Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Радиотехнический факультет (РТФ)

Кафедра радиотехнических систем (РТС)

ВЕРОЯТНОСТЬ БИТОВОЙ ОШИБКИ ПРИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ДЕКОДИРОВАНИИ

Учебно-методическое пособие для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов, обучающихся по направлениям подготовки "Инфокоммуникационные технологии и системы связи" и "Радиотехника"

Разработчик

доц. каф. РТС, к.н.,

_____________ А. В. Новиков

2019

Новиков А.В.

Вероятность битовой ошибки при дифференциальном декодировании: учебно-методическое пособие для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов, обучающихся по направлениям подготовки "Инфокоммуникационные технологии и системы связи" и "Радиотехника" — Томск: радиотехнический факультет, ТУСУР, 2019. — 21 с.

В данном пособии подробно рассматривается проблема расчета вероятности битовой ошибки в системах передачи информации с фазовой манипуляцией (ФМн) и дифференциальным (разностным, относительным) кодированием битов. В частности, охватываются такие понятия как энергия импульса, скалярное произведение сигналов, коэффициент корреляции между сигналами, когерентность радиоимпульсов, фазовая автоподстройка частоты, инверсный режим работы ФМн-демодулятора, сумма по модулю два, матрица переходных (канальных) вероятностей.

Приведены расчеты системной функции дифференциального кодера и декодера, а также расчет отклика дифференциального кодера методом z-преобразования с использованием библиотеки компьютерной алгебры SymPy, входящей в современный язык программирования Python.

В приложении приведен список упражнений для проведения практических занятий по изученной теме.

Оглавление

Передача битов противоположными сигналами

Передача цифровой информации, состоящей из последовательности битов, предполагает генерацию двух различающихся импульсов, $s_0(t) \neq s_1(t)$. Пусть, однако, импульсы имеют равную энергию (на один ом сопротивления)

$$E_0 = E_1 = E = \int_{-\infty}^{\infty} s_i^2(t)\,dt\,,\quad i = \{0,1\}\quad .$$

Теперь, если взять эти импульсы противоположными

$$s_0(t) = -s_1(t)\quad ,$$

то окажется, что коэффициент корреляции между ними достигнет минимума

$$r_{01} \equiv \frac{1}{\sqrt{E_0 E_1}} \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t)\, s_1(t)\, dt = -1\quad . \qquad (1)$$

Известно неравенство[1]

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} s_0(t)\, s_1(t)\, dt \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} s_0^2(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t)\, dt\quad ,$$

переходящее в равенство при совпадающих сигналах, благодаря которому коэффициент корреляции по модулю не превышает единицы

$$|r_{01}| \leq 1\quad .$$

В связи с этим вводят косинус некоторого угла

$$\cos\varphi_{01} \equiv r_{01}\quad ,$$

поэтому из (1) следует, что

$$\left(s_0(t), s_1(t)\right) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t)\, s_1(t)\, dt = \sqrt{E_0 E_1}\, r_{01} = \sqrt{E_0}\sqrt{E_1} \cos\varphi_{01}\quad ,$$

т. е. скалярное произведение двух сигналов равно произведению их норм на косинус некоторого угла. Под нормой понимается евклидова норма, квадрат которой, как известно, определен следующим образом

$$\|s_i(t)\|^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s_i^2(t)\, dt = E_i\quad .$$

1 Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Итак, если два сигнала являются противоположными, то коэффициент корреляции между ними равен минус единице, что математически соответствует углу между этими сигналами 180 градусов. Говорят: сигналы максимально удалены друг от друга (при ограничении на энергию $E \leq E_{max}$).

Переход к фазовой манипуляции. Когерентность

Пусть один из импульсов определен как синус

$$s_0(t)=\sqrt{\frac{2E}{T}}\sin(2\pi f t)=\sqrt{\frac{2E}{T}}\sin(2\pi f t+0) \ ,$$

тогда второй, противоположный, будет равен

$$s_1(t)=-\sqrt{\frac{2E}{T}}\sin(2\pi f t)=\sqrt{\frac{2E}{T}}\sin(2\pi f t+\pi) \ .$$

Такой вид цифровой модуляции называют фазовой манипуляцией (ФМн) или BPSK (Binary Phase Shift Keying). Информация в данном случае заложена в начальную фазу радиоимпульса: бит "0" соответствует фазе 0, бит "1" — фазе π радиан или 180 градусов.

Чтобы извлечь из ФМн-сигнала информацию (биты), в приемнике должен быть генератор несущей — генератор опорного колебания

$$w(t)=\sqrt{\frac{2E}{T}}\sin(2\pi f t+\varphi) \ ,$$

с которым должны сравниваться принимаемые импульсы. Здесь φ — начальная фаза, в которой и "зарыта собака". Начальная фаза отвечает за положение синусоиды на оси времени, и она не обязана совпадать с начальной фазой принимаемых импульсов, потому что при включении генератора в приемнике начальная фаза устанавливается случайным образом и определяется физикой работы генератора.

