномерной сходимости).

Пусть D - область сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Если существует мажорирующая функция $g(x)$, такая, что $|f(x,y)| \le g(x)$ для всех $y \in D$, то сходимость в D является равномерной.

Идея доказательства. $\forall \varepsilon > 0\ \exists M$, так что $\left|\int\limits_M^\infty f(x,y_0)\right| \le$

$\int\limits_M^\infty |f(x,y_0)|dx \le \int\limits_M^\infty g(x)dx < \varepsilon$, причём это верно для любого y_0, так как $|f(x,y_0)| \le g(x)$.

Если для чертежа (см. выше) построить «вид сбоку», то получится такой чертёж, где $g(x)$ проходит выше всех сечений вида $f(x,C)$, построенных при различных $y_0 = C$.



В рассмотренном выше примере $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x^2+y^2}dx$ равномерная

сходимость будет на множестве $[a,+\infty)$, потому что

$\frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{1}{x^2+a^2}$, а несобственный интеграл от $g(x)=\frac{1}{x^2+a^2}$

сходится как несобственный интеграл 1-го рода.

А вот если рассматривать множество $[0,+\infty)$, то мажорируещей

функции уже не существует, потому что в этом случае $\frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{1}{x^2}$,

но интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ является расходящимся как интеграл 2-го рода в

окрестности нуля.

§ 2. Специальные функции.

Определение гамма-функции: $\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$.

Исследуем его сходимость. При каких параметрах s этот интеграл существует? В окрестности нуля может быть несобственный интеграл 2-го рода, если степень $s-1$ отрицательна, а также есть неограниченный интервал до ∞, то есть несобственный интеграл 1-го рода. Поэтому для исследования разобьём на две части

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$$

и рассмотрим каждую отдельно. Если оба интеграла сходятся, то сумма тоже.

1) Рассмотрим интеграл $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$. Экспонента ограничена в окрестности нуля, в этом случае на сходимость влияет только степенная. Вспомнимчто во 2 семестре мы доказывали факт: несобственный интеграл 2-го рода $\int_0^1 \frac{1}{x^a}dx$ сходится тогда только тогда, когда $a<1$. Другими словами, обозначив $b=-a$, получим, что $\int_0^1 x^b dx$ сходится $\Leftrightarrow$ $b>-1$.

Значит, $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$ < $\int_0^1 x^{s-1}dx$ сходится $\Leftrightarrow$ $s-1>-1$, т.е. $s>0$.

2) Рассмотрим интеграл $\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$. Он сходится как несобственный интеграл 1-го рода при всех s, так как $\int_1^\infty e^{-x}dx$ сходится, а степенная является бесконечно-малой по сравнению с e^x при $x\to\infty$ и в данном случае не влияет на сходимость.

Итак, гамма-функция существует при $s>0$.

Отметим тот факт, что $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx > 0$, т.к. подынтегральная функция положительна.

Исследуем её производные и докажем выпуклость вниз.

$\Gamma'(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x} dx$, так как дифференцирование по s, как от показательной функции, s присутствует только в одном множителе.

Тогда $\Gamma''(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot (\ln x)^2 \cdot e^{-x} dx > 0$. Таким образом, график гамма-функции является выпуклым вниз.

Рассмотрим $s \cdot \Gamma(s)$ и установим связь гамма-функции и факториала.

$s \cdot \Gamma(s) = \int_0^\infty s x^{s-1} e^{-x} dx$, проинтегрируем по частям, обозначив $u = e^{-x}$, , $v' = s x^{s-1}$. Тогда:

$u = e^{-x}$	$v = x^s$
$u' = -e^{-x}$	$v' = s x^{s-1}$

$s \cdot \Gamma(s) = \int_0^\infty s x^{s-1} e^{-x} dx = x^s e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x^s e^{-x} dx = (0-0) + \int_0^\infty x^s e^{-x} dx =$

$\Gamma(s+1)$. Итак, $s \cdot \Gamma(s) = \Gamma(s+1)$.

Вычислим $\Gamma(1) = \int\limits_0^{\infty} x^0 e^{-x} dx = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = -(0-1) = 1.$

Тогда:

$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1,$

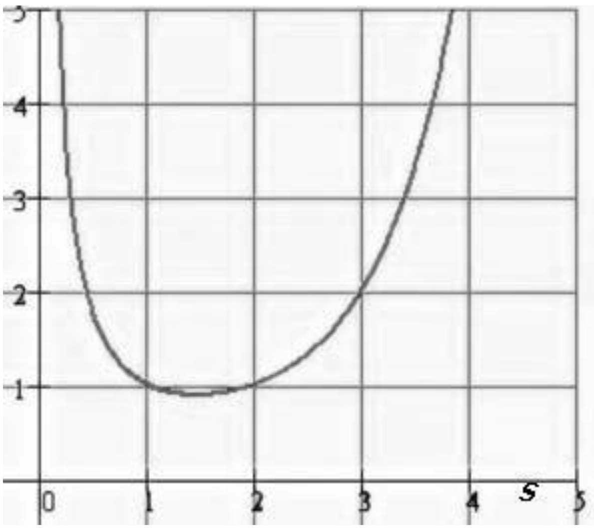
$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2,$

$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 3! = 6,$

$\Gamma(5) = 4 \cdot \Gamma(4) = 4 \cdot 3! = 4!,$ и т.д.

Таким образом, $\Gamma(n+1) = n!$.

При этом $0! = \Gamma(1) = 1$.



Определение «Бета-функции»: $B(s,t) = \int\limits_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx$.

Область существования. В окрестности точки 0 должно выполняться $s-1>-1$ из-за первого множителя, т.е. в итоге $s>0$. Аналогично в окрестности точки 1, после замены $y=1-x$ получается, что $t-1>-1$, а значит, $t>0$. Итак, $s>0$, $t>0$.

Покажем, что $B(s,t)=B(t,s)$.

Сделаем замену $y=1-x$ в интеграле $B(t,s)=\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{s-1}dx$.

Тогда $dy=-dx$, $y\in[1,0]$. Получим $B(t,s)=\int_1^0 (1-y)^{t-1}y^{s-1}(-1)dy$ = $\int_0^1 y^{s-1}(1-y)^{t-1}dy$. Получили точно такой же вид записи, только для другой переменной.

Взаимосвязь гамма-функкии и бета-функции: $B(s,t)=\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$.

ЛЕКЦИЯ 2. 26.02.2019

ГЛАВА 2. Интеграл Фурье и преобразование Фурье.

Вспомним комплексный ряд Фурье (конец прошлого семестра).

$f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$, где $c_n=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)e^{-\frac{in\pi x}{l}}dx$. Подставим коэффициент в общую формулу ряда, причём нужно будет переменную интегрирования формально обозначить иначе, чем x, чтобы не путать её с x вне коэффициента. Назовём её u. Итак:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)e^{-\frac{in\pi u}{l}}du\right)e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

Здесь частота синуса и косинуса, в которые по формуле Эйлера преобразуется экспонента, равна $\omega_n=\frac{n\pi}{l}$. Тогда $\omega_{n+1}=\frac{(n+1)\pi}{l}$, приращение частоты при переходе от номера от n к $n+1$ составит $\Delta\omega_n=\frac{\pi}{l}$. Можеи переписать формулу, используя понятие частоты:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}f(u)e^{-i\omega_n u}du\right)e^{i\omega_n x}$$

Домножим и разделим на $\Delta\omega_n=\frac{\pi}{l}$, получится:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\frac{l}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}f(u)e^{-i\omega_n u}du\right)e^{i\omega_n x}\Delta\omega_n=$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(u)e^{-i\omega_n u}du\right)e^{i\omega_n x}\Delta\omega_n .$$

Это интегральная сумма ω. Если устремить $l \to \infty$, то

$\Delta\omega_n = \frac{\pi}{l} \to 0$, и в предельном случае получим интеграл:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}du\right)e^{i\omega x}d\omega$$

Этот двойной интеграл называется **интегралом Фурье в комплексной форме.** Если коэффициент распределить поровну между двумя интегралами, то

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}du\right)e^{i\omega x}d\omega .$$

Внутренний интеграл здесь - это некоторая функция от ω, называется **преобразованием Фурье.** Если в какой-либо задаче ищется преобразование Фурье, а не интеграл Фурье, то нет необходимости вводить новую переменную u, можно использовать старое обозначение x.

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \quad .$$

Из формулы интеграла Фурье видна симметричность формул прямого и обратного преобразования Фурье:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\big(F(\omega)\big)e^{i\omega x}d\omega$$

Ещё преобразование Фурье обозначается так: $F(\omega) = \Phi\left[f(x)\right]$.

Пример. Найти пр. Фурье для $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, A) \\ e^{-3x} & x \in (A, \infty) \end{cases}$.

Решение. $F(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{A}^{\infty} e^{-3x} e^{-i\omega x} dx =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A}^{\infty} e^{-(3+i\omega)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-(3+i\omega)} e^{-(3+i\omega)x}\Big|_{A}^{\infty} =$$

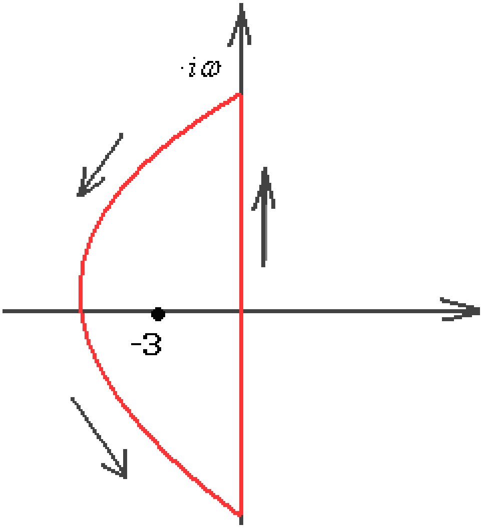
$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{3+i\omega} \left(0 - e^{-(3+i\omega)A}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(3+i\omega)A}}{3+i\omega} .$$

Ответ. $F(\omega) = \dfrac{e^{-(3+i\omega)A}}{\sqrt{2\pi}(3+i\omega)}$.

Найдём ещё и обратное преобразование от $F(\omega) = \dfrac{e^{-(3+i\omega)A}}{\sqrt{2\pi}(3+i\omega)}$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(\omega)\right) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-(3+i\omega)A}}{\sqrt{2\pi}(3+i\omega)} \right) e^{i\omega x} d\omega =$$

$\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{-(3+i\omega)A}}{3+i\omega} e^{i\omega x} d\omega$. Заметим, что везде присутствует произведение $i\omega$, поэтому логично ввести замену переменной $z = i\omega$, при этом $d\omega = \dfrac{dz}{i}$. Таким образом, мы будем вычислять интеграл по вертикальной (мнимой) оси, причём единственная особая точка этой функции - полюс 1-го порядка $z=-3$, слева от этой оси. Для замкнутого контура, по свойствам вычетов получаем, что интеграл равен произведению $2\pi\ i$ на вычет функции в точке -3. В пределе, интеграл по вертикальной оси равен $2\pi\ i$ на сумму вычетов в левой полуплоскости, а там всего одна особая точка, а именно, -3.



