**Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
(ТУСУР)**

Т.А. Ельцова, А.А. Ельцов

Математика
2-й семестр
Курс лекций
Учебное пособие

**Для специальности
09.03.04 «Программная инженерия»**

ТОМСК – 2019

Приведён конспект лекций по дисциплине «Математика». Курс прочитан весной 2018 года в группах 427-1,2,3 и весной 2019 в группах 428-1,2,3,4 и включает в себя теорию пределов, теории дифференциального и интегрального исчислений. Может быть использовано для самостоятельной работы студентов.

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

R – множество вещественных чисел.

R^n – n-мерное вещественное евклидово пространство.

$\forall$ – квантор всеобщности. Запись $\forall x$ из A читается: для всех x из A.

$\exists$ – квантор существования. Запись $\exists x \in A$ читается: существует x из A.

& – логическое и.

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные орты декартова базиса.

i, j, k, l, m, n – целые числа.

$\in$ – знак принадлежности элемента множеству. Запись $x \in A$ читается: элемент x принадлежит множеству A.

$\subseteq$, $\supseteq$ – нестрогие включения. Запись $A \subseteq B$ читается: множество A является подмножеством (частью) множества B и может совпадать с ним.

$\subset$, $\supset$ – строгие включения. Запись $A \subset B$ читается: множество A является собственным подмножеством (частью) множества B и не совпадает с ним.

$\cup$, $\bigcup$ – объединение множеств.

$\cap$, $\bigcap$ – пересечение множеств.

$[a,b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$ – отрезок (замкнутый интервал).

$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$ – интервал.

$[a,b) = \{x \in R : a \le x < b\}$ – полуинтервал с открытым правым концом.

$(a,b] = \{x \in R : a < x \le b\}$ – полуинтервал с открытым левым концом.

1. Введение в анализ

1.1. Множества. Операции над множествами

Здание современной математики стоит на фундаменте, называемом теорией множеств. Различают два подхода к построению этой теории: аксиоматический и интуитивный. Мы будем придерживаться интуитивного подхода ввиду его достаточности для изучения курса.

Множеством **будем считать совокупность объектов произвольной природы, рассматриваемых как единое целое.**

Примерами множеств являются:

1) множество студентов в данной аудитории;

2) множество столов в корпусе;

3) множество рациональных чисел и так далее.

Часто выделяют так называемое *пустое множество*. По определению, пустым называют множество, не содержащее ни одного элемента.

Примерами пустых множеств могут служить множества индийских слонов на Луне или бенгальских тигров на Марсе. Пустое множество обозначают символом $\varnothing$.

Множества задаются различными способами, например, перечислением $\{x, y, ...\}$, с помощью какого-либо определяющего признака $\{y \text{ из } R : y = \sin x\}$ (читается: множество тех y из R для которых $y = \sin x$) и т.д. Множество определяется заданием своих элементов. На интуитивном пути задания множеств (ничего вроде бы проще, чем множество, нет) подстерегают казусы. В роли такого казуса выступает известный пример с брадобреем (житейский вариант парадокса Б. Рассела). Суть его заключается в следующем: элементами множества мужчин, которых бреет брадобрей, являются мужчины селения, не бреющие себя сами. Может ли брить себя брадобрей, если он житель этого же селения?

Подобные приведённому выше противоречия, возникшие в теории множеств при интуитивном её развитии, послужили толчком к разработке аксиоматической теории множеств. Придерживаясь интуитивной точки зрения, не будем забывать о сложностях, возникающих при этом подходе.

При построении той или иной теории все рассматриваемые множества $A, B, C, \ldots$ предполагаются принадлежащими некоторому универсальному множеству Ω, конкретное содержание которого зависит от решаемой задачи. Это может быть, например, множество всех точек на плоскости, множество всех рациональных чисел и т.д. Множество всех элементов Ω, которые не принадлежат A, называется дополнением (отрицанием) A и обозначается $\neg A$.

Тот факт, что объект x является элементом множества A, выражают записью $x \in A$, которую читают: x есть элемент множества A, x принадлежит множеству A, x из A. Запись $x \notin A$ означает, что x не является элементом множества A. Запись $A \subseteq B$ выражает тот факт, что A есть часть множества B (подмножество множества B) и может совпадать с B. Строгое включение записывается в виде $A \subset B$.

Множества A и B называются равными, если одновременно выполняются включения $A \subseteq B$ и $A \supseteq B$: то есть $A = B$, если любой элемент множества A принадлежит множеству B, а любой элемент множества B принадлежит множеству A $(A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \,\&\, B \subseteq A)$.

Объединением двух множеств A и B называют множество C, элементами которого являются как элементы множества A, так и элементы множества B (в том числе принадлежащие обоим множествам одновременно) и обозначаемое $C = A \cup B$.

Пересечением, или общей частью, множеств A и B называют множество C, состоящее лишь из элементов, принадлежащих множествам A и B одновременно и обозначаемое $C = A \cap B$.

Разностью двух множеств A и B называют множество C элементами которого являются все элементы множества A, не принадлежащие множеству B и обозначаемое $C = A \setminus B$.

Приведем некоторые свойства рассмотренных выше операций:

1) $A \cup B = B \cup A$; 2) $A \cap B = B \cap A$;

3) $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$; 4) $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$;

5) $\Omega\cap A = A$; 6) $\Omega\cup A = \Omega$;

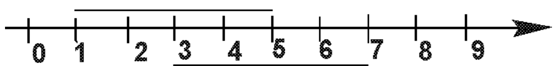
7) $\neg A\cup\neg B = \neg(A\cap B)$; 8) $\neg A\cap\neg B = \neg(A\cup B)$.

Предлагаем читателю доказать эти соотношения, используя условие равенства двух множеств данные выше.

В дальнейшем нам понадобится понятие декартова произведения $X\times Y$ множеств X и Y, которое состоит из множества всех упорядоченных пар (x, y) таких, что $x\in X, y\in Y$ ($X\times Y = \{(x, y): x\in X, y\in Y\}$).

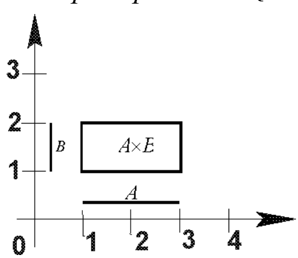
Приведем несколько примеров, иллюстрирующих сказанное:

Пример 1. $A=\{x\in R: 1<x<5\}$, $B=\{x\in R: 3<x<7\}$. Тогда $A\cup B=\{x\in R: 1<x<7\}$, $A\cap B=\{x\in R: 3<x<5\}$. На рисунке



изображены множества: A – чертой сверху, B – чертой снизу, $A\cup B$ – либо чертой сверху, либо чертой снизу, $A\cap B$ – чертой сверху и чертой снизу одновременно, если их элементы интерпретировать как точки на вещественной прямой.

Пример 2. $A=\{x\in R: 1\le x\le 3\}$, $B=\{x\in R: 1\le x\le 2\}$. Тогда $A\times B=\{(x, y): 1\le x\le 3,\ 1\le y\le 2\}$.



1.2. Множество вещественных чисел

Понятие вещественного или, что то же самое, действительного числа было введено в школьном курсе математики. Там же были введены операции над этими числами. Строгие теории вещественного (действительного) числа, известные как модели действительных чисел Г.Кантора, Р.Дедекинда и

К.Вейерштрасса, были построены в конце 19 века. Подробнее с этими теориями можно познакомиться, например, в [5, 8, 23]. Следуя Вейерштрассу, *вещественным или действительным числом* назовем любую десятичную дробь. Множество всех вещественных чисел будем обозначать буквой R. Подмножествами R являются:

N – множество натуральных чисел 1, 2, ... Заметим, что число 0 не принадлежит N;

Z – множество всех целых чисел. Целые числа можно считать десятичными дробями, все десятичные знаки которых равны нулю. Ясно, что $N \subset Z$;

Q – множество рациональных чисел (множество всех периодических десятичных дробей). Любое рациональное число можно представить в виде отношения двух целых чисел: $r = \dfrac{m}{n}$, $n \neq 0$; заметим, что $Z \subset Q$;

S – множество иррациональных чисел, являющихся непериодическими дробями.

Множество всех вещественных чисел делится на два подкласса – алгебраических чисел, являющихся корнями уравнений

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

с рациональными коэффициентами, и трансцендентных чисел, не являющихся корнями таких уравнений. Очевидно, что трансцендентные числа иррациональны. В 1882 году была доказана трансцендентность числа π. В 1934 году А.О.Гельфонд доказал трансцендентность любого числа вида α^{β}, где α – алгебраическое число, а β – иррационалное $\alpha > 0, \alpha \neq 1$.

В школьном курсе математики на множестве действительных чисел R введены операции:

сложения *со свойствами*:

1) $x + y = y + x$ для всех $(\forall)$ $x, y \in R$;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ для $(\forall)$ $x, y, z \in R$;

3) существует $(\exists)$ нулевой элемент 0 из R такой, что $x + 0 = 0 + x$ для $\forall x \in R$;

4) для $\forall\ x \in R\ \ \exists\ \ y \in R$ такой, что $x + y = 0$;

умножения *со свойствами*:

5) $\exists$ единичный элемент 1 из R такой, что $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ для $\forall\ x \in R$;

6) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ для $\forall x, y, z \in R$;

7) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ для $\forall x, y, z \in R$.

8) $x \cdot y = y \cdot x$ для $\forall x, y \in R$;

9) для $\forall\, x \in R,$ отличного от нуля, $\exists\ y \in R$ такой, что $x \cdot y = y \cdot x = 1$.

Из свойств 1-7, перечисленных выше, следует, что множество R образует линейное пространство. В [1] показано, что его размерность равна единице.

Кроме того, в школьном курсе математики на множестве вещественных чисел R введено отношение порядка $\leq$, обладающее свойствами:

1) $x \leq x$ для $\forall\, x \in R$;

2) одновременное выполнение отношений $x \leq y$ и $y \leq x$ влечет равенство чисел x и y $(x = y)$;

3) из соотношений $x \leq y$ и $y \leq z$ следует, что $x \leq z$;

4) для любых $x, y \in R$ либо $x \leq y$, либо $y \leq x$;

5) из соотношения $x \leq y$ следует, что $x + z \leq y + z$ для $\forall\, z \in R$;

6) из неравенств $0 \leq x,\ 0 \leq y$ следует неравенство $0 \leq x \cdot y$.

Заметим, что на множестве действительных чисел можно также рассматривать отношение строгого порядка <.

Введем некоторые понятия, связанные с отношением порядка.

> *Определение* 1. Число $c \in R$ называется верхней гранью множества $A \subset R$, если для всякого $a \in A$ выполнено неравенство $a \leq c$. Множество, имеющее верхнюю грань, называется ограниченным сверху.

Аналогично определяются нижняя грань и ограниченность снизу множества A.

Определение 2. Число $c \in R$ называется нижней гранью множества $A \subset R$, если для всякого $a \in A$ выполнено неравенство $c \leq a$. Множество, имеющее нижнюю грань, называется ограниченным снизу.

Определение 3. Наименьшая из всех верхних граней множества A называется точной верхней гранью этого множества и обозначается $\sup A$ (читается супремум A). Наибольшая из всех нижних граней множества A называется точной нижней гранью множества A и обозначается $\inf A$ (читается инфимум A).

Отметим без доказательства следующий интуитивно ясный факт, называемый свойством непрерывности множества вещественных чисел.

Теорема 1.1. Каждое ограниченное сверху множество на вещественной прямой имеет точную верхнюю грань. Аналогично, каждое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань.

Кроме того, множество вещественных чисел обладает свойством плотности, которое выражается в том, что между любыми двумя неравными вещественными числами расположены другие вещественные числа, как рациональные, так и иррациональные

В дальнейшем будем пользоваться следующими множествами вещественных чисел:

$[a,b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ – отрезок (замкнутый интервал),

$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$ – интервал,

$[a,b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$ – полуинтервал с открытым правым концом,

$(a,b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$ – полуинтервал с открытым левым концом.

Множество R обладает свойством, выраженным принципом Кантора.

Принцип Кантора. Если $Q_i = [a_i, b_i]$ и

$$Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \ldots, \text{ то } \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i \neq \varnothing.$$

Напомним известное из школы понятие модуля вещественного числа. Модуль вещественного числа x обозначается $|x|$ и определяется равенством

$$|x| = \max\{-x, x\} = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

где $\max\{-x, x\}$ – наибольшее из чисел $-x$ и x.

Модуль обладает свойствами: 1) $|x| \geq x$; 2) $|x+y| \leq |x| + |y|$; 3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; 4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; 5) $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$.

Множество вещественных чисел дополним символами $+\infty$, $-\infty$, ∞. Если множество X неограничено сверху, то считают $\sup X = +\infty$, если же оно неограничено снизу, то полагают $\inf X = -\infty$. Символ ∞ используют когда всё равно какая из бесконечностей $+\infty$ или $-\infty$ имеется ввиду. С символами $+\infty$, $-\infty$, ∞ нельзя обращаться, как с вещественными числами. Операции с ними определены соотношениями

1) $a + (\pm\infty) = \pm\infty \quad \forall a \in R$; 2) $a - (\pm\infty) = \mp\infty \quad \forall a \in R$;

3) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; 4) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;

5) $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, если $a > 0$; 6) $a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$, если $a < 0$;

7) $\infty \cdot \infty = \infty$; 8) $(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$;

9) $(-\infty) \cdot (-\infty) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$; 10) $\frac{a}{\infty} = \frac{a}{\pm\infty} = 0$.

11) $\frac{a}{0} = \infty$, $a \neq 0$

Операции $(+\infty) - (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^{∞} не определены.

С помощью символов $-\infty$ и $+\infty$ обозначают промежутки:

$(a, +\infty) = \{x \in R : x > a\}$; $[a, +\infty) = \{x \in R : x \geq a\}$;

$(-\infty, a) = \{x \in R : x < a\}$; $(-\infty, a] = \{x \in R : x \leq a\}$;

$(-\infty, +\infty) = R$.

Заметим, что неравенство $|x|>b$ определяет множество X, являющееся объединением двух множеств $X_1=(-\infty,-b)$ и $X_2=(b,+\infty)$ ($X=\{x\in R: |x|>b\}=(-\infty,-b)\cup(b,+\infty)$).

1.3. Функции или отображения

1.3.1. Понятие функции

С понятием функциональной зависимости человек сталкивается во многих областях своей деятельности. Многочисленные примеры можно найти в физике, технике, экономике. В математическом анализе занимаются изучением функций с наиболее общей точки зрения.

Определение 1. Пусть даны два множества X и Y. Говорят, что задано отображение множества X в множество Y, или, что то же самое, задана функция на X со значениями в Y, если всякому $x\in X$ по некоторому правилу или закону поставлен в соответствие элемент $y\in Y$. Пишут в этом случае $f: X\to Y$, $X\xrightarrow{f} Y$. Элемент $y=f(x)$ называют образом элемента x при отображении f, множество X – областью определения функции f, а множество $\widetilde{Y}=\{f(x),\ x\in X\}\subseteq Y$, состоящее из тех значений y, которые соответствуют хотя бы одному значению x из X, называется областью значений функции f.

Замечание. Если в определении функции $f: X\to Y$ каждому элементу $x\in X$ ставится единственный элемент $y\in Y$, то такая функция называется однозначной. В математике изучают также отображения, когда каждому элементу x может соответствовать несколько значений y (и даже бесконечно много). Такие отображения называют многозначными. Мы в нашем курсе под функцией будем понимать однозначные отображения.

Определение 2. Отображение $f: X\to Y$ называется инъекцией, или инъективным отображением (отображение X в Y), если $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, выполнено соотношение $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. никаким различным элементам из множества X не соответствует один и тот же элемент из множества Y.

Определение 3. Отображение $f : X \to Y$ называется сюръекцией, или сюръективным отображением (отображение X на Y), если $\forall y \in Y \ \exists x \in X$ такое, что $y = f(x)$ или, что то же самое, $\{x \in X : f(x) = y\} \neq \varnothing \ \forall y \in Y$, т.е. в любой элемент из множества Y отображается хотя бы один элемент из множества X.

Определение 4. Отображение $f : X \to Y$ называется биекцией, или биективным отображением (взаимно-однозначным отображением X на Y), если оно инъективно и сюръективно одновременно.

Множества X и Y в отображении $f : X \to Y$ могут быть совершенно произвольными. В нашем курсе они, как правило, будут принадлежать либо множеству вещественных чисел R, либо n - мерному точечно-векторному евклидову пространству R^n [1], в котором выбрана некоторая декартова система координат. В этом случае элементы из R^n можно задать в виде упорядоченной совокупности n вещественных чисел $(a^1, a^2, ..., a^n)$ и трактовать их либо как точки x с координатами $(a^1, a^2, ..., a^n)$, либо как векторы $\bar{x} = (a^1, a^2, ..., a^n)$, являющиеся радиус-векторами точек x. При этом длина (норма) элемента $x \in R^n$ определяется по формуле

$$\|x\| = |\bar{x}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + ... + (a^n)^2} .$$

1.3.2. Частные классы отображений

Рассмотрим более подробно понятие отображения, конкретизируя множества X и Y.

Класс 1. Множества X и Y есть подмножества вещественной прямой R. Тогда отображение $f: X \to Y$ называют ***скалярной функцией одной переменной*** или ***скалярной функцией скалярной переменной (скалярного аргумента).***

Функции этого вида изучались в средней школе.

Пример 1. Пусть $X = R$, $Y = R_{+} = (0, +\infty)$. Функцию $f: R \to R_{+}$ зададим соотношением $f(x) = x^2$.

Пример 2. $X = R$, $Y = [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$.

Замечание. Отображения рассмотренные в примерах 1 и 2 сюръективны. Если вместо отображения примера 1 рассмотреть его сужение на $R_{+} = (0, +\infty)$ или на $R_{-} = (-\infty, 0)$, т.е. рассматривать его при $X = R_{+}$ или $X = R_{-}$, то оно будет биективно.

Пример 3. Функция Дирихле определяется соотношением

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \text{рациональное число;} \\ 0, \text{ если } x - \text{иррациональное число.} \end{cases}$$

Пример 4. Функцию

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

(читают «сигнум x») называют «знак x» и используют как указатель знака x.

Как видно из рассмотренных примеров и замечания к примерам 1, 2, для задания функции требуется указать область определения X, область значений Y и правило f, по которому каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие значение $y \in Y$. В случаях задания правила f аналитическим выражением, если множества X и Y явно не указаны, под X и Y понимают множества, определяемые этим аналитическим выражением, при этом иногда X называют естественной областью определения, а Y – естественной областью значений.

Пример 5. Укажите естественные области определения и значений функции $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Из определения понятия арифметического корня из вещественного числа следует, что $X=[-1{,}1]$, $Y=[0{,}1]$.

Охарактеризуем некоторые классы скалярных функций скалярного аргумента, т.е. отображения $f: X \to Y$ при $X \subseteq R$, $Y \subseteq R$. Будем при этом для краткости писать $f: X \subseteq R \to Y \subseteq R$.

Определение 1. Функция f называется возрастающей, или неубывающей, на множестве D, если для любых двух точек x_1, x_2 из D, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$, и называется строго возрастащей, если для точек $x_1, x_2 \in D$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполнено строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Аналогично определяются убывающая и строго убывающая функции.

Определение 2. Функция f называется убывающей, или невозрастающей, на множестве D, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in D$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$ и называется строго убывающей, если для точек $x_1, x_2 \in D$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполнено строгое неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Определение 3. Функция f называется монотонной на множестве D, если она возрастающая или убывающая на этом множестве.

Например, функция $f(x)=\sin x$ строго возрастающая на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и убывающая на $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Определение 4. Функция f называется ограниченной, если множество её значений $\widetilde{Y}=\{f(x): x \in X\}$ ограничено. Если при этом $M=\sup\{f(x): x \in X\} \in \{f(x): x \in X\}$, то его называют наибольшим значением функции f на множестве X. Если $m = \inf\{f(x) : x \in X\} \in \{f(x) : x \in X\}$, то его называют наименьшим значением функции f на множестве X.

Для скалярной функции ограниченность равносильна наличию константы M такой, что для всякого $x \in X$ выполняется $|f(x)| \le M$.

Определение 5. Функция f называется четной, если область ее определения симметрична относительно точки $x = 0$ и для всех $x \in X$ выполнено соотношение $f(-x) = f(x)$, и называется нечетной, если $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси OY, а нечетной – относительно начала координат.

Пусть $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$ и множество X симметрично относительно точки $x = 0$. Тогда, очевидно, функция

$$\varphi_1(x) = f(x) + f(-x)$$

четна, а функция

$$\varphi_2(x) = f(x) - f(-x)$$

нечетна. Так как

$$f(x) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{2},$$

то мы показали, что любую функцию с областью определения, симметричной относительно точки $x = 0$ можно представить в виде суммы четной и нечетной функций. Функцию $\varphi_1(x)$ называют четной составляющей, а функцию $\varphi_2(x)$ – нечетной составляющей.

Функции, не относящиеся к классу четных или нечетных, будем называть функциями общего вида.

Определение 6. Функция $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$ называется периодической, если существует число $T > 0$ такое, что для $\forall x \in X$ следует, что $(x+T) \in X$ и $f(x+T) = f(x)$. Наименьшее положительное T, удовлетворяющее этим условиям, называется наименьшим периодом функции f.

Отметим, что если T – период функции f, то числа $T_n = nT$ тоже являются периодами функции f. У функции может быть несколько различных периодов, не связанных этим соотношением. Например, у функции Дирихле, рассмотренной в примере 3, каждое рациональное число является периодом.

Класс 2. Множество X – подмножество n-мерного пространства R^n, Y – подмножество вещественной прямой R. В этом случае отображение $f : X \subseteq R^n \to Y \subseteq R$ называется ***скалярной функцией многих переменных*** или ***скалярной функцией n переменных (n аргументов)*** или ***скалярной функцией векторной переменной*** $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – каждому вектору $x \in X$ ставится в соответствие вещественное число $y \in Y$.

Пример 6. Линейный оператор $A : R^n \to R$ называется линейным функционалом (линейной формой) на R^n и, по теореме об общем виде линейного функционала [1], может быть задан в виде $Ax = a^1 x_1 + a^2 x_2 + ... + a^n x_n$ ($a^i = const$) и определяет линейную функцию n переменных (аргументов).

Пример 7. $X = R^3 \times R^3 = \{(x, y) : x \in R^3, y \in R^3\}$, $Y = R$, $f(x, y) = (x, y)$, где (x, y) – скалярное произведение векторов x и y. Если векторы x и y заданы своими декартовыми кординатами $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, то $f(x, y) =$ $= \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3$ и является функцией шести переменных $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$.

В случае отображения $f : X \subseteq R^2 \to Z \subseteq R$ имеем скалярную функцию двух переменных, или, что то же самое, ***плоское скалярное поле***. График $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in X\}$ этой функции, если f непрерывна (строгое понятие будет определено позже), является поверхностью в R^3, которая совпадает с поверхностью, описываемой уравнением $z = f(x, y)$. Например, графиком функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ является эллиптический параболоид вращения, а графиком функции $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ является верхняя половина сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$. Поэтому будем говорить, что поверхность, описываемая уравнением $z=f(x,y)$, есть график функции $f(x,y)$.

Наглядную характеристику скалярной функции двух переменных (скалярного поля) $f(x,y)$ можно дать с помощью линий уровня (изобары, изотермы и т.д.). При этом под линией уровня будем понимать линию на плоскости XOY, во всех точках которой функция f принимает одно и то же значение. Линии уровня описываются уравнением $f(x,y)=const$.

Для скалярной функции трех переменных (скалярного поля) $f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in R^3$, аналогично вводится понятие поверхности уровня как поверхности, во всех точках которой $f(x,y,z)=const$.

Класс 3. Множество X есть подмножество вещественной прямой R ($X\subseteq R$), Y – подмножество m-мерного пространства R^m ($Y\subseteq R^m$). Тогда $f: X\subseteq R\to Y\subseteq R^m$ – ***вектор-функция одной переменной***, ставящая в соответствие каждому вещественному числу x из X вектор $y=f(x)$ из R^m, т.е. каждая координата вектора $f(x)$ есть скалярная функция скалярного переменного x

$$f(x)=\left(f_1(x), f_2(x),..., f_m(x)\right)^T=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ ... \\ f_m(x) \end{pmatrix}.$$

Функции $f_1(x), f_2(x),..., f_m(x)$ называют координатными.

При $m=3$ *можем записать*

$f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), f_3(x)\right)^T = f_1(x) \cdot \mathrm{i} + f_2(x) \cdot \mathrm{j} + f_3(x) \cdot \mathrm{k}$ *где* $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ *– векторы декартова базиса. В случае m = 2 эта запись приобретает вид* $f(x) = f_1(x) \cdot \mathrm{i} + f_2(x) \cdot \mathrm{j}$. *Если начала всех векторов* $f(x)$ *поместить в начало координат, то их концы опишут в* R^3 *некоторую кривую, называемую **годографом вектор-функции*** $f(x)$. *Эта функция широко используется в физике для описания движения материальной точки* M *, так как, чтобы знать положение точки в момент времени* t, *необходимо указать координаты этой точки как функцию времени, т.е. задать ее в виде* $M(x(t), y(t), z(t))$. *Например, функция*

$$f(t) = a \cdot \cos t \cdot i + a \cdot \sin t \cdot j + bt \cdot k = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ a \cdot \sin t \\ bt \end{pmatrix}$$

определяет движение точки по винтовой линии, а функция

$$f(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ a \cdot \sin t \end{pmatrix}$$

– движение точки по окружности. Зафиксировав момент времени $t = t_0$, *мы найдем положение точки в этот момент.*

Класс 4. Множество X – подмножество n-мерного пространства R^n ($x \subseteq R^n$), Y – подмножество в R^m ($Y \subseteq R^m$). Тогда $f : X \subseteq R^n \to Y \subseteq R^m$ – отображение (оператор) из R^n в R^m или, что то же самое, ***вектор-функция многих переменных***, ставяющая в соответствие каждому вектору x из X вектор y из Y. Полагая $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m)$, получим

$$f(x) = f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = (f_1(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n), ..., f_m(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n))^T =$$

$$=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \dots\\ \eta_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\\ \dots\\ f_m(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)\\ f_2(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)\\ \dots\\ f_m(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)\end{pmatrix}$$

Функции $f_1, f_2,\dots, f_m$, так же, как и для класса 3, будем называть координатными. Примером функции этого типа является векторное произведение векторов в $R^3 : X = R^3 \times R^3,\ \ Y = R^3$, $f(x) = [x_1, x_2]$, где $[x_1, x_2]$ – векторное произведение векторов x_1 и x_2. Каждая координата вектора $y = [x_1, x_2]$ является функцией шести скалярных переменных.

При $n = 2$ *имеем вектор-функцию двух переменных, которую можно записать в виде* $f(x, y) = f_1(x, y)\mathbf{i} + f_2(x, y)\mathbf{j}$ *при* $m = 2$ *или в виде* $f(x, y) = f_1(x, y)\mathbf{i} + f_2(x, y)\mathbf{j} + f_3(x, y)\mathbf{k}$ *при* $m = 3$. *Аналогично, при* $n = 3$ *имеем вектор-функцию трёх переменных, которую можно записать в виде* $f(x, y, z) = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j}$ *при* $m = 2$ *или в виде* $f(x, y, z) = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\mathbf{k}$ *при* $m = 3$. *В этом случае говорят, что задано* ***векторное поле*** *плоское или пространственное. Векторными полями являются: поле скоростей текущей жидкости, магнитное и электрическое поля и другие, примеры которых можно найти в физике, технике, механике.*

Отображения классов 1, 2, 3 получаются из класса 4 при различных m и n.

Таким образом, изучение всех типов отображений сводится к изучению скалярных функций одного скалярного аргумента и скалярной функции многих скалярных аргументов.

В заключение параграфа приведем пример отображения, которое нам понадобится в дальнейшем. Пусть X – произвольное множество. Положим $Id(x) = x$ для всякого x из X. Этим мы определили отображение $Id_X : X \to X$ множества X в себя, называемое тождественным или единичным отображением. Очевидно, что Id_X – биективное отображение. Иногда его обозначают также буквами I или E. Если это не приведет к неясности, будем вместо Id_X писать Id.