Доказано, что оптимальной метрикой[2] сравнения двух импульсов[3] является их скалярное произведение. Если вычислить[4] скалярные произведения между опорным сигналом $w(t)$ и информационными импульсами $s_0(t)$ и $s_1(t)$, то окажется, что они будут зависеть от той самой начальной фазы

$$\begin{aligned} s_0 &= \left(s_0(t), w(t)\right) \approx E\cos\varphi \;, \\ s_1 &= \left(s_1(t), w(t)\right) \approx -E\cos\varphi \;. \end{aligned} \qquad (2)$$

Равенство (2), в целом, тем точнее, чем лучше выполняется условие $fT \gg 1$, которое говорит о том, что на длительность импульса T должно укладываться много периодов колебания. Это условие обязательно реализуется в приемниках.

Скалярное произведение — это число, которое по смыслу является проекцией одного сигнала на другой. Если сигналы предварительно привести к единичной норме, то скалярное произведение будет равно коэффициенту корреляции r двух сигналов.

В приемнике принятие решения относительно переданного бита происходит в соответствии с простейшей логикой (бинарная классификация)

$$b = \begin{cases} 0, & s_0 > s_1 \\ 1, & s_0 < s_1 \end{cases} .$$

Извлечение информации принципиально возможно при $s_0 \neq s_1$, поэтому из (2) следует, что при $\varphi = \pi/2$ прием будет практически невозможен.

Получается, что случайность начальной фазы опорного генератора в приемнике приводит к некоторой потере информации. Величина потерь зависит от значения начальной фазы, выпавшего в текущем сеансе работы приемника. Из (2) следует, что величина потерь будет минимальной (даже нулевой) при начальной фазе 0 или π радиан; при этом если фаза равна π, то говорят, что приемник находится в инверсном режиме работы, когда принятые биты инвертированы относительно исходных переданных.

2 По критерию минимума вероятности ошибки

3 На фоне аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ или AWGN)

4 Подробности в Приложении А

Замечание: правильнее говорить не о фазе, а о разности фаз $\Delta\varphi=\varphi-\varphi_i$ между опорным колебанием $w(t)$ и принимаемыми импульсами. В данном случае фаза φ совпадает с величиной разности фаз, т. к. начальная фаза принимаемого импульса для бита "0" выбрана нулевой, $\Delta\varphi=\varphi-0=\varphi$.

Таким образом, выясняется, что максимальному извлечению информации из ФМн-сигнала соответствует разность фаз, кратная π . Говорят при этом, что "опорный генератор сфазирован с одним из информационных импульсов, $s_0(t)$ или $s_1(t)$ ". Такой прием называют когерентным.

Неоднозначность ФАПЧ. Частичная когерентность

Фазировка опорного генератора делается с помощью контура (петли) фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Природа петли ФАПЧ при приеме ФМн-сигнала такова, что ее защелкивание происходит неоднозначно и как раз кратно π . Импульсы $s_0(t)$ и $s_1(t)$ равновероятны, и никто заранее не знает к какому из импульсов "привяжется" ФАПЧ. Это сродни подбрасыванию монетки. Петля ФАПЧ минимизирует ошибку рассогласования по фазе, причем по полной фазе, т. е. той величине Θ , что стоит в аргументе "синуса" $\sin\Theta$. Если рассматривать петлю Костаса (Costas loop), то в ней ошибка формируется как произведение двух сигналов из квадратурных каналов, I и Q , в следствие чего ошибка может быть минимизирована либо уменьшением уровня сигнала I , либо Q (два не могут, потому что они "в квадратуре"), откуда и рождается неоднозначность π радиан. Вектор, соответствующий колебанию опорного генератора $w(t)$, после вхождения петли в синхронизм случайным образом "прилипает" (становится коллинеарным) либо к вектору, соответствующему $s_0(t)$, либо к вектору, соответствующему $s_1(t)$.

Таким образом, выясняется, что когерентных систем не бывает[5], потому что мы заранее не знаем к какому из импульсов привяжется колебание опорного генератора, регулируемое петлей ФАПЧ. Но так как привязку по фазе петля ФАПЧ

5 Исключая системы с передачей опорного колебания из передатчика в приемник по отдельному каналу; в радиосвязи — это системы с "пилот-тоном"; хотя из-за наличия неустранимых шумов когерентных систем в природе все-таки не существует...

все-таки формирует, то такие системы являются частично-когерентными. На практике их попросту называют когерентными системами.

Чтобы сделать прием нечувствительным к возможной инверсии битов, применяют дифференциальное кодирование. Инверсия битов — это плата за стремление к когерентному приему без прямой передачи опорного колебания ("пилот-тона" в радиосвязи). За победу инверсии кодированием придется заплатить примерно двукратным увеличением вероятности ошибки приема битов.