$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(3+i\omega)A}}{3+i\omega}e^{i\omega\, x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{-(3+z)A}}{3+z}e^{zx}\frac{1}{i}dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{-(3+z)A}}{3+z}e^{zx}\frac{1}{i}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi\ i}2\pi\ i\operatorname*{Res}_{z=-3}\left(\frac{e^{-(3+z)A}}{3+z}e^{zx}\right) = \lim_{z\to-3}\left(e^{-(3+z)A}e^{zx}\right) = e^{0}e^{-3x} = e^{-3x}.$$

Как видим, от точки A результат вообще не зависит.

Интеграл Фурье в действительной форме, его вывод из интеграла Фурье в комплексной форме.

Снова запишем интеграл $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\omega u}du\right)e^{i\omega x}d\omega$

внесём экспоненту из внешнего интеграла во внутренний. Тогда:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\omega\,(x-u)}du\right)d\omega$$

Преобразуем экспоненту по формуле Эйлера.

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos(\omega(x-u))+if(u)\sin(\omega(x-u))du\right)d\omega=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos(\omega(x-u))du\right)d\omega+\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin(\omega(x-u))du\right)d\omega$$

Но во 2-м интеграле функция sin нечётна по переменной ω, а интеграл по всей оси ω, следовательно, он равен 0, и в итоге остаётся выражение: $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos(\omega x-\omega u)du\right)d\omega$.

В то же время, функция cos чётна по переменной ω, т.е. можно записать интеграл только по правой полуоси и удвоить его:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos(\omega x-\omega u)du\right)d\omega$$

Далее заметим, что косинус разности преобразуется по формуле:
$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(f(u)\cos(\omega x)\cos(\omega u)+f(u)\sin(\omega x)\sin(\omega u))du\right)d\omega =$$

$$\int_0^{\infty}\left(\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f(u)\cos(\omega u))du\right)\cos(\omega x)+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f(u)\sin(\omega u))du\right)\sin(\omega x)\right)d\omega .$$

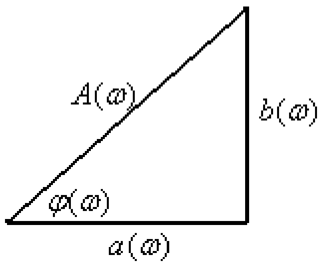
Таким образом, мы представили в виде:

$f(x)=\int_0^{\infty}(a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x)d\omega$ где коэффициенты:

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega u du\ ,\ b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\omega u du\ .$$

Получился вид интеграла Фурье, очень похожий на тригонометрический ряд Фурье, с тем отличием, что частота здесь не дискретна, а непрерывна. Это действительная форма интеграла Фурье.

Если ввести в рассмотрение величину $A(\omega)=\sqrt{a^2(\omega)+b^2(\omega)}$, то $a(\omega)=A(\omega)\cos\varphi(\omega)$, $b(\omega)=A(\omega)\sin\varphi(\omega)$. Можно представить себе эти величины как 2 катета и гипотенузу прямоугольного треугольника.



Тогда интеграл $f(x)=\int\limits_0^{\infty}(a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x)d\omega$ запишется в

виде $f(x)=\int\limits_0^{\infty}A(\omega)\left(\cos\varphi(\omega)\cos\omega x+\sin\varphi(\omega)\sin\omega x\right)d\omega\ \Rightarrow$

$$f(x)=\int\limits_0^{\infty}A(\omega)\cos(\omega x-\varphi(\omega))d\omega$$

Здесь $A(\omega)$ - амплитуда, $\varphi(\omega)$ - фаза. Это **гармонический вид** интеграла Фурье.

Свойства преобразования Фурье.

Перечислим несколько основных свойств.

Свойство 1. Линейность. $\Phi\left[af(x)+bg(x)\right]=aF(\omega)+bG(\omega)$.

Доказательство. Следует из линейности интеграла.

$$\Phi\left[af(x)+bg(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(af(x)+bg(x))e^{-i\omega x}dx=$$

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx+\frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\omega x}dx=aF(\omega)+bG(\omega).$$

Свойство 2. Свойство подобия. $\Phi\left[f(ax)\right]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Доказательство. $\Phi\left[f(ax)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-i\omega x} dx$. Нужно получить такой вид, в котором под знаком функции одна переменная. Поэтому введём замену $t = ax$, тогда $dx = \dfrac{dt}{a}$. Если $a > 0$ то $t \in (-\infty, +\infty)$.

Тогда $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{i\omega t}{a}} \frac{1}{a} dt = \dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\frac{\omega}{a}t} dt = \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$.

А если $a < 0$, то $t \in (+\infty, -\infty)$, и тогда, чтоб вернуть обратно правильный порядок (по возрастанию переменной) надо будет добавить лишний минус.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(t) e^{-\frac{i\omega t}{a}} \frac{1}{a} dt = -\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{i\omega t}{a}} dt = \frac{1}{-a} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Если $a < 0$, то есть минус, если $a > 0$ то нет. В итоге этот коэффициент в любом случае положителен, и можно записать одним способом: $\dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$.

Свойство 3. Сдвиг по аргументу x. $\Phi\left[f(x-a)\right] = e^{-i\omega a} F(\omega)$

Доказательство. $\Phi\left[f(x-a)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) e^{-i\omega x} dx$. Замена

$t = x - a$, тогда $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega (t+a)} dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} e^{-i\omega a} dt =$

$$e^{-i\omega a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega a}F(\omega).$$

Свойство 4. Сдвиг по ω. $\Phi[e^{iax}f(x)] = F(\omega - a)$

Доказательство. $F(\omega - a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-a)\,x}dx =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}e^{iax}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iax}f(x)\right)e^{-i\omega x}dx = \Phi[e^{iax}f(x)].$$

Свойство 5. Дифференцирование по x. Если $f(x)$ непрерывна на оси, и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ то $\Phi\left[f'(x)\right] = i\omega F(\omega)$.

Доказательство. $\Phi\left[f'(x)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx$. Здесь можно применить интегрирование по частям, принимая $v' = f'$.

$u = e^{-i\omega x}$	$v = f(x)$
$u' = -i\omega\, e^{-i\omega x}$	$v' = f'(x)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left((0-0) + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right) = i\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = i\omega F(\omega).$$

Свойство 6. Дифференцирование по ω. $\Phi[-ixf(x)] = F'(\omega)$.

Доказательство. Применим обычное дифференцирование по параметру, изученное ранее в главе «интегралы от параметра».

$$F'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x)e^{-i\omega x}\right)'_{\omega} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(e^{-i\omega x}\right)'_{\omega} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ixf(x))e^{-i\omega x} dx = \Phi[-ixf(x)].$$

Некоторые другие свойства выведем на практике в качестве задач.

Синус-преобразование и косинус-преобразование Фурье.

Пусть функция в интеграле Фурье чётная. Тогда в записи

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x)d\omega$$, где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega u du, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\omega u du.$$

второе слагаемое равно 0, так как коэффициент $b(\omega)$ содержит произведение чётной f и нечётной функции sin. То есть, в

$$\int_0^{\infty} \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f(u)\cos(\omega u))du \right) \cos(\omega x) + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f(u)\sin(\omega u))du \right) \sin(\omega x) \right) d\omega$$

остаётся только 1-е слагаемое:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (f(u)\cos(\omega u))du \right) \cos(\omega x) d\omega,$$

но ведь при этом $f(u)\cos(\omega u)$ чётная функция, и можно вместо интеграла по всей оси записать удвоенный интеграл по полуоси:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}(f(u)\cos(\omega u))du\right)\cos(\omega x)d\omega\,.$$

Аналогично, если функция $f(x)$ нечётная, то исчезает 1-е слагаемое, остаётся:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}(f(u)\sin(\omega u))du\right)\sin(\omega x)d\omega$$

Если функция $f(x)$ задана только на правой полуоси, то можно образовать её продолжение на всю ось двумя способами: чётное или нечётное продолжение. И получится то одна, то другая из формул, представленных выше.

Если в этих формулах тоже распределить равномерно коэффициент между двумя частями двойного интеграла, то:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}(f(u)\cos(\omega u))du\right)\cos(\omega x)d\omega$$

или

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}(f(u)\sin(\omega u))du\right)\sin(\omega x)d\omega$$

Внутренние интегралы, которые здесь получаются, называются:

1) косинус-преобразованием Фурье: $F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(u)\cos(\omega u)du$,

2) синус-преобразованием Фурье: $F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} f(u)\sin(\omega u)du$.

Для чётной функции её преобразование Фурье совпадает с косинус-преобразованием, а для нечётной - с синус-преобразованием. А для функции, заданной только на полуоси, можно построить как синус-так и косинус-преобразование Фурье.

ЛЕКЦИЯ 3. 12.03.2019

Глава 3. Преобразование Лапласа.

§ 1. Определения и примеры.

Определение. Функция $f(t)$ называется оригиналом, если:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t \in (-\infty, 0)$.

2) $|f(t)| \le Me^{st}$, s называется порядком роста.

3) функция имеет не более конечного числа разрывов, причём они устранимые или 1-го рода, но не 2-го рода.

Объяснение, почему невозможны разрывы 2 рода. В этом случае возрастание к ∞ в окрестности точки быстрее, чем e^{st}, нарушалось бы условие на порядок роста.

Преобразование Лапласа. Функция $F(p)=\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$ называется изображением оригинала, или её преобразованием Лапласа.

Есть ещё одно обозначение $F(p)=L(f(t))$, похожее на обозначение линейного оператора. Дело в том, что преобразование Лапласа линейно, увидим это при доказательстве свойств чуть позже.

Функция $\eta(t) = \begin{cases} 0, t \in (-\infty, 0] \\ 1, t \in (0, +\infty) \end{cases}$ называется функцией Хевисайда. При умножении на $\eta(t)$ какой-либо функции, заданной на всей оси, функция обнуляется на левой полуоси и становится оригиналом.

Примеры.

Пример 1. Вычислить $L(1)$.

Решение. Фактически, $L(1) = L(\eta(t))$, так как рассматривается интеграл только по правой полуоси.

$F(p)=\int\limits_0^{\infty} 1\cdot e^{-pt}dt = \int\limits_0^{\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{-p}e^{-pt}\Big|_0^{\infty}$ этот несобственный интеграл сходится только в том случае, когда $\mathrm{Re}(p)>0$, иначе на верхнем пределе получается $e^{+\infty}$, а не $e^{-\infty}=0$.

$$\frac{1}{-p}e^{-pt}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-p}(0-1) = \frac{1}{p}.$$

Ответ. $L(1)=\frac{1}{p}$.

Пример 2. Вычислить $L(t)$.

Решение. $F(p)=\int\limits_0^\infty t\cdot e^{-pt}dt$ здесь мы столкнулись с интегрированием по частям, строим таблицу:

$u=t$	$v=\frac{1}{-p}e^{-pt}$
$u'=1$	$v'=e^{-pt}$

$$F(p)=\int\limits_0^\infty t\cdot e^{-pt}dt=-\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty+\frac{1}{p}\int\limits_0^\infty e^{-pt}dt=-\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^\infty$$

далее при условии $\mathrm{Re}(p)>0$ получается $0-\frac{0-1}{p^2}=\frac{1}{p^2}$.

Ответ. $L(t)=\frac{1}{p^2}$

Пример 3. Вычислить $L(t^2)$.