1.3.3. Суперпозиция (композиция) отображений (сложная функция). Обратная функция

Иногда возникает необходимость в рассмотрении отображения от отображения (функции от функции). Такая конструкция носит название суперпозиции отображений или сложной функции. Формальное определение выглядит при этом следующим образом.

Определение 1. Пусть

$$\varphi : X \subseteq R^n \to Y_1 \subseteq R^m,\ \psi : Y \subseteq R^m \to Z \subseteq R^k \text{ и } Y_1 \subseteq Y.$$

Отображение

$$f : X \subseteq R^n \to Z \subseteq R^k$$

называется суперпозицией (композицией) отображений ψ и φ и обозначается $f = \psi \circ \varphi$, если для всякого x из X имеет место соотношение $f(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$.

Переменную $y = \varphi(x)$ часто называют промежуточной переменной или промежуточным аргументом.

Рассмотрим пример. Пусть $\varphi : X \subseteq R^k \to Y \subseteq R^n$,

$\psi : Y \subseteq R^n \to Z \subseteq R$, т.е.

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k) \\ \varphi_2(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k) \\ ... \\ \varphi_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k) \end{pmatrix},$$

$\psi(y) = \psi(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$. Тогда $f = \psi \circ \varphi : X \subseteq R^k \to Z \subseteq R$. При этом $(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi_1(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k), ..., \varphi_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k))$.

В частности, если $k = 1$, то $f = \psi \circ \varphi : X \subseteq R \to Z \subseteq R$ и

$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x))$.

Замечание. Рассматривают суперпозицию трех, четырех и более отображений при соответствующем согласовании областей определения и областей значений.

Важным и весьма полезным является понятие обратного отображения, вводимое с использованием понятия суперпозиции отображений.

Определение 2. Пусть $f: X \to Y$ – биективное отображение. Говорят, что функция $\varphi : Y \to X$ является обратной к f, если $\varphi \circ f = Id_X$ или $f \circ \varphi = Id_Y$, т.е. для всякого x из X $(\varphi \circ f)(x) = x$ или для всякого y из Y $(f \circ \varphi)(y) = y$. В этом случае пишут $\varphi = f^{-1}$.

Приведем примеры функций, обратных к скалярным функциям скалярного аргумента.

Пример 1. Пусть $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Тогда обратное к f отображение φ задаётся соотношением $\varphi(y) = f^{-1}(y) = \log_a y$.

Пример 2. Для отображения, осуществляемого соотношением $f(x) = \log_a x$, обратным является отображение $f^{-1}(y) = a^y$.

Пример 3. Пусть f – отображение множества неотрицательных чисел $R_+ = \{x \in R : x \geq 0\}$ в то же самое множество R_+ ($f : R_+ \to R_+$), осуществляемое по формуле $f(x) = x^2$; обратной к f функцией $f^{-1} : R_+ \to R_+$ будет, в данном случае, функция $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Пример 4. Пусть теперь f – отображение множества неположительных чисел $R_- = \{x \in R : x \leq 0\}$ во множество R_+, осуществляемое по тому же, что и в предыдущем примере, закону $f(x) = x^2$ в данном случае обратной к f функцией $f^{-1} : R_+ \to R_-$ будет функция $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.

Пример 5. Пусть $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $f^{-1}(y) = \arcsin y$. Для функции, заданной тем же соотношением

$f(x)=\sin x$, но на отрезке $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, обратной будет функция $f^{-1}(y)=\pi-\arcsin y$.

Представляет интерес вопрос об условиях существования обратной функции. Так как для скалярной функции одного скалярного переменного строго монотонная функция f осуществляет биективное отображение области определения X на множество значений $f(X)$, то для нее ответ на данный вопрос содержится в теореме.

Теорема 1.2. Пусть $X,Y\subseteq R$, $f:X\to Y$ и $Y=f(X)$. Если f – строго монотонная функция на X, то существует к ней обратная.

Рассмотренные примеры 3-5 показывают, что для отображений, осуществляемых по одним и тем же законам, но заданных в разных областях определения, в которых эти отображения биективны, обратные отображения получаются разными.

Заметим, что графики $\{(x,\ f(x)):\ x\in X\}$, $\{(f^{-1}(y),\ y): y\in Y\}$, прямой и обратной функций соответственно, состоят из одних и тех же точек.

Если $f:X\to Y$ – сюръективное отображение, не являющееся биективным, то для некоторых $y\in Y$ множества $\{f^{-1}(y)\}$ содержат более чем один элемент и поэтому однозначного отображения, обратного к f, в этом случае нет. Если допустить многозначные отображения, то для сюръективного отображения обратное определяется как отображение, ставящее всякому y из Y элементы x из X по закону

$$f^{-1}(y)=\{x\in X:\ f(x)=y\}$$

По этому пути введены бесконечнозначные функции $\operatorname{Arcsin} y=(-1)^k\arcsin y+k\pi$, $\operatorname{Arccos} y=\pm\arccos y+2k\pi$, $\operatorname{Arctg} y=\operatorname{arctg} y+k\pi$, $\operatorname{Arcctg} y=\operatorname{arcctg} y+k\pi$. В этом случае обратное отображение не удовлетворяет условию $f^{-1}\circ f=Id_X$

и, кроме того, встает проблема выделения однозначных ветвей обратных отображений.

Следует упомянуть еще об одной проблеме. В силу сложившихся традиций обозначать независимую переменную буквой x, а зависимую переменную – буквой y, в уравнениях кривых $x = \arcsin y$, $x = \arccos y$ и так далее, буквы x и y меняют местами и говорят, что функция $\arcsin x$ обратна функции $\sin x$, $\arccos x$ обратна $\cos x$ и т.д., хотя на самом деле $\arcsin x$ обратна функции $\sin y$, $\arccos x$ обратна $\cos y$. При такой замене графики прямой и обратной функций симметричны друг другу относительно биссектрисы первого координатного угла.

1.3.4. Основные элементарные функции

Среди отображений $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$ выделяют класс основных элементарных функций, к которым относятся следующие:

1) степенная функция x^{λ}, где $\lambda \in R$. В общем случае ее область определения $X = (0,+\infty)$. При некоторых значениях λ область определения может быть шире. Например, при $\lambda = n \in N$ функция x^n определена на всей числовой оси;

2) показательная функция a^x, $a > 0$, $a \neq 1$. Ее область определения – вся числовая ось R. При $a > 1$ показательная функция строго возрастающая, а при $0 < a < 1$ – строго убывающая;

3) логарифмическая функция $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Область определения $X = R_+ = (0,+\infty)$, область значений – вся числовая ось $R = (-\infty,+\infty)$;

4) тригонометрические функции $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$. Функции $\sin x, \cos x$ определены на всей числовой оси, область их значений Y есть отрезок $[-1,1]$. Функция $\operatorname{tg} x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ а $\operatorname{ctg} x$ определена при $x \neq k\pi$, где k – любое целое число;

5) обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$. Областью определения функций $\arcsin x$, $\arccos x$ является отрезок $[-1,1]$. Областью значений первой является отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$, второй – $[0,\pi]$. Функции $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ определены на всей числовой оси. Областью значений первой является промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а второй – $[0,\pi]$;

6) часто используются функции

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

– гиперболические синус и косинус соответственно, где e - некоторое число, с которым мы познакомимся чуть позже. Применяются также гиперболический тангенс $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и гиперболический котангенс $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

1.3.5. Неявный, параметрический и векторный способы задания функций

Пусть дано некоторое уравнение

$$F(x, y) = 0. \tag{1.1}$$

Предположим, что это уравнение имеет решения, заполняющие некоторое множество A упорядоченных пар (x, y). Через X обозначим множество первых элементов этих пар, а через Y – вторых элементов. Определим отображение множества X в множество Y следующим образом: каждому значению $x \in X$ поставим в соответствие те значения $y \in Y$, при котором пара $(x, y) \in A$, т.е. является решением уравнения (1.1). Мы определили функцию

$$f : X \subseteq R \to Y \subseteq R.$$

Говорят, что функция $f(x)$ задана неявно уравнением (1.1), или, что уравнение (1.1) определяет неявно функцию $f(x)$ (y как неявную функцию от x, кривую $y = f(x)$).

Из определения функции $f(x)$ следует, что справедливо тождество

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \quad x \in X .$$

Иногда уравнение (1.1) удается разрешить относительно y и получить явное задание функции f (кривой $y = f(x)$). Но очень часто это сделать невозможно. Например, уравнение

$$\sin(x^2 + y^2) + \arcsin(xy^2) - 1 = 0$$

определяет функцию $f(x)$ такую, что $f(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, но явный способ задания найти затруднительно. Эту функцию можно описать таблично с любой степенью точности.

Аналогично, при выполнении определенных условий, которые мы выяснять не будем, уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1.2}$$

задает отображение

$$f : X \subseteq R^2 \to Z \subseteq R$$

такое, что на X имеет место тождество

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0 .$$

Говорят,что уравнение (1.2) определяет z как неявную функцию от x, y и пишут в этом случае $z = f(x, y)$ или $z = z(x, y)$.

Неявно может быть задана функция

$$f : X \subseteq R^n \to Y \subseteq R$$

уравнением

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, z) = 0 .$$

Система уравнений

$$F_i(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_m) = 0 \qquad i = 1, 2, ..., m$$

при выполнении некоторых условий может определять неявно функцию $f : X \subseteq R^n \to Z \subseteq R^m$,

$$f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,...,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,...,x_n) \\ ... \\ f_m(x_1,x_2,...,x_n) \end{pmatrix}$$

такую, что выполнены тождества

$$F_i(x_1,x_2,...,x_n,z_1(x_1,x_2,...,x_n),z_2(x_1,x_2,...,x_n),...,$$
$$z_m(x_1,x_2,...,x_n))\equiv 0, \qquad i=1,2,...,m.$$

Остановимся кратко на параметрическом способе задания функции. Предварительно напомним некоторые введённые ранее понятия.

Определение 1. Пусть задана функция $f:X\to Y$. Множество точек из декартова произведения $X\times Y$ вида $(x, f(x))$ называют графиком функции f.

График скалярной функции одной переменной представляет собой некоторую совокупность точек плоскости. График скалярной функции двух переменных – совокупность точек трехмерного пространства.

Если f – функция одного переменного, то уравнение $y=f(x)$ описывает множество точек на плоскости, состоящее из точек графика функции f. Это множество можно определить, задавая каждую координату в отдельности как функцию некоторой переменной, следующим образом

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \qquad t\in[\alpha,\beta] \end{cases} \qquad (1.3)$$

В этом случае говорят, что функция $f(x)$ задана соотношениями (1.3) параметрически. Если $x(t), y(t)$ – непрерывные функции (термин будет определён позже), то соотношениями (1.3) описывается некоторая кривая на плоскости, про которую говорят, что она задана параметрически.

Аппарат описания кривых с помощью параметра является очень мощным, позволяющим задать практически любую кривую на плоскости.

В частности, как показал Пеано, с помощью параметра можно задать кривую, заполняющую квадрат. Параметрическое задание кривой неоднозначно в том смысле, что одну и ту же кривую можно задать различными равенствами.

Если удаётся найти обратную к $x(t)$ функцию $x^{-1} = t(x)$, то сложная функция $y(x) = y(t(x))$ позволяет перейти от параметрического задания к явному.

Задавая три координаты как функции одной переменной, получаем кривую в пространстве, заданную параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Приведем примеры параметрически заданных кривых.

Окружность радиуса $a > 0$ с центром в начале координат может быть задана в виде

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos\varphi, \\ y = a \cdot \sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

а эллипс с полуосями $a > 0$, $b > 0$ задается следующим образом

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos\varphi, \\ y = b \cdot \sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Если f – функция двух переменных, то уравнение $z = f(x, y)$ описывает некоторое множество точек в пространстве, состоящее из точек графика функции f. Это множество точек можно определить, задавая каждую координату в отдельности как функцию некоторых переменных, следующим образом

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \quad (u, v) \in G \end{cases} \tag{1.4}$$

В этом случае говорят, что функция $f(x, y)$, определяемая соотношениями (1.4), задана параметрически. Если $x(u,v), y(u,v)$, $z(u,v)$ – непрерывные функции (термин будет определён позже), то соотношениями (1.4) описывается некоторая поверхность про которую говорят, что она задана параметрически.

Отметим, что параметрическое задание кривых и поверхностей эквивалентно их заданию в виде вектор-функций

$$r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))^T, \ r = r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T$$

одной и двух переменных соответственно, рассмотренному в п.1.3.2.

1.4 Системы окрестностей в $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^n$

1.4.1 Понятие окрестности

Идея предельного перехода – одна из важнейших и плодотворных в анализе. Для изучения предела нам необходимо понятие окрестности точки. К его изучению мы и приступаем.

Определение 1. Окрестностью конечной точки x_0 из R назовем любой интервал (a,b), содержащий эту точку.

Окрестность точки x_0 будем обозначать $U(x_0)$, т.е.

$U(x_0) = (a,b) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) = \{x \in R : a < x < b\} =$
$= \{x \in R : x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_2\}$, где $\delta_1 = x_0 - a$, $\delta_2 = b - x_0$.

Рассмотрим частные виды окрестностей и введем для них соответствующие обозначения.

$U_\delta(x_0)$ – симметричная окрестность точки x_0 радиуса $\delta > 0$,

$$U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in R : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\},$$

или, что тоже самое,

$$U_\delta(x_0) = \{x \in R : |x - x_0| < \delta\}.$$

$U^{П}(x_0)$ – проколотая окрестность – окрестность $U(x_0)$, из которой удалена точка x_0

$$U^{П}(x_0) = \{x \in R : a < x < b, x \neq x_0\} =$$
$$= \{x \in R : x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_2, x \neq x_0\}.$$

$U_\delta^{П}(x_0)$ – симметричная проколотая окрестность.

$$U_\delta^{П}(x_0) = \{x \in R : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0\} = \{x \in R : 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

Отметим на будущее, что каждая симметричная окрестность является просто окрестностью, и в каждой окрестности точки содержится ее симметричная окрестность.

Определение 2. Окрестностью бесконечно удаленной точки ∞ в R (обозначаемой $U(\infty)$) назовем внешность некоторого отрезка, т.е. множество точек, не принадлежащих этому отрезку. Симметричной окрестностью точки ∞ назовем внешность симметричного относительно нуля отрезка.

С помощью неравенств окрестность бесконечно удаленной точки в R может быть записана в виде

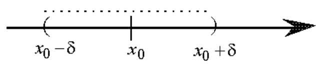
$$U(\infty)=\{x\in R: x>M_1 \text{ или } x<M_2\}=$$
$$=\{x\in R: x>M_1\}\cup\{x\in R: x<M_2\}$$

а симметричная ее окрестность - в виде

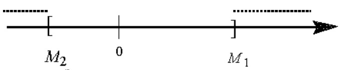
$$U_M(\infty)=\{x\in R: |x|>M\}.$$

На рисунках приведены соответственно окрестности и симметричные окрестности конечной x_0 и бесконечно удаленной ∞ точек на вещественной прямой.

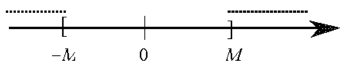
Окрестность точки x_0 в R



Симметричная окрестность точки x_0 в R



Окрестность $U(\infty)$ в R



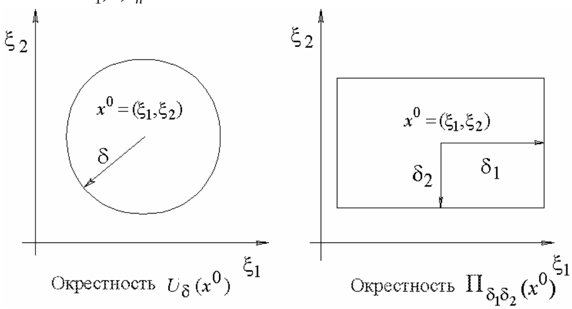
Симметричная окрестность $U_M(\infty)$ в R

Обобщение понятия окрестности для пространства R^n может быть проведено несколькими способами. Соответственно появляются окрестности нескольких видов: шары, параллелепипеды, эллипсоиды и т.д. В случае симметричных окрестностей шаровые и параллелепипедальные окрестности задаются соотношениями

$$U_\delta(x_0)=\{x=(\xi^1,\xi^2,..,\xi^n)\in R^n:\sum_{i=1}^{n}(\xi^i-\xi_0^i)^2<\delta^2\},$$

$$\Pi_{\delta_1,...,\delta_n}(x_0)=\{x=(\xi^1,\xi^2,..,\xi^n)\in R^n:\left|\xi^i-\xi_0^i\right|<\delta_i, i=1,..n\}.$$

Заметим, что в каждой окрестности $U_\delta(x_0)$ содержится некоторая окрестность $П_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(x_0)$ и, наоборот, в каждой окрестности $П_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(x_0)$ содержится некоторая окрестность $U_\delta(x_0)$. Мы будем пользоваться теми из них, которые в данный момент удобнее, потому что, как будет показано ниже, они порождают одно и тоже понятие предела. На рисунках изображены окрестности $U_\delta(x_0)$ и $П_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(x_0)$ в R^2.



Окрестностью бесконечно удаленной точки в R^n (обозначаемой $U(\infty)$) назовём внешность любого шара или параллелепипеда, а симметричной окрестностью бесконечно удаленной точки в R^n назовем внешность симметричного относительно начала координат шара или параллелепипеда. Симметричные окрестности бесконечно удаленной точки в R^n записываются с помощью неравенств в виде

$$U_M(\infty)=\{x=(\xi^1,\xi^2,\ldots,\xi^n)\in R^n:\sum_{i=1}^n(\xi^i)^2>M^2\},$$

$$U_{M_1,\ldots,M_n}(\infty)=\{x=(\xi^1,\xi^2,\ldots,\xi^n)\in R^n:\left|\xi^i\right|>M_i, i=\overline{1,n}\}.$$

Введённые понятия окрестности и проколотой окрестности точки в R и R^n легко обобщаются и на более общий случай метрических пространств. Пусть X - метрическое пространство и $\rho(x,y)$ - расстояние в нём. Назовём окрестностью точки x_0 в X множество

$$U(x_0,\varepsilon)=\left\{x\in X:\rho(x_0,x)<\varepsilon\right\}$$

и проколотой окрестностью этой точки множество

$$U^{\Pi}(x_0,\varepsilon)=U(x_0,\varepsilon)\setminus\{x_0\}=\left\{x\in X : x\neq x_0, \rho(x_0,x)<\varepsilon\right\}.$$

В заключение разговора об окрестностях общего вида приведем несколько понятий, вводимых с их помощью и необходимых нам в дальнейшем.

Определение 3. Точка M_0 называется предельной точкой (точкой сгущения) множества X, если в любой её окрестности есть, по крайней мере, одна отличная от M_0 точка множества X.

Определение 4. Точка $M_0 \in X$ называется внутренней точкой множества X, если она входит во множество X вместе с некоторой своей окрестностью, т.е. существует окрестность $U(M_0)$, полностью лежащая в X.

Определение 5. Точка $M_0 \in X$ называется внешней точкой множества X, если существует окрестность $U(M_0)$ этой точки полностью лежащая вне множества X, т.е. такая, что пересечение $U(M_0) \cap X$ – пусто.

Определение 6. Точка $M_0 \in X$ называется граничной точкой множества X, если в любой её окрестности есть точки как принадлежащие множеству X, так и не принадлежащие ему. Совокупность всех граничных точек множества X называется его границей.

Определение 7. Множество X называется открытым, если каждая его точка внутренняя.

Определение 8. Множество X называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Пример 1. Рассмотрим множество $[0,1]\cup\{2\}$. Точки сгущения этого множества есть точки отрезка $[0,1]$, внутренними точками являются точки интервала $(0,1)$, внешними точками являются точки множества $(-\infty,0)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$, граничными являются точки множества $\{0,1,2\}$, множество замкнуто.

Пример 2. Для множества $\left\{1+\frac{1}{n}, n=1,2,...\right\} \cup \{1\}$ все точки граничные, точка сгущения 1.

Пример 3. Множество $(0,1)$ открыто.

1.4.2. Односторонние окрестности в R

Весьма важным является понятие одностороннего предела. Без него трудно построить классификацию точек разрыва. Для введения понятия одностороннего предела необходимы односторонние окрестности в R. Они определяются следующим образом:

1) правосторонняя окрестность конечной точки x_0 есть множество

$$U_\delta^+(x_0)=\{x\in R : x_0 < x < x_0+\delta\};$$

2) левосторонняя окрестность конечной точки x_0 – это множество

$$U_\delta^-(x_0)=\{x\in R : x_0-\delta < x < x_0\};$$

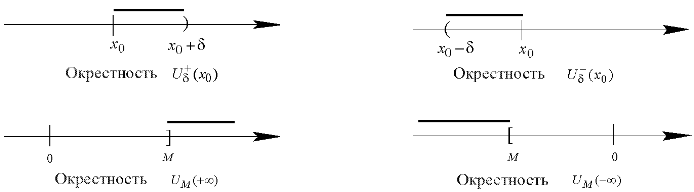
3) окрестность точки $+\infty$ записывается в виде

$$U_M(+\infty)=\{x\in R : x > M\};$$

4) окрестностью точки $-\infty$ является множество

$$U_M(-\infty)=\{x\in R : x < M\}.$$

На рисунках показаны эти множества.



Отметим, что $U^{\Pi}(x_0)=U_{\delta_1}^-(x_0)\cup U_{\delta_2}^+(x_0)$,

$U_\delta^{\Pi}(x_0)=U_\delta^-(x_0)\cup U_\delta^+(x_0)$, $U_M(\infty)=U_M(-\infty)\cup U_M(+\infty)$.

Заметим, что пересечение двух окрестностей одного и того же типа снова есть окрестность того же типа. То есть, пересечение проколотых окрестностей точки есть проколотая окрестность точки, пересечение правосторонних окрестностей точки есть правосторонняя окрестность точки и так далее.

1.4.3. Индуцированные системы окрестностей

Пусть E и L – некоторые множества, $E \subset L$ и в L введена система U окрестностей каждой точки. Введём в E систему V окрестностей точек следующим образом. Для каждой точки x из E окрестностью V_x этой точки назовём множество, являющееся пересечением окрестности $U_x \in U$ этой точки в L с E, то есть $V_x = U_x \cap E$. В этом случае говорят, что система V окрестностей в E порождена (индуцирована) системой U окрестностей точек в L. В частности, рассмотренная выше система интервалов, являющаяся системой окрестностей точек из R, порождает на ограниченном интервале (a, b) односторонние окрестности точек a и b соответственно. Всюду ниже, в случаях, когда область определения X функции не совпадает с R^n, $n = 1, 2, \ldots$, будем считать, не оговаривая особо, что в X введена индуцированная из R^n система окрестностей.

1.5. Предел функции

1.5.1. Понятие предела функции

Приступим к изучению понятия предела функции – основы многих построений математического анализа.

В рамках этого параграфа, если не оговорено противное, будем считать, что $X \subseteq R^n$, $Y \subseteq R^m$ и $f : X \to Y$, точка x_0 предполагается предельной для X, на множествах X и Y заданы некоторые системы окрестностей точек этих множеств.

> *Определение* 1. Точка $A \in R^m$ называется пределом функции f при x, стремящемся к x_0 $(x \to x_0)$, если для всякой окрестности $U(A)$ точки A существует проколотая окрестность $V^{\Pi}(x_0)$ точки x_0 такая, что для всякой

точки x, принадлежащей $V^{\Pi}(x_0)$ $(\forall x \in V^{\Pi}(x_0))$, имеет место включение $f(x) \in U(A)$ $(f(V^{\Pi}(x_0)) \subseteq U(A))$.

Факт, что A есть предел f при $x \to x_0$, обозначается записью

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Часто вместо произвольных окрестностей в определении предела используют соответствующие симметричные окрестности $U_\varepsilon(A)$ при произвольном $\varepsilon > 0$ и $V_\delta^{\Pi}(x_0)$ при произвольном $\delta > 0$ точек $A \in R^m$ и $x_0 \in R^n$ соответственно. Получающееся при этом определение выглядит следующим образом.

Определение 2. Точка $A \in R^m$ называется пределом функции f при $x \to x_0$, если для всякой симметричной окрестности $U_\varepsilon(A)$ точки $A \in R^m$ существует проколотая симметричная окрестность $V_\delta^{\Pi}(x_0)$ точки x_0 такая, что $\forall x \in V_\delta^{\Pi}(x_0)$ имеет место включение $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ $(f(V_\delta^{\Pi}(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(A))$.

Как видим, с формальной точки зрения, мало что изменилось. Просто, вместо одного типа окрестности поставили другой. Тем не менее, так как в определениях 1 и 2 участвуют разные типы окрестностей, то возникает вопрос о соотношении между пределами функции f при $x \to x_0$, получаемыми по этим определениям. Оказывается, что в данном случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. Определения предела 1 и 2 эквивалентны в том смысле, что если A есть предел f при $x \to x_0$ по определению 1, то A – предел f при $x \to x_0$ по определению 2 и наоборот.

Доказательство. Пусть $A = \lim_{x \to x_0} f(x)$ по определению 1. Возьмем произвольную симметричную окрестность $U_\varepsilon(A)$ точки A и зафиксируем её на процесс дальнейших рассуждений.

Так как $U_\varepsilon(A)$ является окрестностью точки A, то по определению 1 найдется проколотая окрестность $V^{\Pi}(x_0)$ точки x_0 такая, что $\forall x \in V^{\Pi}(x_0)$ значения $f(x) \in U_\varepsilon(A)$. Пусть теперь $V_\delta^{\Pi}(x_0)$ – симметричная проколотая окрестность, лежащая в $V^{\Pi}(x_0)$. Тогда, если $x \in V_\delta^{\Pi}(x_0)$, то $x \in V^{\Pi}(x_0)$ и, следовательно, $f(x) \in U_\varepsilon(A)$, т.е. A есть предел функции f по определению 2.

Пусть теперь $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ по определению 2 и пусть $U(A)$ – произвольная окрестность точки A. Зафиксируем её. Возьмём произвольную симметричную окрестность $U_\varepsilon(A)$, целиком лежащую в $U(A)$. Тогда по определению 2 существует окрестность $V_\delta^{\Pi}(x_0)$ такая, что $\forall x \in V_\delta^{\Pi}(x_0)$ имеет место включение $f(x) \in U_\varepsilon(A) \subset U(A)$, т.е. A является пределом функции f по определению 1. Теорема доказана.

Аналогично показывается, что если в определениях предела 1 и 2 вместо шаровых окрестностей точки взять окрестности на основе параллелепипеда, то получаются понятия предела эквивалентные как исходным, так и между собой, потому что в каждой шаровой окрестности содержится окрестность на основе параллелепипеда и наоборот в каждой окрестности на основе параллелепипеда содержится шаровая окрестность точки. То же самое получится, если построить определение предела с помощью других типов окрестностей, обладающих тем же свойством: каждая окрестность выбранного семейства содержится в шаровой окрестности и в каждой окрестности семейства содержится шаровая окрестность точки.

Заметим, однако, что в общем случае определения предела, сформулированные с помощью разного типа окрестностей, не обязаны совпадать, например, вводимые далее в п. 1.5.3 определения левостороннего и правостороннего пределов, которые получаются с помощью односторонних окрестностей точки на вещественной прямой, не совпадают с данным выше определением предела. Возникающие на этом пути ситуации изучаются в топологии.

Введённое понятие предела можно использовать и в самом общем случае для любых множеств в которых введено понятие окрестности точки, в том числе и для метрических пространств.

Аналогично можно определить понятие предела функции при $x \to \infty$. Для этого вместо окрестностей $V^{\Pi}(x_0)$ в определении 1 и $V_{\delta}^{\Pi}(x_0)$ в определении 2 нужно взять окрестности $V(\infty)$, $V_{\delta}(\infty)$ соответственно. Предлагается самостоятельно сформулировать эти определения.

Иногда удобнее пользоваться эквивалентными определениями предела, записанными с помощью неравенств. Вспоминая задание различных окрестностей неравенствами, приведем некоторые из них. Пусть f – скалярная функция одной переменной, т.е. область задания X и область значений Y функции f являются подмножествами множества вещественных чисел R. Пусть, далее, $x_0 \in X$ и $A \in Y$ – конечные точки. В этом случае определение предела на языке неравенств приобретает следующий вид.