Системы с ФМн и дифференциальным кодированием имеют англоязычную аббревиатуру DBPSK — Differential BPSK, разностная ФМн, дифференциальная ФМн.

Дифференциальный кодер и декодер

Дифференциальный кодер является цифровым фильтром первого порядка БИХ[6]-типа, т. е. рекурсивного типа; декодер — соответственно, трансверсальным, т. е. КИХ[7]-типа. Произведение системных функций кодера и декодера дает единицу. Особенностью рассматриваемых фильтров является то, что сумматоры выполняют операцию "по модулю два", т. к. операции выполняются над битами — двоичными символами.

Логика суммирования "по модулю два" простая

$$\begin{bmatrix} 0+0=0 \\ 0+1=1 \\ 1+0=1 \\ 1+1=0 \end{bmatrix} . \qquad (3)$$

Если складываемые биты совпадают, то сумма равна нулю, в противном случае — единице. Для данной операции соблюдается баланс: половина сумм равна нулю, половина — единице. Почему $1+1=0$? Алгебру никто не отменял, $1+1=2$, но мы берем "по модулю два", т. е. вычисляем остаток от деления суммы на два $1+1=2\equiv 0 \mod 2$. Говорят "двойка сравнима с нулем по модулю два", т. е. остаток от деления 2 на 2 равен нулю. Заметим, что разность "по модулю два" эквивалентна сумме

6 Бесконечная импульсная характеристика

7 Конечная импульсная характеристика

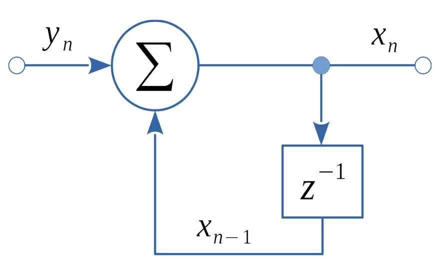
$$\begin{bmatrix} 0-0=0 \\ 0-1=1 \\ 1-0=1 \\ 1-1=0 \end{bmatrix} . \quad (4)$$

Здесь $0-1=-1\equiv 1 \bmod 2$, потому что остатки инвариантны относительно модуля и $-1+2=1$; модуль в данном случае равен двум; модуль мы прибавили к остатку -1 и получили эквивалентный остаток 1 , который принадлежит исходному двоичному алфавиту $\{0,1\}$.

Дифференциальное декодирование основано на разности (по модулю два). Разность вычисляется между текущим принятым битом x_n+I и предыдущим $x_{n-1}+I$, в результате чего возможная инверсия I компенсируется

$$y_n=(x_n+I)-(x_{n-1}+I)=x_n-x_{n-1} . \quad (5)$$

Если $I=1$, то инверсия есть, если $I=0$, то ее нет. Напомним, что в течение одного сеанса инверсия I постоянная; на практике возможны редкие перебросы флага инверсии I из-за случайной и нелинейной природы автогенераторов — первичных устройств, генерирующих опорное колебание.



$K(z)=\frac{X(z)}{Y(z)}=\frac{1}{1+z^{-1}}$

Рис. 1 Дифференциальный кодер

Таким образом, при совпадении текущего бита с предыдущим дифференциальный декодер выдаст ноль, а при их отличии — единицу. Значит дифференциальное кодирование должно быть устроено так, чтобы ноль кодировался предыдущим переданным битом, т. е. ноль на входе кодера не должен менять его выход; единица же, в свою очередь, должна кодироваться изменением выхода, т. е. инвертированием текущего выходного бита, рис. 1. Именно такое правило кодирования автоматически следует из (5)

$$x_n=y_n+x_{n-1} . \quad (6)$$

Здесь x_n — выход, а y_n — вход дифференциального кодера. Так как текущий *n*-й выход x_n зависит от предыдущих выходов, то соответствующий фильтр имеет рекурсивную природу, рис. 1.

Напомним, что блок z^{-1} обозначает задержку на один такт.

Системная функция фильтра $K(z)$ — это отношение двух z-образов, выходного ко входному

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \quad \text{и} \quad Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} \quad .$$

Для получения системной функции фильтра на рис. 1 использовалось свойство задержки на один такт

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{n-1} z^{-n}=z^{-1} X(z) \quad ,$$

справедливое при $x_{-1}=0$.

Схему дифференциального декодера предлагается нарисовать самостоятельно на основании (5); также предлагается получить системную функцию соответствующего фильтра и вычислить произведение системных функций кодера и декодера — оно должно быть равно единице.

Итак, если выход дифференциального кодера не изменяется, значит кодируются нули, в противном случае — единицы.