Решение. $F(p)=\int\limits_0^\infty t^2\cdot e^{-pt}dt$ здесь интегрирование по частям в 2 шага, т.к. 2-я степень. На 1-м шаге

$u = t^2$	$v = \frac{1}{-p} e^{-pt}$
$u' = 2t$	$v' = e^{-pt}$

Тогда $F(p) = \int\limits_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-pt} dt \; = -\frac{t^2}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{p} \int\limits_0^{\infty} t e^{-pt} dt \; = 0 + \frac{2}{p} \int\limits_0^{\infty} t e^{-pt} dt$

остающийся интеграл - в точности тот, который был в прошлом

примере, результат там был $L(t) = \frac{1}{p^2}$. Поэтому $L(t^2) \; = \frac{2}{p} \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^3}$

Ответ. $L(t^2) = \frac{2}{p^3} \; = \; \frac{2!}{p^3}$.

Аналогично, $L(t^3) = \frac{3!}{p^4}$, потому что после 1-го шага получится

$$F(p) = \int\limits_0^{\infty} t^3 \cdot e^{-pt} dt \; = -\frac{t^3}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{3}{p} \int\limits_0^{\infty} t^2 e^{-pt} dt \; = \frac{3}{p} \frac{2}{p^3} = \frac{3!}{p^4}$$

Кстати, по индукции, можно доказать для любой степени:

$L(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$. Достаточно сделать 1-й шаг интегрирования по частям,

после чего остаётся интеграл для степени ровно на 1 меньше.

Пример 4. Вычислить $L(e^{at})$.

Решение. $F(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-pt} dt \; = \int\limits_0^{\infty} e^{(a-p)t} dt \; = \frac{1}{a-p} e^{(a-p)t} \Big|_0^{\infty}$

далее обратите внимание на область существования $\operatorname{Re}(p) > a$, иначе на верхнем пределе получалось бы $e^{+\infty}$.

$$\frac{1}{a-p}e^{(a-p)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{e^{-\infty}-e^0}{a-p} = \frac{0-1}{a-p} = \frac{1}{p-a}.$$

Ответ. $L(e^{at}) = \dfrac{1}{p-a}$.

Пример 5. Вычислить $L(\cos at)$.

Решение. $F(p) = \int\limits_0^{\infty}\cos(at)\cdot e^{-pt}dt$ здесь можно было бы рассмотреть как циклический интеграл, но это нерациональный способ, лучше представить cos через экспоненты.

$$F(p) = \int\limits_0^{\infty}\cos(at)\cdot e^{-pt}dt = \int\limits_0^{\infty}\frac{e^{ait}+e^{-ait}}{2}e^{-pt}dt =$$

$$\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\infty}e^{ait}e^{-pt}dt + \int\limits_0^{\infty}e^{-ait}e^{-pt}dt\right) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\infty}e^{(ai-p)t}dt + \int\limits_0^{\infty}e^{-(ai+p)t}dt\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ai-p}e^{(ai-p)t}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{ai+p}e^{-(ai+p)t}\Big|_0^{\infty}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0-1}{ai-p} - \frac{0-1}{ai+p}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-ai} + \frac{1}{p+ai}\right) = \frac{1}{2}\frac{(p+ai)+(p-ai)}{(p-ai)(p+ai)} = \frac{1}{2}\frac{2p}{p^2+a^2} = \frac{p}{p^2+a^2}$$

Ответ. $L(\cos at) = \dfrac{p}{p^2+a^2}$.

Пример 6. Вычислить $L(\sin at)$.

Решение. $F(p)=\int\limits_0^\infty \sin(at)\cdot e^{-pt}dt \;=\; \int\limits_0^\infty \frac{e^{ait}-e^{-ait}}{2i}e^{-pt}dt \;=$

$$\frac{1}{2i}\left(\int\limits_0^\infty e^{ait}e^{-pt}dt-\int\limits_0^\infty e^{-ait}e^{-pt}dt\right) = \frac{1}{2i}\left(\int\limits_0^\infty e^{(ai-p)t}dt-\int\limits_0^\infty e^{-(ai+p)t}dt\right) =$$

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{ai-p}e^{(ai-p)t}\Big|_0^\infty+\frac{1}{ai+p}e^{-(ai+p)t}\Big|_0^\infty\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{0-1}{ai-p}+\frac{0-1}{ai+p}\right) =$$

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-ai}-\frac{1}{p+ai}\right) = \frac{1}{2i}\frac{(p+ai)-(p-ai)}{(p-ai)(p+ai)} = \frac{1}{2i}\frac{2ai}{p^2+a^2} = \frac{a}{p^2+a^2}$$

Ответ. $L(\sin at)=\dfrac{a}{p^2+a^2}$.

§ 2. Обратное преобразование Лапласа.

Теорема 1. (теорема обращения).

Пусть функция $F(p)$ обладает следующими свойствами:

1) Аналитическая в области $\mathrm{Re}(p)>s$, а в $\mathrm{Re}(p)\le s$ конечное число полюсов.

2) $\max|F(p)|\to 0$ при $R\to\infty$.

3) $\forall a>s$, $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp$ абсолютно сходится (т.е. по модулю).

То оригинал равен интегралу по вертикальной прямой, где абсцисса

$$a > s: \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi\ i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp \ .$$

Доказательство. Для заданной функции $f(t)$ искусственно построим новую функцию $\varphi(t) = e^{-at} f(t)$ и запишем для неё интеграл Фурье:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\omega\, x} dx \right) e^{i\omega\, t} d\omega$$

Причём в качестве локальной переменной во внутреннем интеграле можно использовать x, ведь во внешнем переменная называется t. Также мы учли, что функция -оригинал, то есть равна 0 на левой полуоси. Теперь подробнее:

$$e^{-at} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{0}^{\infty} f(x) e^{-ax} e^{-i\omega\, x} dx \right) e^{i\omega\, t} d\omega \ \Rightarrow$$

$$e^{-at} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{0}^{\infty} f(x) e^{-(a+i\omega)x} dx \right) e^{i\omega\, t} d\omega \ \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{0}^{\infty} f(x) e^{-(a+i\omega)x} dx \right) e^{(a+i\omega)t} d\omega \ .$$

Так как $\omega \in R$, то $a + i\omega$ это точка на вертикальной прямой, соответствующей абсциссе a, в комплексной плоскости. Можем ввести замену переменной: $p = a + i\omega$. Тогда $dp = id\omega$, $d\omega = \dfrac{dp}{i}$.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left(\int_0^{\infty}f(x)e^{-px}dx\right)e^{pt}\frac{dp}{i}\ \Rightarrow$$

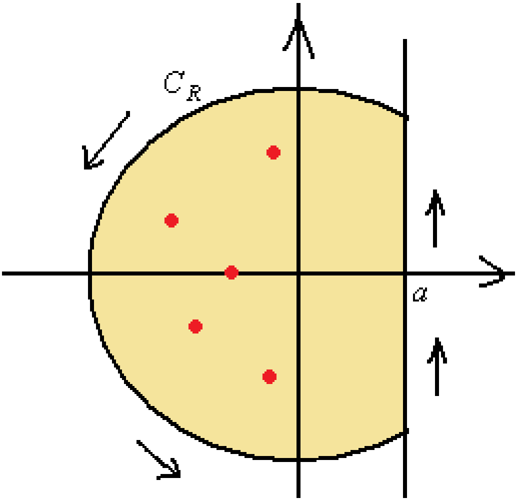
$$f(t)=\frac{1}{2\pi\ i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left(\int_0^{\infty}f(x)e^{-px}dx\right)e^{pt}dp$$

Причём заметим, что вложенный интеграл здесь - это как раз и есть преобразование Лапласа от f. Итак, получили:

$f(t)=\frac{1}{2\pi\ i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{pt}dp$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (2-я теорема разложения) Если $f(t)$ оригинал, $F(p)$ его изображение, то $f(t)=\eta(t)\sum\operatorname{Re}s\left(F(p)e^{pt}\right)$.

Доказательство. Следует из прошлой теоремы. Известно, что $f(t)=\frac{1}{2\pi\ i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{pt}dp$. Если полюсы сосредоточены левее абсциссы a, то можно найти такой радиус R, что все полюсы будут внутри контура, ограниченного вертикальным отрезком и дугой C_R (см. чертёж). По основной теореме о вычетах, $\frac{1}{2\pi\ i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{pt}dp$ равен сумме вычетов внутри контура. При $R\to\infty$, интеграл по дуге стремится к 0, и в пределе получается интеграл не по отрезку,а по вертикальной прямой.



Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi\ i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp \ = \ f(t) = \eta(t)\sum \operatorname{Re} s\left(F(p)e^{pt}\right).$$ Что и требовалось доказать.

В примерах при вычислении оригинала надо найти только сумму вычетов, коэффициент $\dfrac{1}{2\pi\ i}$ уже учтён, на него домножать не надо. Теперь вычислим обратные преобразования Лапласа во всей предыдущей серии примеров 1-6.

Пример 1А. Найти обратное преобразование Лапласа для $F(p) = \dfrac{1}{p}$.

Решение. Домножаем на e^{pt} и ищем сумму всех возможных вычетов от функции $\dfrac{e^{pt}}{p}$. Полюс всего один, это $p = 0$. Поэтому

$$\operatorname*{Res}_{p=0} \frac{e^{pt}}{p} = \lim_{p\to 0}\left(e^{pt}\right) = e^{0t} = 1.$$ Впрочем, надо, чтобы был оригинал, т.е. 0 на левой полуоси, так что ещё домножим на функцию Хевисайда $\eta(t)$. **Ответ.** $\eta(t)$ (на правой полупрямой 1).

Пример 2А. Найти обратное преобразование Лапласа для $F(p) = \dfrac{1}{p^2}$.

Решение. Здесь полюс $p = 0$ 2-го порядка.

$$\operatorname*{Res}_{p=0} \frac{e^{pt}}{p^2} = \lim_{p\to 0}\left(e^{pt}\right)_p' = \lim_{p\to 0}\left(te^{pt}\right) = te^{0t} = t.$$

Ответ. $\eta(t)\cdot t$.

Пример 3А. Найти обратное преобразование Лапласа для $F(p) = \dfrac{2}{p^3}$.

Решение. Здесь полюс $p = 0$ 3-го порядка.

$$\operatorname*{Res}_{p=0} \frac{2e^{pt}}{p^3} = \lim_{p\to 0} \frac{2}{2!}\left(e^{pt}\right)_p'' = \lim_{p\to 0}\left(t^2e^{pt}\right) = t^2e^{0t} = t^2.$$

Ответ. $\eta(t)\cdot t^2$.

Пример 4А. Найти обратное преобразование Лапласа: $F(p) = \dfrac{1}{p-a}$.

Решение. Здесь единственный полюс $p = a$.

$$\operatorname*{Res}_{p=a} \frac{e^{pt}}{p-a} = \lim_{p\to a}\left(e^{pt}\right) = e^{pt}\Big|_{p=a} = e^{at}.$$

Ответ. $\eta(t)\cdot e^{at}$.

Пример 5А. Найти обратное преобразование Лапласа: $\dfrac{p}{p^2+a^2}$

Решение. По строению знаменателя видно, что здесь 2 полюса, а именно, $ai, -ai$, потому что $\dfrac{p}{p^2+a^2} = \dfrac{p}{(p+ai)(p-ai)}$.

$$\operatorname*{Res}_{p=ai} \frac{pe^{pt}}{p^2+a^2} + \operatorname*{Res}_{p=-ai} \frac{pe^{pt}}{p^2+a^2} = \left.\frac{pe^{pt}}{p+ai}\right|_{p=ai} + \left.\frac{pe^{pt}}{p-ai}\right|_{p=-ai} =$$

$$\frac{aie^{ait}}{2ai} + \frac{-aie^{-ait}}{-2ai} = \frac{e^{ait}}{2} + \frac{e^{-ait}}{2} = \cos at.$$ **Ответ.** $\eta(t)\cdot\cos at$.