Определение 3. Число A называется пределом функции f при $x \to x_0$ ($A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из выполнения неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует справедливость неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$).

Если A – бесконечно удаленная точка, то соответствующее определение формулируется следующим ниже образом.

Определение 4. Говорят, что предел функции f при $x \to x_0$ равен бесконечности ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$), если для всякого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что, как только выполнено неравенство $0 < |x - x_0| < \delta$, тотчас выполняется неравенство $|f(x)| > M$ ($\forall M > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta$ $\Rightarrow |f(x)| > M$).

Сформулировать определения на языке неравенств для случаев $x_0 = \infty$, A – конечно и $x_0 = \infty$, $A = \infty$ предлагается самостоятельно.

Пусть теперь f – скалярная функция многих переменных, $x_0 \in X \subset R^n$ – конечная точка, $A \in R$ – конечное число. Тогда с помощью неравенств на основе окрестностей $\Pi_{\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n}(x_0)$ соответствующее определение предела приобретает нижеследующий вид.

Определение 5. Число A называется пределом функции f при $x \to x_0$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0, \ldots, \delta_n > 0$ такие, что как только $0 < |\xi^i - \xi_0^i| < \delta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n,$ тотчас $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Сформулировать определения для остальных возможных здесь случаев, а также на основе окрестностей $U_\delta(x_0)$, предлагается самостоятельно.

Пространство R^n с введёнными выше понятиями окрестности точки при всяком n обладает интересным свойством выражающемся в том, что для любых двух различных точек этого пространства существуют непересекающиеся окрестности этих точек. Пространства с указанным свойством, называются отделимыми. Таким образом, R^n с системой окрестностей построенной на основе шара или параллепипеда – отделимое пространство. Свойство отделимости пространства R^n существенно используется при доказательстве следующей, весьма естественной, на первый взгляд очевидной и вместе с тем очень важной теоремы.

Теорема 1.4. Пусть $f : X \to Y$ и Y – подмножество отделимого пространства. Если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то этот предел единственный.

Доказательство. Предположим, что при $x \to x_0$ функция f имеет два предела A_1 и A_2, причем $A_1 \neq A_2$. Это означает, что для всякой окрестности $U(A_1)$ точки A_1 существует проколотая окрестность $V_1^{\Pi}(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности ($\forall x \in V_1^{\Pi}(x_0)$) имеет место включение

$$f(x) \in U(A_1). \tag{1.5}$$

С другой стороны, для всякой окрестности $U(A_2)$ точки A_2 существует проколотая окрестность $V_2^{\Pi}(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности ($\forall x \in V_2^{\Pi}(x_0)$) имеет место включение

$$f(x) \in U(A_2). \tag{1.6}$$

Пусть $U(A_1)$ и $U(A_2)$ – непересекающиеся окрестности точек A_1 и A_2; $V_1^{\Pi}(x_0)$, $V_2^{\Pi}(x_0)$ – окрестности точки x_0, для которых выполнены включения (1.5) и (1.6); положим $V^{\Pi}(x_0) = V_1^{\Pi}(x_0) \cap V_2^{\Pi}(x_0)$. Тогда $V^{\Pi}(x_0)$ – окрестность точки x_0 такая, что для всякого x из $V^{\Pi}(x_0)$ выполнены как включение (1.5), так и включение (1.6), что противоречит выбору окрестностей $U(A_1)$ и $U(A_2)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Имеется много различных способов практического отыскания предела. Некоторые из них мы изучим в нашем курсе. Из теоремы 1.4 следует, что значение предела в отделимом пространстве не может зависеть от способа его отыскания. Кроме того, если при разных способах нахождения предела получаем разный результат, то предел не существует.

Замечание. Пусть $f : X \to Y$ и $U(A)$ – некоторая окрестность точки A. Рассмотрим включение $f(x) \in U(A)$. Его решением является множество $\{x \in X : f(x) \in U(A)\}$. Если это решение или некоторая его часть содержит проколотую окрестность точки x_0, то $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, если же решение этого включения не содержит проколотой окрестности точки x_0, то

$A \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Для систем окрестностей, задаваемых неравенствами, выполнение включения $f(x) \in U(A)$ эквивалентно выполнению неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$. Если решение этого неравенства или некоторая его часть содержит проколотую окрестность точки x_0, то $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, если же решение неравенства не содержит проколотую окрестности точки x_0, то $A \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Сделанное замечание позволяет сформулировать эквивалентное исходному определение предела.

Определение 6. Будем говорить, что $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, если для всякой окрестности $U(A)$ точки A множество точек $\{x \in X : f(x) \in U(A)\}$, являющееся решением включения $f(x) \in U(A)$, содержит проколотую окрестность точки x_0.

Вспоминая задание окрестности неравенствами, получаем в случае, когда A – конечная точка, определение предела на языке неравенств.

Определение 7. Будем говорить, что $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ множество решений неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$ содержит проколотую окрестность точки x_0.

Пример 1. Рассмотрим неравенство $|x^2 - 9| < \varepsilon$. Его решением, при любом $\varepsilon > 0$, является объединение интервалов $\sqrt{9 - \varepsilon} < x < \sqrt{9 + \varepsilon}$ и $-\sqrt{9 + \varepsilon} < x < -\sqrt{9 - \varepsilon}$. Первый из них является окрестностью точки $x_0 = 3$ и поэтому $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$, второй есть окрестность точки $x_0 = -3$ и поэтому $\lim\limits_{x \to -3} x^2 = 9$. С другой стороны, при $\varepsilon < 5$, это решение не содержит точку $x_0 = 2$ и поэтому не может являться окрестностью точки $x_0 = 2$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 2} x^2 \neq 9$.

Пример 2. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно. Позже (в п. 1.7.1) будет показано, что $|\sin x| < |x|$. Поэтому, множество решений неравенства $|\sin x - 0| = |\sin x| < \varepsilon$, содержит в себе множество решений неравенства $|x| < \varepsilon$, являющееся интервалом $-\varepsilon < x < \varepsilon$, содержащим точку $x = 0$ и, следовательно, окрестностью точки $x = 0$. Поэтому, по определению 7, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

Пример 3. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Так как $|1-\cos x| = 2\sin^2\frac{x}{2} \le \frac{x^2}{2}$, то множество решений неравенства $|1-\cos x| < \varepsilon$ содержит в себе множество решений неравенства $\frac{x^2}{2} < \varepsilon$. Решением последнего является интервал $|x| < \sqrt{2\varepsilon}$, содержащий точку $x = 0$ и, следовательно, являющийся окрестностью точки x=0. Поэтому, по определению 7, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Замечание. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ таковы, что $|f(x)| \le |\varphi(x)|$. Тогда из неравенства $|\varphi(x)| < \varepsilon$ следует справедливость неравенства $|f(x)| < \varepsilon$. Если при этом множество решений более грубого неравенства $|\varphi(x)| < \varepsilon$ обладает некоторым свойством (в примерах 2 и 3 содержит окрестность точки $x_0 = 0$),то этим же свойством обладает и множество решений более тонкого неравенства $|f(x)| < \varepsilon$. С другой стороны, если множество решений более грубого неравенства некоторым свойством не обладает, то это не означает, что множество решений более тонкого неравенства также не обладает этим свойством. Может оказаться, что найти решения неравенства $|\varphi(x)| < \varepsilon$ легче, чем найти решения неравенства $|f(x)| < \varepsilon$.

Проиллюстрируем переход к более грубому неравенству, множество решений которого найти легче, чем найти множество решений исходного неравенства, на ещё одном примере.

Пример 4. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+3}=\sqrt{5}$. Рассмотрим неравенство $\left|\sqrt{x+3}-\sqrt{5}\right|<\varepsilon$. Преобразуя левую часть этого неравенства, имеем

$$\left|\sqrt{x+3}-\sqrt{5}\right|=\frac{\left|\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5}\right)\right|}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{|x+3-5|}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}=\frac{|x-2|}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}.$$

При $x\ge -3$ можем записать $\sqrt{x+3}+\sqrt{5}\ge\sqrt{5}>2$. Поэтому $\left|\sqrt{x+3}-\sqrt{5}\right|=\dfrac{|x-2|}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}<\dfrac{|x-2|}{2}$. Решение более грубого неравенства $\dfrac{|x-2|}{2}<\varepsilon$ содержит при любом $\varepsilon>0$ окрестность точки $x_0=2$, что и доказывает справедливость равенства $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+3}=\sqrt{5}$.

Пример 5. Покажем теперь, что $\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)=0.$

Из неравенства $\left|\log_a(1+x)-0\right|<\varepsilon$ следует неравенство $-\varepsilon<\log_a(1+x)<\varepsilon$. Пусть $a>1$. Тогда $a^{-\varepsilon}<1+x<a^{\varepsilon}$, т. е. $a^{-\varepsilon}-1<x<a^{\varepsilon}-1$. Последнее неравенство определяет окрестность $V(x_0)$ точки $x_0=0$, так как $a^{-\varepsilon}-1<0$, а $a^{\varepsilon}-1>0$. Таким образом, для всякого x из $(a^{-\varepsilon}-1, a^{\varepsilon}-1)$ справедливо неравенство $\left|\log_a(1+x)\right|<\varepsilon$, означающее, что $\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)=0.$ Аналогично, в случае $0<a<1$, нужная нам окрестность точки $x_0=0$ задана неравенством $a^{\varepsilon}-1<x<a^{-\varepsilon}-1$.

Пример 6. Предлагается доказать самостоятельно, что $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

Пример 7. Докажем, что $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 + y^2) = 2$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно. Множество

$$V_{\delta_1\delta_2}(1{,}1) = \left\{ (x,y) \in R^2 : \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}} < x < \sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}},\ \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}} < y < \sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}} \right\}$$

является окрестностью точки $(1{,}1)$, так как $\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}} < 1$, а $\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}} > 1$ при любом $\varepsilon > 0$, и входит в множество решений неравенства $\left|2 - x^2 - y^2\right| < \varepsilon$. Действительно, $\forall (x,y) \in V_{\delta_1\delta_2}(1{,}1)$ выполняется неравенство $2 - \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) < 2 - x^2 - y^2 < 2 - \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ или, после приведения подобных, неравенство $-\varepsilon < 2 - x^2 - y^2 < \varepsilon$, эквивалентное исходному. Следовательно, по определению 7, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 + y^2) = 2$.

1.5.2. Последовательность и ее предел

Важную роль в анализе играет частный случай функции – последовательность.

Определение 1. Функция, заданная на множестве натуральных чисел и записанная в порядке их возрастания, называется последовательностью.

Вместо $f(n),\ n = 1,2,...,$ обычно пишут $\{a_n\},\ n = 1,2,...,$ $\{a_n\}_1^{\infty}$ или $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Если a_n – действительные числа, то последовательность называется скалярной, или числовой последовательностью, а когда a_n – векторы из R^k, то последовательность называется векторной. В случае, когда a_n – функции, имеем функциональную последовательность.

Примеры последовательностей:

$$f(n)=a_n=\frac{1}{n};\quad 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots;$$

$$f(n)=a_n=\frac{1}{n^2};\quad 1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\ldots,\frac{1}{n^2},\ldots;$$

$$f(n)=a_n=\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2}\right);\quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right),\ldots,\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2}\right),\ldots;$$

$$f_{n-1}(x)=\cos(n-1)x;\ 1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos(n-1)x,\ \ldots;$$

$$f_{n-1}(x)=x^{n-1};\ 1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{n-1},\ \ldots\ .$$

Как и для любых скалярных функций скалярного аргумента, для числовых последовательностей вводятся понятия возрастающей, убывающей, неубывающей, невозрастающей, ограниченной, неограниченной последовательностей. Определение этих понятий и соответствующие примеры предлагается привести самостоятельно, например, последовательность $f(n)=\frac{n-1}{n}$ является возрастающей, последовательность $f(n)=\frac{n+1}{n}$ – убывающая, а последовательность $f(n)=1+(-1)^n$ – ограничена сверху и снизу.

Заметим, что задание векторной последовательности $a_n=(a_n^1,a_n^2,\ldots,a_n^k),\ n=1,2,\ldots,\ a_n\in R^k,$ при выбранном базисе в R^k равносильно заданию k числовых последовательностей $\{a_n^1\},\ \{a_n^2\},\ldots,\{a_n^k\},\ n=1,2,\ldots,$ называемых координатными последовательностями.

Сформулируем определение предела последовательности. Поскольку множество **N** натуральных чисел имеет единственную предельную точку $+\infty$, то для функций $f(n)$ имеет смысл рассматривать только случай $n\to+\infty$. Обычно при этом знак "+" опускают. Напомним, что окрестность $V_M(+\infty)$ точки $+\infty$ в R имеет вид $V_M(+\infty)=\{x\in R:\ x>M\}$. Поэтому индуцированная система окрестностей точки $+\infty$ в **N** состоит из множеств

$V_M(+\infty)=\{n\in\mathbf{N}: n>M\}=V_N(+\infty)=\{n\in\mathbf{N}: n>N\}$, где $N=[M]$ – целая часть числа M .

Определение 2. Точка A называется пределом последовательности $\{a_n\}_1^\infty$ при n, стремящемся к бесконечности ($A=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$), если для всякой окрестности $U_\varepsilon(A)$ точки A существует окрестность $V_N(+\infty)$, зависящая от выбора окрестности $U_\varepsilon(A)$, такая, что для всех $n\in V_N(+\infty)$ выполнено включение $a_n\in U_\varepsilon(A)$.

Используем в определении 2 запись окрестностей в R и R^k в виде неравенств. Тогда, если $\{a_n\}_1^\infty$ – числовая последовательность и A – конечное число, то на языке неравенств соответствующее определение примет нижеследующий вид.

Определение 3. Число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}_1^\infty$ при n, стремящемся к бесконечности ($A=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$), если для всякого $\varepsilon>0$ существует число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|a_n-A|<\varepsilon$.

Если $\{a_n\}_1^\infty\subset R^k$ (a_n – точки k-мерного пространства) и $A\in R^k$ – конечная точка, то определение предела на языке неравенств, полученное на основе шаровых окрестностей $U_\varepsilon(A)$, приобретает нижеследующий вид.

Определение 4. Точка $A=\left(A^1,A^2,...,A^k\right)$ есть предел последовательности $\{a_n\}_1^\infty=\left\{\left(a_n^1,a_n^2,...,a_n^k\right)\right\}_1^\infty$ при n, стремящемся к бесконечности ($A=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$), если для всякого $\varepsilon>0$ существует число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{k}\left(a_n^i-A^i\right)^2<\varepsilon^2.$$

Определение на основе параллелепипеидальных окрестностей $\Pi_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\,\varepsilon_k}(A)$ предлагается сформулировать самостоятельно.

Введённое с помощью неравенств понятие предела последовательности легко обобщается на случай метрических пространств. Выглядит оно при этом следующим образом.

Определение 5. Точка A из метрического пространства называется пределом последовательности $\{a_n\}_1^\infty$ точек этого пространства при n, стремящемся к бесконечности ($A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(a_n, A) < \varepsilon$.

Последовательность, имеющую конечный предел A, назовем сходящейся. Будем при этом говорить, что последовательность $\{a_n\}_1^\infty$ сходится к точке A. Если же предела не существует или он бесконечен, то последовательность назовем расходящейся.

Отметим следующий результат.

Теорема 1.5. Для того, чтобы последовательность $\{a_n\}_1^\infty = \{(a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^k\}_1^\infty$ точек (векторов) пространства R^k сходилась к точке (вектору) $A = (A^1, A^2, \ldots, A^k)$, т.е. чтобы $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, необходимо и достаточно, чтобы каждая координатная последовательность $\{a_n^i\}_1^\infty$, $i = 1,2,\ldots,k$, сходилась и при этом имело место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^i = A^i$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} (a_n^i - A^i)^2 < \varepsilon^2. \tag{1.7}$$

Далее, для любого $n = 1,2,...$ имеет место неравенство

$$(a_n^i - A^i)^2 \le \sum_{j=1}^{k} (a_n^j - A^j)^2,\ i = 1,2,...,k,$$

откуда, с учетом (1.7), получаем

$$(a_n^i - A^i)^2 < \varepsilon^2,\ i = 1,2,...,k,$$

или, что то же самое,

$$\left|a_n^i - A^i\right| < \varepsilon,\ i = 1,2,...,k,$$

для всякого $n > N(\varepsilon)$, что и доказывает необходимость.

Ещё проще необходимость доказывается, если воспользоваться определением предела последовательности в R^k на основе окрестностей $\Pi_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_k}(A)$.

Достаточность. Пусть для всякого $i = 1,2,...,k$ имеет место соотношение $A^i = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^i$. На языке неравенств это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существуют числа $N_i(\varepsilon),\ i = 1,2,...k$, такие, что для $n > N_i(\varepsilon)$ выполнены неравенства

$$\left|a_n^i - A^i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}},\ i = 1,2,...,k. \tag{1.8}$$

Положим $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon),..., N_k(\varepsilon)\} = \max\limits_{i=1,...,k}\{N_i(\varepsilon)\}$. Тогда для номеров $n > N$ выполнены неравенства (1.8) для всех $i = 1,2,...,k$ сразу. Откуда

$$\sum_{i=1}^{k}\left|a_n^i - A^i\right|^2 = \sum_{i=1}^{k}(a_n^i - A^i)^2 < \sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon^2}{k} = \varepsilon^2.$$

для любого $n > N$, что доказывает достаточность. Теорема доказана.

Приведём без доказательства важный критерий сходимости последовательности называемый критерием Коши.

Теорема 1.6 (критерий Коши**).** Для того, чтобы числовая последовательность $\{a_n\}_1^\infty$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n, m > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

В силу теоремы 1.5 этот критерий легко распространяется и на случай векторных последовательностей.

Отметим понятие близкое к понятию предела последовательности.

Определение 6. Последовательность $\{a_n\}_1^\infty$ точек метрического пространства называется фундаментальной, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n, m > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(a_n, a_m) < \varepsilon$.

Легко показывается, что всякая сходящаяся последовательность точек метрического пространства является фундаментальной. Действительно, если последовательность $\{a_n\}_1^\infty$ сходится и $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(a_n, a) < \varepsilon$. Тогда для всех $n, m > N(\varepsilon)$ можно записать $\rho(a_n, a_m) \le \rho(a_n, a) + \rho(a, a_m) < 2\varepsilon$, что и доказывает наше утверждение. Обратное утверждение не для всех метрических пространств верно. Например, если в качестве метрического пространства взять множество рациональных чисел с обычным для числовой прямой расстоянием между числами равным модулю разности этих чисел, то любая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к иррациональному числу, будет фундаментальной, но не сходящейся на множестве рациональных чисел. Метрические пространсва, в которых каждая фундаментальная последовательность сходится, называются полными метрическими пространствами. Отметим, что множества R и R^k с обычным для них расстоянием между точками являются полными пространствами и критерий Коши сходимости последовательностей в этих пространствах есть не что иное, как утверждение о их полноте.

Пример 1. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Пусть $\varepsilon>0$ произвольно. Так как $\left|0-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ при $n>\frac{1}{\varepsilon}$, то в качестве числа N можно взять любое число, большее $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда для всякого $n>N$ будет выполнено неравенство $|a_n|=a_n<\frac{1}{\varepsilon}$, означающее, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Пример 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, так как $\left|1-\frac{n+1}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ при всех $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

Пример 3. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n};\ \frac{n+1}{n}\right)=(0;1)$ по теореме 1.5, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

Пример 4. Последовательность $\{a_n\}_1^\infty=\{1+(-1)^n\}=$ $=\{0,2,0,2,...\}$ предела не имеет, так как ее члены с ростом n не приближаются ни к какому числу.

Основываясь на понятии предела последовательности, можно сформулировать определение предела функции на языке последовательностей, называемое в литературе определением Гейне, в отличие от определения на языке окрестностей, называемого определением Коши.

Определение 7 (Гейне). Говорят, что $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если для всякой последовательности точек $\{x_n\}_1^\infty$ $(x\neq x_0)$ из области определения функции, сходящейся к точке x_0

($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность точек $\{f(x_n)\}_1^\infty$ имеет пределом точку A ($\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$).

Отметим справедливость весьма важной теоремы.

Теорема 1.7. Определения предела функции по Коши и Гейне эквивалентны в том смысле, что если A есть предел функции f при x, стремящемся к x_0, по определению Коши, то A является пределом функции f при x, стремящемся к x_0, по определению Гейне и наоборот.

Доказательство того, что если $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по определению Коши, то $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по определению Гейне, очевидно. В обратную сторону доказательство значительно сложнее и желающие могут ознакомиться с ним в [8].

Мы будем пользоваться тем определением, которое нам в данный момент удобнее.

Пользуясь определением 7, докажем, что

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0. \tag{1.9}$$

Пусть $\{x_n, y_n\}_1^\infty$ – некоторая последовательность точек, такая, что $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$. Перейдем к полярным координатам, положив $x_n = r_n \cos\varphi_n$, $y_n = r_n \sin\varphi_n$. Ясно, что при $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ величина $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Имеем для всякого $n = 1,2,...$

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n + y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{r_n(\cos\varphi_n + \sin\varphi_n)}{r_n^2} = \frac{\cos\varphi_n + \sin\varphi_n}{r_n}.$$

Так как величина $|\cos\varphi_n + \sin\varphi_n| < 3$ при любом φ_n, то $\left|0 - \frac{\cos\varphi_n + \sin\varphi_n}{r_n}\right| < \frac{3}{r_n} < \varepsilon$ при $r_n > \frac{3}{\varepsilon}$. Отсюда следует, что

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n + y_n}{x_n^2 + y_n^2} = 0$ и, в силу произвольности последовательности $\{x_n, y_n\}_1^\infty$, по определению 7 – равенство (1.9).

Теорема 1.4 и определение 7 удобны для показа отсутствия предела. Продемонстрируем это на примерах.

Пример 5. Покажем, с использованием определения 7, что $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ не существует. Для этого достаточно подобрать две последовательности $x_n \to \infty$ и $y_n \to \infty$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} \sin y_n$. Последнее легко увидеть, если положить $x_n = n\pi,\ y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n = 1,2,\ldots$. Действительно,

$\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\pi = 0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.$

Пример 6. Покажем, что функция $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ не имеет предела при $(x, y) \to (0,0)$. Действительно, пусть $y = kx$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$ и, следовательно, $(x, y) \to (0,0)$ при $x \to 0$. Имеем

$$\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Таким образом, видим, что предел рассматриваемой функции зависит от углового коэффициента прямой, по которой мы приближаемся к началу координат, что и доказывает наше утверждение, так как, взяв разные k, получаем разные пределы, чего не может быть в силу единственности предела (теорема 1.4).

Следствием теоремы 1.5 и определения 7 является следующая теорема.

Теорема 1.7. Пусть $f : X \subseteq R^n \to Y \subseteq R^k$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots \\ f_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \\ f_2(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \\ \ldots \\ f_k(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \end{pmatrix}$$

и $x_0=(\xi_0^1,\xi_0^2,...,\xi_0^n)$ – предельная точка множества X. Для того,

чтобы функция $f(x)$ имела предел при $x=(\xi^1,\xi^2,...,\xi^n)$, стремящемся к $x_0=(\xi_0^1,\xi_0^2,...,\xi_0^n)$, и этот предел равнялся $A=(A^1,A^2,...,A^k)$ необходимо и достаточно, чтобы все координатные функции $f_i(\xi^1,\xi^2,...,\xi^n)$ имели предел и при этом

$$\lim_{x\to x_0} f_i(\xi^1,\xi^2,...,\xi^n)=A^i,\quad i=1,2,...,k..$$

1.5.3. Односторонние пределы

Пусть $f:X\subseteq R\to Y\subseteq R^k$ – функция одной переменной. В этом случае есть возможность рассматривать так называемые односторонние пределы, получающиеся из определений 1 и 2 предыдущего параграфа при замене произвольных окрестностей односторонними окрестностями точек x_0 и ∞. Сформулируем, например, определение левостороннего предела.

Определение 1. Говорят, что точка A есть предел функции $f:X\subseteq R\to Y\subseteq R$ при x, стремящемся к x_0 слева (обозначают $A=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$), если для всякой окрестности $U(A)$ точки A существует левосторонняя окрестность $V^-(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x\in V^-(x_0)$ справедливо включение $f(x)\in U(A)$.

Аналогично можно определить понятие предела при x, стремящемся к x_0 справа ($x\to x_0+0$) и при x, стремящемся к $+\infty$ и к $-\infty$.

Заметим также, что если $x_0=0$, то пишут $x\to+0$ для правостороннего и $x\to-0$ для левостороннего предела.

Как видим, формально мало что изменилось. Качественно же получили совершенно другое понятие, что видно на примере функции $\operatorname{sign} x$ (знак x), определяемой выражением

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

которая в точке $x = 0$ предела не имеет, а правосторонний и левосторонний пределы существуют и равны, соответственно, 1 и -1.

Приведем для скалярных функций одного переменного некоторые из определений односторонних пределов на языке неравенств.

Определение 2. Говорят, что точка A есть предел функции $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$ при x, стремящемся к x_0 справа ($A = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, или, используя символическую запись,

$$(\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \; x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Определение левостороннего предела аналогично, с учетом того, что левосторонняя окрестность точки x_0 задается неравенствами $x_0 - \delta < x < x_0$. Предлагается сформулировать это определение самостоятельно.

Пусть теперь $x \to +\infty$. Соответствующее определение будет выглядеть следующим образом.

Определение 3. Точка A есть предел функции f при $x \to +\infty$ ($A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует M такое, что для всех $x > M$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение предела при x, стремящемся к $-\infty$, предлагается сформулировать самостоятельно.

Если f – скалярная функция, то можно рассматривать также односторонние пределы в области значений, например, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A+0,$ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A-0,$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty,$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ и т.д. Их введение и формулировка определений не представляет трудности и читателю предлагается проделать это самостоятельно.

Между пределами и односторонними пределами существует связь, выражаемая следующей теоремой.

Теорема 1.8. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то существуют $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x),$ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x),$ также равные A, и наоборот, если существуют $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x),$ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x),$ равные оба A, то существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Доказательство нетрудно и основывается на том факте, что проколотая окрестность точки x_0 есть объединение левосторонней и правосторонней окрестностей точки x_0. Действительно, пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Тогда, по определению, для всякой окрестности $U(A)$ точки A существует проколотая окрестность $V_\delta^{П}(x_0)=\{x\in R: 0<|x-x_0|<\delta\}$ точки x_0 такая, что для всех $x\in V_\delta^{П}(x_0)$ $f(x)\in U(A)$. Следовательно, включение $f(x)\in U(A)$ одновременно выполнено и для всех $x\in V_\delta^{-}(x_0)=\{x\in R: x_0-\delta<x<x_0\}\subset V_\delta^{П}(x_0)$, и для всех $x\in V_\delta^{+}(x_0)=\{x\in R: x_0<x<x_0+\delta\}\subset V_\delta^{П}(x_0)$, что доказывает существование левостороннего и правостороннего пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x),$ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x),$ и их равенство A.

Пусть теперь существуют $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A,$ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A,$ и $U(A)$ – произвольная окрестность точки A. Для этой окрестности существует $\delta_1 > 0$ такое, что для всех $x \in V^{-}_{\delta_1}(x_0) = \{x \in R : x_0 - \delta_1 < x < x_0\}$ выполнено включение $f(x) \in U(A)$. Далее, для той же окрестности $U(A)$ найдётся $\delta_2 > 0$ такое, что для всех $x \in V^{+}_{\delta_2}(x_0) = \{x \in R : x_0 < x < x_0 + \delta_2\}$ выполнено включение $f(x) \in U(A)$. Но тогда включение $f(x) \in U(A)$ выполнено для всех x из окрестности $V^{\Pi}_{\delta_1, \delta_2}(x_0) = V^{-}_{\delta_1}(x_0) \cup V^{+}_{\delta_2}(x_0) = \{x \in R : x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_2,\ x \neq x_0\}$, что и доказывает теорему.

Пример 1. Непосредственно из определения функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ следует, что

$$\lim_{x \to +0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to -0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Пусть $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \le 2, \\ x+1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$ Тогда

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2}(x-1) = 1, \quad \lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2}(x+1) = 3.$$

Пример 3. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ имеет лишь правый предел $\lim\limits_{x \to +0} \sqrt{x} = 0.$

Пример 4. $\lim\limits_{x \to +0} \sqrt[3]{x} = \lim\limits_{x \to -0} \sqrt[3]{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0.$

1.5.4. Повторные пределы

В рамках этого параграфа, если не оговорено противное, будем предполагать, что $f : X \subseteq R^2 \to Y \subseteq R$, т.е. f – скалярная функция двух переменных, так как этого достаточно для показа особенностей, возникающих для функции многих переменных.