Пример дифференциального кодирования

Рассмотрим пример дифференциального кодирования, инверсии и декодирования. Пусть передается периодическая (период выделен жирным шрифтом) последовательность битов

$$\mathbf{1,1,1,0,0},1,1,1,0,0,\ldots \quad .$$

Последовательность после кодирования (период удвоился, об в следующем параграфе)

$$\mathbf{1,0,1,1,1,0,1,0,0,0},1,0,1,1,1\ldots \quad .$$

Инвертированная кодированная последовательность

$$0,1,0,0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0\ldots \quad .$$

Декодирование исходной последовательности

$$1,1,1,0,0,\mathbf{1,1,1,0,0},1,1,1,0,0,\ldots \quad .$$

Декодирование инвертированной последовательности

$$0,1,1,0,0,\mathbf{1,1,1,0,0},1,1,1,0,0,\ldots \quad .$$

Видно, что оба результата декодирования совпадают, за исключением первого бита (он красный). Первый бит зависит от начального состояния фильтра. Заранее нельзя сказать, будет инверсия или нет, поэтому всегда существует неопределенность относительно первого и единственного принятого бита. Так как неопределенным является один единственный бит, то им можно пренебречь; в итоге, в системах с дифференциальным кодированием требуется один "холостой" прием; практически же таких холостых битов больше одного из-за времени, требуемого для вхождения в синхронизм петли ФАПЧ.

Расчет отклика кодера методом z-преобразования

Так как мы рассматриваем периодическую последовательность y_n

$$\mathbf{1,1,1,0,0},1,1,1,0,0,\ldots \quad ,$$

то, опираясь на формулу суммирования геометрической прогрессии, легко найти z-образ такой последовательности

$$Y(z)=\frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{1+z^{-5}} \quad .$$

Полином в знаменателе указывает на период — 5, полином в числителе — на те позиции, где стоят единицы в последовательности y_n . Формула суммирования геометрической прогрессии имеет вид

$$\frac{1}{1+z^{-n}}=1+z^{-n}+z^{-2n}+z^{-3n}+\ldots \quad . \tag{7}$$

Замечание: не забываем, что суммирование здесь по модулю два, и поэтому сумма и разность эквивалентны; практическое правило: про минус можно забыть.

Выражение (7) является своеобразным шаблоном для конструирования произвольных последовательностей с периодом n .

Кодирование последовательности y_n равнозначно умножению ее z-образа на системную функцию фильтра, соответствующего кодеру

$$X(z)=Y(z)K(z)=\frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{1+z^{-5}}\frac{1}{1+z^{-1}} .$$

Чтобы найти период последовательности на выходе кодера, знаменатель получившейся дроби следует привести к шаблону (7). В этом нам поможет следующее правило: полином $1+z^n$ делится на полином $1+z^m$ без остатка тогда и только тогда, когда n делится на m ; в частности, любой полином $1+z^n$ делится на $1+z$. Поэтому первое, что приходит на ум, это степень 10, т. к. полином $1+z^{10}$ обязан делиться на $1+z^5$. Если обозначить $t=z^{-1}$ и использовать равенства

$$(t^5+1)^2=t^{10}+1 \quad , \quad t^5+1=(t+1)(t^4+t^3+t^2+t+1) \quad ,$$

то

$$X(t)=\frac{1+t+t^2}{1+t^5}\frac{1}{(1+t)}\frac{t^4+t^3+t^2+t+1}{t^4+t^3+t^2+t+1}=\frac{1+t^2+t^3+t^4+t^6}{1+t^{10}} . \qquad (8)$$

В справедливости проделанных вычислений можно убедиться, например, с помощью библиотеки компьютерной алгебры **SymPy,** Приложение Б.

Проводя в (8) обратную замену переменной t , получим результат

$$X(z^{-1})=\frac{1+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+z^{-6}}{1+z^{-10}} ,$$

который совпадает с последовательностью x_n

$$\mathbf{1,0,1,1,1,0,1,0,0,0},1,0,1,1,1\ldots ,$$

вычисленной непосредственно. Здесь первая позиция бита соответствует нулевой степени z , вторая — минус первой, третья — минус второй и т. д.

Итак, благодаря специфической системной функции дифференциального кодера

$$K(z)=\frac{1}{1+z^{-1}}$$

период выходной последовательности всегда[8] в два раза больше периода входной!

Расчет вероятности битовой ошибки

Перейдем теперь к расчету вероятности ошибки на выходе дифференциального декодера. Вероятность ошибки на входе декодера считается заданной, и определяется каналом передачи информации.

Пусть ошибки в канале независимые и происходят с вероятностью p. Тогда дифференциальный кодер, канал и декодер в эквиваленте дадут канал с памятью, т. е. такой канал, ошибки в котором — зависимые. Канал с памятью может быть описан с помощью следующей модели, рис. 2.