Пример 6А. Найти обратное преобразование Лапласа: $\dfrac{a}{p^2+a^2}$

Решение. $$\operatorname*{Res}_{p=ai} \frac{ae^{pt}}{p^2+a^2} + \operatorname*{Res}_{p=-ai} \frac{ae^{pt}}{p^2+a^2} = \left.\frac{ae^{pt}}{p+ai}\right|_{p=ai} + \left.\frac{ae^{pt}}{p-ai}\right|_{p=-ai} =$$

$$\frac{ae^{ait}}{2ai} + \frac{ae^{-ait}}{-2ai} = \frac{e^{ait}}{2i} - \frac{e^{-ait}}{2i} = \sin at.$$

Ответ. $\eta(t)\cdot\sin at$.

Пример 7. Найдём обратное преобразование для $F(p) = \dfrac{1}{p^{n+1}}$.

Решение. Полюс $p = 0$ порядка n+1. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{p=0} \frac{e^{pt}}{p^{n+1}} = \frac{1}{n!}\lim_{p\to 0}\left(e^{pt}\right)^{(n)} = \frac{1}{n!}\lim_{p\to 0}\left(t^n e^{pt}\right) = \frac{t^n}{n!}.$$

Ответ. $\dfrac{t^n}{n!}\cdot\eta(t)$.

Итак, мы ещё раз доказали, что $L(t^n) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, другим способом.

Из этого также следует такая теорема:

Теорема 3 (1-я теорема разложения) Если изображение

$F(p) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{p^{n+1}}$ то его оригинал $f(t) = \eta(t)\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \dfrac{t^n}{n!}$.

Следует из $L(t^n) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ и линейности преобразования Лапласа.

Пример. Найти обратное преобразование Лапласа для

$$F(p) = \frac{p}{(p-1)(p-2)}$$

Решение. Способ 1.

$$\sum \operatorname{Res} \frac{pe^{pt}}{(p-1)(p-2)} = \operatorname*{Res}_{p=1} \frac{pe^{pt}}{(p-1)(p-2)} + \operatorname*{Res}_{p=2} \frac{pe^{pt}}{(p-1)(p-2)} =$$

$$\left.\frac{pe^{pt}}{p-2}\right|_{p=1} + \left.\frac{pe^{pt}}{p-1}\right|_{p=2} = \frac{e^t}{-1} + \frac{2e^{2t}}{1} = 2e^{2t} - e^t.$$

Вспомним также о том, что для получение оригинала нужно домножить на функцию Хевисайда.

Ответ. $f(t) = \eta(t)(2e^{2t} - e^{t})$.

Способ 2. Разложить на простейшие дроби и воспользоваться тем, что доказали ранее: $L(e^{at}) = \dfrac{1}{p-a}$.

$\dfrac{p}{(p-1)(p-2)} = \dfrac{A}{p-1} + \dfrac{B}{p-2} = \dfrac{A(p-2) + B(p-1)}{(p-1)(p-2)}$ тогда числители соответствуют между собой так:

$A(p-2) + B(p-1) = 1p + 0 \Rightarrow \quad (A+B)p + (-2A-B) = 1p + 0 \Rightarrow$

Система уравнений: $\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A - B = 0 \end{cases}$ сложим уравнения, увидим, что $-A = 1$, тогда $A = -1$, $B = 2$. Таким образом, разложение имеет вид $\dfrac{2}{p-2} - \dfrac{1}{p-1}$. Учитывая, что $L(e^{at}) = \dfrac{1}{p-a}$, получим

$f(t) = \eta(t)(2e^{2t} - e^{t})$.

ЛЕКЦИЯ 4. 26.03.2019

§ 3. Свойства преобразования Лапласа.

1. Линейность. $L(af(t)+bg(t))=aF(p)+bG(p)$.

Доказательство. Следует из свойства линейности интеграла, а именно: $L(af(t)+bg(t)) = \int\limits_0^\infty (af(t)+bg(t))e^{-pt}dt =$

$$\int\limits_0^\infty af(t)e^{-pt}dt + \int\limits_0^\infty bg(t)e^{-pt}dt = a\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt + b\int\limits_0^\infty g(t)e^{-pt}dt =$$

$aF(p)+bG(p)$.

Применения линейности на практике весьма обширны, во многих примерах можно разбить функцию на множество слагаемых более простой структуры, преобразования Лапласа которых известны.

2. Свойство подобия. $L(f(at))=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{p}{a}\right)$.

Доказательство. Здесь, в отличие от преобразования Фурье, имеет смысл только $a>0$, потому что оригинал $f(at)$ также должен быть отличен от 0 именно на правой полуоси.

$L(f(at)) = \int\limits_0^\infty f(at)e^{-pt}dt$, далее нам надо сделать замену с целью привести выражение к какой-то одной переменной под знаком f.

$x=at$, при этом $dx=a\cdot dt$, $dt=\dfrac{dx}{a}$.

$$\int_0^\infty f(at)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(x)e^{-\frac{px}{a}}\frac{dx}{a} = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(x)e^{-\frac{p}{a}x}dx = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Пример. Рассмотрим, как разаимосвязаны преобразования Лапласа от $\sin t$ и $\sin(at)$. Ранее мы выводили формулу $L(\sin at) = \dfrac{a}{p^2 + a^2}$.

В частности, тогда $L(\sin t) = \dfrac{1}{p^2 + 1}$. Если к ней применить свойство подобия, то: $L(\sin at) = \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} = \dfrac{1}{a}\dfrac{a^2}{p^2 + a^2} = \dfrac{a}{p^2 + a^2}$.

3. «Теорема запаздывания». $L(f(t-a)) = e^{-pa}F(p)$.

Доказательство. Вычитание под знаком функции равносильно сдвигу вправо, а так как оригинал был равен 0 при $t < 0$, то будет равен 0 при $t < a$, то есть интегрирование начинается с абсциссы a (левее всё равно 0).

$$L(f(t-a)) = \int_a^\infty f(t-a)e^{-pt}dt$$

Далее опять стараемся привести к какой-либо одной переменной под знаком f, делаем замену $x = t - a$, при этом $x \in (0, +\infty)$, $dx = dt$.

$$\int_a^{\infty} f(t-a)e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} f(x)e^{-p(x+a)}dx = \int_0^{\infty} f(x)e^{-px}e^{-pa}dx =$$

$$e^{-pa}\int_0^{\infty} f(x)e^{-px}dx = e^{-pa}F(p).$$

4. «Теорема смещения». $L(e^{at} f(t)) = F(p-a)$.

Доказательство. $L(e^{at} f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{at}e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(p-a)t}dt =$

$F(p-a)$.

Пример. Найти $L(e^{5t}\sin 3t)$. Зная, что $L(\sin 3t) = \dfrac{3}{p^2+9}$, достаточно вместо p записать $(p-5)$, а именно: $L(e^{5t}\sin 3t) = \dfrac{3}{(p-5)^2+9}$.

5. Дифференцирование оригинала.

$L(f'(t)) = pF(p) - f(0)$.

Доказательство. $L(f'(t)) = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt}dt$. Здесь можно применить интегрирование по частям, причём обозначив $v' = f'$.

$u = e^{-pt}$	$v = f(t)$
$u' = -pe^{-pt}$	$v' = f'(t)$

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = (0-f(0))+pF(p).$$

Следствия. Рассмотрим 2-ю производную от оригинала. Если в качестве «базовой» функции рассматривать теперь $f'(t)$ (можно её обозначить $g(t)$) то ранее доказанная формула применима к $g(t)$ таким образом:

$$L(f''(t)) = L(g'(t)) = pG(p) - g(0) = p\cdot L(f') - f'(0) =$$

$$p\big(pF(p) - f(0)\big) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Аналогично, $L(f''') = pL(f'') = f''(0) =$

$$p^3F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0).$$

Общая формула:

$$L\left(f^{(n)}\right) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0).$$

Пример. Покажем взаимосвязь между $L(\sin t)$ и $L(\cos t)$ по этому свойству. $L(\sin t) = \dfrac{1}{p^2+1}$, $L(\cos t) = \dfrac{p}{p^2+1}$.

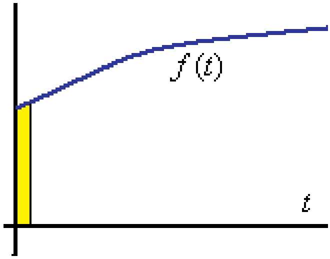
$$L(\cos t) = L((\sin t)') = p\frac{1}{p^2+1} - \sin(0) = \frac{p}{p^2+1} - 0.$$

6. Интегрирование оригинала.

Если $h(t)$ есть первообразная от $f(t)$, то $L(h(t)) = \dfrac{F(p)}{p}$.

Доказательство.

Рассмотрим первообразную как интеграл с переменным верхним пределом: $h(t)=\int\limits_0^t f(t)dt$. Тогда $h(0)=\int\limits_0^0 f(t)dt=0$, т.е. в любом случае, даже если график $f(t)$ начинается не от точки (0,0), а с какой-либо ненулевой ординаты, функция $h(0)=0$ (площадь криволинейной трапеции возрастает от значения 0).



При этом, очевидно, $h'=f$. Запишем равенство из предыдущего свойства для $h(t)$:

$$L(h')=pH(p)-h(0) \quad \Leftrightarrow \quad L(f)=pH(p) \ \Leftrightarrow F(p)=pL(h(t)) \ \Leftrightarrow$$

$$L(h(t))=\frac{F(p)}{p}.$$

7. Дифференцирование изображения. $F'(p)=L(-t\cdot f(t))$.

Доказательство.

$$F'(p)=\left(\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right)'_p=\int\limits_0^\infty \left(f(t)e^{-pt}\right)'_p dt=\int\limits_0^\infty -tf(t)e^{-pt}dt=L(-t\cdot f(t))$$

Следствия. $F''(p)=L(t^2\cdot f(t))$,

$F'''(p) = L(-t^3 \cdot f(t))$, ...

$F^{(n)}(p) = (-1)^n L(t^n \cdot f(t))$.

Пример. $L(\cos t) = \dfrac{p}{p^2+1} \Rightarrow \quad L(t\cos t) = -\left(\dfrac{p}{p^2+1}\right)' = -\dfrac{(p^2+1)-2p^2}{(p^2+1)^2}$

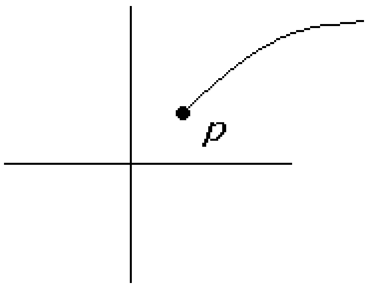
$= \dfrac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$.

Пример. $L(e^t) = \dfrac{1}{p-1} \Rightarrow L(t^2 e^t) = \left(\dfrac{1}{p-1}\right)'' = \left(\dfrac{-1}{(p-1)^2}\right)' = \dfrac{(-1)(-2)}{(p-1)^3} =$

$\dfrac{2}{(p-1)^3}$.

8. Интегрирование изображения. $\displaystyle\int_p^{\infty} F(p)dp = L\left(\frac{f(t)}{t}\right)$.