Зафиксируем y и рассмотрим $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$. Этот предел, если он существует, зависит от y. Обозначим его через $\varphi(y)$ и рассмотрим

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right). \qquad (1.10)$$

Этот предел называется повторным пределом, в отличие от рассмотренного ранее предела

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to y_0}} f(x,y), \qquad (1.11)$$

называемого двойным.

Аналогично вводится второй возможный для функции двух переменных повторный предел

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right). \qquad (1.12)$$

Связь между пределом (1.11) функции f при $(x,y)\to(x_0,y_0)$ и повторными пределами (1.10), (1.12) выражается теоремой.

Теорема 1.9. Если существует двойной предел (1.11), равный A, и для всякого фиксированного y существует $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, то существует повторный предел (1.10), также равный A. Аналогично, если существует двойной предел (1.11), равный A, и для всякого фиксированного x существует $\psi(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, то существует повторный предел (1.12), также равный A.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы о существовании повторного предела (1.10). Вторая часть, о существовании предела (1.12), доказывается аналогично. Ограничимся случаем, когда A, x_0, y_0 – конечные точки. Доказательство проведем на языке неравенств. Т.к. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to y_0}} f(x,y)=A$, то для всякого $\varepsilon>0$ существуют δ_1,δ_2 такие, что для всех x,y, удовлетворяющих неравенствам $0<|x-x_0|<\delta_1$, $0<|y-y_0|<\delta_2$ выполнено неравенство

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon. \qquad (1.13)$$

Фиксируя y из $\{y \in R:\ 0 < |y - y_0| < \delta_2\}$ и переходя в (1.13) к пределу при $x \to x_0$, имеем

$$|\varphi(y) - A| \le \varepsilon$$

для всякого y, удовлетворяющего неравенству $0 < |y - y_0| < \delta_2$, что и завершает доказательство.

Аналогично могут быть введены повторные пределы и для функций большего числа переменных.

Отметим, что из существования повторных пределов вовсе не следует существование двойного предела. Рассмотрим пример. Ранее мы показали, что функция $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ при $(x, y) \to (0,0)$ предела не имеет (см. 1.5.2). Легко показать, что оба повторных предела для этой функции существуют и равны нулю.

Из существования двойного предела не следует существования повторных. Например, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y} = 0$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Возьмем $\delta = \varepsilon$. Тогда, при $|x| < \delta$, для всех точек $(x, y) \in V_\delta(0,0)$ имеет место неравенство $\left|0 - x \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}\right| \le |x| < \varepsilon$, означающее по определению предела, что $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y} = 0$. С другой стороны, повторный предел $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} x \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}$ не существует, так как при любом фиксированном x не существует $\psi(x) = \lim\limits_{y\to 0} x \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}$.

1.5.5. Теоремы о пределах

Сформулируем и докажем несколько общих результатов, полезных при нахождении пределов.

Теорема 1.10. Всякая функция, имеющая при $x \to x_0$ конечный предел, ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Доказательство проведем для скалярной функции f. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и A – конечно. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует проколотая окрестность $V^{\Pi}(x_0)$ такая, что для всякого $x \in V^{\Pi}(x_0)$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, или, что то же самое, $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Последнее и означает утверждение теоремы.

Теорема 1.11. Пусть $f, \varphi : X \subseteq R^n \to Y \subseteq R^k$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$ (A и B конечны). Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} (f + \varphi)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + \varphi(x))$ существует и равен $A + B$.

Доказательство. Докажем теорему для случая $f, \varphi : X \subseteq R^n \to Y \subseteq R$, т.е. для скалярнозначных функций f и φ. Так как $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V_1^{\Pi}(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.14}$$

Далее, так как $B = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V_2^{\Pi}(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности

$$|\varphi(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.15}$$

Положим $V^{\Pi}(x_0) = V_1^{\Pi}(x_0) \cap V_2^{\Pi}(x_0)$. Тогда для всякого x из $V^{\Pi}(x_0)$ одновременно выполнены неравенства (1.14) и (1.15) и, следовательно, неравенство

$$\left| f(x)+\varphi(x)-(A+B)\right| = \left| f(x)-A+\varphi(x)-B\right| \le$$
$$\le \left| f(x)-A\right| + \left|\varphi(x)-B\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon ,$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Теорема 1.12. Пусть $f,\varphi: X\subseteq R^n \to Y\subseteq R$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$ (A и B конечны). Тогда существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/\varphi(x)$ (при $B\ne 0$), равные соответственно $A\cdot B$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x)=A\cdot B$) и A/B ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/\varphi(x)=A/B$).

Справедливость теоремы следует из цепочки соотношений

$$\left|AB-f(x)\varphi(x)\right| = \left|AB-A\varphi(x)+A\varphi(x)-f(x)\varphi(x)\right| \le$$
$$\le \left|A\right|\cdot\left|B-\varphi(x)\right| + \left|\varphi(x)\right|\cdot\left|A-f(x)\right|,$$

$$\left|\frac{A}{B}-\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| = \left|\frac{A\cdot\varphi(x)-B\cdot f(x)}{B\cdot\varphi(x)}\right| = \frac{\left|A\cdot\varphi(x)-A\cdot B+A\cdot B-B\cdot f(x)\right|}{\left|B\right|\left|\varphi(x)\right|} \le$$
$$\le \frac{\left|A\right|\cdot\left|\varphi(x)-B\right| + \left|B\right|\cdot\left|A-f(x)\right|}{\left|B\right|\cdot\left|\varphi(x)\right|}$$

и ограниченности функции, имеющей конечный предел, в окрестности предельной точки. Дальнейшее оформление доказательства предлагается проделать самостоятельно.

Доказанные теоремы о пределах можно использовать при практическом отыскании предела.

Пример 1. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+2}{1-2n-2n^2}$. Поделив числитель и знаменатель дроби на n^2, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}-2} = -\frac{1}{2},$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}-2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim_{n\to\infty}2=0-0-2=-2\neq 0$$

по теореме о пределе суммы. По этой же теореме $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)=1.$ По теореме о пределе дроби получаем, что данный предел равен $-\frac{1}{2}$.

Пример 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2+4n+2}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1-n^2-4n-2}{\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2+4n+2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n-3}{\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2+4n+2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3-\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}}=-\frac{3}{2}.$$

Мы использовали здесь теоремы о пределе суммы, дроби, а также недоказанное еще утверждение о том, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$, которое будет доказано позднее.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}.$

Так как в определении предела рассматриваются проколотые окрестности предельной точки, то $x\neq 1$, а потому $x-1\neq 0$ и можно последнюю дробь сократить на $x-1$ и получить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=\dfrac{3}{2}.$ Равенства $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$ и $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$ нетрудно установить исходя из определения. Предлагается сделать это самостоятельно.

1.5.6. Теоремы о пределах в неравенствах

Всюду в этом параграфе f – скалярнозначная функция.

Теорема 1.13. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$ и в некоторой окрестности точки x выполнено неравенство

$$f(x) \le \psi(x) \le \varphi(x). \qquad (1.16)$$

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)$ существует и равен A.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Так как $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то по определению предела для этого ε найдется проколотая окрестность $V_1^{\Pi}(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех x из $V_1^{\Pi}(x_0)$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, или, что то же самое,

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon. \qquad (1.17)$$

Аналогично, так как $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$, для того же ε существует проколотая окрестность $V_2^{\Pi}(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in V_2^{\Pi}(x_0)$ выполнено неравенство

$$A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon. \qquad (1.18)$$

Пусть $V_3(x_0)$ – окрестность точки x_0, в которой выполнено неравенство (1.16). Положим $V^{\Pi}(x_0) = V_1^{\Pi}(x_0) \cap V_2^{\Pi}(x_0) \cap V_3(x_0)$.

Заметим, что $V^{\Pi}(x_0)$ – проколотая окрестность точки x_0 и для каждой точки $x \in V^{\Pi}(x_0)$ выполнены одновременно неравенства (1.16) - (1.18). Тогда можем записать

$$A - \varepsilon < f(x) \le \psi(x) \le \varphi(x) < A + \varepsilon,$$

Отсюда $A - \varepsilon < \psi(x) < A + \varepsilon$. Последнее неравенство эквивалентно неравенству $|\psi(x) - A| < \varepsilon$, которое выполняется для всех x из $V^{\Pi}(x_0)$. Теорема доказана.

Теорема 1.14. Пусть в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство

$$f(x) \le B. \tag{1.19}$$

Тогда, если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $A \le B$.

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что условия теоремы выполнены и, тем не менее,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A > B.$$

Положим $\varepsilon = A - B$. Тогда, по определению предела, для этого ε найдется окрестность $V_1^{\Pi}(x_0)$ такая, что для всех $x \in V_1^{\Pi}(x_0)$ выполнено неравенство

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon. \tag{1.20}$$

Пусть $V_2^{\Pi}(x_0)$ – окрестность точки x_0, в которой выполнено неравенство (1.19) и $V^{\Pi}(x_0) = V_1^{\Pi}(x_0) \cap V_2^{\Pi}(x_0)$. Тогда для всякого $x \in V^{\Pi}(x_0)$ выполнено неравенство (1.20) и, следовательно,

$$f(x) > A - \varepsilon = A - (A - B) = B.$$

Полученное противоречие с неравенством (1.19) доказывает теорему.

Теорема 1.15. Пусть в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство

$$f(x) \le \varphi(x) \tag{1.21}$$

и пусть существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$. Тогда $A \le B$.

Доказательство. Допустим противное, т.е., что при выполнении условий теоремы, тем не менее, $A > B$. Положим $\varepsilon = \dfrac{A - B}{2}$. Так как $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то для $\varepsilon = \dfrac{A - B}{2}$ существует окрестность $V_1^{\Pi}(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in V_1^{\Pi}(x_0)$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon. \tag{1.22}$$

Аналогично, так как $B=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$, то для $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}$ существует окрестность $V_2^{\Pi}(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x\in V_2^{\Pi}(x_0)$ справедливо

$$B-\varepsilon<\varphi(x)<B+\varepsilon. \qquad (1.23)$$

Пусть, далее, $V_3^{\Pi}(x_0)$ – окрестность точки x_0, в которой выполнено неравенство (1.21). Положим $V^{\Pi}(x_0)=$ $=V_1^{\Pi}(x_0)\cap V_2^{\Pi}(x_0)\cap V_3^{\Pi}(x_0)$. Тогда $V^{\Pi}(x_0)$ – окрестность точки x_0 и для всех $x\in V^{\Pi}(x_0)$ выполнены одновременно неравенства (1.21) – (1.23). Далее, из неравенств (1.22), (1.23), имеем для всех $x\in V^{\Pi}(x_0)$

$$f(x)>A-\varepsilon=A-\frac{A-B}{2}=\frac{A+B}{2}=B+\frac{A-B}{2}=B+\varepsilon>\varphi(x).$$

Полученное противоречие с неравенством (1.21) доказывает теорему.

Заметим, что теорема 1.14 есть частный случай теоремы 1.15 при $\varphi(x)=B$.

Заметим также, что если в теоремах 1.14 и 1.15 вместо неравенств (1.19) и (1.21) поставить строгие неравенства $f(x)<B$ и $f(x)<\varphi(x)$ соответственно, то в заключениях теорем мы всё равно должны оставить нестрогие неравенства $A\le B$.

Теорема 1.16. Всякая возрастающая ограниченная сверху числовая последовательность имеет предел.

Теорема 1.16(а). Всякая убывающая ограниченная снизу числовая последовательность имеет предел.

Доказывать эти теоремы не будем.

1.6. Непрерывность функции

Происходящие в природе процессы и явления можно разделить на меняющиеся плавно (непрерывно) и переходящие из одного состояния в другое скачкообразно. Уточнению и формализации интуитивно ясных понятий непрерывности и разрыва посвящен данный подраздел.

1.6.1 Основные понятия и теоремы

Определение 1. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если f определена в этой точке и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Вспоминая определение предела с помощью окрестностей и неравенств, определение непрерывности функции в точке можно записать в следующем виде.

Определение 2. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если f определена в этой точке и для всякой окрестности $U(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in V(x_0)$ имеет место включение $f(x) \in U(f(x_0))$, или, что то же самое, если для всякой окресности $U(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ множество решений включения $f(x) \in U(f(x_0))$ или некоторая его часть содержит окрестность точки x_0.

На языке неравенств это же определение для скалярной функции одной переменной имеет следующий вид.

Определение 3. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, или, что то же самое, если для всякого $\varepsilon > 0$ множество решений неравенства $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ или некоторая его часть содержит окрестность точки x_0.

Аналогично формулируется с помощью неравенств определение непрерывности и для вектор-функций.

Величину $\Delta x = x - x_0$ называют приращением аргумента, а $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ - приращением функции при переходе из точки x_0 в точку x.

Определение 3 может быть сформулировано и на языке приращений.

Определение 4. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и из условия $|\Delta x| \to 0$ следует, что $|\Delta f| \to 0$.

При переходе в определениях 3 и 4 от модулей элементов Δx и Δf к их нормам получаем сразу же обобщение понятия непрерывности на общий случай отображения нормированных пространств, в частности из R^n в R^k, даваемое с помощью шаровых окрестностей. Напомним, что $\|x - x_0\|$ есть расстояние между точками x и x_0, которое иногда обозначают $\rho(x, x_0)$, а $\|f(x) - f(x_0)\|$ – расстояние между образами этих точек. Тогда из определения 4 следует, что для непрерывных функций из условия $\rho(x, x_0) \to 0$ следует, что $\rho(f(x), f(x_0)) \to 0$.

Используя определение односторонних окрестностей для функции $f: X \subseteq R \to Y \subseteq R,$ можно ввести понятие односторонней непрерывности.

Определение 5. Пусть скалярная функция скалярного аргумента $f: X \subseteq R \to Y \subseteq R$ определена в правой полуокрестности $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ точки x_0. Функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке x_0, если $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 5а. Пусть скалярная функция скалярного аргумента $f: X \subseteq R \to Y \subseteq R$ определена в левой полуокрестности $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ точки x_0. Функция $f(x)$ называется непрерывной слева в точке x_0, если $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Заметим, что в определениях 5 и 5а функция $f(x)$ предполагается определённой в точке x_0.

Непосредственно из определения непрерывности и теоремы 1.8 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.17. Для того, чтобы скалярная функция скалярного аргумента $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна справа и слева в этой точке, то есть существовали односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и для них выполнялись соотношения $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Теорема 1.18. Если функции $f, \varphi\colon X \subseteq R^n \to Y \subseteq R$ непрерывны в точке x_0, то функции $f \pm \varphi$, $f \cdot \varphi$, $\dfrac{f}{\varphi}$ ($\varphi(x_0) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0.

Справедливость теоремы следует из определения непрерывности и теорем о пределе суммы, произведения и дроби.

Теорема 1.19. Для того, чтобы функция

$$f\colon X \subseteq R^n \to Y \subseteq R^k, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots\ldots \\ f_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \\ f_2(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \end{pmatrix}$$

была непрерывна в точке $x_0 = (\xi_0^1, \xi_0^2, \ldots, \xi_0^n)$, необходимо и достаточно, чтобы все координатные функции $f_i(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ были непрерывны в этой точке.

Справедливость теоремы следует из определения непрерывности и теоремы 1.7.

Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна в каждой точке числовой оси. Действительно, пусть x_0 – произвольная точка на числовой прямой. Тогда $f(x_0) = x_0^2$ и для доказательства непрерывности нам достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Рассмотрим неравенство

$$\left|x^2 - x_0^2\right| < \varepsilon\,. \tag{1.24}$$

Его решение состоит из интервалов

$$\left(\sqrt{x_0^2-\varepsilon}\,,\sqrt{x_0^2+\varepsilon}\right),\ \left(-\sqrt{x_0^2+\varepsilon}\,,-\sqrt{x_0^2-\varepsilon}\right).$$

Действительно, неравенство (1.24) эквивалентно неравенству $x_0^2-\varepsilon < x^2 < x_0^2+\varepsilon$, откуда имеем $\sqrt{x_0^2-\varepsilon} < x < \sqrt{x_0^2+\varepsilon}$ или $-\sqrt{x_0^2+\varepsilon} < x < -\sqrt{x_0^2-\varepsilon}$. Если x_0 положительно, то интервал $\left(\sqrt{x_0^2-\varepsilon}\,,\sqrt{x_0^2+\varepsilon}\right)$ является окрестностью точки x_0, а для отрицательного x_0 окрестностью точки x_0 будет интервал $\left(-\sqrt{x_0^2+\varepsilon}\,,-\sqrt{x_0^2-\varepsilon}\right)$ что и доказывает непрерывность функции $f(x) = x^2$ в каждой точке числовой оси, т.к. для произвольного $\varepsilon > 0$ мы можем указать окрестность точки x_0, для всякого x из которой выполнено неравенство (1.24).

Пример 2. Функция $f(x) = a^x$ непрерывна на всей числовой оси. Действительно, пусть x_0 – произвольная точка числовой прямой. Тогда $f(x_0) = a^{x_0}$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно и $\left|a^x - a^{x_0}\right| < \varepsilon.$ Тогда

$$a^{x_0} - \varepsilon < a^x < a^{x_0} + \varepsilon$$

или, что то же самое,

$$\log_a(a^{x_0} - \varepsilon) < x < \log_a(a^{x_0} + \varepsilon), \tag{1.25}$$

если $a > 1$, и

$$\log_a(a^{x_0} + \varepsilon) < x < \log_a(a^{x_0} - \varepsilon) \tag{1.26}$$

при $0 < a < 1$. Интервал (1.25) является окрестностью точки x_0 при $a > 1$, а интервал (1.26) есть окрестность точки x_0 при

$0<a<1$. Последнее и означает непрерывность функции a^x при любом $a>0$.

Пример 3. Покажем, что линейный оператор $A\colon R^n \to R^k$ непрерывен в R^n. Действительно, пусть $x_0=\left(\xi_0^1, \xi_0^2, \dots, \xi_0^n\right)$ – произвольная точка и

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^k & a_2^k & \dots & a_n^k \end{pmatrix}$$

– матрица оператора A в некотором базисе. Тогда

$$Ax - Ax_0 = A(x-x_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^k & a_2^k & \dots & a_n^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 - \xi_0^1 \\ \xi^2 - \xi_0^2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \xi^k - \xi_0^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^n a_i^1\left(\xi^i - \xi_0^i\right) \\ \sum\limits_{i=1}^n a_i^2\left(\xi^i - \xi_0^i\right) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^n a_i^k\left(\xi^i - \xi_0^i\right) \end{pmatrix},$$

откуда

$$\left\|A(x-x_0)\right\|^2 = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n a_i^j\left(\xi^i - \xi_0^i\right) \right)^2.$$

Применяя к правой части полученного соотношения неравенство Коши – Буняковского [1], имеем

$$\left\|A(x-x_0)\right\|^2 \le \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n \left(a_i^j\right)^2 \sum_{l=1}^n \left(\xi^l - \xi_0^l\right)^2 \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \left(a_i^j\right)^2 \left(\sum_{l=1}^n \left(\xi^l - \xi_0^l\right)^2 \right) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \left(a_i^j\right)^2 \cdot \left\|x - x_0\right\|^2.$$

Полагая для произвольного $\varepsilon > 0$ $\delta = \varepsilon \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (a_i^j)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$, получаем требуемое.

Из доказанной непрерывности линейного оператора и теоремы 1.19 следует непрерывность линейной функции

$$f(x) = a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n,$$

называемой в линейной алгебре линейным функционалом или линейной формой.

Пример 4. Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } (x, y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{если } (x, y) = (0,0), \end{cases}$$

не является непрерывной в начале координат, т.к. не существует

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Это мы показали в примере 2 п. 1.5.2.

Свойство непрерывности является наследственным для суперпозиции функций. Точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.20. Пусть $f: X \to Y$, $\varphi: Y \to Z$ и пусть функция f непрерывна в точке x_0, а φ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда их суперпозиция (сложная функция) $(\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Докажем теорему, пользуясь определением непрерывности на языке окрестностей. Пусть $W(\varphi(y_0))$ – произвольная окрестность точки $\varphi(y_0) = \varphi(f(x_0))$. По определению непрерывности, для нее существует окрестность $U(y_0) = U(f(x_0))$ точки $y_0 = f(x_0)$ такая, что для всех $y \in U(y_0) = U(f(x_0))$ выполнено включение $\varphi(y) \in W(\varphi(y_0))$. Далее, для окрестности $U(y_0) = U(f(x_0))$ существует, в силу непрерывности функции f, окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in V(x_0)$ выполнено включение $f(x) \in U(y_0)$, а, следовательно, и включение $\varphi(f(x)) \in W(\varphi(f(x_0)))$, что и доказывает непрерывность сложной функции.

Отметим без доказательства некоторые свойства непрерывных функций.

Теорема 1.21. . Все элементарные функции вещественной переменной непрерывны в своей области определения.

Теорема 1.22. Пусть скалярная функция f скалярной переменной задана на отрезке $[a,b]$ и $f(a)=A,\ f(b)=B$. Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то для всякого числа C, лежащего между A и B, существует точка $c \in [a,b]$ такая, что $f(c)=C$.

Теорема 1.22 обобщается на случай скалярных функций векторного аргумента или, что то же самое, на случай функций от n скалярных аргументов $f(x)=f(\xi^1,\xi^2,...,\xi^n)$.

Теорема 1.22(a). Если функция $f : X \subseteq R^n \to Y \subseteq R$ непрерывна в области X и в точках $x_1, x_2 \in X$ принимает значения $f(x_1)=A$, $f(x_2)=B$, то для всякого числа C, заключенного между A и B, существует точка $x_3 \in X$ такая, что $f(x_3)=C$.

Прежде, чем сформулировать следующий результат, напомним два определения.

Определение 6. Точка $x \in X$ называется граничной точкой множества X, если в любой её окрестности содержатся как точки множества X, так и точки, не принадлежащие множеству X.

Определение 7. Множество X называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки.

Теорема 1.23 (Первая теорема Вейерштрасса). Всякая непрерывная на замкнутом ограниченном в R^n множестве функция ограничена на этом множестве.

Определение 8. Говорят, что точка $x_0 \in D$ есть точка наибольшего в области D значения функции f, если для всех x из D выполнено неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Аналогично определяется точка наименьшего значения с заменой неравенства на противоположное.

Теорема 1.24 (Вторая теорема Вейерштрасса или теорема о достижении наибольшего и наименьшего значений). Всякая непрерывная на замкнутом ограниченном в R^n множестве функция принимает на нем свои наибольшее и наименьшее значения.

Пусть $f: X \subset R^n \to Y \subset R^m$ – непрерывное в каждой точке $x_0 \in X$ отображение. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем его на процесс дальнейших рассуждений. Так как функция f непрерывна, то для каждой точки $x_0 \in X$ и окрестности $U_\varepsilon(f(x_0))$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in V_\delta(x_0)$ выполнено включение $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$. Ясно, что в общем случае для каждой точки x_0 и данного фиксированного ε существует свое δ.

Определение 9. Функция $f: X \subset R^n \to Y \subset R^m$ называется равномерно непрерывной на X, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, одно и тоже для любой точки $x_0 \in X$, такое, что для всех $x \in V_\delta(x_0)$ выполнено включение $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$.

Отметим следующий важный результат.

Теорема 1.25 (Кантора). Всякая непрерывная на замкнутом ограниченном в R^n множестве функция равномерно непрерывна на нём.

Доказательство теорем 1.22-1.25 можно найти в [5-8].

Замечание. Для непрерывных функций имеет место соотношение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, означающее, что в этом случае операции f и предельного перехода перестановочны. Это свойство часто используется при отыскании пределов.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\log_a\left(2-\frac{1}{x^2}\right)$. Так как функция $\log_a x$ непрерывна, то $\lim\limits_{x\to 1}\log_a\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=\log_a \lim\limits_{x\to 1}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=\log_a 1=0$. При этом использовались теоремы о пределе суммы, дроби и непрерывность функции x^2.

1.6.2. Классификация точек разрыва

Займемся теперь изучением точек, в которых происходит нарушение свойства непрерывности. Предварительно договоримся о терминах. Рассмотрим вначале случай, когда точка x_0 есть внутренняя точка множества $\overline{X}$, полученного из X присоединением к нему всех его граничных точек.

Определение 1. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f : X \to Y$, если в этой точке функция f не является непрерывной.

Определение 2. Точка x_0 называется изолированной точкой разрыва функции $f : X \to Y$, если существует окрестность точки x_0, в которой нет других точек разрыва функции f.

В общем случае точки разрыва могут заполнять некоторую поверхность или кривую в области определения. Например, у функции $f(x,y)=\frac{1}{x-y}$ точками разрыва являются точки прямой $y=x$, у функции $f(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2}$ таковыми являются точки прямых $y=x$ и $y=-x$, а функция $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ имеет одну точку разрыва $(0,0)$. Мы будем заниматься классификацией изолированных точек разрыва. Наиболее просто точки разрыва выглядят для функции одной переменной. Их классификация основывается на нарушениях равенства

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0). \qquad (1.27)$$

а также на изучении случаев, когда один или несколько элементов этого равенства не существуют. Рассмотрим возможные ситуации.

1. Оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ существуют, конечны, равны между собой, но либо функция f не определена в точке x_0, либо $f(x_0)$ не равно общему значению левостороннего и правостороннего пределов, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0).$$

Такой разрыв называют устранимым, т.к. его можно ликвидировать, доопределив или переопределив функцию f в точке x_0, положив

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

2. Оба односторонних предела существуют, конечны, но

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Такой разрыв называют разрывом типа «скачок», или разрывом первого рода. В некоторых классификациях устранимый разрыв также причисляют к разрывам первого рода.

3. Все остальные нарушения соотношения (1.27), т.е. когда один или оба односторонних предела не существуют, один или оба односторонних предела равны бесконечности, относят к разрывам второго рода, не детализируя эти нарушения.

Пример 1. Функция $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ разрыв первого рода (разрыв типа скачок) т.к.

$$\lim_{x \to -0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to +0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ разрыв второго рода, так как $\lim\limits_{x \to -0} \sin\dfrac{1}{x}$ и $\lim\limits_{x \to +0} \sin\dfrac{1}{x}$ не существуют.

Пример 3. Функция $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ устранимый разрыв, т.к. $\lim\limits_{x\to -0} x\sin\frac{1}{x} = 0,\quad \lim\limits_{x\to -0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$ Действительно, т.к. $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$ для всех $x \ne 0$, то

$$-|x| \le x\cdot\sin\frac{1}{x} \le |x|,$$

откуда, по теореме 1.13 и следует наше утверждение.

Пусть теперь x_0 – предельная точка множества X, не являющаяся внутренней, например, граничная. Тогда на понятия точек непрерывности и разрыва накладывается специфика индуцированной топологии.

Ограничимся случаем, когда $f(x)$ – скалярная функция скалярного аргумента. Пусть функция $f(x)$ задана в правосторонней окрестности точки x_0. Если $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0, то $f(x_0)$ существует и

$$f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Классификация точек разрыва в данном случае основывается на нарушениях вышеприведённого равенства, а также на изучении случаев, когда некоторые элементы этого равенства не существуют. Рассмотрим возможные ситуации.

1. Односторонний предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ существует, конечен, но либо функция f не определена в точке x_0, либо $f(x_0)$ не равно значению правостороннего предела, т.е.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \ne f(x_0).$$

Такой разрыв называют устранимым, т.к. его можно ликвидировать, доопределив или переопределив функцию f в точке x_0, положив

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

2. Односторонний предел не существует или равен бесконечности. Такой разрыв называют разрывом второго рода.

Аналогичная классификация проводится для случая, когда функция определена в левосторонней окрестности точки x_0. Всё вышесказанное можно рассмотреть и для бесконечно удалённой точки.