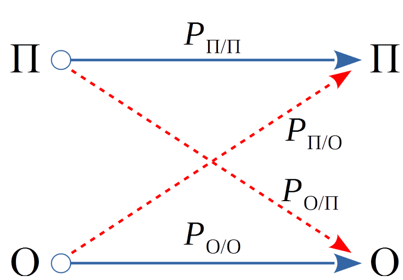


Рис. 2 Модель канала с памятью

Здесь буквой "П" обозначено событие "правильный прием", буквой "О" — "ошибочный прием". Обозначение $P_{\text{П/О}}$ означает "вероятность правильного приема при условии, что предыдущий прием был ошибочным". Эта вероятность является условной. Зависимость вероятности от условия является признаком наличия памяти в канале. Такой канал полностью определяется матрицей условных (переходных) вероятностей

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} P_{\text{П/П}} & P_{\text{П/О}} \\ P_{\text{О/П}} & P_{\text{О/О}} \end{pmatrix} . \qquad (9)$$

Обратите внимание, что буквам "П" и "О" слева соответствует момент времени t_{n-1}, а таким же буквам справа — t_n. Время — это неотъемлемая черта каналов с памятью. Говорят, "канал помнит несколько предыдущих состояний", и эти состояния влияют на вероятность текущего состояния.

Систему "дифференциальный кодер, канал и декодер" удобно рассматривать как некоторый цифровой автомат, на выходе которого в каждый момент времени либо правильный прием, либо — ошибочный; жизнь такого автомата описывается некоторой последовательностью букв

---

8 За исключением случая когда числитель $Y(z)$ сокращает знаменатель $K(z)$, — в этом случае период не меняется

… О П П П П П О О П П П …

Цель нашего повествования — вычислить вероятность ошибки на выходе дифференциального декодера, которая в рамках принятых обозначений соответствует событию "О" и обозначается как $P_{\text{О}}$. Эта вероятность будет зависеть от вероятностей перехода $P_{\text{X/X}}$, которых, по сути, всего две, т. к. оставшиеся две являются дополнениями до единицы.

Всякая вероятность есть предельная величина, определяемая по бесконечному количеству событий, поэтому чтобы определить $P_{\text{О}}$ требуется выписать всю "линию жизни" автомата и подсчитать долю букв "О" относительно общего количества букв; практически это сделать невозможно, а вот в уме — возможно, чем мы и займемся.

Предположим, что автомат начал жить, и его жизнь кратна дням, т. е. каждый день выпадает буква, "О" или "П". Какова вероятность того, что в первый день жизни произойдет ошибочный прием "О"? Эту вероятность логично приравнять к вероятности ошибки в канале без памяти (т. е. в канале с независимыми ошибками), $P_{\text{О}}^{\langle 1\rangle}=p$. Во второй день могут выпасть буквы либо "О", либо "П". Соответствующие вероятности вычисляются вполне однозначно по матрице канала (матрице переходных вероятностей)

$$\begin{pmatrix} P_{\text{П}} \\ P_{\text{О}} \end{pmatrix}^{\langle 2\rangle} = \begin{pmatrix} P_{\text{П/П}} & P_{\text{П/О}} \\ P_{\text{О/П}} & P_{\text{О/О}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\text{П}} \\ P_{\text{О}} \end{pmatrix}^{\langle 1\rangle} ,$$

и так далее. Логика данного уравнения основана на формуле умножения и сложения вероятностей.

Упражнение: распишите матричное уравнение в виде системы линейных алгебраических уравнений, и поразмыслите над смыслом умножения и сложения вероятностей.

Пусть теперь уже прошло очень много дней жизни автомата… В этом случае вероятности $P_{\text{О}}^{\langle n\rangle}$ и $P_{\text{П}}^{\langle n\rangle}$ должны сходиться к искомым безусловным вероятностям $P_{\text{О}}$ и $P_{\text{П}}$

$$\begin{pmatrix} P_{\text{П}} \\ P_{\text{О}} \end{pmatrix}^{\langle n+1\rangle} \approx \begin{pmatrix} P_{\text{П}} \\ P_{\text{О}} \end{pmatrix}^{\langle n\rangle} , \quad \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} P_{\text{П}} \\ P_{\text{О}} \end{pmatrix}^{\langle n\rangle} = \begin{pmatrix} P_{\text{П}} \\ P_{\text{О}} \end{pmatrix} . \qquad (10)$$

Тогда справедливо предельное равенство

$$\begin{pmatrix} P_{\text{П}} \\ P_{\text{О}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\text{П/П}} & P_{\text{П/О}} \\ P_{\text{О/П}} & P_{\text{О/О}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\text{П}} \\ P_{\text{О}} \end{pmatrix} \quad ,$$

из которого однозначно определяются искомые вероятности

$$P_{\text{О}} = \frac{P_{\text{О/П}}}{P_{\text{П/О}} + P_{\text{О/П}}} \quad , \quad P_{\text{П}} = 1 - P_{\text{О}} = \frac{P_{\text{П/О}}}{P_{\text{О/П}} + P_{\text{П/О}}} \quad . \tag{11}$$

Остается понять как переходные вероятности зависят от вероятности ошибки p в канале без памяти, и цель данного повествования будет достигнута.