Доказательство. Здесь интеграл от изображения - это интеграл от комплексной функции по кривой в плоскости.



$$\int_p^{\infty} F(p)dp = \int_p^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\right)dp$$, сменим порядок интегрирования,

получим $$\int_0^{\infty}\left(\int_p^{\infty} f(t)e^{-pt}dp\right)dt = \int_0^{\infty} f(t)\left(\int_p^{\infty} e^{-pt}dp\right)dt = \int_0^{\infty} f(t)\left(\left.\frac{e^{-pt}}{-t}\right|_p^{\infty}\right)dt =$$

$$\int_0^{\infty} f(t)\left(\frac{0-e^{-pt}}{-t}\right)dt = \int_0^{\infty} f(t)\frac{e^{-pt}}{t}dt = \int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt = L\left(\frac{f(t)}{t}\right).$$

Решение дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.

Используя свойство 5, можно решать дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений. Преобразуя левую часть уравнения, получим алгебраическое уравнение, содержащене различные $p^n X(p)$, вместо дифференциального.

Пример 1. $x' - x = 0$, $x(0) = 1$.

Решение. Преобразуем левую и правую часть. Обозначим $L(x) = X(p)$. Тогда $L(x') = pX(p) - x(0)$.

$$pX(p) - x(0) - X(p) = 0 \;\Rightarrow\; (p-1)X(p) = 1 \;\Rightarrow\; X(p) = \frac{1}{p-1},$$

далее ищем обратное преобразование Лапласа.

$$\operatorname*{Res}_{p=1}\frac{e^{pt}}{p-1} = \left.e^{pt}\right|_{p=1} = e^t.$$

Ответ. $x(t) = e^t$.

Пример 2. $x'' - x = 0$, $x(0) = 3$, $x'(0) = 1$.

Решение. Раньше, во 2 семестре, мы решали подобные задачи с помощью характеристического уравнения: $k^2 - 1 = 0$, его корни 1 и -1, общее решение $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$, затем подставляли условия Коши и находили частное решение. Сейчас сделаем методом преобразования Лапласа.

Преобразуем правую и левую часть. Обозначим $L(x) = X(p)$. Тогда

$$L(x') = pX(p) - x(0), \quad L(x'') = p^2 X(p) - px(0) - x'(0).$$

При этом мы автоматически учитываем и условия Коши, ведь в формулах преобразования Лапласа от производных уже есть $x(0)$ и $x'(0)$.

$$p^2 X(p) - px(0) - x'(0) - X(p) = 0 \Rightarrow$$

$$(p^2 - 1)X(p) - 3p - 1 = 0 \Rightarrow (p^2 - 1)X(p) = 3p + 1 \Rightarrow X(p) = \frac{3p+1}{p^2 - 1}.$$

Ищем обратное преобразование Лапласа.

$$\sum \operatorname{Res} \frac{(3p+1)e^{pt}}{(p+1)(p-1)} = \left.\frac{(3p+1)e^{pt}}{p+1}\right|_{p=1} + \left.\frac{(3p+1)e^{pt}}{p-1}\right|_{p=-1} = \frac{4e^t}{2} + \frac{-2e^{-t}}{-2} =$$

$$2e^t + e^{-t}.$$

Ответ. $x(t) = 2e^t + e^{-t}$.

ЛЕКЦИЯ 5. 09.04.2019

§ 4. Свёртка оригиналов, интегральные уравнения.

Определение. Свёрткой двух оригиналов называется функция

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau .$$

Пример. Найти свёртку $t * t$.

Решение. $f * g = \int_0^t \tau(t-\tau)d\tau = \int_0^t (t\tau - \tau^2)d\tau = t\frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t - \frac{\tau^3}{3}\Big|_0^t =$

$t\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)t^3 = \frac{1}{6}t^3.$

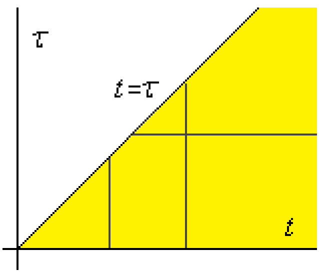
Ответ. $t * t = \frac{1}{6}t^3$.

Теорема об основном свойстве свёртки. $L(f * g) = F(p)G(p)$.

Доказательство.

$$L(f * g) = \int_0^\infty (f * g)e^{-pt}dt = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)e^{-pt}dt$$

Исследуем получившийся двойной интеграл. Начертим область интегрирования.



При каждом t изменение τ происходит от 0 до t. Если изменить порядок интегрирования, то при каждом τ движение точки внутри выделенной области будет происходить от τ до $+\infty$ (горизонтальная линия).

$$\int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right) e^{-pt}dt = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)e^{-pt}d\tau \right) dt =$$

$$\int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty f(\tau)g(t-\tau)e^{-pt}dt \right) d\tau = \int_0^\infty f(\tau) \left(\int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-pt}dt \right) d\tau$$

(сменив порядок, вынеесли из внутреннего интеграла множитель, не зависящий от t). Во внутреннем интеграле, можно применить свойство (теорема запаздывания) $L(f(t-a)) = e^{-pa}F(p)$.

$$\int_0^\infty f(\tau)\left(G(p)e^{-p\tau}\right)d\tau = G(p)\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau = G(p)F(p) = F(p)G(p).$$

Что и требовалось доказать.

Обратимся снова к примеру, который был выше: $t * t = \frac{1}{6}t^3$.

Попробуем сопоставить преобразования правой и левой части.

$$L(t*t) = L(t)\cdot L(t) = \frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^4}$$

$$L\left(\frac{1}{6}t^3\right) = \frac{1}{6}L\left(t^3\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3!}{p^4} = \frac{1}{p^4}.$$

Результаты совпадают.

Следствие. Свёртка симметрична: $f * g = g * f$.

Это следует из того, что для произведения коммутативность выполняется: $G(p)F(p) = F(p)G(p)$.

Следствие. Формула Дюамеля. $L(f' * g) = (pF(p) - f(0))G(p)$.

Следует из предыдущей теоремы и свойства дифференцирования оригинала.

Пример. Найти $t * \sin t$.

Решение. Рассмотрим 2 способа и убедимся, что будет одно и то же:

1) прямое нахождение свёртки по определению (через интеграл),

2) через обратное преобразование.

Способ 1). Так как свёртка симметрична, то мы можем в любом из двух элементов записать $t - \tau$, в каком удобнее.

$t * \sin t = \int\limits_0^t (t-\tau)\sin(\tau)d\tau = t\int\limits_0^t \sin(\tau)d\tau - \int\limits_0^t \tau\sin(\tau)d\tau$, во втором

интегрирование «по частям»: $u = \tau$, $u' = 1$, $v' = \sin\tau$, $v = -\cos\tau$,

$$t\int\limits_0^t \sin(\tau)d\tau - \int\limits_0^t \tau\sin(\tau)d\tau = -t\cos\tau\Big|_0^t - \left(-\tau\cos\tau\Big|_0^t + \int\limits_0^t \cos\tau d\tau\right) =$$

$$-t\cos\tau\Big|_0^t - \left(-\tau\cos\tau\Big|_0^t + \sin\tau\Big|_0^t\right) = -t(\cos t - 1) + \tau\cos\tau\Big|_0^t - \sin\tau\Big|_0^t =$$

$$t(1-\cos t) + t\cos t - (\sin t) = t - \sin t.$$

Ответ. $t * \sin t = t - \sin t$.

Способ 2). Найдём преобразование Лапласа от свёртки как произведение преобразований от каждой части. А затем обратное преобразование.

$$L(t * \sin t) \;=\; L(t) \cdot L(\sin t) \;=\; \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p^2+1}\,.$$

Обратное преобразование с помощью вычетов:

$$\sum \operatorname{Re} s \frac{e^{pt}}{p^2(p^2+1)} \;=\; \left(\frac{e^{pt}}{p^2+1}\right)'\Bigg|_{p=0} + \frac{e^{pt}}{p^2(p+i)}\Bigg|_{p=i} + \frac{e^{pt}}{p^2(p-i)}\Bigg|_{p=-i} \;=$$

$$\frac{te^{pt}(p^2+1) - 2pe^{pt}}{(p^2+1)^2}\Bigg|_{p=0} + \frac{e^{it}}{(-1)2i} + \frac{e^{-it}}{(-1)(-2i)} \;=\; \frac{t}{1} - \left(\frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i}\right) = t - \sin t\,.$$

Ответ. $t * \sin t = t - \sin t$.

Пример. Найти свёртку $e^t * \cos t$.

Решение. Сделаем это через обратное преобразование Лапласа.

$$L(e^t * \cos t) \;=\; L(e^t) \cdot L(\cos t) \;=\; \frac{1}{p-1} \cdot \frac{p}{p^2+1}\,.$$

Обратное преобразование с помощью вычетов.

$$\sum \operatorname{Re} s \frac{pe^{pt}}{(p-1)(p^2+1)} \;=\; \frac{pe^{pt}}{p^2+1}\Bigg|_{p=1} + \frac{pe^{pt}}{(p-1)(p+i)}\Bigg|_{p=i} + \frac{pe^{pt}}{(p-1)(p-i)}\Bigg|_{p=-i}$$

$= \dfrac{e^t}{2} + \dfrac{ie^{it}}{(-1+i)(2i)} + \dfrac{-ie^{-it}}{(-1-i)(-2i)}$ в последней дроби сократим два минуса, а затем в двух последних сократим на i и приведём к общему знаменателю.

$$\frac{e^t}{2} + \frac{(-1-i)e^{it}}{(-1+i)(-1-i)2} + \frac{(-1+i)e^{-it}}{(-1-i)(-1+i)2} = \frac{e^t}{2} + \frac{(-1-i)e^{it}}{4} + \frac{(-1+i)e^{-it}}{4} =$$

$$\frac{e^t}{2} + \frac{-e^{it}}{4} + \frac{-e^{-it}}{4} + \frac{-ie^{it}}{4} + \frac{ie^{-it}}{4} = \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + \frac{e^{it}}{4i} - \frac{e^{-it}}{4i} =$$

$$\frac{e^t}{2} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\left(e^t + \sin t - \cos t\right).$$

Ответ. $e^t * \cos t = \dfrac{1}{2}\left(e^t + \sin t - \cos t\right)$.

Преобразование Лапласа и интегральные уравнения.

Если в уравнении участвует интеграл с переменным верхним пределом, то в некоторых случаях можно представить его как свёртку каких-то функций. Тогда можно от интегрального уравнения перейти к алгебраическому, применив преобразование Лапласа к правой и левой части.

Пример. Решить интегральное уравнение $\varphi(t) = \sin t + \int\limits_0^t (t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$.

Решение. Обозначим преобразование функции φ через $\Phi(p)$.

В интеграле - свёртка φ и линейной функции 1-й степени.