1.6.3. Линейные пространства непрерывных функций

Рассмотрим множество $M[a,b]$ всех определённых на отрезке $[a,b]$ функций. На этом множестве введём операции:

1) сложения элементов $f_1, f_2 \in M[a,b]$ по правилу $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ для $\forall x \in [a,b]$;

2) умножения элемента $f \in M[a,b]$ на скаляр $\alpha \in R$ по закону $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ для $\forall x \in [a,b]$.

Относительно введённых операций $M[a,b]$ является линейным пространством, так как выполнены все аксиомы линейного пространства [1].

Рассмотрим множество $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций. Это множество является подмножеством множества $M[a,b]$, то есть имеет место поэлементное включение $C[a,b] \subset M[a,b]$. Так как множество $C[a,b]$ относительно введённых линейных операций замкнуто, то есть результат операции снова есть элемент соответствующего множества, то оно является линейным подпространством пространства $M[a,b]$. Следовательно, как самостоятельный объект $C[a,b]$ является линейным пространством.

Так же как мы рассматривали множество $M[a,b]$, рассмотрим множество $M_n[a,b]$ всех заданных на отрезке $[a,b]$ вектор-функций $f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\right)^T$. На этом множестве введём операции:

1) сложения элементов $f, g \in M_n[a,b]$ по правилу

$$(f+g)(x)=\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}\right)(x)=\begin{pmatrix} f_1(x)+g_1(x) \\ f_2(x)+g_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x)+g_n(x) \end{pmatrix}=f(x)+g(x)$$

для $\forall x \in [a,b]$;

2) умножения элемента $f \in M_n[a,b]$ на скаляр $\alpha \in R$ по закону $(\alpha f)(x)=\begin{pmatrix} \alpha f_1(x) \\ \alpha f_2(x) \\ \vdots \\ \alpha f_n(x) \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}=\alpha \cdot f(x)$ для $\forall x \in [a,b]$.

Так же как и соответствующее пространство $M[a,b]$ скалярных функций скалярного аргумента, пространство $M_n[a,b]$ относительно введённых операций является линейным пространством, так как выполнены все аксиомы линейного пространства [1].

Рассмотрим множество $C_n[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ вектор-функций.

Отметим, что $C_n[a,b]$ является подмножеством множества $M_n[a,b]$, то есть имеет место поэлементное включение $C_n[a,b] \subset M_n[a,b]$. Так как множество $C_n[a,b]$ замкнуто относительно введённых линейных операций, то есть результат операции снова принадлежит этому множеству, то оно является линейным подпространством пространства $M_n[a,b]$. Следовательно, как самостоятельный объект, $C_n[a,b]$ является линейным пространством. В отличие от рассмотренных в линейной алгебре пространств, введённые пространства $M[a,b]$, $M_n[a,b]$, $C[a,b]$ $C_n[a,b]$ скалярных и векторных функций скалярного аргумента, бесконечномерны.

Заметим, что можно ввести в рассмотрение линейные пространства скалярных и векторных функций многих переменных, в том числе и непрерывных.

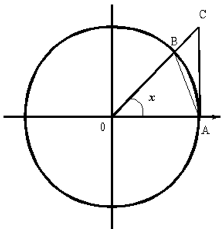
1.7. Замечательные пределы

1.7.1. Первый замечательный предел и его следствия

Покажем, что предел отношения $\sin x$ к x (x измеряется в радианах) при x, стремящемся к нулю, равен 1 $\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \right)$. Это соотношение называется первым замечательным пределом.

Предварительно докажем неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}. \qquad (1.28)$$



С этой целью в круге радиуса R рассмотрим треугольник AOB, хорду AB и касательную AC к окружности в точке A (см. рисунок). Пусть S_1 – площадь треугольника AOB, S_2 – площадь сектора AOB и S_3 – площадь треугольника AOC. Очевидно, что эти площади удовлетворяют неравенствам

$$S_1 < S_2 < S_3\,. \qquad (1.29)$$

Если x – радианная мера угла, то

$$S_1 = 0{,}5R^2 \sin x, \quad S_2 = 0{,}5R^2 x, \quad S_3 = 0{,}5R^2 \operatorname{tg} x. \qquad (1.30)$$

Подставляя (1.30) в (1.29) и сокращая на $0{,}5R^2$, получаем (1.28). Разделив в (1.28) все части на $\sin x$, имеем

$1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$, или, что то же самое,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (1.31)$$

для всех $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, по теореме 1.13 заключаем, что $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Так как $\dfrac{\sin x}{x}$ – чётная функция, то и $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Пример 1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1.$

Пример 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}.$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{(4x)^2}\cdot\dfrac{(4x)^2}{x^2}=16.$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2(x/2)}{4(x/2)^2}=\dfrac{1}{2}.$

Следствиями из первого замечательного предела являются:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}=1.$

1.7.2. Второй замечательный предел и его следствия

Соотношения, которые будут доказаны в теоремах 1.26 и 1.27 данного пункта, носят название второго замечательного предела.

Теорема 1.26. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ существует и конечен.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. (Бернулли). Для всякого $q>1$ выполнено неравенство

$$q^n>1+n(q-1).$$

Доказательство леммы. Сумма S_n n членов геометрической прогрессии $1, q, q^2, ..., q^{n-1}$ равна

$$S_n=1+q+q^2+...+q^{n-1}=\frac{1\cdot(q^n-1)}{q-1}.$$

Из последнего, умножая на $q-1$, имеем

$$q^n-1=(q-1)(1+q+^2+...+q^{n-1})>n(q-1),$$

что и доказывает лемму.

Доказательство теоремы. Рассмотрим последовательность $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n=1,2,\ldots$. Покажем, что эта последовательность монотонно убывающая. Для этого достаточно показать, что $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\geq 1$ для всякого $n=1,2,\ldots$. Имеем

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=$$

$$=\left(\frac{n+1}{n}:\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=$$

$$=\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\ .$$

Положим $q=\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$ и применим лемму Бернулли. В результате получим

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}\geq\left(1+(n+2)\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}-1\right)\right)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=$$

$$=\left(1+(n+2)\frac{1}{n(n+2)}\right)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Далее, $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}>1$ для всех $n=1,2,\ldots$, что означает ограниченность снизу последовательности x_n. Поэтому последовательность $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n=1,2,\ldots$ имеет предел. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, то теорема доказана.

Определение. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Теорема 1.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

Доказательство. Покажем вначале, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность точек, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$. Положим $n_k = [x_k]$, где $[x]$ – целая часть числа x, т.е. наибольшее целое, не превосходящее x. Из определения целой части числа следует, что

$$n_k \le x_k < n_k + 1. \tag{1.32}$$

Из (1.32) имеем

$$\frac{1}{n_k+1} < \frac{1}{x_k} \le \frac{1}{n_k},$$

откуда

$$1+\frac{1}{n_k+1} < 1+\frac{1}{x_k} \le 1+\frac{1}{n_k}.$$

Из последнего, с учетом (1.32) и монотонности степенной и показательной функций, получаем

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \le \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1},$$

и так как

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = e, \quad \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = e,$$

то $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e,$ и, в силу произвольности последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Положим $y=-x$. Тогда $y\to+\infty$ при $x\to-\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e\cdot 1=e.$$

Теорема доказана.

Замечание. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

Число e является трансцендентным вещественным числом, $e\approx 2{,}7182818285$.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+3}{x-2}\right)^{2x-1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}\cdot\frac{3(2x-1)}{x-2}}=e^6.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+2+2x-1}{x^2-4x+2}\right)^x=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2-4x+2}x}=e^2.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее определение.

> *Определение* 1. Логарифм числа x по основанию e называют натуральным логарифмом этого числа и обозначают $\ln x$, т.е. $\ln x=\log_e x.$

Отметим следствия теоремы 2, имеющие к тому же самостоятельный интерес.

Следствия второго замечательного предела.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$ 1а. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a.$ 2a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu.$

Доказательства следствий:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e.$

Перестановка знаков предела и логарифма справедлива в силу непрерывности логарифмической функции.

2. Положим $a^x-1=y$. Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(a^x-1\right)=\lim\limits_{x\to 0}y=0.$

Так как $x=\log_a(y+1)$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(y+1)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

Следствия 1а и 2а получаются из следствий 1 и 2 при $a=e$.

3. Положим $y=(1+x)^\mu-1$. Отметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+x)^\mu-1\right)=$ $=\lim\limits_{x\to 0}y=0.$ Из определения y имеем $\mu\ln(1+x)=\ln(1+y)$. Поэтому $\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\dfrac{y}{x}=\dfrac{y}{\ln(1+y)}\cdot\dfrac{\mu\ln(1+x)}{x}$. Переходя в крайних частях последнего равенства к пределу при $x\to 0$, получаем доказательство следствия 3.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}{x-e}=\dfrac{1}{e}=e^{-1}.$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}=\dfrac{2}{3}.$

1.8. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

В пределах этого подраздела, если не оговорено противное, будем считать все рассматриваемые функции скалярнозначными.

Определение 1. Функция α называется бесконечно малой в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$

Определение 2. Функция y называется бесконечно большой в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} y(x) = \infty, -\infty, +\infty$.

Пример 1. Функция $\alpha(x) = \sin x$ – бесконечно малая в точках $x_0 = k\pi,\ k = 1,2,...$.

Пример 2. Функция $\alpha(x) = \cos x$ – бесконечно малая в точках $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 1,2...$.

Пример 3. Функция $y(x) = e^x$ – бесконечно большая в $+\infty$ и бесконечно малая в $-\infty$.

Пример 4. Функция $f(x) = x$ – бесконечно малая в точке $x_0 = 0$ и бесконечно большая в ∞.

Отметим некоторые свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Теорема 1.28. Сумма конечного числа бесконечно малых в точке x_0 функций есть функция бесконечно малая в точке x_0.

Справедливость теоремы следует из теоремы о пределе суммы функций.

Теорема 1.29. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая.

Доказательство. Пусть α – бесконечно малая в точке x_0, f – ограниченная в окрестности точки x_0, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ и существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 и число M такие, что для всех $x \in U(x_0)$ выполнено неравенство $|f(x)| \leq M.$ Тогда $\alpha(x) \cdot f(x) \leq |\alpha(x)| \cdot |f(x)| \leq |\alpha(x)| \cdot M$ для всякого $x \in U(x_0)$. Аналогично $\alpha(x) \cdot f(x) \geq -|\alpha(x)| \cdot |f(x)| \geq -|\alpha(x)| \cdot M$ для всех $x \in U(x_0)$. Поэтому для всех $x \in U(x_0)$ имеет место неравенство

$$-|\alpha(x)| \cdot M \leq \alpha(x) \cdot f(x) \leq |\alpha(x)| \cdot M \qquad (1.33)$$

Так как

$$\lim_{x\to x_0} |\alpha(x)|\cdot M = 0, \quad \lim_{x\to x_0} \left(-|\alpha(x)|\right)\cdot M = 0,$$

то, по теореме 1.13 из неравенства (1.33) следует утверждение теоремы.

Теорема 1.30. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая в точке x_0, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая в этой точке и наоборот, если $\alpha(x)$ – бесконечно большая в точке x_0, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно малая в этой точке.

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Определение 3. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, являющиеся бесконечно малыми в точке x_0, называются эквивалентными бесконечно малыми, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. При этом пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Примеры: $\sin x$ и x, $\ln(1+x)$ и x, $e^x - 1$ и x – эквивалентные бесконечно малые в точке $x = 0$.

Определение 4. Говорят, что бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке x_0 имеют один порядок малости, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, где C – константа, отличная от нуля и бесконечности.

Примеры: $a^x - 1$ и x, $\sin(\alpha x)$ и x, $1 - \cos x$ и x^2 – бесконечно малые одного порядка малости в точке $x = 0$.

Определение 5. Говорят, что бесконечно малая $\alpha(x)$ в точке x_0 имеет более высокий порядок малости, чем бесконечно малая $\beta(x)$ в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

или, что то же самое,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty.$$

Пример: функция $1-\cos x$ имеет более высокий порядок малости, чем бесконечно малая x.

Определениями 3 - 5 вводится качественная шкала сравнения бесконечно малых в точке функций, позволяющая выяснить, какая из бесконечно малых стремится к нулю быстрее, а какая - медленнее. Следующее ниже определение позволяет ввести количественную шкалу сравнения бесконечно малых в точке функций, дающую возможность указать, во сколько раз одна бесконечно малая стремится к нулю быстрее или медленнее, чем другая.

Определение 6. Говорят, что бесконечно малая $\alpha(x)$ имеет порядок малости k относительно бесконечно малой $\beta(x)$, если бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\left(\beta(x)\right)^k$ – одного порядка малости, т.е. если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=C,$$

где C – константа, отличная от нуля и бесконечности. При этом бесконечно малую $C\cdot\left(\beta(x)\right)^k$, эквивалентную $\alpha(x)$, называют главной частью бесконечно малой $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)$.

Обычно в качестве эталонной бесконечно малой в точке x_0 принимают функцию $\beta(x)=x-x_0$.

Пример 1. Найти порядок малости бесконечно малой $\left(1-\cos x\right)$ относительно бесконечно малой x при $x\to 0$. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^k}=\begin{cases}0 & \text{при } k<2,\\ \frac{1}{2} & \text{при } \mathrm{k}=2,\\ \infty & \text{при } k>2.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости $\alpha(x)=1-\cos x$ относительно x равен 2 и ее главной частью является величина $\beta(x)=0{,}5x^2$.

Пример 2. Найти порядок малости бесконечно малой $e^{\sin x}-1$ относительно бесконечно малой x. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\sin x}-1)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x^k}=\begin{cases}0 \text{ при } k<1,\\ 1 \text{ при } \mathrm{k}=1,\\ \infty \text{ при } k>1.\end{cases}$$

Из последнего получаем, что порядок малости $e^{\sin x}-1$ относительно x равен 1.

Теорема 1.31. Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда бесконечно малая $\alpha(x)-\beta(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем каждая из бесконечно малых $\alpha(x)$, $\beta(x)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1-1=0,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1=1-1=0.$$

Это означает, что бесконечно малая $\alpha(x)-\beta(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем каждая из бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Достаточность. Пусть бесконечно малая $\alpha(x)-\beta(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем каждая из бесконечно малых $\alpha(x)$, $\beta(x)$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0,$$

откуда следует равенство

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$$

означающее эквивалентность бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Теорема доказана.

Теорема 1.32. Пусть $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta(x)$, $\beta_1(x)$ бесконечно малые в точке x_0, причем $\alpha(x)$ эквивалентна

$\alpha_1(x)$, $\beta(x)$ эквивалентна $\beta_1(x)$. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=K$, то и

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=K$.

Действительно $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)\cdot\beta_1(x)\cdot\alpha_1(x)}{\alpha_1(x)\cdot\beta(x)\cdot\beta_1(x)}=$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\right)\cdot\left(\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\right)\cdot\left(\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=K.$$

Теорема 1.33. Сумма конечного числа бесконечно малых функций эквивалентна слагаемому, имеющему наименьший порядок малости, относительно всех других слагаемых.

Действительно, если в сумме $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+...+\alpha_n(x)$ бесконечно малых в точке x_0 $\alpha_1(x)$ имеет наименьший порядок малости, чем все остальные, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+...+\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}+...+\frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)}\right)=1,$$

т.е. $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+...+\alpha_n(x)$ эквивалентна $\alpha_1(x)$.

Теоремы 1.32 и 1.33 можно использовать при нахождении пределов.

Аналогично строится шкала сравнения бесконечно больших в точке x_0 функций. Приведем её.

Определение 7. Бесконечно большие в точке x_0 функции $U(x)$ и $V(x)$ называются эквивалентными бесконечно большими, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{U(x)}{V(x)}=1.$

Определение 8. Говорят, что бесконечно большие в точке x_0 функции $U(x)$ и $V(x)$ имеют один и тот же порядок роста, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{U(x)}{V(x)}=C,$ где C – константа, отличная от нуля и бесконечности.

Определение 9. Говорят, что бесконечно большая в точке x_0 функция $U(x)$ имеет более высокий порядок роста, чем бесконечно большая $V(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{U(x)}{V(x)}=\infty$, или, что тоже самое, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{V(x)}{U(x)}=0$.

Определение 10. Говорят, что бесконечно большая в точке x_0 функция $U(x)$ имеет порядок роста k относительно бесконечно большой $V(x)$, если бесконечно большие $U(x)$ и $(V(x))^k$ – одного порядка роста, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{U(x)}{(V(x))^k}=C$, где C – константа, отличная от нуля и бесконечности.

Заметим, что легко обобщить понятие бесконечно малой на случай вектор-функции скалярного и векторного аргумента следующим образом.

Определение 11. Вектор-функция

$$\alpha(x)=(\alpha_1(x),\alpha_2(x),...,\alpha_m(x))^T$$

называется бесконечно малой в точке x_0, если каждая её координата есть бесконечно малая скалярная функция.

Если вектор-функция $\alpha(x): X\subseteq R^n\to Y\subseteq R^m$ является бесконечно малой в точке x_0, то, очевидно, и функция

$$|\alpha(x)|=\|\alpha(x)\|=\sqrt{\alpha_1^2(x)+\alpha_2^2(x)+...+\alpha_m^2(x)}$$

также бесконечно малая в этой точке.

Сравнение бесконечно малых вектор-функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$ производят, сравнивая их модули $|\alpha(x)|$, $|\beta(x)|$, являющиеся скалярнозначными функциями. Исходя из этого, для вектор-функций можно ввести понятия порядка малости одной бесконечно малой вектор-функции относительно другой, эквивалентных бесконечно малых вектор-функций и их главных частей.

Аналогично можно определить и бесконечно большую вектор-функцию, как вектор-функцию, хотя бы одна координата которой является бесконечно большой функцией.

Приведённая выше теория бесконечно малых может быть использована для характеристики понятий предела и непрерывности. В частности, имеют место следующие результаты.

Теорема 1.34. Предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда функция $\varphi(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой в точке x_0.

Теорема 1.35. Функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента $x - x_0$ соответствует бесконечно малое приращение функции $f(x) - f(x_0)$.

Доказательства этих результатов предлагается провести самостоятельно.

1.9. Асимптоты

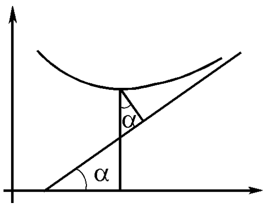
При построении графика функции полезно иметь представление о поведении функции в случае, когда точка графика функции неограниченно удаляется от начала координат. Это может быть либо в точках разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности, либо при стремлении аргумента к бесконечности. И в том, и в другом случаях оказывается полезным следующее понятие.

Определение. Прямая L называется асимптотой графика функции $f(x)$, если при стремлении точки графика к бесконечности расстояние между точкой графика функции $f(x)$ и прямой L стремится к нулю.

Асимптоты обычно делят на вертикальные, задающиеся уравнением $x = x_0$, и наклонные, описываемые уравнением $y = kx + b$. Иногда выделяют горизонтальные асимптоты, но так как они получаются из наклонных при $k = 0$, то мы их отдельно рассматривать не будем.

Если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен бесконечности, то очевидно, что прямая $x = x_0$ есть вертикальная асимптота.

Пусть теперь $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика функции $f(x)$ (кривой $y = f(x)$) и ρ – расстояние между кривыми $y = kx + b$ и $y = f(x)$ в точке x. Тогда (см. рисунок)



$$f(x) - (kx + b) = \frac{\rho}{\cos\alpha} \tag{1.34}$$

и, так как $\lim\limits_{x\to\infty} \rho(x) = 0$, то из (1.34) получаем

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - (kx + b)\big) = 0,$$

отсюда

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - b}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{1.35}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - kx\big). \tag{1.36}$$

Заметим, что соотношения (1.35) и (1.36) нужно рассматривать как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$ отдельно, потому что функция $f(x)$ может иметь разные асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ или вовсе не иметь одну из них или обе.

Пример. Пусть $f(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$. Эта функция непрерывна на всей числовой оси, поэтому вертикальных асимптот у неё нет. Проверим наличие наклонных асимптот у этой функции. Имеем

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 2\,\mathrm{arctg}\,x}{x} = 1,$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 2\,\mathrm{arctg}\,x}{x} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - k_1 x\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(x - 2\,\mathrm{arctg}\,x - x\big) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \big(-2\,\mathrm{arctg}\,x\big) = -\pi,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - k_2 x\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(x - 2\,\mathrm{arctg}\,x - x\big) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \big(-2\,\mathrm{arctg}\,x\big) = \pi.$$

Таким образом, функция $f(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$ имеет асимптоту $y = x - \pi$ при $x \to +\infty$ и асимптоту $y = x + \pi$ при $x \to -\infty$.

2. Дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных

Самыми простыми и наиболее полно изученными в математике отображениями являются линейные. Возникает идея приближенной замены произвольных отображения, хотя бы вблизи некоторых точек, линейным (линеаризация отображения). Выяснением, для какого класса отображений возможна линеаризация, и изучением строения получаемых при этом линейных операторов занимаются в части математического анализа, называемой дифференциальным исчислением.

2.1. Дифференцируемые отображения

Напомним, что мы изучаем отображения множеств, принадлежащих линейным точечно-векторным евклидовым пространствам R^n и R^k, элементами которых являются упорядоченные совокупности n и k вещественных чисел соответственно, которые можно трактовать как векторы $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)^T$ или как точки $M=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ с теми же координатами. В евклидовых пространствах введено понятие нормы (длины, модуля) вектора $\|x\|=|x|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2}=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, порождающее понятия расстояния между векторами $x_1=(\xi_1^1,\xi_2^1,...,\xi_n^1)^T$, $x_2=(\xi_1^2,\xi_2^2,...,\xi_n^2)^T$,

$$\rho(x_1,x_2)=\|x_1-x_2\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i^2-\xi_i^1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

расстояния между точками $M_1=(\xi_1^1,\xi_2^1,...,\xi_n^1)$, $M_2=(\xi_1^2,\xi_2^2,...,\xi_n^2)$,

$$\rho(M_1,M_2)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i^2-\xi_i^1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Предполагается, что в R^n и R^k выбраны декартовы системы координат, состоящие из точки $O(0,0,...,0)$ и единичных попарно ортогональных векторов $e_1(1,0,...,0)$, $e_2(0,1,...,0)$ и так далее.

Определение 1. Пусть $X \subset R^n$ – открытое множество и f – отображение из X в R^k ($f: X \to R^k$). Говорят, что функция f дифференцируема в точке $x_0 \in X$, если существует линейный оператор $A: R^n \to R^k$ такой, что приращение $f(x) - f(x_0)$ функции f можно представить в виде

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x - x_0) \qquad (2.1)$$

для всех x из некоторой окрестности точки x_0, где бесконечно малая вектор-функция $\alpha(x - x_0)$ имеет в точке x_0 более высокий порядка малости, чем $\|x - x_0\|$ то есть $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\|\alpha(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$.

Часто приращение $x - x_0$ обозначают через Δx, а приращение $f(x) - f(x_0)$ через Δf. В этом случае выражение (2.1) принимает вид

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = A(\Delta x) + \alpha(\Delta x). \qquad (2.2)$$

Так как $A: R^n \to R^k$ – линейный оператор, то существует матрица A размера $k \times n$ такая, что $A(x) = A \cdot x$. Теперь равенство (2.2) можно записать в виде

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x). \qquad (2.3)$$

Если дифференцируема в каждой точке $x_0 \in X$, то A и α в равенстве (2.3) зависят от x_0 и (2.3), в этом случае, записывается следующим образом

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = A(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x_0, \Delta x). \qquad (2.4)$$

Определение 2. Оператор A в соотношении

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = A(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x_0, \Delta x)$$

называется *производной функции* f и обозначается $f'(x_0)$, $\nabla f(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$. Матрица оператора $f'(x_0)$ называется *производной матрицей*, или *матрицей Якоби*. Слагаемое $A(x_0)\cdot\Delta x$ обозначается $df(x_0)$ и называется *дифференциалом* (*дифференциалом Фреше*) функции f в точке x_0.

Замечание. Так как линейный оператор после фиксации базиса однозначно определяется своей матрицей, то производную матрицу будм обозначать также, как и саму производную.

Соотношение (2.4) можно записать в виде

$$\Delta f(x_0,\Delta x) = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(x_0,\Delta x), \tag{2.5}$$

или

$$\Delta f(x_0,\Delta x) = df(x_0) + \alpha(x_0,\Delta x),$$

где $f'(x_0)\cdot\Delta x = df(x_0)$ – дифференциал функции $f(x)$.

Как следует из определения, производная является линейным оператором (линейным отображением), а дифференциал является значением этого линейного оператора на элементе $\Delta x = \left(\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_n\right)^T$.

Из наших построений следует, что если функция дифференцируема, то у неё существует производная, а следовательно и производная матрица. Обратное неверно, то есть функция может иметь производную, но не быть дифференцируемой. Соответствующий пример есть в [5, 6].

Для дифференцируемых функций справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Всякая дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в этой точке.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right) = \lim\limits_{x\to x_0}\Delta f(x_0) = 0$. Последнее очевидно, так как в соотношении (2.4) $\alpha(x_0,\Delta x)$ – бесконечно малая по определению дифференцируемости и поэтому

$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x_0,x)=0$, а $\lim\limits_{x\to x_0}A(x_0)\cdot\Delta x=0$ в силу непрерывности конечномерного линейного оператора.

Обратное к теореме 2.1 утверждение несправедливо, т.е. непрерывная функция может быть недифференцируемой, например, как будет показано далее, функция $f(x)=|x|$ недифференцируема в нуле. Более того, Вейерштрассом построен пример непрерывной в каждой точке отрезка $[a,b]$ функции которая не является дифференцируемой ни в одной точке этого отрезка. Таким образом, класс непрерывных функций включает в себя в качестве подмножества множество дифференцируемых функций.

Пример 1. Пусть $f(x)=Ax$ – линейный оператор (линейное отображение) и x_0 – произвольный вектор. Найдем $f'(x_0)$. Имеем

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=Ax-Ax_0=A(x-x_0)=A\cdot\Delta x.$$

Из полученного соотношения и по определению дифференцируемости следует, что $f'(x_0)=A$, т.е. производная матрица линейного оператора совпадает с матрицей этого оператора.

Пример 2. Пусть A – квадратная симметричная матрица размера $n\times n$, т.е. $A=A^T$, тогда $f(x)=x^TAx$ – квадратичная форма. Найдем $f'(x_0)$. Имеем

$$f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)=x^TAx-x_0^TAx_0=$$
$$=x^TAx-x^TAx_0+x^TAx_0-x_0^TAx_0=x^TA(x-x_0)+(x-x_0)^TAx_0.$$

Так как $(x-x_0)^TAx_0$ – число, и $A^T=A$, то $(x-x_0)^TAx_0=$ $=\left((x-x_0)^TAx_0\right)^T=x_0^TA(x-x_0)$. Поэтому

$$\Delta f(x_0)=x^TA(x-x_0)+(x-x_0)^TAx_0=$$
$$=x^TA(x-x_0)+x_0^TA^T(x-x_0)=(x^TA+x_0^TA)(x-x_0)=$$
$$=\left((x_0+x-x_0)^TA+x_0^TA^T\right)(x-x_0)=2x_0^TA(x-x_0)+(x-x_0)^TA(x-x_0).$$

В силу того, что $(x-x_0)^T A(x-x_0)$ есть бесконечно малая в x_0 относительно $x-x_0$ порядка выше первого, то

$$f'(x_0) = (x^T Ax)'\Big|_{x=x_0} = 2x_0^T A.$$

2.2. Строение производной матрицы

Приступаем к нахождению элементов функциональной матрицы $f'(x_0)$ для функции f. Процесс отыскания производной матрицы называют дифференцированием функции. Рассмотрим четыре возможных здесь случая.

Случай 1. Пусть $n=1$, $k=1$, то есть $X \subseteq R$, $f: X \to R$ – скалярная функция одной переменной, $\|x\| = |x|$ ($x \in R$) и, так как по определению $A = f'(x): R \to R,$ то матрица $f'(x_0)$ имеет размерность 1×1 и состоит из одного элемента b ($f'(x_0) = b$), поэтому

$$f(x) - f(x_0) = b(x-x_0) + \alpha(x-x_0).$$

Разделим последнее равенство на $x-x_0$ и перейдем к пределу при $x \to x_0$. Так как по определению дифференцируемости

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x-x_0)}{|x-x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0,$$

то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x-x_0)}{x-x_0} = 0,$$

и в результате получим

$$b = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \qquad (2.6)$$

Число, определяемое пределом в выражении (2.6), называется производной функции f одной переменной в точке x_0. Эта производная рассматривалась в курсе средней школы.