Предположим для наглядности, что передаются одни нули, тогда единицы будут указывать на ошибки Рассмотрим все возможные комбинации канальных ошибок на входе дифференциального декодера. Разделим рассмотрение на четыре части, согласно матрице переходных вероятностей (9).

I. Правильный прием в предыдущем и текущем битах, $P_{\text{П/П}}$:

1 **1** **1**, декодируем как 0 0, (1 + **1** = 0, **1** + **1** = 0),

0 **0** **0**, декодируем как 0 0, (0 + **0** = 0, **0** + **0** = 0).

Вероятность этого события равна $P_{\text{П/П}} = p^2 + (1-p)^2$.

Замечание: здесь и далее первый бит (вспомогательный), который не выделен жирным шрифтом, не влияет на вероятность, потому что перебираются все его возможные значения, 0 и 1; следующие два бита полностью определяются значением вспомогательного и поставленным ограничивающим условием.

II. Ошибочный прием в предыдущем бите и правильный — в текущем, $P_{\text{П/О}}$:

0 **1** **1**, декодируем как 1 0, (0 + **1** = 1, **1** + **1** = 0),

1 **0** **0**, декодируем как 1 0, (1 + **0** = 1, **0** + **0** = 0).

Вероятность этого события равна $P_{\text{П/О}} = p^2 + (1-p)^2$.

III. Ошибочный прием в предыдущем и текущем битах, $P_{\text{О/О}}$:

0 **1** **0**, декодируем как 1 1, (0 + **1** = 1, **1** + **0** = 1),

1 **0** **1**, декодируем как 1 1, (1 + **0** = 1, **0** + **1** = 1).

Вероятность этого события равна $P_{\text{О/О}} = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$.

IV. Правильный прием в предыдущем и ошибочный — в текущем, $P_{О/П}$:

0 **0** **1**, декодируем как 0 1, (0 + **0** = 0, **0** + **1** = 1),

1 **1** **0**, декодируем как 0 1, (1 + **1** = 0, **1** + **0** = 1).

Вероятность этого события равна $P_{О/П} = p(1-p)+(1-p)p = 2p(1-p)$.

Подставим найденные переходные вероятности в (11) и получим окончательный результат

$$P_{О} = 2p(1-p) \ , \quad P_{П} = p^2 + (1-p)^2 \ . \tag{12}$$

Таким образом, вероятность ошибки на выходе дифференциального декодера почти в два раза превышает канальную вероятность ошибки p ; этот результат тем точнее, чем лучше канал, т. е. чем меньше p . Данный факт объясняется достаточно просто: при малых p ошибки происходят изредка и, в основном, по одиночке, а из логики дифференциального декодирования следует, что одна одиночная ошибка после декодирования трансформируется в две.

Любопытно также отметить, что если в канале вероятность ошибки равна ½, то после дифференциального декодирования вероятность ошибки остается той же!

Инкапсуляция каналов

Систему "кодер-канал-декодер" можно заменить эквивалентным каналом, рис. 3.