Тогда после преобразования Лапласа получим:

$$\Phi(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^2}\cdot\Phi(p).$$

Это уже алгебраическое уравнение, а не интегральное.

$$\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\Phi(p)=\frac{1}{p^2+1}\Rightarrow\frac{p^2-1}{p^2}\Phi(p)=\frac{1}{p^2+1}\Rightarrow$$

$$\Phi(p)=\frac{p^2}{(p^2-1)(p^2+1)}.$$

Теперь ищем обратное преобразование Лапласа. По знаменателю видно, что функция имеет 4 полюса порядка 1.

$$\sum\operatorname{Re}s\frac{p^2e^{pt}}{(p^2-1)(p^2+1)}=\sum\operatorname{Re}s\frac{p^2e^{pt}}{(p+1)(p-1)(p+i)(p-i)}=$$

$$\left.\frac{p^2e^{pt}}{(p+1)(p^2+1)}\right|_{p=1}+\left.\frac{p^2e^{pt}}{(p-1)(p^2+1)}\right|_{p=-1}+$$

$$\left.\frac{p^2e^{pt}}{(p+i)(p^2-1)}\right|_{p=i}+\left.\frac{p^2e^{pt}}{(p-i)(p^2-1)}\right|_{p=-i}=\frac{e^t}{4}+\frac{e^{-t}}{-4}+\frac{-e^{it}}{(2i)(-2)}+\frac{-e^{-it}}{(-2i)(-2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)=\frac{1}{2}\left(sht+\sin t\right).$$

Ответ. $\frac{1}{2}\left(\sin t+sht\right)$.

Пример 2. Решить интегральное уравнение $\varphi(t)=t+\int\limits_0^t e^{t-\tau}\varphi(\tau)d\tau$.

Решение. В интеграле - свёртка φ и экспоненты. Тогда

$$\varphi(t)=t+\int_0^t e^{t-\tau}\varphi(\tau)d\tau \;\Rightarrow\; \Phi(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p-1}\cdot\Phi(p) \;\Rightarrow$$

$$\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\Phi(p)=\frac{1}{p^2} \;\Rightarrow\; \frac{p-2}{p-1}\Phi(p)=\frac{1}{p^2} \;\Rightarrow\; \Phi(p)=\frac{p-1}{(p-2)p^2}\,.$$

Ищем обратное преобразование.

$$\Phi(p)=\frac{p-1}{(p-2)p^2} \;\Rightarrow\; \varphi(t)=\sum \operatorname{Re}s\frac{(p-1)e^{pt}}{(p-2)p^2} \;=$$

$$\left.\left(\frac{p-1}{p-2}e^{pt}\right)'\right|_{p=0}+\left.\frac{(p-1)e^{pt}}{p^2}\right|_{p=2}=$$

$$\left.\left(\frac{1(p-2)-1(p-1)}{(p-2)^2}e^{pt}+\frac{p-1}{p-2}te^{pt}\right)\right|_{p=0}+\left.\frac{(p-1)e^{pt}}{p^2}\right|_{p=2}=$$

$$\left(\frac{-1}{4}+\frac{1}{2}t\right)+\frac{e^{2t}}{4}\;=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{e^{2t}}{4}\,.$$

Ответ. $\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{e^{2t}}{4}$.

ЛЕКЦИЯ 6. 23.04.2019

ГЛАВА 4

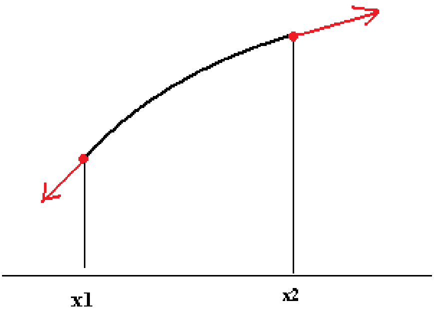
Дифференциальные уравнения в частных производных

(УМФ - уравнения математической физики)

Во 2 семестре мы изучали дифференциальные уравнения, содержащие функцию одной переменной. Однако при изучении физических процессов часто появляются дифференциальные уравнения с функциями от нескольких переменных, а значит, с частными производными. Переменные, соответствующие положению в пространстве x, y, z, и время t. Даже если рассматривается одномерное пространство, всё равно уже будет 2 переменных x, t.

Выведем 2 основных типа уравнений: волновое и теплопроводности (диффузии).

Пусть функция $u(x,t)$ задаёт отклонение некоторой натянутой струны от положения равновесия в точке с абсциссой x в момент времени t.



Рассмотрим небольшой участок струны, и все силы, действующие на него. Во-первых, вспомним, что ускорение пропорционально суммарной силе, действующей на участок. Рассмотрим проекцию ускорения и сил на вертикальную ось. Ускорение в точке определяется 2-й производной, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Тогда суммарное ускорение, действующее на участок от x_1 до x_2, равно $\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$.

Также в каждой точке действует некоторая внешняя сила $f(x,t)$.

Её действие на участок определяется интегралом $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx$. Кроме того, действует сила натяжения. Её проекция на вертикальную ось определяется проекцией суммы двух сил (показанных красными стрелками на чертеже). Если данный участок не прямолинейный, то угол наклона в точках x_1 и x_2 немного разный. Проекция пропорциональна синусу угла наклона. Вспомним также, что для бесконечно малой величины x, верны эквивалентности: $\sin x \approx tgx \approx x$. В точке x_2, тангенс угла наклона $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_2)$, в точке x_1, соответственно, $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_1)$. Сумма сил натяжения, действующих на участок, равна $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_2) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_1)$ (разность, потому что в левой точке сила направлена в противоположную сторону). Эта разность может рассматриваться как результат применения формулы Ньютона-Лейбница при интегрировании по переменной x. А именно,

$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x_2)-\frac{\partial u}{\partial x}(t,x_1) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$. Запишем взаимосвязь ускорения и суммарной силы: $\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx = a^2\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx$, где a^2 некоторый коэффициент, зависящий от плотности струны. Почему он положительный? При изгибе вверх, 2-я производная отрицательна (вспомним взаимосвязь выпуклости графика вверх и 2 производной), и при этом сила тоже действует вниз. При изгибе вниз, наоборот, 2-я производная положительна, но и сила направлена вверх. Таким образом, коэффициент заведомо положительный, и мы сразу обозначаем его a^2, чтобы подчеркнуть данный факт.

Если перейти к пределу при $x_2 \to x_1$, то получим равенство в точке:

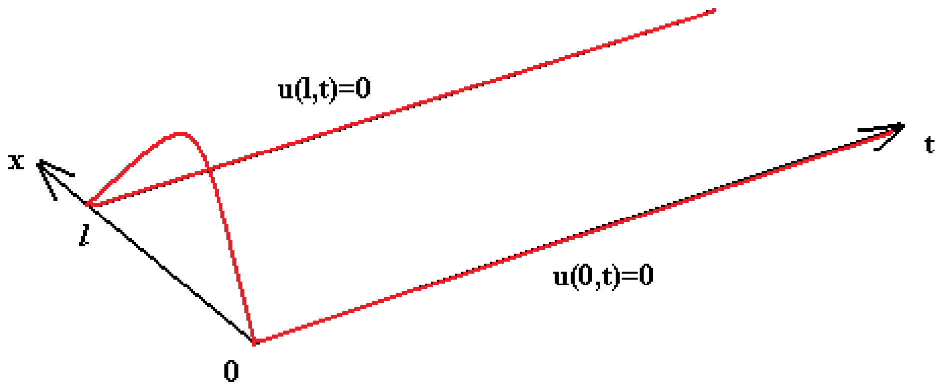
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$, или в других обозначениях, $u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + f$.

Это называется волновое уравнение, или уравнение колебаний.

Если внешние силы отсутствуют, то $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$.

Рассмотрим аналог условий Коши для этого уравнения.

Если концы струны закпеплены, то $u(0,t)=0$ и $u(l,t)=0$ - **граничные условия**. Кроме того, в момент времени $t=0$ должны быть заданы **начальные условия** $u(x,0)$ и $u'_t(x,0)$, определяющие положение точек струны в нулевой момент времени и их скорости.



Уравнение теплопроводности (диффузии).

Теперь рассмотрим другой процесс. Пусть задан узкий стержень, и температура в каждой его точке. Либо плотность газа внутри узкой трубки. Как она будет меняться с течением времени? В области высоких температур (или плотности газа), будет происходить их снижение, переток энергии в соседние области. Но в этом случае именно скорость (а не ускорение по t) пропорциональна кривизне графика, т.е. второй производной по x. Чем больше разность плотностей, тем больше скорость перераспределения частиц.

Уравнение примет вид $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$, или в других обозначениях, $u'_t = a^2 u''_{xx} + f$. Здесь не 2-я, а 1-я производная по t .

Решение волнового уравнения и уравнения теплопроводности методом Фурье разделения переменных.

Пусть $u(x,t)$ имеет вид $X(x)T(t)$, то есть является произведением двух различных функций от x и от t. Тогда уравнение $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$ примет вид: $X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$.

Тогда $\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$. Но дву функции, одна от x, другая от t, могут быть равны лишь в том случае, когда они обе равны одной и той же константе, иначе противоречие. Обе должны обладать свойством: отношение 2-й производной к самой функции равно константе. Кстати, такие функции существуют, например, e^{kx}, $\sin(kx)$, $\cos(kx)$.

Итак, $\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$. Уравнение распадается на 2 различных уравнения: $\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$, $\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$.

Решим первое из них. $\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \Rightarrow X''(x) - \lambda X(x) = 0$, это линейное однородное уравнение, его характеристическое уравнение $r^2 - \lambda = 0$.

Возможны 3 случая: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

Рассмотрим $\lambda > 0$. Тогда характеристическое корни $\pm\sqrt{\lambda}$, ФСР $\left\{e^{\sqrt{\lambda}x}, e^{-\sqrt{\lambda}x}\right\}$, общее решение $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Но теперь применим граничные условия: если концы струны закреплены, то $X(0) = X(l) = 0$. В этом случае, получается:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad X(l) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0$$

Тогда система уравнений на C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \end{cases}$$

Из 1-го, $C_2 = -C_1$, тогда $C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} - C_1 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \Rightarrow C_1\left(e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l}\right) = 0$, но так как выражение в скобках не равно 0 (экспонента в двух разных точках принимает разные значения), то $C_1 = 0$, а значит и $C_2 = 0$.

Итак, при $\lambda > 0$ возможно только тривиальное решение.

Рассмотрим случай $\lambda = 0$. Тогда $X''(x) = 0$, общее решение $X(x) = C_1 + C_2 x$. Применим граничные условия $X(0) = X(l) = 0$. Получим систему уравнений: $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 l = 0 \end{cases}$, откуда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Рассмотрим третий случай: $\lambda < 0$. Сразу обозначим $\lambda = -\omega^2$, подчеркнув, что она отрицательна. Тогда характеристическое уравнение $r^2 + \omega^2 = 0$, корни $\pm i\omega$, общее решение дифференциального уравнения: $X(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$.

Применим граничные условия $X(0) = X(l) = 0$.

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1\cos(\omega l) + C_2\sin(\omega l) = 0 \end{cases}$$

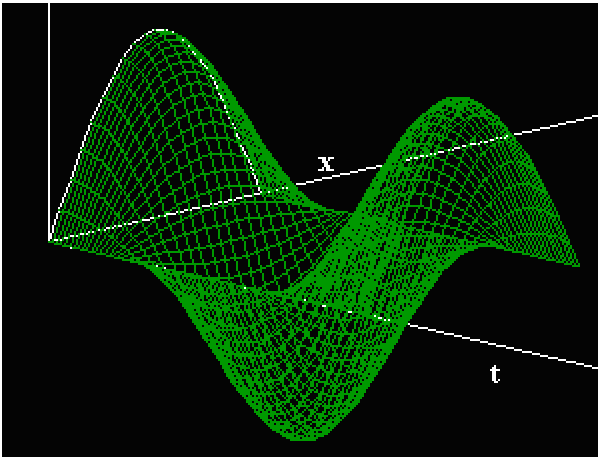
$C_1 = 0$, $C_2\sin(\omega l) = 0$. При этом $C_2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\omega l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega l = \pi k$ $\Leftrightarrow \omega = \dfrac{\pi k}{l}$. Тогда вид функции: $X(x) = C_2\sin\left(\dfrac{\pi k}{l}x\right)$.