Таким образом, для скалярной функции одной переменной *производная* матрица состоит из одного элемента, определяемого равенством (2.6), т.е. *равна пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю*.

Заметим, что для скалярной функции скалярного аргумента с помощью предельного перехода можно ввести, так называемые, односторонние производные. Точнее, *предел* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ называется *левосторонней производной* и обозначается $f'(x_0 - 0)$, *предел* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ называется *правосторонней производной* и обозначается $f'(x_0 + 0)$.

Отметим, что если в точке x существует производная $f'(x)$, то существуют левосторонняя и правосторонняя производные $f'(x-0)$ и $f'(x+0)$ равные между собой. Верен и обратный в некоторой степени результат, точнее, если существуют левосторонняя и правосторонняя производные $f'(x-0)$ и $f'(x+0)$ равные между собой, то существует и производная $f'(x)$.

Случай 2. Пусть $n=1$, а k – произвольно, то есть $X \subseteq R$ и $f: X \to R^k$ – вектор-функция одного переменного. Поэтому функция f запишется в виде

$$f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\right)^T = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots\ldots \\ f_k(x) \end{pmatrix},$$

и, так как $f'(x): R \to R^k$, то $f'(x)$ есть вектор-столбец, т.е. матрица размера $k \times 1$

$$f'(x) = \left(b_1, b_2, \ldots, b_k\right)^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Приращение $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ можно записать в виде

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x+\Delta x) - f_1(x) \\ f_2(x+\Delta x) - f_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ f_k(x+\Delta x) - f_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_k \end{pmatrix} \cdot \Delta x + \begin{pmatrix} \alpha_1(x,\Delta x) \\ \alpha_2(x,\Delta x) \\ \ldots\ldots\ \ldots \\ \alpha_k(x,\Delta x) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

По аналогии со случаем скалярной функции скалярного аргумента, разделив обе части соотношения (2.7) на Δx и переходя к пределу при Δx стремящемся к нулю, получаем

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots\ldots \\ f_k(x) \end{pmatrix}' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} \\ \ldots\ldots \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f_k(x+\Delta x) - f_k(x)}{\Delta x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \ldots\ldots \\ f_k'(x) \end{pmatrix}.$$

Вектор $f'(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots\ldots \\ f_k(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \ldots\ldots \\ f_k'(x) \end{pmatrix}$ называется производной вектора по скалярной переменной.

Так же как и для скалярной функции скалярного аргумента можно рассмотреть левостороннюю и правостороннюю производные вектор-функции скалярного аргумента.

С другой стороны, рассматривая соотношение (2.7) для каждой координаты в отдельности, имеем

$$b_i = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_i(x+\Delta x) - f_i(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha_i(x,\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_i(x+\Delta x) - f_i(x)}{\Delta x} = f_i'(x) = Df_i(x) = \frac{df_i(x)}{dx}.$$

Таким образом, i-я координата вектор-столбца $f'(x)$ равна производной i-й компоненты вектора f по переменной x.

Для вектор-функции одного скалярного аргумента со значениями в R^3

$$r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

и можем, таким образом, записать

$$r'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\mathbf{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\mathbf{k} =$$

$$= x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Если $r(t)$ – закон движения материальной точки, то вектор $r'(t)$ есть вектор скорости движения этой точки по кривой $r = r(t)$.

Случай 3. Пусть n – произвольно, а $k = 1$, то есть $X \subseteq R^n$, $f : X \to R$ – скалярная функция многих переменных $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $f'(x_0) : R^n \to R,$ поэтому матрица оператора $f'(x_0)$ есть матрица размера $(1 \times n)$, то есть вектор-строка и имеет вид $f'(x_0) = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Найдем компоненту a_i вектора $f'(x_0)$. Для этого проварьируем (изменим) только координату с номером i вектора x оставив остальные без изменения, то есть возьмем Δx в виде $\Delta x = (0,...,0,\Delta x_i,0,...,0)^T$. Из соотношения (2.5) имеем

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) =$$

$$= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + ... + a_{i-1} \cdot 0 + a_i \cdot \Delta x_i + a_{i+1} \cdot 0 + ... + a_n \cdot 0 +$$

$$+ \alpha(x_0, \Delta x_i) = a_i \cdot \Delta x_i + \alpha(x_0, \Delta x_i).$$

Так как

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha(x_0, \Delta x_i)}{\Delta x_i} = 0,$$

то, разделив левую и правую части полученного равенства на Δx_i и устремив Δx_i к нулю, получим

$$a_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x_i} - \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha(x_0, \Delta x_i)}{\Delta x_i} =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \dots x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_i}.$$

Предел, стоящий в правой части последнего равенства, называют частной производной функции f *по переменной* x_i *и обозначают:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(x), \quad D_i f(x), \quad f'_{x_i}(x), \quad f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Отметим ещё раз, что частная производная функции многих переменных по переменной x_i вычисляется при фиксированных значениях остальных.

Таким образом, для скалярной функции n переменных производная матрица есть вектор, i-я координата которого равна частной производной функции f по переменной x_i.

С использованием указанных выше обозначений матрицу $f'(x)$ записывают в виде

$$f'(x) = \nabla f(x) = \left(f'_{x_1}(x), f'_{x_2}(x), \dots, f'_{x_n}(x)\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right) = \left(\mathrm{grad} f(x)\right)^T$$

и называют производной скалярной функции по вектору, а вектор $\left(f'(x)\right)^T$ называют градиентом функции f и обозначают $\mathrm{grad}\, f(x)$. Вектор $\mathrm{grad}\, f(x)$ очень часто используется, например в физике.

Случай 4. Пусть n и k произвольны, то есть $X \subseteq R^n$, $f : X \to R^k$ – вектор-функция многих переменных. Тогда функцию f можно записать в виде

$$f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ .... \\ f_k(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,...,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,...,x_n) \\ ....\ .... \\ f_k(x_1,x_2,...,x_n) \end{pmatrix},$$

поэтому $f'(x):R^n \to R^k$ и $f'(x)$ является матрицей размера $k \times n$, и может быть записана в виде

$$f'(x)=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^k & a_2^k & ... & a_n^k \end{pmatrix}.$$

Для нахождения компоненты a_j^i матрицы $f'(x)$ проварьируем, как и в случае 3, j-ю координату вектора x, т.е. возьмем приращение Δx в виде $\Delta x=(0,...,0,\Delta x_j,0,...,0)^T=\Delta x_j e_j$, тогда

$$f'(x)\cdot\Delta x=\begin{pmatrix} a_j^1\cdot\Delta x_j \\ a_j^2\cdot\Delta x_j \\ .... \\ a_j^k\cdot\Delta x_j \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x+\Delta x)-f_1(x) \\ f_2(x+\Delta x)-f_2(x) \\ ....\ ....\ .... \\ f_k(x+\Delta x)-f_k(x) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} f_1(x+\Delta x_j e_j)-f_1(x) \\ f_2(x+\Delta x_j e_j)-f_2(x) \\ ....\ ....\ .... \\ f_k(x+\Delta x_j e_j)-f_k(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_j^1 \\ a_j^2 \\ .... \\ a_j^k \end{pmatrix}\cdot\Delta x_j+\begin{pmatrix} \alpha_1(x,\Delta x_j) \\ \alpha_2(x,\Delta x_j) \\ ....\ ... \\ \alpha_k(x,\Delta x_j) \end{pmatrix}.$$

Переходя в последнем равенстве к координатной записи и учитывая, что

$$\lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\alpha_i(x, \Delta x_j)}{\Delta x_j} = 0,\ i = 1,2,\dots,n,$$

получим

$$a^i_j = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{f_i(x + \Delta x_j) - f_i(x)}{\Delta x_j} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}.$$

Таким образом, компонента a^i_j матрицы Якоби $f'(x)$ для вектор-функции n переменных совпадает с частной производной i-й компоненты f_i вектора f по переменной x_j, и поэтому матрица $f'(x)$ может быть записана в виде

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx} \\ \frac{df_2}{dx} \\ \dots \\ \frac{df_k}{dx} \end{pmatrix} = \left(D_1 f(x), D_2 f(x), \dots, D_n f(x)\right)$$

и называется производной вектор-функции по векторному аргументу. Последние два представления производной являются представлением через столбцы и строки соответственно.

Попутно мы доказали, что если функция f дифференцируема в точке x, то в этой точке существует производная функции f, а следовательно и производная матрица состоящая или из производных компонент в случае вектор-функции скалярного аргумента или из частных производных компонент в случае вектор-функции векторного аргумента. Обратное, как мы уже указывали, неверно, то есть может существовать производная функции f, а функция не быть дифференцируемой. Подробнее об этом мы поговорим позднее при рассмотрении вопроса о достаточных условиях дифференцируемости.

2.3. Некоторые свойства производных. Таблица производных

Рассмотрим некоторые свойства производных.

Свойство 1. Если функции $f_1 : X \to Y$ и $f_2 : X \to Y$ дифференцируемы, то их сумма и разность дифференцируемы и

$$\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)' = f_1'(x) \pm f_2'(x).$$

Доказательство для суммы вытекает из следующей цепочки вычислений

$$\begin{aligned}
&\left(f_1(x+\Delta x) + f_2(x+\Delta x)\right) - \left(f_1(x) + f_2(x)\right) = \\
&= \left(f_1(x+\Delta x) - f_1(x)\right) + \left(f_2(x+\Delta x) - f_2(x)\right) = \\
&= f_1'(x)\cdot \Delta x + \alpha_1(\Delta x) + f_2'(x)\cdot \Delta x + \alpha_2(\Delta x) = \\
&= \left(f_1'(x) + f_2'(x)\right)\cdot \Delta x + \alpha_1(\Delta x) + \alpha_2(\Delta x)\,.
\end{aligned}$$

Для разности доказательство аналогично. Доказанное свойство легко распространяется на любое конечное число слагаемых.

Свойство 2. Если функция $f : X \to Y$ дифференцируема, то для любой константы C функция $C \cdot f(x)$ дифференцируема и

$$\left(C \cdot f(x)\right)' = C \cdot f'(x)$$

*Доказательство.*Для приращения $C\, f(x+\Delta x) - C\, f(x)$ имеем

$$\begin{aligned}
&C\, f(x+\Delta x) - C\, f(x) = C\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right) = \\
&= C\left(f'(x)\cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\right) = C\, f'(x)\cdot \Delta x + C\,\alpha(\Delta x),
\end{aligned}$$

что и доказывает свойство 2.

Ранее нами были рассмотрены пространства $M[a,b]$ заданных на отрезке $[a,b]$ ограниченных функций и $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций. Обозначим через $C^1[a,b]$ множество функций заданных на отрезке $[a,b]$ и имеющих непрерывную первую производную. Линейные операции введём так же, как в $M[a,b]$ и $C[a,b]$, то есть положим $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Свойства 1 и 2 означают, что пространство $C^1[a,b]$ замкнуто относительно сложения функций и умножения функции на скаляр, то есть сумма дифференцируемых функций есть дифференцируемая функция, произведение дифференцируемой функции на скаляр так же дифференцируемо. Следовательно $C^1[a,b]$ является линейным подпространством пространств $M[a,b]$ и $C[a,b]$ и поэтому само есть линейное пространство. Из свойств 1 и 2 также следует, что оператор дифференцирования $D: C^1[a,b] \to C[a,b]$, ставящий в соответствие каждой дифференцируемой функции f из $C^1[a,b]$ её производную f', то есть действующий по формуле $Df(x) = f'(x)$, линеен. Можно сказать также, что операция дифференцирования линейна.

Аналогично вводится пространство $C_k^1[a,b]$ вектор-функций скалярного аргумента заданных на $[a,b]$ и имеющих там непрерывную производную.

В рассматриваемых далее свойствах 3 и 4 функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ предполагаются скалярными функциями одного или многих скалярных аргументов.

Свойство 3. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ дифференцируемы, то произведение $f_1(x)\cdot f_2(x)$ дифференцируемо и

$$\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)' = f_1'(x)\cdot f_2(x) + f_1(x)\cdot f_2'(x).$$

Доказательство. Рассмотрим приращение $\Delta\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right) = f_1(x+\Delta x)\cdot f_2(x+\Delta x) - f_1(x)\cdot f_2(x)$. Прибавляя и вычитая $f_1(x)\cdot f_2(x+\Delta x)$, получаем

$$f_1(x+\Delta x)\cdot f_2(x+\Delta x) - f_1(x)\cdot f_2(x) = f_1(x+\Delta x)\cdot f_2(x+\Delta x) -$$
$$- f_1(x)\cdot f_2(x+\Delta x) + f_1(x)\cdot f_2(x+\Delta x) - f_1(x)\cdot f_2(x) =$$
$$= \left(f_1(x+\Delta x) - f_1(x)\right)\cdot f_2(x+\Delta x) + f_1(x)\cdot\left(f_2(x+\Delta x) - f_2(x)\right) =$$
$$= \left(f_1'(x)\Delta x + \alpha_1(\Delta x)\right)\left(f_2(x) + \alpha_2(\Delta x)\right) + f_1(x)\left(f_2'(x)\Delta x + \alpha_3(\Delta x)\right) =$$

$$= \left(f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x) \right) \Delta x + \alpha_1(\Delta x) f_2(x) + \alpha_2(\Delta x) \Delta x f_1'(x) +$$
$+ \alpha_1(\Delta x) \alpha_2(\Delta x) + \alpha_3(\Delta x) f_1(x)$, что и доказывает свойство 3.

Правило дифференцирования произведения можно распространить на любое конечное число сомножителей, например,

$$\left(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \right)' = f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) +$$
$$+ f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot f_3(x) + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3'(x).$$

Таким же образом можно найти производную от n сомножителей.

Из правил дифференцирования суммы и произведения следует правило дифференцирования функциональных определителей. Пусть элементами определителя служат дифференцируемые скалярные функции одного скалярного аргумента, тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a_{11}'(t) & a_{12}'(t) & \dots & a_{1n}'(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}'(t) & a_{22}'(t) & \dots & a_{2n}'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}'(t) & a_{n2}'(t) & \dots & a_{nn}'(t) \end{vmatrix}.$$

Если даны две дифференцируемые вектор-функции $a(t) = \left(a_1(t), a_2(t), a_3(t)\right)^T$, $b(t) = \left(b_1(t), b_2(t), b_3(t)\right)^T$ относительно декартовой системы координат, то используя формулы дифференцирования произведения и правило дифференцирования определителя, легко получить формулы дифференцирования скалярного и векторного произведений

$$\left(a(t), b(t)\right)' = \left(a'(t), b(t)\right) + \left(a(t), b'(t)\right);$$
$$\left[a(t), b(t)\right]' = \left[a'(t), b(t)\right] + \left[a(t), b'(t)\right].$$

Предлагаем читателю получить эти соотношения самостоятельно.

Свойство 4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ дифференцируемы, $f_2(x) \neq 0$, то дробь $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ дифференцируема и

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{(f_2(x))^2}.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{f_1(x+\Delta x)}{f_2(x+\Delta x)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x+\Delta x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2(x+\Delta x)}{f_2(x) \cdot f_2(x+\Delta x)} =$$

$$= \frac{f_1(x+\Delta x) f_2(x) - f_1(x) f_2(x) + f_1(x) f_2(x) - f_1(x) f_2(x+\Delta x)}{f_2(x) f_2(x+\Delta x)} =$$

$$= \frac{\big(f_1(x+\Delta x) - f_1(x)\big) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot \big(f_2(x+\Delta x) - f_2(x)\big)}{f_2(x) f_2(x+\Delta x)}.$$

Далее, пользуясь определением дифференцируемости функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и непрерывностью $f_2(x)$ нетрудно получить утверждение теоремы. Предлагается проделать это самостоятельно.

В подразделе 2.2 было показано, что для нахождения элементов матрицы Якоби $f'(x)$ нужно уметь вычислять производную функции одной переменной. Последнюю находят, пользуясь таблицей производных, свойствами 1 - 4, доказанными выше, и правилами дифференцирования суперпозиции отображений и обратного отображения, которые будут рассмотрены ниже.

Таблица производных:

$(C)' = 0$; $\qquad$ $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$;

$(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{1}{x \ln a}$; $\qquad$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$; $\qquad$ $\left(e^x\right)' = e^x$;

$(\sin x)' = \cos x$; $\qquad$ $(\cos x)' = -\sin x$;

$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad (\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x; \qquad (\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x;$$

$$(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}; \qquad (\mathrm{cth}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x};$$

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}; \qquad (\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для получения приведенных соотношений воспользуемся определением производной:

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} x^{\alpha-1}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \alpha\, x^{\alpha-1};$$

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x} = \frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x\ln a};$$

При $a = e$ получаем $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = a^x \ln a;$$

Если $a = e$, то $(e^x)' = e^x$;

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x;$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin x;$$

Пользуясь правилом дифференцирования дроби, получим

$$(\mathrm{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x)\cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\mathrm{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Справедливость остальных формул таблицы производных будет доказана позднее.

2.4. Производная сложной функции

В этом подразделе будет сформулировано и доказано одно из важнейших правил дифференцирования.

Теорема. Если $X \subseteq R^n$, $Y \subseteq R^k$, $Z \subseteq R^m$ и функции

$$\varphi: X \subseteq R^n \to Y \subseteq R^k, \quad f: Y \subseteq R^k \to Z \subseteq R^m$$

дифференцируемы в точках x и $\varphi(x)$ соответственно, то композиция отображений $f \circ \varphi: X \subseteq R^n \to Z \subseteq R^m$ дифференцируема в точке x и

$$(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \cdot \varphi',$$

или, что то же самое,

$$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x), \tag{2.8}$$

т.е., говоря другими словами, производная матрица суперпозиции отображений равна произведению производных матриц исходных функций, вычисленных в соответствующих точках.

Замечание. Если обозначить матрицы $f' = A$, $\varphi' = B$, $(f \circ \varphi)' = C$, то соотношение (2.8) может быть записано в виде $C = A \cdot B$.

Докажем сначала лемму.

Лемма. Величина $\left\| \varphi'(x_0) \cdot \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \right\|$ ограничена для всякого x из R^n.

Доказательство леммы. По определению нормы в R^n $\left(\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$, виду матрицы Якоби и определению операции умножения матрицы на вектор имеем

$$\left\| \varphi'(x_0) \cdot \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_{21}(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2(x_0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_{k1}(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_k(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_k(x_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1 - x_{10}}{\|x - x_0\|} \\ \frac{x_2 - x_{20}}{\|x - x_0\|} \\ \dots \\ \frac{x_n - x_{n0}}{\|x - x_0\|} \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_1(x_0)}{\partial x_i} \frac{x_i - x_{i0}}{\|x - x_0\|} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_2(x_0)}{\partial x_i} \frac{x_i - x_{i0}}{\|x - x_0\|} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k(x_0)}{\partial x_i} \frac{x_i - x_{i0}}{\|x - x_0\|} \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j(x_0)}{\partial x_i} \frac{x_i - x_{i0}}{\|x - x_0\|} \right)^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_j(x_0)}{\partial x_i} \right| \cdot \left| \frac{x_i - x_{i0}}{\|x - x_0\|} \right| \right)^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_j(x_0)}{\partial x_i} \right| \right)^2 \right)^{1/2}$$

в силу того, что

$$\left| \frac{x_i - x_{i0}}{\|x - x_0\|} \right| \leq 1$$

для всякого $i = 1, 2, ..., n.$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Рассмотрим приращение $(f \circ \varphi)(x) - (f \circ \varphi)(x_0) = f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))$. Имеем

$$f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0)) = f'(\varphi(x_0)) \cdot (\varphi(x) - \varphi(x_0)) + \alpha_1(\varphi(x_0), \varphi(x) - \varphi(x_0)) =$$
$$= f'(\varphi(x_0)) \cdot (\varphi'(x_0)(x - x_0) + \alpha_2(x_0, x - x_0)) + \alpha_1(\varphi(x_0), \varphi(x) - \varphi(x_0)) =$$
$$= f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)(x - x_0) + f'(\varphi(x_0))\alpha_2(x_0, x - x_0) +$$
$$+ \alpha_1(\varphi(x_0), \varphi(x) - \varphi(x_0)),$$

и, так как

$$f'(\varphi(x_0)) \cdot (\varphi'(x_0) = (f' \circ \varphi)(x_0) \cdot \varphi'(x_0)),$$

то для доказательства теоремы осталось показать, что

$$\alpha(x_0, x - x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \alpha_2(x_0, x - x_0)) + \alpha_1(\varphi(x_0), \varphi(x) - \varphi(x_0))$$

есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\|x - x_0\|$, то есть, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x_0, x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Для первого слагаемого это следует из свойств предела и определения $\alpha_2(x_0, x - x_0)$. Действительно,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(\varphi(x_0)) \cdot \alpha_2(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = f'(\varphi(x_0)) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_2(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Покажем, что и второе слагаемое есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\|x - x_0\|$. При $\varphi(x) - \varphi(x_0) \equiv 0$ это очевидно, так как в этом случае $\alpha_1(\varphi(x_0), \varphi(x) - \varphi(x_0)) \equiv 0$. Поэтому предположим, что $\varphi(x) - \varphi(x_0) \neq 0$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(\varphi(x_0), \varphi(x) - \varphi(x_0))}{\|x - x_0\|} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(\varphi(x_0), \varphi(x)-\varphi(x_0))}{\|\varphi(x)-\varphi(x_0)\|} \cdot \frac{\|\varphi(x)-\varphi(x_0)\|}{\|x-x_0\|} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(\varphi(x_0), \varphi(x)-\varphi(x_0))}{\|\varphi(x)-\varphi(x_0)\|} \cdot \left\| \frac{\varphi'(x_0)\cdot(x-x_0)}{\|x-x_0\|} + \frac{\alpha_2(x_0, x-x_0)}{\|x-x_0\|} \right\|,$$

из чего следует утверждение об α_1 и, следовательно, утверждение теоремы. Теорема доказана.

Рассмотрим частные случаи формулы (2.8), наиболее часто встречающиеся на практике.

Случай 1. Если $n=k=m=1$, то соотношение (2.8) является правилом дифференцирования суперпозиции скалярных функций одного скалярного аргумента (сложной функции одного аргумента), известного из курса средней школы.

Например:

$$(\sin\ln x)' = \frac{\cos\ln x}{x}; \ (\cos^2 x)' = 2\cos x\cdot(-\sin x);$$

$$(e^{\cos^2 5x})' = e^{\cos^2 5x}\cdot 2\cos 5x\cdot(-\sin 5x)\cdot 5.$$

Теперь получим оставшиеся формулы из таблицы производных.

Вспоминая определение гиперболических функций, запишем

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \mathrm{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \ \mathrm{cth}x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

имеем

$$(\mathrm{sh}x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}x;$$

$$(\mathrm{ch}x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}x;$$

$$(\mathrm{th}x)' = \left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\right)' = \frac{(\mathrm{sh}x)'\mathrm{ch}x - (\mathrm{ch}x)'\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x},$$

так как

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-(e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x})}{4}=1;$$

$$(\mathrm{cth}x)'=\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}\right)'=\frac{(\mathrm{ch}x)'\mathrm{sh}x-(\mathrm{sh}x)'\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}^2x}=\frac{\mathrm{sh}^2x-\mathrm{ch}^2x}{\mathrm{sh}^2x}=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2x}.$$

Часто встречаются степенно-показательные функции, т.е. функции вида $u(x)^{v(x)}$. Для нахождения производных от них рекомендуется воспользоваться основным логарифмическим тождеством $a=e^{\ln a}$, тогда $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$, либо предварительно прологарифмировать функцию. Оба приёма эффективны и при вычислении производной функций вида $f(x)=\dfrac{u_1(x)u_2(x)...u_l(x)}{v_1(x)v_2(x)...v_m(x)}$.

Пример 1. Найти $f'(x)$, если $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$. Находим $\ln f(x)=\cos x\cdot\ln\sin x$. Дифференцируя обе части и используя теоремы о дифференцировании сложной функции и произведения, имеем

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sin x\cdot\ln\sin x+\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\cos x,$$

из чего получаем

$$f'(x)=(\sin x)^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\cdot\ln\sin x+\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=$$

$$=(\sin x)^{\cos x-1}\cdot\left(\cos^2x-\sin^2x\cdot\ln\sin x\right).$$

Тот же результат получим, если продифференцируем функцию $f(x)=(\sin x)^{\cos x}=e^{\cos x\cdot\ln\sin x}$, совпадающую с исходной.

Пример 2. Найти $f'(x)$, если $f(x)=\dfrac{(x-1)^3(x-2)^4(x^2+1)^5}{(x+4)^2(x-3)^6}$.

Логарифмируя обе части, получаем

$$\ln f(x) = 3\ln(x-1) + 4\ln(x-2) + 5\ln(x^2+1) - 2\ln(x+4) - 6\ln(x-3).$$

Дифференцируя обе части последнего выражения и используя теоремы о дифференцировании сложной функции, имеем

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{10x}{x^2+1} - \frac{2}{x+4} - \frac{6}{x-3}.$$

Умножая обе части полученного выражения на

$$f(x) = \frac{(x-1)^3(x-2)^4(x^2+1)^5}{(x+4)^2(x-3)^6},$$

окончательно получаем

$$f'(x) = \frac{(x-1)^3(x-2)^4(x^2+1)^5}{(x+4)^2(x-3)^6}\left(\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{10x}{x^2+1} - \frac{2}{x+4} - \frac{6}{x-3}\right).$$

Случай 2. Пусть $n=1$, k – произвольно, $m=1$. Для суперпозиции отображений, приведенной на схеме,

$$\begin{tikzcd} X \subseteq R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f\circ\varphi"'] & Y \subseteq R^k \arrow[d, "f"] \\ & Z \subseteq R \end{tikzcd}$$

имеем, что $f(y_1, y_2, ..., y_k)$ есть скалярная функция k переменных, $\varphi(x) = \left(y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)\right)^T$ – вектор-функция одного скалярного аргумента, $\left(f \circ \varphi\right)(x) = f\left(y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)\right)$ скалярная функция скалярного аргумента. Следовательно, можем записать

$$f'(y_1, y_2, ..., y_k) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial y_k}\right),$$

$$\varphi'(x) = \left(\frac{dy_1}{dx}(x), \frac{dy_2}{dx}(x), ..., \frac{dy_k}{dx}(x)\right)^T,$$

$$\left(f' \circ \varphi\right)(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\left(y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)\right),\right.$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y_2}\left(y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)\right), ..., \frac{\partial f}{\partial y_k}\left(y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)\right)\right) =$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(x), \frac{\partial f}{\partial y_2}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial y_k}(x)\right),$$

далее, перемножая матрицы $f'(\varphi(x))$ и $\varphi'(x)$, имеем

$$\frac{df}{dx} = (f' \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) =$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(x), \frac{\partial f}{\partial y_2}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial y_k}(x)\right) \cdot \left(\frac{dy_1}{dx}(x), \frac{dy_2}{dx}(x), ..., \frac{dy_k}{dx}(x)\right)^T =$$

$$=\frac{\partial f}{\partial y_1}(x) \cdot \frac{dy_1}{dx}(x) + \frac{\partial f}{\partial y_2}(x) \cdot \frac{dy_2}{dx}(x) + ... + \frac{\partial f}{\partial y_k}(x) \cdot \frac{dy_k}{dx}(x) =$$

$$=\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)) \cdot \frac{dy_1}{dx},$$

и получаем в результате

$$\frac{df}{dx} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)) \cdot \frac{dy_i}{dx}. \qquad (2.9)$$

Пример 3. Для функции $f(y_1, y_2)$ найти $\frac{df}{dt}$, если $y_1 = \sin t$, $y_2 = \cos t$. По формуле (2.9) находим $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \cos t - \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \sin t$.

Интересен случай функции двух переменных $f(x, y)$, когда переменная y зависит от переменной x, то есть функции вида $f(x, y(x))$. Этот случай ни чем не отличается от предыдущего, если ввести новую переменную t и положить $x = t$. Тогда $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}$. Поэтому, с одной стороны,

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx},$$

с другой стороны

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Приравнивая правые части полученных соотношений, окончательно получаем

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Производная $\dfrac{df}{dx}$ называется в этом случае полной, в отличие от частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, которая вычисляется при фиксированном значении y.