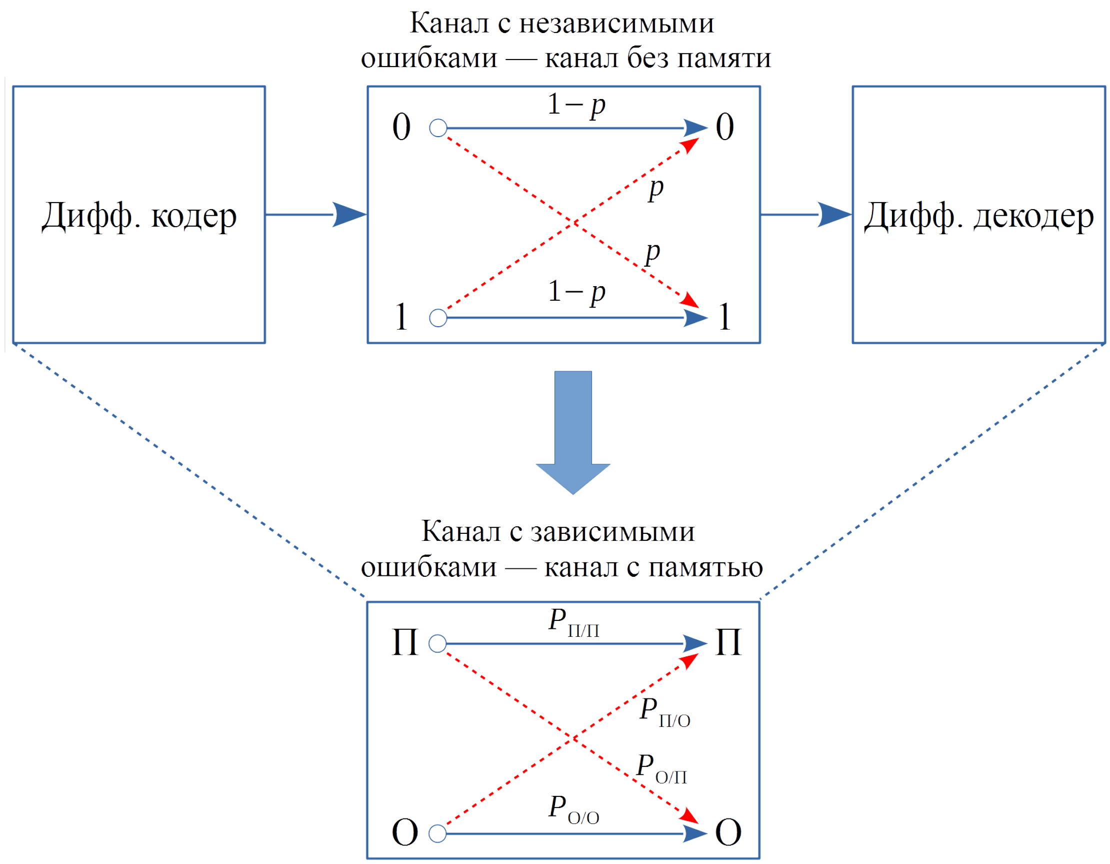


Рис. 3 Эквивалентная замена дифференциального кодера, канала без памяти и дифференциального декодера на новый канал — канал с памятью

Подобная замена говорит о гибкости такого понятия как "канал"; это своего рода инкапсуляция или принцип "черного ящика", очень распространенный во всех технических и компьютерных дисциплинах, да и во всем мире в целом…

Это — принцип фрактала!

Приложение А. Расчет скалярного произведения радиоимпульсов, отличающихся начальной фазой

Рассмотрим процедуру вычисления скалярного произведения единичного информационного импульса длительностью T и опорного $w(t)$

$$\begin{aligned} s_1=(s_1(t),w(t))=\int_0^T -\sqrt{\frac{2E}{T}}\sin(2\pi f t)\sqrt{\frac{2E}{T}}\sin(2\pi f t+\varphi)\,dt = \\ =-\frac{E}{T}\int_0^T \cos\varphi\, dt+\frac{E}{T}\int_0^T \cos(4\pi f t+\varphi)\,dt== \\ =-E\cos\varphi+\frac{E}{4\pi f T}[\sin(4\pi f T+\varphi)-\sin\varphi]\approx -E\cos\varphi \end{aligned} \quad . \qquad (13)$$

Здесь при выполнении условия $fT\gg 1$ последним слагаемым можно пренебречь, правда при условии, что величина $\cos\varphi$ по модулю близка к единице (условие фазировки). В работающем приемнике ФМн-сигнала условие фазировки обеспечивает петля ФАПЧ.

Чтобы найти скалярное произведение для противоположного информационного импульса, найденный результат следует умножить на минус единицу.

Условие $fT\gg 1$ также продиктовано ограничением полосы пропускания каналов передачи информации, ведь при ограниченной полосе практически невозможно достоверно передавать информацию одним достаточно коротким периодом колебания с переключением фазы на 180 градусов — формируемые таким способом радиоимпульсы при подаче их в канал не будут успевать набирать свою мощность из-за переходных процессов. Переключение фазы на 180 градусов — это идеальная математическая операция, при которой в формируемом сигнале возникает излом а в некоторых случаях — скачок уровня; чтобы достаточно точно передать такие совершенно никчемные с точки зрения передачи информации "выкрутасы", требуется полоса канала, много большая величины $1/T$.

Интересно отметить, что если в системе передачи информации выполнить условие $fT=n/2$, $n\in\mathbb{N}$, то равенство $s_1=-E\cos\varphi$ будет точным вне зависимости от абсолютной величины произведения fT .

Приложение Б. Пример работы с библиотекой символьных вычислений SymPy в блокноте Jupyter Notebook

Выполняются некоторые манипуляции с полиномами, коэффициенты которых (биты, двоичные символы) принадлежат полю GF(2) и поэтому вычисляются "по модулю два". Для учета модуля используется параметр *modulus.*

Импортирование библиотеки SymPy

In [1]:
```
import sympy as sp
```

Определение символа

In [2]:
```
x = sp.Symbol('x')
```

Разложение на неприводимые множители

In [3]:
```
sp.factor(x**10 + 1, modulus = 2)
```

Out[3]: $(x+1)^2\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)^2$

Раскрытие скобок

In [4]:
```
sp.expand((x**5 + 1)**2, modulus = 2)
```

Out[4]: $x^{10}+1$

In [5]:
```
sp.expand((x**2 + x + 1)*(x**4 + x**3 + x**2 + x + 1), modulus = 2)
```

Out[5]: $x^6+x^4+x^3+x^2+1$

www.sympy.org

jupyter.org/

Приложение В. Список упражнений для практических занятий

1. На основании (5) нарисовать схему дифференциального декодера.