Теперь решим уравнение по t, а именно $\dfrac{1}{a^2}\dfrac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$. Но при этом мы уже знаем, что $\lambda = -\omega^2$, где $\omega = \dfrac{\pi k}{l}$.

$\dfrac{1}{a^2}\dfrac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad T''(t) + \omega^2 a^2 T(t) = 0$, характристическое уравнение $r^2 + \omega^2 a^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; r = \pm i\omega a$, общее решение

$T(t) = C_3\cos(\omega a t) + C_4\sin(\omega a t)$, а учитывая тот факт, что $\omega = \dfrac{\pi k}{l}$, получаем $T(t) = C_3\cos\left(\dfrac{\pi k a}{l}t\right) + C_4\sin\left(\dfrac{\pi k a}{l}t\right)$. Тогда окончательный вид решения: $u(x,t) = C_2\sin\left(\dfrac{\pi k}{l}x\right)\left(C_3\cos\left(\dfrac{\pi k a}{l}t\right) + C_4\sin\left(\dfrac{\pi k a}{l}t\right)\right)$.

В каждой точке $x \in (0,l)$ происходят колебания, то есть сечение по t синусоида или косинусоида, или их комбинация. График функции $u(x,t)$ представлен на чертеже:

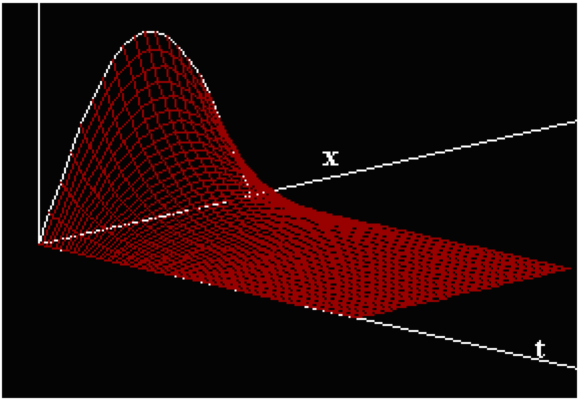


Теперь решим уравнение теплопроводности (диффузии) этим же методом. Пусть $u(x,t) = X(x)T(t)$. Тогда уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ примет вид $X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t) \iff \frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$. При этом относительно x получается точно такое же уравнение, которое недавно решали. Мы уже знаем, что $\lambda = -\omega^2$, причём $\omega = \frac{\pi k}{l}$, $X(x) = C\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$. А вот в решении уравнения относительно t будут существенные отличия, ведь оно не 2-го, а 1-го порядка.

$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda = -\omega^2 \iff T'(t) + \omega^2 a^2 T(t) = 0$, его характеристическое уравнение $r = -\omega^2 a^2$, общее решение $T(t) = Ce^{-\omega^2 a^2 t}$. Таким образом, окончательный вид функции $u(x,t)$:

$$u(x,t)=C\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)e^{-\omega^2a^2t}.$$

В каждом сечении по оси t, убывающая экспонента.



О приближённых методах решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Чтобы находить приближённые решения с помощью компьютера, необходимо научиться сначала задавать 1-ю и 2-ю производные.

Пусть дан массив значений $u(x_i,0)$ с шагом h, где $h=\dfrac{l}{n}$.

Информацию о первой производной по x можно получить, вычислив значение: $\dfrac{u(x_{i+1},0)-u(x_i,0)}{h}$. Информация о 2-й производной по x может быть получена с помощью значения такого выражения:

$$\frac{\dfrac{u(x_{i+1},0)-u(x_i,0)}{h}-\dfrac{u(x_i,0)-u(x_{i-1},0)}{h}}{h}=\frac{u(x_{i+1},0)-2u(x_i,0)+u(x_{i-1},0)}{h^2}.$$

При решении уравнения теплопроводности, можно значения следующего слоя (при следующем t) получить с помощью значений предыдущего слоя, прибавляя величину $\dfrac{u(x_{i+1},0)-2u(x_i,0)+u(x_{i-1},0)}{h^2}$, умноженную на Δt. Однако численные методы выходят за рамки нашего курса.

ЛЕКЦИЯ 7. 07.05.2019

Приведение дифференциального уравнения к каноническому виду.

Дифференциальное уравнение в частных производных, содержащее функцию от n переменных, может содержать множество смешанных производных. Наиболее общий вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \, .$$

Возникает вопрос: можно ли свести к виду, содержащему только не смешанные производные 2 порядка, то есть, чтобы для коэффициентов выполнялось равенство $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. На прошлой лекции во всех полученных уравнениях (волновом, диффузии) не было смешанных производных, и мы изучили метод их решения.

Оказывается, с помощью замены переменных действительно можно свести к виду, содержащему $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ вместо $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

Сейчас вам станет понятно, для чего мы ранее в линейной алгебре изучали приведения квадратичных форм к главнм осям. Именно этот алгоритм поможет устранить смешанные производные.

Для каждого дифференциального уравнения можно построить матрицу, состоящую из коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Если квадратичную форму с такой матрицей привести к главным осям, то после такой замены перемнных исчезнут все вмешанные производные.

Рассмотрим на таком примере. Дано дифференциальное уравнение

$2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. Это же можно записать в виде:

$0\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 1\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 0\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Мы специально распределили

поровну коэффициенты между двумя смешанными производными

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, чтобы получилась симметричная матрица. Это можно

сделать, так как они совпадаюти между собой. Матрица: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найдём собственные числа и собственные векторы линейного оператора, соответствующего этой матрице.

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm 1$$ собственные числа.

При $\lambda = 1$: решаем однородную систему $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$a = b$, то есть вектор $(1,1)$. Нормируем его, получаем $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

При $\lambda = -1$: решаем однородную систему $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$a = -b$, то есть вектор $(-1,1)$. Нормируем его, получаем $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Новый ортонормированный базис состит из пары векторов

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Фактически, это повёрнутый на 90^0

декартов базис (1,0) и (0,1).

Вспомним о том, что взаимосвязь между старыми (x, y) и новыми

коодинатами (z, w) такова:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

В матрице перехода векторы нового базиса расположены по векторам.

Таким образом,

$x = \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}$ и $y = \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}$.

Если сложить эти 2 равенства, получим:

$x + y = 2\frac{z}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}z$, тогда $z = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$.

Аналогично, вычитая 1-е из 2-го, получим:

$y - x = 2\frac{w}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}w$, тогда $w = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$.

Теперь пересчитаем смешанную производную $2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ по формуле полной производной. Изначально можно её записать в виде:

$2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ представив дифференцирование по x, y как два последовательных действия. По формуле полной производной, если переменные z, w рассматриваются как промежуточные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} .$$

При этом, $z = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$w = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial u}{\partial w}$.

Теперь применим к этой функции дифференцирование по y таким же образом.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial w}\right).$$

В каждом из слагаемых, происходит дифференцирование по y по формуле полной производной. Если бы оно применялось к f, то было бы $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$, только вместо f здесь $\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial u}{\partial w}$.

Также вспомним про коэффициент 2, бывший в условии.

$$2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)=$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\sqrt{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial w\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial w\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)=$$

Кроме того, из равенств $z=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}$ и $w=-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}$ получаем заодно $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда

$$\sqrt{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial z}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial w}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial w\partial z}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\partial^2 u}{\partial w\partial w}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial w}-\frac{\partial^2 u}{\partial w\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial w\partial w}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}.$$

Дифференциальное уравнение $2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$ свелось к виду

$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}=0$. После замены переменных смешанных производных нет. Кстати, заметим, что собственные числа 1 и -1 оказались коэффициентами нового уравнения.

Если знаки всех коэффициентов a_{ii} в части $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ одинаковы, то уравнение называется эллиптическим, если разные, то гиперболическим, а если среди них есть нулевые коэффициенты, то параболическим. Так, волновое уравнение - гиперболическое, у уравнение теплопроводности (диффузии) параболическое.

ЛЕКЦИЯ 8. 21.05.2019

ГЛАВА 5. О некоторых численных методах.

В следующих семестрах будет отдельный курс вычислительной математики, сейчас же краткий обзор некоторых задач и методов, которые будут полезны для специальности 09.03.01, связанной с информатикой и программированием.

Часто возникают задачи, связанные с обработкой тех или иных экспериментально полученных массивов информации, определением функциональной зависимости между величинами.

1. Метод наименьших квадратов и его обобщение.

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Кроме того, мы рассмотрим:

3. Метод Ричардсона для вычисления интегралов и решения дифференциальных уравнений.

В самом начале темы «ряд Фурье» мы уже сталкивались с наименьшим среднеквадратичным отклонением. Вспомним, что в одной из задач мы искали прямую, обладающую наименьшим среднеквадратичным отклонением от некоторой функции. Однако эта идея применима не только к функциям, но и к дискретным массивам данных. Допустим, что проведена серия из n экспериментов, в результате чего получены n пар числовых величин: (x_1, y_1), ... , (x_n, y_n). Требуется найти прямую $y = kx + b$, для которой среднеквадратичное отклонение $\sum_{n=1}^{n}\left((kx_i + b) - y_i\right)^2$ по отношению к данному массиву будет наименьшим. Чтобы найти такие k, b, нужно найти частные производные этой величины по k, b и затем найти экстремум, приравнивая их к 0.

$$\sum_{n=1}^{n}\left((kx_i + b) - y_i\right)^2 = \sum_{n=1}^{n}\left((kx_i + b)^2 - 2(kx_i + b)y_i + y_i^{\,2}\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{n}\left(k^2 x_i^{\,2} + 2kx_i b + b^2 - 2kx_i y_i - 2by_i + y_i^{\,2}\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial k}\sum_{n=1}^{n}\left(k^2 x_i^{\,2} + 2kx_i b + b^2 - 2kx_i y_i - 2by_i + y_i^{\,2}\right) = \sum_{n=1}^{n}\left(2kx_i^{\,2} + 2x_i b - 2x_i y_i\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\sum_{n=1}^{n}\left(k^2 x_i^{\,2} + 2kx_i b + b^2 - 2kx_i y_i - 2by_i + y_i^{\,2}\right) = \sum_{n=1}^{n}\left(2kx_i + 2b - 2y_i\right).$$

Попутно можно сократить все равенства на 2. Итак, требуется: $\sum_{n=1}^{n}\left(kx_i^{\,2} + x_i b - x_i y_i\right) = 0$, $\sum_{n=1}^{n}\left(kx_i + b - y_i\right) = 0$. Напомним, что здесь неизвестные это k, b. Мы можем построить систему линейных уравнений относительно них:

$$\begin{cases} k\sum_{n=1}^{n} x_i^{\,2} + b\sum_{n=1}^{n} x_i = \sum_{n=1}^{n} x_i y_i \\ k\sum_{n=1}^{n} x_i + \sum_{n=1}^{n} b = \sum_{n=1}^{n} y_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\sum_{n=1}^{n} x_i^{\,2} + b\sum_{n=1}^{n} x_i = \sum_{n=1}^{n} x_i y_i \\ k\sum_{n=1}^{n} x_i + nb = \sum_{n=1}^{n} y_i \end{cases}$$

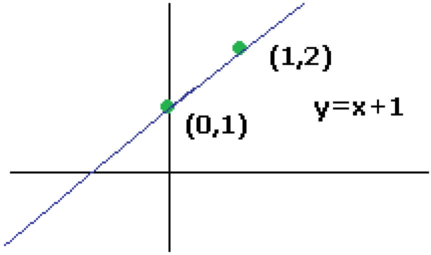
Все суммы состоят из заранее заданных величин.