Аналогично рассматривается случай, когда у функции $f(x, y_1, y_2, ..., y_k)$ переменные $y_1, y_2, ..., y_k$ зависят от переменной x, то есть функции вида $f(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x))$. Тогда

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_i}\big(y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)\big) \cdot \frac{dy_i}{dx}.$$

Случай 3. Пусть n и k – произвольны, $m = 1$. Для суперпозиции отображений, приведенной на схеме,

$$\begin{tikzcd} X \subseteq R^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f \circ \varphi"'] & Y \subseteq R^k \arrow[d, "f"] \\ & Z \subseteq R \end{tikzcd}$$

имеем что $f(y_1, y_2, ..., y_k)$ есть скалярная функция k переменных, $\varphi(x) = \big(y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)\big)^T$ – вектор-функция векторного аргумента и $\big(f \circ \varphi\big)(x) = f\big(y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)\big)$ – скалярная функция векторного аргумента. Следовательно, можем записать

$$f'(y_1, y_2, ..., y_k) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial y_k} \right),$$

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_k}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_k}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$(f'\circ\varphi)(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\big(y_1(x),y_2(x),...,y_k(x)\big),\right.$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y_2}\big(y_1(x),y_2(x),...,y_k(x)\big),...,\frac{\partial f}{\partial y_k}\big(y_1(x),y_2(x),...,y_k(x)\big)\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(x),\frac{\partial f}{\partial y_2}(x),...,\frac{\partial f}{\partial y_k}(x)\right)$$

и далее, перемножая матрицы $f'\big(\varphi(x)\big)$ и $\varphi'(x)$, имеем

$$\frac{df}{dx}=(f'\circ\varphi)(x)\cdot\varphi'(x)=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(x),\frac{\partial f}{\partial y_2}(x),...,\frac{\partial f}{\partial y_k}(x)\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ ... & ... & ... & ...\\ \frac{\partial y_k}{\partial x_1} & \frac{\partial y_k}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial y_k}{\partial x_n}\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_1},\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_2},...,\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_n}\right)$$

или, записывая по координатам, окончательно получаем

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}&=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+...+\frac{\partial f}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_1},\\
\frac{\partial f}{\partial x_2}&=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_2}+...+\frac{\partial f}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_2},\\
&..........\ ....\ ....\ ....\ ....\ ....\ ....\ ....\ .\\
\frac{\partial f}{\partial x_n}&=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_n}=\frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_n}+\frac{\partial f}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_n}+...+\frac{\partial f}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_n}.
\end{aligned}\right\}\qquad(2.10)$$

Пример 5. Пусть $f(x,y,z)=x^3y+y^3z^2+z^3$, $x=u^2+v$, $y=\cos u+v$, $z=\sin(uv)+v^2$, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 3(u^2+v)^2 \cdot (\cos u + v) \cdot 2u +$$
$$+((u^2+v)^3 + 3(\cos u + v)^2 \cdot (\sin(uv)+v^2)^2) \cdot (-\sin u) +$$
$$+(2(\cos u + v)^3(\sin(uv)+v^2) + 3(\sin(uv)+v^2)^2) \cdot \cos(uv) \cdot v.$$

Аналогично вычисляется

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 3(u^2+v)^2 \cdot (\cos u + v) \cdot 1 +$$
$$+((u^2+v)^3 + 3(\cos u + v)^2 \cdot (\sin(uv)+v^2)^2) \cdot 1 +$$
$$+(2(\cos u + v)^3(\sin(uv)+v^2) + 3(\sin(uv)+v^2)^2) \cdot (\cos(uv) \cdot u + 2v).$$

Случай 4. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$. Тогда $f(x, y) = f(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_k)$ Пусть, далее, $y_j = y_j(x_1, x_2, ..., x_n)$, $j = 1, 2, ..., k$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_n}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

2.5. Производная обратной функции

Применим результаты о производной сложной функции, полученные выше, для нахождения производной обратного отображения.

Теорема 2.3. Пусть $X \subseteq R^n$, $Y \subseteq R^n$, $f : X \to Y$ и $f^{-1} : Y \to X$ – обратное к f отображение. Пусть, кроме того, f дифференцируема в точке x_0, $y_0 = f(x_0)$, и существует $(f'(x_0))^{-1}$. Тогда f^{-1} дифференцируема в точке y_0 и

$$(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}, \tag{2.12}$$

то есть производная матрица обратного отображения равна обратной матрице к производной матрице исходного отображения.

Доказательство. По определению обратного отображения имеет место соотношение $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ для любого x из $X \subseteq R^n$. По теореме о производной сложной функции, в предположении дифференцируемости f^{-1}, имеем

$$(f^{-1} \circ f)'(x_0) = ((f^{-1})' \circ f)(x_0) \cdot f'(x_0) =$$
$$= (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = (f^{-1})'(y_0) \cdot f'(x_0) = E.$$

Умножая полученное соотношение справа на $(f'(x_0))^{-1}$, получаем равенство (2.12). Для завершения доказательства теоремы осталось показать дифференцируемость f^{-1}, которое мы опускаем и отсылаем читателя к [2-8].

Замечание. Для функции одного переменного

$$(f'(x_0))^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

и поэтому

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Применим теорему 2.3 для доказательства оставшихся формул из таблицы производных:

$$(\mathrm{arctg} x)'_x = \frac{1}{(\mathrm{tg} y)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\mathrm{arcctg} x)'_x = \frac{1}{(\mathrm{ctg} y)'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Знак «+» перед корнем ставится ввиду положительности $\cos y$ при $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

$$(\arccos x)'_x = \frac{1}{(\cos y)'_y} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{+\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Так как $\sin y > 0$ при $0 \le y \le \pi$, то перед корнем ставится знак «+».

2.6. Производная по направлению

Определение. Пусть f – функция многих переменных $\left(f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)\right)$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)^T \in R^n$ – фиксированная точка, $a \in R^n$ - фиксированный вектор, t – число. Предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + at) - f(x_0)}{\|a\| \cdot t},$$

если он существует и конечен, называется производной функции f в направлении a, или производной Гато, и обозначается $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$.

Пусть $a = e_i$ – единичный n- мерный вектор с i -ой координатой, равной единице, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial e_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + e_i t) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Таким образом, мы получили, что производная в направлении координатной оси совпадает с частной производной по этой координате.

Найдем теперь выражение, связывающее производные $\frac{\partial f}{\partial a}$ и f'. Для простоты вычислений и записи ограничимся случаем двух переменных. Тогда $x_0 = (x_1^0, x_2^0)^T$, $a = (\xi_1, \xi_2)^T$, $at = \left(\xi_1 t, \xi_2 t\right)^T$. Положив $x_1(t) = x_1^0 + \xi_1 t$, $x_2(t) = x_2^0 + \xi_2 t$, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0 + \xi_1 t, x_2^0 + \xi_2 t) - f(x_1^0, x_2^0)}{\|a\| \cdot t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1(t), x_2(t)) - f(x_1(0), x_2(0))}{\|a\| \cdot t} = \frac{1}{\|a\|} \cdot \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}.$$

По формуле (2.9) получаем

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \xi_2 .$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f(x_1^0, x_1^0)}{\partial x_1} \cdot \frac{\xi_1}{\|a\|} + \frac{\partial f(x_1^0, x_1^0)}{\partial x_2} \cdot \frac{\xi_2}{\|a\|},$$

где $\|a\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ – длина вектора a.

Учитывая, что $\frac{\xi_1}{\|a\|}$, $\frac{\xi_2}{\|a\|}$ – направляющие косинусы вектора a, из последнего равенства находим

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \cos\beta = \left(\mathrm{grad} f, \frac{a}{\|a\|} \right) =$$

$$= \nabla f \cdot \frac{a}{\|a\|} = \|\mathrm{grad} f\| \cdot \cos(\mathrm{grad} f, a).$$

Аналогично для функции любого числа переменных показывается, что

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \cos\alpha_i = \left(\mathrm{grad} f, \frac{a}{\|a\|} \right),$$

где $\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T$.

Далее можем записать

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \left(\mathrm{grad} f, \frac{a}{\|a\|} \right) = \|\mathrm{grad} f\| \left\| \frac{a}{\|a\|} \right\| \cos(\mathrm{grad} f, a) = \|\mathrm{grad} f\| \cos(\mathrm{grad} f, a).$$

Таким образом, число $\frac{\partial f}{\partial a}$ принимает наибольшее значение, если $\cos(\mathrm{grad} f, a) = 1$, то есть, когда вектор $\mathrm{grad} f$ направлен в ту же сторону, что и вектор a, и наименьшее значение, если $\cos(\mathrm{grad} f, a) = -1$, то есть вектор $\mathrm{grad} f$ имеет направление противоположное направлению вектора a. Следовательно, направление $\mathrm{grad}\, f$ – направление наиболее быстрого возрастания функции f, а направление $-\mathrm{grad}\, f$ – направление наиболее быстрого убывания функции f. Этот факт используют в построении градиентных методов поиска экстремума.

Пример. Найдите $\frac{\partial f}{\partial a}$ в точке $M(1,2,-1)$, если

$$f(x, y, z) = x^4 y^2 + 4xyz^3 - 2z^2,\ a = (1,3,-2)^T.$$

Так как $\|a\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$, то

$$\frac{a}{\|a\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}\right).$$

Далее,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 y^2 + 4yz^3,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^4 y + 4xz^3,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 12xyz^2 - 4z,$$

поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,-1) = 8,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,-1) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-1) = 28.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\frac{\partial f}{\partial a}(1,2,-1) = 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + 0 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} + 28 \cdot \frac{-2}{\sqrt{14}} = -\frac{48}{\sqrt{14}}.$$

Заметим, что $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|$ определяет скорость изменения функции в точке M в направлении вектора a, а знак величины $\frac{\partial f}{\partial a}$ – характер изменения функции (возрастание, убывание). В данном примере функция в точке M в направлении вектора a убывает со скоростью $\frac{48}{\sqrt{14}}$.

2.7. Производные высших порядков

Вначале рассмотрим скалярную функцию f одной переменной ($f: X \to Y,\ X, Y \subseteq R$). Пусть для всякого x из X существует производная f' функции f. Определим вторую производную f'' функции f как производную от первой производной, то есть, положим $f''(x) = (f'(x))'$. Аналогично $f'''(x) = (f''(x))', \ldots,\ f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Пример 1. Пусть $f(x) = (ax+b)^{\lambda}$, где a, b, λ – const. Найти $f^{(n)}(x)$.

$$f'(x) = \lambda(ax+b)^{\lambda-1} \cdot a,\ f''(x) = \lambda(\lambda-1)(ax+b)^{\lambda-2} \cdot a^2, \ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)(ax+b)^{\lambda-n} \cdot a^n.$$

Пример 2. $f(x) = e^{ax+b}$, a и b – const. Найти $f^{(n)}(x)$.

$$f'(x) = a \cdot e^{ax+b},\quad f''(x) = a^2 \cdot e^{ax+b}, \ldots,\ f^{(n)}(x) = a^n \cdot e^{ax+b}.$$

Пример 3. $f(x) = \sin x$. Найти $f^{(n)}(x)$. Имеем

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \tfrac{\pi}{2}),\ f''(x) = \cos(x + \tfrac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \tfrac{\pi}{2}),$$

$$f'''(x) = \cos(x + 2 \cdot \tfrac{\pi}{2}) = \sin(x + 3 \cdot \tfrac{\pi}{2}), \ldots,\ f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \tfrac{\pi}{2}).$$

Рассмотрим более подробно производные высших порядков от сложной функции одной переменной. Пусть $f(x)$ и $x(t)$ дифференцируемые функции. Тогда по формуле (2.8) имеем

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Предположим, что функции $\frac{df}{dx}$ и $\frac{dx}{dt}$ также дифференцируемы. Применяя к полученному выражению правило дифференцирования произведения, имеем

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dx}\cdot\frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Так как $\dfrac{df}{dx}$ – сложная функция от переменной t, то по формуле (2.8), получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{d^2 f}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dt}$$

и после подстановки этого результата в выражение для $\dfrac{d^2 f}{dt^2}$ окончательно имеем

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d^2 f}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{df}{dx}\cdot\frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Для вектор-функции одного аргумента

$$f(x) = \left(f_1(x),\, f_2(x),\ldots,\, f_k(x)\right)^T = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots\ldots \\ f_k(x) \end{pmatrix}.$$

полагаем, по аналогии с функцией одной переменной,

$$f''(x) = (f'(x))' = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \ldots\ldots \\ f_k'(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1''(x) \\ f_2''(x) \\ \ldots\ldots \\ f_k''(x) \end{pmatrix},$$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \begin{pmatrix} f_1^{(n)}(x) \\ f_2^{(n)}(x) \\ \ldots\ldots \\ f_k^{(n)}(x) \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Пусть $f(x) = \left(e^{2x}, \cos 3x\right)^T$, тогда

$$f'(x)=\begin{pmatrix}2e^{2x}\\-3\sin 3x\end{pmatrix},\ f''(x)=\begin{pmatrix}2e^{2x}\\-3\sin 3x\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}4e^{2x}\\-9\cos 3x\end{pmatrix}.$$

Для скалярной функции многих переменных ($f:X\to Y$, $X\subseteq R^n$, $Y\subseteq R$, $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$) положим

$$f''(x)=\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T\right)'=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\\frac{\partial f}{\partial x_2}\\...\\\frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_2}\\... & ... & ... & ...\\\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_n} & ... & \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

Неформальное введение производных более высокого порядка в только что рассмотренном и более общем случае вектор-функции многих переменных, по использованной для скалярной функции и вектор-функции одной переменной схеме, требует дополнительных, выходящих за рамки курса технического вуза, знаний. С соответствующим изложением можно ознакомиться в [5,6] и в других изданиях.

Отметим, что в нашем случае функциональная матрица состоит из элементов $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$, называемых частными производными второго порядка и обозначаемых $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, или $f''_{x_i x_j}$. При $i=j$ пишут $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, $f''_{x_i^2}$.

По аналогии с частными производными второго порядка вводятся частные производные третьего, четвертого и более высоких порядков, например,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

Частные производные высших порядков, полученные дифференцированием по различным переменным, называются смешанными.

Пример 5. Пусть $f(x, y) = y \cdot \exp(x^2) + \cos y$. Тогда

$$f'_x = 2xy \cdot \exp(x^2), \quad f'_y = \exp(x^2) - \sin y, \quad f''_{yy} = -\cos y,$$

$$f''_{xx} = 4x^2 y \cdot \exp(x^2) + 2y \cdot \exp(x^2), \quad f''_{xy} = 2x \cdot \exp(x^2),$$

$$f''_{yx} = 2x \cdot \exp(x^2).$$

Замечание. $\exp(x) = e^x$.

В рассмотренном примере совпали смешанные частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

поэтому возникает закономерный вопрос о совпадении, в общем случае, частных производных по одним и тем же переменным, взятых в разном порядке. Ответ на него заключен в теореме.

Теорема 2.4. Если смешанные частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

определены в некоторой окрестности точки $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и непрерывны в этой точке, то они равны между собой в этой точке.

Доказательство проведем позже.

Следствие. Смешанные частные производные любого порядка, отличающиеся порядком дифференцирования, определённые в окрестности точки и непрерывные в точке, равны в этой точке между собой.

Рассмотрим более подробно частные производные высших порядков от сложной функции для функции двух переменных.

Пусть $f(x,y)$, $x(t)$, $y(t)$ дифференцируемые функции. Тогда, по формуле (2.9) имеем

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \qquad (2.13)$$

Предположим, что функции $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{dy}{dt}$ также дифференцируемы. Пользуясь формулами дифференцирования суммы и произведения, из (2.13) имеем

$$\frac{d^2 f}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{d^2 x}{dt^2}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dt^2}. \qquad (2.14)$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ являются сложными функциями от переменной t, то применяя формулу (2.13), получаем

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\cdot\frac{dy}{dt},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dt}\end{aligned}\right\}. \qquad (2.15)$$

Подставляя (2.15) в (2.14), и считая, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, окончательно имеем

$$\frac{d^2 f}{dt^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{d^2 x}{dt^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dt^2}. \qquad (2.16)$$

Таким же способом можно найти производные и более высоких порядков.

Пусть дана функция $f(x,y)$, причем $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. Тогда имеем сложную функцию $\varphi(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$. Будем считать функции $f(x,y)$, $x(u,v)$, $y(u,v)$ дифференцируемыми и имеющими дифференцируемые производные первого порядка.

В подразделе 2.4 показано, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}\right\} \qquad (2.17)$$

Из первого соотношения в (2.17) находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}.$$

Так как $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ являются сложными функциями переменных u и v, то применяя формулы (2.17), получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

Подставляя соотношения (2.18) в (2.17) и считая, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

окончательно имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}.$$

Таким же способом можно найти производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$.

Предлагаем проделать это самостоятельно в качестве упражнения.

2.8. Производная функции, заданной параметрически

Пусть скалярная функция задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – достаточное число раз дифференцируемые функции и $x'(t) \neq 0$. Предположим, что удалось найти обратную к $x(t)$ функцию $x^{-1} = t(x)$, тогда $y(x) = y(t(x))$ – сложная функция и $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Таким образом, производная функции, заданной параметрически, вычисляется по формуле

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = x(t). \end{cases} \tag{2.19}$$

Как видим, производная y'_x этими соотношениями задана также параметрически.

Для нахождения второй производной y''_{xx} воспользуемся соотношениями (2.19) еще раз:

$$\begin{cases} y''_{xx} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t} \\ x = x(t). \end{cases}$$

Вычислив производную дроби $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'_t$, получаем

$$\begin{cases} y''_{xx} = \dfrac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}, \\ x = x(t). \end{cases}$$

Аналогично могут быть получены выражения для третьей, четвертой и т.д. производных функции, заданной параметрически.

Пример. Для параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = t^3, \\ y = \cos^2 t, \end{cases}$$

находим

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{-2\cos t \sin t}{3t^2} = -\dfrac{\sin 2t}{3t^2}, \\ x = t^3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''_{xx} = (y'_x)'_x = \dfrac{(-\sin 2t / 3t^2)'_t}{3t^2} = \dfrac{-2\cos 2t \cdot 3t^2 + 6t \sin 2t}{27t^6}, \\ x = t^3. \end{cases}$$

2.9. Производная функции, заданной неявно

Пусть уравнение $\Phi(x, y) = 0$ задает y как неявную функцию от x, т.е. $y = y(x)$. Тогда $\Phi(x, y(x))$ - сложная функция переменной x, а $\Phi(x, y(x)) \equiv 0$ - тождество. Дифференцируя обе части этого тождества по x, имеем

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

отсюда получаем

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = -\frac{\partial \Phi / \partial x}{\partial \Phi / \partial y}. \qquad (2.20)$$

Совершенно очевидно, что проделанные выкладки справедливы, если Φ'_x, Φ'_y существуют и, кроме того, $\Phi'_y \neq 0$.

Используя соотношение $y'_x = -\dfrac{\Phi'_x(x, y)}{\Phi'_y(x, y)}$, легко найти y''_{xx} (предполагая её существование):

$$y''_{xx}=-\left(\frac{\Phi'_x(x,y)}{\Phi'_y(x,y)}\right)'_x=-\frac{(\Phi''_{xx}+\Phi''_{xy}\cdot y'_x)\cdot\Phi'_y-(\Phi''_{yx}+\Phi''_{yy}\cdot y')\cdot\Phi'_x}{(\Phi'_y)^2}.$$

Полагая $y'_x=-\dfrac{\Phi'_x}{\Phi'_y}$ и считая, что $\Phi''_{xy}=\Phi''_{yx}$, после упрощений находим

$$y''_{xx}=-\frac{2\Phi''_{xy}\cdot\Phi'_x\cdot\Phi'_y-\Phi''_{xx}\cdot(\Phi'_y)^2-\Phi''_{yy}\cdot(\Phi'_x)^2}{(\Phi'_y)^2}.$$

Аналогично может быть получено выражение для производной третьего, четвертого порядков и т.д.

Производную второго порядка y''_{xx} можно найти по другому, дважды продифференцировав тождество $\Phi(x,y(x))\equiv 0$ по x:

$$\Phi'_x(x,y)+\Phi'_y(x,y)\cdot y'_x=0,$$

$$\Phi''_{xx}(x,y)+\Phi''_{xy}(x,y)\cdot y'_x+\Phi''_{yx}(x,y)\cdot y'_x+$$

$$+\Phi''_{yy}(x,y)\cdot(y'_x)^2+\Phi'_y(x,y)\cdot y''_{xx}=0,$$

отсюда, после подстановки значения y'_x, найдем y''_{xx}.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих сказанное.

Пример 1. Найти y'_x, если y задана неявно уравнением $y^2+x^2y+2xy=0.$

Дифференцируя обе части по x, с учетом, что $y=y(x)$, имеем $2yy'+3x^2y+x^3y'+2y+2xy'=0.$

Разрешая это уравнение относительно y', получаем

$$y'=-\frac{3x^2y+2y}{2y+x^3+2x}.$$

Сравните с результатом, полученным по формуле (2.20).

Пример 2. Найти y''_{xx} для функции, заданной неявно уравнением $y^2+x^2y+2xy=0.$

Дифференцируя обе части по x, имеем

$$(2y+x^3+2x)\cdot y'_x+3x^2y+2y=0.$$

Дифференцируя второй раз, получаем

$$(2y + x^3 + 2x) \cdot y''_{xx} + (2y'_x + 3x^2 + 2) \cdot y'_x + 6xy + 3x^2 y'_x + 2y'_x = 0.$$

Разрешив последнее равенство относительно y''_{xx}, можем записать

$$y''_{xx} = \frac{2(y'_x)^2 + (6x^2 + 4)y'_x + 6xy}{2y + x^3 + 2x},$$

или, подставляя

$$y' = -\frac{3x^2 y + 2y}{2y + x^3 + 2x},$$

окончательно получаем

$$y''_{xx} = -\frac{2\left(-\dfrac{3x^2 y + 2y}{2y + x^3 + 2x}\right)^2 + (6x^2 + 4) \cdot \left(-\dfrac{3x^2 y + 2y}{2y + x^3 + 2x}\right) + 6xy}{2y + x^3 + 2x}.$$

Пусть теперь уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$ задаёт неявно функцию $z(x, y)$. Тогда $\Phi(x, y, z(x, y))$ – сложная функция переменных x, y, а $\Phi(x, y, z(x, y)) \equiv 0$ – тождество. Дифференцируя обе части этого тождества по x, получаем

$$\Phi'_x(x, y, z) + \Phi'_z(x, y, z) \cdot z'_x = 0, \qquad (2.21)$$

отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi / \partial x}{\partial \Phi / \partial z}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi / \partial y}{\partial \Phi / \partial z}.$$

Для функции трех и большего числа переменных вывод формул для вычисления производных проделайте самостоятельно.

Для отыскания z''_{xx} продифференцируем дважды тождество $\Phi(x, y, z(x, y)) \equiv 0$:

$$\Phi'_x(x, y, z) + \Phi'_z(x, y, z) \cdot z'_x = 0,$$

$$\Phi''_{xx}(x,y,z)+(\Phi''_{xz}(x,y,z)+\Phi''_{zx}(x,y,z))\cdot z'_x +$$
$$+\Phi''_{zz}(x,y,z)\cdot(z'_x)^2+\Phi'_z(x,y,z)\cdot z''_{xx}=0,$$

отсюда

$$z''_{xx}=-\frac{\Phi''_{xx}+(\Phi''_{xz}+\Phi''_{zx})\cdot z'_x+\Phi''_{zz}\cdot(z'_x)^2}{\Phi'_z},$$

или, подставляя в полученное равенство выражение для

$$z'_x=-\frac{\Phi'_x(x,y,z)}{\Phi'_z(x,y,z)},$$

находим окончательно

$$z''_{xx}=-\frac{\Phi''_{xx}+(\Phi''_{xz}+\Phi''_{zx})(-\Phi'_x/\Phi'_z)+\Phi''_{zz}(-\Phi'_x/\Phi'_z)^2}{\Phi'_z}.$$

Дифференцируя обе части тождества (2.21) по y, имеем

$$\Phi''_{xy}(x,y,z)+\Phi''_{xz}(x,y,z)\cdot z'_y+\Phi''_{zy}(x,y,z)\cdot z'_x +$$
$$+\Phi''_{zz}(x,y,z)\cdot z'_x\cdot z'_y+\Phi'_z(x,y,z)\cdot z''_{xy}=0,$$

отсюда

$$z''_{xy}=-\frac{\Phi''_{xy}+\Phi''_{xz}\cdot z'_y+\Phi''_{zy}\cdot z'_x+\Phi''_{zz}\cdot z'_x\cdot z'_y}{\Phi'_z},$$

или, с учетом, что

$$z'_x=-\frac{\Phi'_x(x,y,z)}{\Phi'_z(x,y,z)}, \qquad z'_y=-\frac{\Phi'_y(x,y,z)}{\Phi'_z(x,y,z)},$$

можем переписать

$$z''_{xy}=-\frac{\Phi''_{xy}-\Phi''_{xz}\cdot\dfrac{\Phi'_y}{\Phi'_z}-\Phi''_{zx}\cdot\dfrac{\Phi'_x}{\Phi'_z}+\Phi''_{zz}\cdot\dfrac{\Phi'_x\cdot\Phi'_y}{(\Phi'_z)^2}}{\Phi'_z}.$$

Аналогично получаем выражение для второй производной по y

$$z''_{yy}=-\frac{\Phi''_{yy}+(\Phi''_{yz}+\Phi''_{zy})(-\Phi'_y/\Phi'_z)+\Phi''_{zz}(-\Phi'_y/\Phi'_z)^2}{\Phi'_z}.$$

Подобным образом могут быть вычислены частные производные любого порядка для функции, заданной неявно.

Частные производные z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} можно найти другим способом, дифференцируя по x и y частные производные z'_x и z'_y.

Пример 3. Найти z'_x и z'_y, если z задана как неявная функция x, y уравнением $xy^3 - 2xyz + z^2 y = 0.$

Дифференцируя обе части уравнения по x, с учетом, что $z = z(x, y)$, получаем $y^3 - 2y\,z - 2x\,y\,z'_x + 2y\,z\,z'_x = 0,$
откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = -\frac{y^3 - 2yz}{-2xy + 2zy}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3xy^2 - 2xz + z^2}{-2xy + 2zy}.$$

Пример 4. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z(x, y)$ задана неявно уравнением $e^z - x^2 yz^3 = 0.$

Дифференцируя обе части данного тождества два раза по y, имеем

$$e^z \cdot z'_y - x^2 z^3 - 3x^2 yz^2 \cdot z'_y = 0,$$

$$e^z \cdot (z'_y)^2 + e^z \cdot z''_{yy} - 3x^2 z^2 \cdot z'_y - 3x^2 z^2 \cdot z'_y -$$
$$- 6x^2 yz \cdot (z'_y)^2 - 3x^2 yz^2 \cdot z''_{yy} = 0,$$

отсюда

$$z'_y = \frac{x^2 z^3}{e^z - 3x^2 yz^2},$$

$$z''_{yy} = -\frac{e^z (z'_y)^2 - 6x^2 z^2 z'_y - 6x^2 z (z'_y)^2}{e^z - 3x^2 yz^2},$$

или, с учетом выражения для z'_y

$$z''_{yy} = -\frac{(e^z - 6x^2 z)\cdot\left(\dfrac{x^2 z^3}{e^z - 3x^2 yz^2}\right)^2 - 6x^2 z^2\cdot\left(\dfrac{x^2 z^3}{e^z - 3x^2 yz^2}\right)}{e^z - 3x^2 yz^2}.$$

Пусть система двух уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z_1, z_2) = 0, \\ \Phi_2(x, y, z_1, z_2) = 0, \end{cases}$$

определяет в некоторой области D дифференцируемые функции $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$. Тогда в D имеем два тождества

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z_1(x, y), z_2(x, y)) \equiv 0, \\ \Phi_2(x, y, z_1(x, y), z_2(x, y)) \equiv 0, \end{cases} \tag{2.22}$$

дифференцируя каждое из которых по x, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z_1}\cdot\dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z_2}\cdot\dfrac{\partial z_2}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial z_1}\cdot\dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial z_2}\cdot\dfrac{\partial z_2}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Если

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то по формулам Крамера из (2.23) находим

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} \end{vmatrix}}.$$

Если тождества (2.22) продифференцировать по переменной y, то аналогично можно найти частные производные $\frac{\partial z_1}{\partial y}$, $\frac{\partial z_2}{\partial y}$.