2. Получить системную функцию фильтра, соответствующего дифференциальному декодеру. Вычислить произведение системных функций кодера и декодера.

3. Непосредственно пропустить через дифференциальный кодер следующие периодические последовательности

   3.1. $\mathbf{1,0,0,1,1},1,0,0,1,1,\ldots$, ответ: $\mathbf{1,1,1,0,1,0,0,0,1,0}\ldots$

   3.2. $\mathbf{1,1,0,0,0},1,1,0,0,0,\ldots$, ответ: $\mathbf{1,0,0,0,0},1,0,0,0,0\ldots$

   3.3. $\mathbf{1,0,1,1,0,1,1},1,0,1,1,0,1,1,\ldots$, ответ: $\mathbf{1,1,0,1,1,0,1,0,0,1,0,0,1,0}\ldots$

   3.4. $\mathbf{0,0,1,1,0,1,1},0,0,1,1,0,1,1,\ldots$, ответ: $\mathbf{0,0,1,0,0,1,0},0,0,1,0,0,1,0\ldots$

   3.5. $\mathbf{0,0,0,1,1,0,1},0,0,0,1,1,0,1,\ldots$, ответ: $\mathbf{0,0,0,1,0,0,1,1,1,1,0,1,1,0}\ldots$

   Вычислить период выходных последовательностей.

4. Сделать инверсию кодированных выше последовательностей. Декодировать обе последовательности — исходную и инвертированную.

5. Провести кодирование методом z-преобразования. Определить период кодированных последовательностей.

6. Задать канальную вероятность ошибки $p=0.15$, произвольно задать начальный вектор вероятностей

$$\begin{pmatrix} P_{\text{П}} \\ P_{\text{О}} \end{pmatrix}^{\langle 0\rangle} ,$$

   сформировать матрицу переходных вероятностей (9) и проделать $n=1,2,3$ итерации

$$\begin{pmatrix} P_{\text{П}} \\ P_{\text{О}} \end{pmatrix}^{\langle n\rangle} = \begin{pmatrix} P_{\text{П/П}} & P_{\text{П/О}} \\ P_{\text{О/П}} & P_{\text{О/О}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\text{П}} \\ P_{\text{О}} \end{pmatrix}^{\langle n-1\rangle} .$$

Убедиться, что в результате итераций получаются оценки вероятностей, точные значения которых определены (11). Почему для данной матрицы переходных вероятностей точные значения достигаются за одну итерацию?

7. По примеру рис. 4 построить график зависимости относительной ошибки аппроксимации[9] скалярного произведения (13) от величины fT для фаз $\varphi=\{0,85,170\}$, выраженных в градусах. Для каких fT величина ошибки равна нулю вне зависимости от фазы φ ?

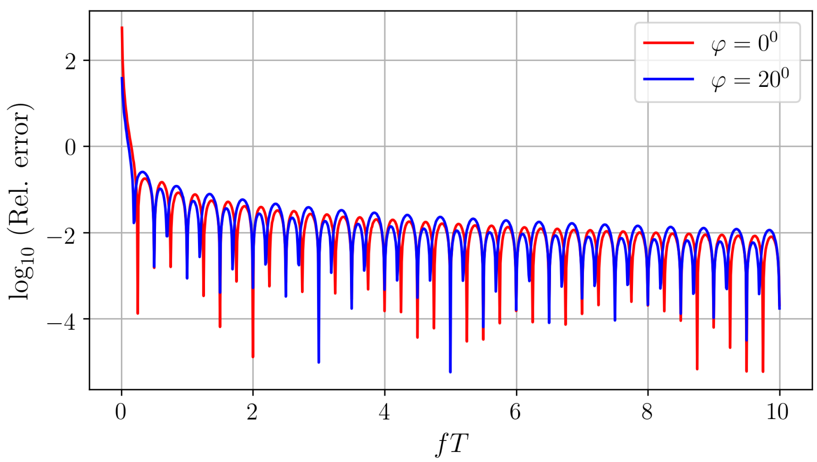


Рис. 4 Зависимость относительной ошибки аппроксимации скалярного произведения двух радиоимпульсов от нормированной несущей частоты. Разность фаз между импульсами — φ

График построен в Matplotlib. Расчеты сделаны в NumPy

При каком минимальном fT можно гарантировать ошибку аппроксимации 0.01 при разности фаз $\varphi=0$? До какой величины изменится fT при ошибке по фазе $\varphi=15$ градусов?

8. Сделать предыдущий пункт, выразив ошибку в децибелах

$$\text{err\_dB}=20\lg(1+\text{Rel. error}) \text{, дБ.}$$

Здесь считается, что нулевой ошибке соответствует 0 дБ. Какой ошибке соответствует ошибка 0.1 дБ?

9 Относительная ошибка Rel. error — это модуль разности между точным и приближенным значением, деленный на модуль точного значения