Решая эту систему вида $\begin{cases} a_{11}k + a_{12}b = a_{10} \\ a_{21}k + a_{22}b = a_{20} \end{cases}$, мы и найдём k, b.

А теперь для примера, попробуем, как этот метод работает на 2 точках. Пусть (0,1), (1,2) две точки. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.

$$\begin{cases} k + b = 2 \\ k + 2b = 3 \end{cases} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow k = 1.$$ Ответ: прямая $y = x + 1$.

Кстати, это как раз и есть прямая, содержащая две данные точки.



Обобщение метода на произвольную степень. Прямая может оказаться весьма грубым приближением. Естественно, возникает мысль аналогичным образом найти многочлен произвольной степени, обладающий тем же свойством (наименьшее среднеквадратичное отклонение). Пусть рассматривается многочлен произвольной степени, равной n, и дано m точек. $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

При этом $\sum_{i=1}^{m} \left(f(x_i) - y_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i^{\,n} - y_i \right)^2$ минимально.

Найдём производные по всем a_i.

$$\frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^{m} \left(a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i^{\,n} - y_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{m} 2\left(a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i^{\,n} - y_i \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^{m} \left(a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i^{\,n} - y_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{m} 2\left(a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i^{\,n} - y_i \right) x_i^{\,2}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2}\sum_{i=1}^{m}\left(a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i{}^n - y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} 2\left(a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i{}^n - y_i\right)x_i$$

...

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\sum_{i=1}^{m}\left(a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i{}^n - y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} 2\left(a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i{}^n - y_i\right)x_i{}^n$$

Приравниваем все эти авражения к 0, попутно сократив на 2, а последнее слагаемое переноим вправо. Получим:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i{}^n\right) = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(a_0 x_i + a_1 x_i{}^2 + \ldots + a_n x_i{}^{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(a_0 x_i{}^2 + a_1 x_i{}^3 + \ldots + a_n x_i{}^{n+2}\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i{}^2 y_i$$

...

$$\sum_{i=1}^{m}\left(a_0 x_i{}^n + a_1 x_i{}^{n+1} + \ldots + a_n x_i{}^{2n}\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i{}^n y_i$$

Это можно рассматривать как систему линейных уравнений порядка $n+1$ с неизвестными $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Решая её, можно найти многочлен, осуществляющий наилучшее среднеквадратичное приближение массива данных.

$$na_0 + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)a_1 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,n}\right)a_n = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2}\right)a_1 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,n+1}\right)a_n = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2}\right)a_0 + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,3}\right)a_1 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,n+2}\right)a_n = \sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2} y_i$$

...

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,n}\right)a_0 + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,n+1}\right)a_1 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2n}\right)a_n = \sum_{i=1}^{m} x_i^{\,n} y_i$$

При количестве точек, равном $m = n + 1$, получится точное решение: многочлен степени n. Так, для 2 точек прямая (это мы уже видели выше), а 3 точек квадратичная парабола будет точным решением.

Если массив данных состоит из сотен или тысяч элементов, то многочлен такой высокой степени и не потребуется: после нескольких шагов мы увидим стабилизацию многочлена, то есть последующие коэффициенты будут довольно малы. Таким способом можно будет получить функциональную зависимость, представлена она будет, фактически, формулой Тейлора этой функции. К примеру, если точки расположены на графике $y = e^x$, программа вычисляет указанным выше методом следующие коэффициенты многочлена:

```
x_1 =     1.00
x_2 =     1.00
x_3 =     0.50
x_4 =     0.17
x_5 =     0.04
x_6 =     0.01
```

И действительно, коэффициенты разложения $y = e^x$ в ряд Тейлора: $1,1,\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},...$ близки к этим значениям.

Сейчас мы рассмотрим ещё один способ получения функциональной зависимости по массиву данных.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(y_k \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right)$$

Это многочлен степени $n-1$, который обращается в y_i в точке x_i для любого номера i.

Подробнее: Для 2 точек:

$f(x) = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ многочлен 1-й степени.

В точке $x = x_1$: $y_1 \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x_1 - x_1}{x_2 - x_1} = 1y_1 + 0y_2 = y_1$

В точке $x = x_2$: $y_1 \frac{x_2 - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 0y_1 + 1y_2 = y_2$.

Для 3 точек:

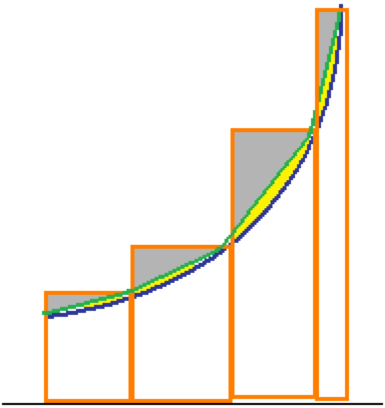
$$f(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_2)}$$

многочлен 2-й степени.

В точке $x = x_1$: $f(x_1) = 1y_1 + 0y_2 + 0y_3 = y_1$.

Аналогично, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_3$.

Численные методы вычисления интегралов. Метод прямоугольников, метод трапеций.



Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на несколько частей, затем на каждом из элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ взято значение в точке x_i и составлена сумма $S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$, при $n \to \infty$ значение этой суммы стремится к $\int_a^b f(x)dx$. Можно рассматривать равномерное разбиение с шагом $h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. Тогда $S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)h$. Однако погрешность достаточно велика (на чертеже закрашено серым цветом). Гораздо более точный результат (при том же самом шаге h) получится, если вместо прямогульников рассматривать трапеции. На чертеже отклонение графика от трапеции показано жёлтым цветом.

Приближённое значение, вычисленное таким образом, выражается суммой $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h$. При этом каждая точка x_i (кроме крайних) учитывается 2 раза: сначала она является правой границей предыдущего отрезка, затем левой границей следующего.

$$S = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} h + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} h + ... + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} h =$$

$$f(x_0)\frac{h}{2} + f(x_1)h + ... + f(x_{n-1})h + f(x_n)\frac{h}{2}.$$

В идеале, мы стремимся сделать шаг $h = 0$. Понятно, что это недостижимо, так как потребовало бы бесконечного количества вычислений. Однако есть способ приблизиться к $h = 0$.

Допустим, что мы сначала сделали вычисление с шагом h, получим результат a_0, затем с шагом $\frac{h}{2}$, при этом мы получим насколько-то более точный результат a_1. Затем ещё раз разделим каждый отрезок пополам и сделаем вычисление с шагом $\frac{h}{4}$, получим a_2, для шага $\frac{h}{8} = \frac{h}{2^3}$ результат a_3. И так для каждого $\frac{h}{2^k}$ получится некоторое a_k. Это последовательность, и если она сходится, то можно найти её предел, это и будет вычисление с виртуальным шагом нулевой длины.

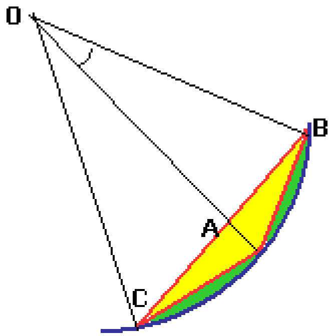
Нередко разность между элементами этой последовательности и итоговым результатом является убывающей геометрической прогрессией, а в такой ситуации найти предел довольно просто.

Так, например, если $\frac{A - a_n}{A - a_{n+1}} = q$, то $A - a_n = q(A - a_{n+1}) \Rightarrow$

$qa_{n+1} - a_n = (q-1)A \Rightarrow A = \frac{qa_{n+1} - a_n}{q-1}$.

Рассмотрим, во сколько раз результат будет ближе к точному значению при удвоении количества точек для метода трапеций.

Рассмотрим бесконечно малый участок дуги, и вычислим площадь сегмента, соответствующего углу α, а затем для половинного угла.



.

Чтобы найти площадь сегмента круга, можно воспользоваться готовой формулой $S = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$, впрочем, полезно будет её заодно и вывести. Пусть сегмент соответствует углу α, тогда угол AOB равен $\frac{\alpha}{2}$. Площадь сегмента равна разности площади сектора и площади треугольника COB. Площадь сектора, очевидно, равна $\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi}$. Площадь треугольника COB в 2 раза больше площади треугольника AOB. При этом угол AOB равен $\frac{\alpha}{2}$, тогда стороны AB и OA, соответственно, $R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ и $R\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2}R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)R\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}R^2 \cdot 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R^2}{4}\sin\alpha$.

Тогда площадь треугольника COB в 2 раза больше и равна $\frac{R^2}{2}\sin\alpha$.

Тогда площадь сегмента равна $\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{R^2}{2}\sin\alpha = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$.

Рассмотрим теперь, во сколько раз уменьшится площадь сегмента, если угол уменьшится в 2 раза. Пусть рассматриваются углы 2α и α. Отношение площадей сегментов:

$$\frac{\frac{R^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha)}{\frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\alpha - \sin\alpha} = \frac{2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha - \sin\alpha} = 2\frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\alpha - \sin\alpha}$$

Оценим отношение этих бесконечно малых с помощью формулы Тейлора. $2\frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\alpha - \sin\alpha} = 2\frac{\alpha - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots\right)}{\alpha - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots\right)} =$

$$2\frac{\alpha - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} - \frac{\alpha^3}{2!} + \ldots\right)}{\alpha - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots\right)} = 2\frac{\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right)\alpha^3 + \ldots}{\frac{1}{3!}\alpha^3 + \ldots} = 2\frac{\frac{4}{6}\alpha^3 + \ldots}{\frac{1}{6}\alpha^3 + \ldots} = 8.$$

Площадь сегмента уменьшается в 8 раз при уменьшении угла в 2 раза. (но поскольку при половинном делении, новых сегментов два, то уменьшение в 4 раза). Предельное значение можно будет искать так:

$$\frac{A - a_n}{A - a_{n+1}} = 4 \quad \Rightarrow \quad A - a_n = 4(A - a_{n+1}) \quad \Rightarrow \quad 4a_{n+1} - a_n = 3A$$

$\Rightarrow A = \dfrac{4a_{n+1} - a_n}{3}$. Как правило, программа автоматически определяет коэффициент q.

Метод Ричардсона может быть применён и к дифференциальным уравнениям. Так, если ищем решение задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, то следующее значение в точке $x_0 + h$ должно считаться равным $y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$. Но можно также провести серию экспериментов, измельчая шаг в 2 раза, рассматривая h, $\dfrac{h}{2}$, $\dfrac{h}{4}$, ... и получить предельное значение $y(x_0 + h)$ таким методом.

Предельный переход методом Ричардсона может быть применён к различным базовым численным методам, где есть зависимость от шага h, и значительно улучшает точность приближённого решения.

Литература

1. Л.И.Магазинников. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования
http://edu.tusur.ru/publications/2258

2. А.П.Ерохина, Л.Н. Байбакова. Высшая математика III в упражнениях с задачами и решениями.