Пример 5. Найти, $\frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_2}{\partial x}$, если z_1 и z_2 заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x + y - z_1 - z_2 = 0, \\ x\sin z_2 - y\sin z_1 = 0. \end{cases}$$

Дифференцируя эти тождества по x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial z_2}{\partial x} = 1, \\ y\cos z_1 \cdot \dfrac{\partial z_1}{\partial x} - x\cos z_2 \cdot \dfrac{\partial z_2}{\partial x} = \sin z_2, \end{cases}$$

из которой по формулам Крамера находим

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} = \frac{y \cdot \cos z_1 - \sin z_2}{x \cdot \cos z_2 + y \cdot \cos z_1}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{x \cdot \cos z_2 + \sin z_2}{x \cdot \cos z_2 + y \cdot \cos z_1}$$

Таким же способом можно найти частные производные функций $z_1, z_2, ..., z_m$ по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$, если эти функции заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_m) = 0, \\ \Phi_2(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_m) = 0, \\ \quad .... \; .... \; .... \; .... \; ...... \\ \Phi_m(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_m) = 0, \end{cases}$$

продифференцировав соответствующие тождества по $x_1, x_2, ..., x_n$.

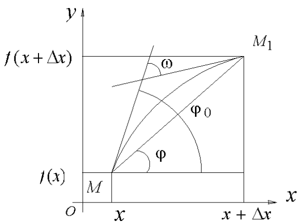
2.10. Геометрический и механический смысл производной

Приложение производной в геометрии и механике основано на её геометрическом и механическом смыслах.

Пусть f – дифференцируемая функция одной переменной. Построим график функции f и проведем секущую, соединяющую точки $M_0 = (x, f(x))$ и $M = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.

Определение. Предельное положение секущей $M_0 M$, когда точка M стремится к точке M_0, называется касательной к кривой в точке M_0.

Тангенс угла φ, изображенного на рисунке, равен



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если устремить Δx к нулю, то секущая займет положение касательной к графику функции f в точке x. С другой стороны,

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Таким образом, геометрический смысл производной заключается в том, что значение производной функции f в точке x равно тангенсу угла наклона к оси OX касательной к графику функции в точке $(x, f(x))$.

Пусть, теперь, $r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ – вектор-функция скалярного аргумента, $t_0 \in [\alpha, \beta]$ – некоторое значение аргумента, Δt – приращение аргумента. Тогда $r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$ и $\dfrac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t}$ – векторы, параллельные секущей, соединяющей точки $r(t_0 + \Delta t)$ и $r(t_0)$ кривой $r(t)$. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем, что $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))^T$ есть вектор, параллельный касательной к кривой $r(t)$ в точке $r(t_0)$, причём вектор $r'(t)$ направлен в сторону возрастания аргумента t. Аналогично, в случае плоской кривой $r = r(t) = (x(t), y(t))^T$ вектор

$r'(t) = (x'(t), y'(t))^T$ параллелен касательной к кривой $r(t)$ в точке $r(t_0)$.

Поскольку параметрическое задание кривой

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

эквивалентно векторному $r = r(t) = (x(t), y(t))^T$, то из сказанного выше следует, что вектор $(x'(t), y'(t))^T$ параллелен касательной к плоской кривой $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$ а вектор $(x'(t), y'(t), z'(t))^T$ параллелен касательной к пространственной кривой $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$

Если в каждой точке графика функции провести касательную, то эта касательная при перемещении точки касания будет вращаться. Введем понятие средней кривизны кривой на участке MM_1 как отношение угла ω между касательными в точках M и M_1 к длине дуги σ участка кривой MM_1.

Кривизной графика функции в точке M *называют число* K *:* $K = \lim\limits_{\sigma \to 0} \dfrac{\omega}{\sigma}$.

Можно показать, что для кривой, заданной векторно уравнением $r = r(t)$, кривизна находится по формуле

$$K = \frac{\left|[r'(t), r''(t)]\right|}{\left|r'(t)\right|^3},$$

где $[r'(t), r''(t)]$ – векторное произведение [1] векторов $r'(t)$ и $r''(t)$.

Для плоской кривой, заданной параметрически, последняя формула принимает вид

$$K = \frac{x_t' y_{tt}'' - x_{tt}'' y_t'}{\left((x_t')^2 + (y_t')^2\right)^{3/2}} .$$

Если функция $f(x)$ имеет конечную вторую производную, то

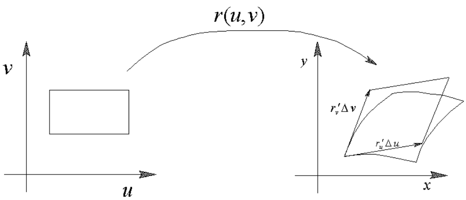
$$K = \frac{f''(x)}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}} .$$

Как видим, величина второй производной определяет степень искривленности графика функции.

Скалярная функция скалярного аргумента отображает отрезок длины $|\Delta x|$ в отрезок длины $|\Delta f(x)| = |f(x + \Delta x) - f(x)|$. Из определения дифференцируемости следует, что для дифференцируемой функции эта длина отличается на бесконечно малую более высокого порядка малости чем Δx от $|f'(x)|\Delta x$. Таким образом, модуль производной есть коэффициент искажения длины при дифференцируемом отображении из R в R.

Вектор-функция

$$r = r(u,v) = (x(u,v), y(u,v))^T = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} ,$$



$(u,v) \in D$, двух переменных производит отображение плоской области D на плоскость. При этом прямоугольник с вершинами (u_0, v_0), $(u_0, v_0 + \Delta v)$, $(u_0 + \Delta u, v_0)$, $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ перейдёт в криволинейный четырёхугольник, ограниченный линиями $r = r(u, v_0)$, $r = r(u_0, v)$, $r = r(u, v_0 + \Delta v)$, $r = r(u_0 + \Delta u, v)$. Далее

$$r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_0, v_0) = r_u'(u_0, v_0)\Delta u + \alpha_1(\Delta u) ,$$

$$r(u_0, v_0 + \Delta v) - r(u_0, v_0) = r_v'(u_0, v_0)\Delta v + \alpha_2(\Delta v) ,$$

где $\alpha_1(\Delta u)$ и $\alpha_2(\Delta v)$ – бесконечно малые более высокого порядка малости, чем Δu и Δv. Можно показать, что площади выделенного криволинейного четырёхугольника и параллелограмма построенного на векторах

$$r'_u(u,v)\Delta u = \begin{pmatrix} x'_u(u,v)\Delta u \\ y'_u(u,v)\Delta u \end{pmatrix}, \quad r'_v(u,v)\Delta v = \begin{pmatrix} x'_v(u,v)\Delta v \\ y'_v(u,v)\Delta v \end{pmatrix}$$

отличаются на бесконечно малую более высокого порядка малости, чем $(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2$. Заметим, что если $r(u,v)$ – линейное отображение, то выделенный криволинейный четырёхугольник совпадает с параллелограммом, построенным на векторах $r'_u(u,v)\Delta u$ и $r'_v(u,v)\Delta v$. Поэтому заменим криволинейный четырёхугольник указанным параллелограммом, Площадь ΔS этого параллелограмма равна $\left|[r'_u(u,v), r'_v(u,v)]\right|\Delta u\Delta v$. Вычисляя $\left|[r'_u(u,v), r'_v(u,v)]\right|$, получаем

$$\left|[r'_u(u,v), r'_v(u,v)]\right| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & 0 \\ x'_v & y'_v & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \mathbf{k} \right\| = \left\| \begin{matrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{matrix} \right\| = \left|\det r'\right|.$$

Таким образом, модуль определителя матрицы Якоби (модуль якобиана) $\left|\det r'\right|$ вектор-функции, отображающей R^2 в R^2, есть коэффициент искажения площади при этом отображении.

Вектор-функция

$$r = r(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))^T = \\ = x(u,v,w)\mathbf{i} + y(u,v,w)\mathbf{j} + z(u,v,w)\mathbf{k}$$

отображает R^3 в R^3. При этом параллелепипед с вершинами

$$(u_0, v_0, w_0), (u_0 + \Delta u, v_0, w_0), (u_0, v_0 + \Delta v, w_0), (u_0, v_0, w_0 + \Delta w), \\ (u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v, w_0), (u_0 + \Delta u, v_0, w_0 + \Delta w), (u_0, v_0 + \Delta v, w_0 + \Delta w), \\ (u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v, w_0 + \Delta w)$$

переходит в криволинейную фигуру, ограниченную линиями

$$r = r(u, v_0, w_0),\ r = r(u_0, v, w_0),\ r = r(u_0, v_0, w),\ r = r(u, v_0, w_0 + \Delta w), \\ r = r(u_0, v, w_0 + \Delta w),\ r = r(u, v_0 + \Delta v, w_0),\ r = r(u_0, v_0 + \Delta v, w), \\ r = r(u_0 + \Delta u, v, w_0), r = r(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v, w), r = r(u_0 + \Delta u, v_0, w), \\ r = r(u_0 + \Delta u, v, w + \Delta w),\ r = r(u, v_0 + \Delta v, w_0 + \Delta w).$$

Заменим её параллелепипедом, построенным на векторах

$$r'_u(u,v,w)\Delta u = \begin{pmatrix} x'_u(u,v,w)\Delta u \\ y'_u(u,v,w)\Delta u \\ z'_u(u,v,w)\Delta u \end{pmatrix}, r'_v(u,v,w)\Delta v = \begin{pmatrix} x'_v(u,v,w)\Delta v \\ y'_v(u,v,w)\Delta v \\ z'_v(u,v,w)\Delta v \end{pmatrix},$$

$$r'_v(u,v,w)\Delta v = \begin{pmatrix} x'_v(u,v,w)\Delta v \\ y'_v(u,v,w)\Delta v \\ z'_v(u,v,w)\Delta v \end{pmatrix}.$$

Объём ΔV этого параллелепипеда равен $\left|(r'_u(u,v,w), r'_v(u,v,w), r'_w(u,v,w))\right|\Delta u\Delta v\Delta w$. Можно показать, что объёмы выделенной части пространства и построенного параллелепипеда отличаются на бесконечно малую более высокого порядка малости, чем $(\Delta u)^3 + (\Delta v)^3 + (\Delta w)^3$.
Вычисляя $\left|(r'_u(u,v,w), r'_v(u,v,w), r'_w(u,v,w))\right|$, получаем, что модуль определителя матрицы Якоби (модуль якобиана) $\left|\det r'\right|$ вектор-функции, отображающей R^3 в R^3, есть коэффициент искажения объёма при этом отображении.

Пусть $s = f(t)$ – величина пути, пройденного точкой к моменту времени t, тогда

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

средняя скорость движения (изменения пути) за промежуток времени Δt. Устремляя Δt к нулю, получаем в пределе, с одной стороны, производную функции f, а с другой, – мгновенную скорость движения (изменения пути) в точке t, то есть, с точки зрения механики, производная есть скорость изменения функции в точке (скорость движения). Вторая производная пути по времени есть ускорение движения точки.

Пусть $r = r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ – закон движения материальной точки. Тогда $x'(t), y'(t), z'(t)$ есть скорость изменения координат $x(t), y(t), z(t)$ соответственно. Поэтому

$$r'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}=x'(t)\mathbf{i}+y'(t)\mathbf{j}+z'(t)\mathbf{k}$$

– вектор скорости движения материальной точки.

Пусть теперь f – дифференцируемая функция двух переменных. Положим $y=y_0$, тогда $f(x,y_0)$ – функция одной переменной x и кривая $z=f(x,y_0)$ лежит в плоскости $y=y_0$. Как было показано выше, $\frac{\partial f}{\partial x}$ есть тангенс угла наклона к оси OX касательной кривой $z=f(x,y_0)$, $y=y_0$ в точке (x_0,y_0,z_0).

Аналогично показывается, что $\frac{\partial f}{\partial y}$ есть тангенс угла наклона к оси OY касательной кривой $z=f(x_0,y)$, $x=x_0$ в точке (x_0,y_0,z_0).

2.11. Геометрические приложения производной (касательная, касательная плоскость, нормаль)

Из геометрического смысла производной вектор-функции скалярного аргумента следует, что для кривой заданной в векторной форме $r(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$ или, что то же самое, параметрически

$$\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$$

($t\in(t_1,t_2)$), вектор $(x_t'(t_0),y_t'(t_0))^T$ параллелен касательной и поэтому каноническое уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0=(x_0,y_0)$ ($x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$) может быть записано в виде

$$\frac{x-x_0}{x_t'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y_t'(t_0)}, \tag{2.24}$$

а параметрическое в виде

$$\begin{cases} x=x_0+x_t'(t_0)t,\\ y=y_0+y_t'(t_0)t.\end{cases}$$

Аналогично, для пространственной кривой, заданной параметрически,

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \tag{2.25}$$

или, что то же самое, в векторной форме $r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ($t \in (t_1, t_2)$), вектор производных $(x'_t(t_0), y'_t(t_0), z'_t(t_0))^T$ параллелен касательной к кривой в точке $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$ и поэтому может быть взят в качестве направляющего вектора касательной. Следовательно, каноническое уравнение касательной к пространственной кривой в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$) записывается следующим образом

$$\frac{x - x_0}{x'_t(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'_t(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'_t(t_0)}, \tag{2.26}$$

а параметрическое уравнение имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + x'_t(t_0)t, \\ y = y_0 + y'_t(t_0)t, \\ z = z_0 + z'_t(t_0)t. \end{cases}$$

Если в соотношениях (2.25) t – время, то они определяют закон движения точки, при этом вектор $(x'_t(t_0), y'_t(t_0), z'_t(t_0))^T$ является вектором скорости в момент времени $t = t_0$.

Так как всякую кривую, заданную в явной форме уравнением $y = f(x)$ можно считать заданной параметрически соотношениями

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases}$$

то уравнение (2.24) касательной имеет вид $\dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - y_0}{f'(x_0)}$ или, после приведения к общему знаменателю

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.27}$$

В случае неявного задания функции одной переменной уравнением $F(x,y)=0$ производную от y по x в точке x_0 можно найти по формуле

$$y'_x(x_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$$

и поэтому уравнение (2.27) примет вид

$$y - y_0 = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0),$$

или, после преобразований,

$$F'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) = 0. \qquad (2.28)$$

Назовем нормалью прямую, перпендикулярную касательной в точке касания. Из геометрического смысла коэффициентов в уравнении (2.28) делаем вывод о том, что каноническое уравнение нормали к плоской кривой $F(x,y)=0$ имеет вид

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0)}.$$

Для пространственной кривой плоскость, перпендикулярная касательной, называется нормальной плоскостью. Вспоминая геометрический смысл коэффициентов в уравнении (2.26), заключаем, что уравнение нормальной плоскости к пространственной кривой, заданной параметрически, может быть записано в виде

$$x'_t(t_0)(x-x_0) + y'_t(t_0)(y-y_0) + z'_t(t_0)(z-z_0) = 0.$$

Пусть теперь уравнение $F(x,y,z)=0$ задаёт неявно функцию $z(x,y)$, определяющую поверхность S, и $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – некоторая точка этой поверхности, т.е. $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Плоскость, проходящую через точку M_0, содержащую касательные ко всем кривым, проходящим через M_0 и лежащим на этой поверхности, если она существует, назовем касательной плоскостью к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке M_0.

Если кривая L лежит на поверхности $F(x,y,z)=0$ и задана параметрически уравнениями (2.25), то $F(x(t),y(t),z(t)) \equiv 0$.

Дифференцируя это тождество по t (в предположении, что $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ дифференцируемы в t_0), находим

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=0.$$

Полагая $N=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=(\mathrm{grad}F)^T,\quad \tau=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right),$ последнее равенство можем переписать в виде $(N,\tau)=0$, которое означает, что вектор N ортогонален направляющему вектору τ касательной к любой дифференцируемой кривой L, лежащей на поверхности и проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, т.е. он является вектором нормали к искомой касательной плоскости.

Таким образом, уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ записывается следующим образом

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+$$
$$+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0. \qquad (2.29)$$

Если поверхность задана явно уравнением $z=f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0). \qquad (2.30)$$

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, называется нормалью к поверхности в точке M_0. Каноническое уравнение нормали к поверхности $F(x,y,z)=0$ можно записать следующим образом

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Пусть поверхность задана векторно уравнением $r=r(u,v)=$ $=x(u,v)\mathbf{i}+y(u,v)\mathbf{j}+z(u,v)\mathbf{k}$ или, что тоже самое, параметрически соотношениями $\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v).\end{cases}$ Тогда $r=r(u_0,v)$ и $r=r(u,v_0)$

– кривые, проходящие через точку $r(u_0,v_0)$, а $r_u'(u_0,v_0), r_v'(u_0,v_0)$ –векторы, лежащие в касательной плоскости (если она существует) к поверхности $r=r(u,v)$. Следовательно вектор $N=[r_u',r_v']$ есть вектор нормали касательной плоскости к поверхности $r=r(u,v)$ в точке $r(u_0,v_0)$. Так как

$$[r_u',r_v']=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}\mathbf{k},$$

то

$$\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix}(x-x_0)-\begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}(z-z_0)=0 \; –$$

уравнение касательной плоскости, а

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} x_u' & z_u' \\ x_v' & z_v' \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{Vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{Vmatrix}} \; –$$

уравнение нормали к поверхности заданной векторно или параметрически.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y=2x^2+4$ в точке $M(2,12)$.

Имеем $y'=4x$, $y'(2)=8$, тогда уравнение касательной будет иметь вид

$$8\cdot(x-2)-1\cdot(y-12)=0,$$

а уравнение нормали:

$$\frac{x-2}{8}=\frac{y-12}{-1}.$$

Пример 2. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1,$$

в точке $M(1,1,2)$.

Так как

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1{,}1{,}2)=\left.\frac{2x}{2}\right|_{(1,1,2)}=1,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(1{,}1{,}2)=\left.\frac{2y}{4}\right|_{(1,1,2)}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1{,}1{,}2)=\left.\frac{2z}{16}\right|_{(1,1,2)}=\frac{1}{4},$$

то уравнение касательной плоскости запишется в виде

$$1\cdot(x-1)+0{,}5\cdot(y-1)+0{,}25\cdot(z-2)=0,$$

а уравнение нормали –

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0{,}5}=\frac{z-2}{0{,}25}.$$

После несложных преобразований окончательно получаем уравнение касательной плоскости

$$4x+2y+z-8=0.$$

2.12. Дифференциал функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Рассмотрим дифференциал $f'(x)\Delta x$ функции f более подробно. Обычно дифференциал функции f в точке x обозначают $df(x)$. Чтобы подчеркнуть зависимость дифференциала от Δx, будем там, где это необходимо, писать $df(x,\Delta x)$. По определению дифференциала

$$df(x)=f'(x)\Delta x,\ \Delta x\in R^n,$$

т.е. дифференциал является результатом действия линейного оператора с матрицей $f'(x)$ на вектор Δx. Дифференциал можно определить как линейную относительно Δx составляющую приращения функции, вызванного приращением аргумента Δx. При этом будем считать, что приращение Δx не зависит от x, т.е. в рассматриваемом процессе Δx является константой относительно x.

Рассмотрим тождественное отображение $\varphi(x)=Ex=x$, где E – единичная матрица размера $n\times n$ ($\varphi: R^n\to R^n$). В силу линейности отображения φ его матрица Якоби $\varphi'(x)$ совпадает с E (см. пример 1 п. 2.1). Следовательно,

$$dx = d\varphi(x) = \varphi'(x)\,\Delta x = E \cdot \Delta x = \Delta x \,,$$

поэтому дифференциал функции f записывается в виде

$$df(x) = df(x, \Delta x) = f'(x)\,\Delta x = f'(x)\,dx \,. \qquad (2.31)$$

Распишем (2.31) в координатной форме для функций разного числа переменных.

Случай 1. Пусть f – скалярная функция одного аргумента, в этом случае $f'(x)$ состоит из одного элемента и $df(x) = f'(x)\,dx$.

Случай 2. Если f – вектор-функция одной переменной, то

$$df(x) = f'(x)dx = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_k'(x) \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} f_1'(x)dx \\ f_2'(x)dx \\ \vdots \\ f_k'(x)dx \end{pmatrix}.$$

Случай 3. Пусть f – скалярная функция многих переменных, в этом случае

$$f'(x) = \left(\operatorname{grad} f(x)\right)^T = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right),$$

$$dx = \left(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n\right)^T,$$

и, следовательно,

$$df(x) = f'(x)\,dx = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i \,.$$

Случай 4. Если f – вектор-функция многих переменных, то

$$df(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx_1\\ dx_2\\ \dots\\ dx_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}dx_i\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_2}{\partial x_i}dx_i\\ \dots\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}dx_i\end{pmatrix}.$$

Если же записать представление производной матрицы через столбцы, то выражение для дифференциала в случае вектор-функции многих переменных формально совпадает с выражением для дифференциала скалярной функции многих переменных

$$df(x)=\left(D_1 f(x), D_2 f(x),..., D_n f(x)\right)\cdot\left(dx_1, dx_2,..., dx_n\right)^T=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} D_i f(x)\cdot dx_i.$$

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Если $f(x)=x^2\cos^3 5x$, то $df(x)=f'(x)\cdot dx=$ $=(2x\cos^3 5x-15x^2\cos^2 5\sin 5x)\cdot dx$.

Пример 2. Для функции $f(x,y,z)=x^3\cos y+z^2$ получаем, что $df(x,y,z)=3x^2\cos y\,dx-x^3\sin y\,dy+dz.$

Отметим некоторые свойства дифференциалов, которые похожи на соответствующие свойства производных:

1. $d\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)=df_1(x)\pm df_2(x)$;
2. $d\left(\alpha f(x)\right)=\alpha df(x)$;
3. $d\left(f_1(x)f_2(x)\right)=df_1(x)\cdot f_2(x)+f_1(x)\cdot df_2(x)$

Доказательство приведено в п. 2.3 при получении аналогичных свойств производных.

4. $df(x)=\frac{1}{\alpha}d\left(\alpha f(x)\right)=\frac{1}{\alpha}d\left(\alpha f(x)+\beta\right)$.

Следует из свойства 2 и факта, что дифференциал константы равен нулю.

Рассмотрим сложную функцию $(f\circ\varphi)(x)=f(\varphi(x))$. Как было показано в п. 2.4,

$$(f\circ\varphi)'(x)=(f'\circ\varphi)(x)\cdot\varphi'(x).$$

Умножив обе части этого равенства на dx, получим

$$(f\circ\varphi)'(x)\cdot dx=(f'\circ\varphi)(x)\cdot\varphi'(x)\cdot dx=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\cdot dx=$$
$$=f'(\varphi(x))\cdot d\varphi(x),$$

или, выписывая крайние члены этой цепочки равенств,

$$(f\circ\varphi)'(x)\cdot dx=f'(\varphi(x))\cdot d\varphi(x).$$

Свойство, заключенное в последнем соотношении и состоящее в том, что для зависимой и независимой переменных первый дифференциал функции записывается одинаково, называется *инвариантностью формы первого дифференциала*. Это свойство широко используется при замене переменных в интегральном исчислении.

Применяя свойство инвариантности дифференциала, можно составить таблицу дифференциалов сложных функций:

$$du^{\alpha}=\alpha\cdot u^{\alpha-1}du; \qquad d\ln u=\frac{du}{u}; \qquad d\,a^{u}=a^{u}\ln a\,du;$$

$$d\cos u=-\sin u\,du; \qquad d\sin u=\cos u\,du; \qquad d\,\mathrm{tg}u=\frac{du}{\cos^2 u};$$

$$d\,\mathrm{ctg}u=-\frac{du}{\sin^2 u}; \quad d\arcsin u=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}; \quad d\arccos u=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$d\,\mathrm{arctgu}=\frac{\mathrm{du}}{1+\mathrm{u}^2}; \qquad d\,\mathrm{arcctgu}=-\frac{\mathrm{du}}{1+\mathrm{u}^2};$$

где $u=u(x)$ – любая дифференцируемая функция.

Используя последнюю таблицу, можно находить дифференциал функции, не находя предварительно производной.

Пример 3. Найти dy, если $y=(\arcsin x)^5$. Имеем

$$dy=5(\arcsin x)^4 d\arcsin x=\frac{5(\arcsin x)^4dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

По определению дифференцируемости

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot dx+\alpha(x_0,dx),$$

где $\alpha(x_0, dx)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем dx. Тогда в близкой к x_0 точке $x_0 + dx$

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx + \alpha(x_0, dx).$$

Отбрасывая член $\alpha(x_0, dx)$, имеем

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx$$

с полученной от замены приращения дифференциалом ошибкой, равной $\alpha(x_0, dx)$.

Пример 4. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислить $\mathrm{arctg}\,0{,}97$.

Возьмем $f(x) = \mathrm{arctg}\,x$, $x_0 = 1$, $dx = x - x_0 = -0{,}03$ и, так как $f'(x) = (\mathrm{arctg}\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, то $f'(1) = 0{,}5$. Учитывая, что $f(1) = \frac{\pi}{4}$, получаем

$$\mathrm{arctg}\,0{,}97 \approx \mathrm{arctg}\,1 + 0{,}5 \cdot (-0{,}03) = \frac{\pi}{4} - 0{,}015.$$

Пример 5. Найти приближенно $(1{,}04)^{2{,}02}$.

В этом случае возьмем $f(x, y) = x^y$, $x_0 = 1$, $dx = 0{,}04$, $y_0 = 2$, $dy = 0{,}02$, $f(1{,}2) = 1$. Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x,$$

то

$$\frac{\partial f(1{,}2)}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial f(1{,}2)}{\partial y} = 0$$

и, следовательно,

$$(1{,}04)^{2{,}02} \approx f(1{,}2) + \frac{\partial f(1{,}2)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(1{,}2)}{\partial y} \cdot dy =$$

$$= 1 + 2 \cdot 0{,}04 + 0 \cdot 0{,}02 = 1{,}08.$$

2.13. Дифференциалы высших порядков

Определим дифференциал второго порядка как дифференциал от дифференциала первого порядка, то есть $d^2 f = d(df)$. *По индукции положим* $d^n f = d(d^{n-1} f)$.

Получим формулы для вычисления дифференциала второго и, по возможности, n-го порядков.

Случай 1. Пусть f – функция одной переменной, тогда

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Возможны два варианта:

а) x – независимая переменная. Тогда dx не зависит от x, поэтому $d^2x = d(dx) = 0$ и, следовательно,

$$d^2 f = d(df) = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2; \qquad (2.32)$$

по индукции получаем

$$d^n f = f^{(n)}(x)\,dx^n;$$

б) x есть функция независимой переменной t: $x = x(t)$. По только что установленному $d^2x = x''(dt)^2$ и, следовательно,

$$d^2 f = f''(x)\,dx^2 + f'\,x''dt^2 = f''\,(x'dt)^2 + f'\,x''dt^2. \qquad (2.33)$$

Сравнивая выражения (2.32) и (2.33) для дифференциала второго порядка, заключаем, что он не обладает свойством инвариантности.

Пример 1. Найти $d^2 f$, если $f(x) = \cos x$, x – независимая переменная. Имеем

$$f''(x) = ((\cos x)')' = -\cos x, \quad d^2 f = f''(x)\,dx^2 = -\cos x\,dx^2.$$

Пример 2. Найти $d^2 f$, если $f(x) = \cos x$, $x = t^3$.

Так как x не является независимой переменной, то

$$d^2 f = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,x''dt^2 = -\cos(t^3)\,(3t^2dt)^2 - \sin(t^3)\,6tdt^2.$$

Случай 2. Пусть f – функция многих переменных, тогда

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right) =$$

$$= d\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)dx_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}d(dx_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_j\right)dx_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}d^2x_i =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}dx_j dx_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}d^2 x_i.$$

то есть

$$d^2 f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}dx_j dx_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}d^2 x_i.$$

Если x – независимая переменная, то $d^2 x_i = d(dx_i)=0$, последняя формула упрощается и принимает вид

$$d^2 f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}dx_j dx_i\,, \tag{2.34}$$

откуда заключаем, что $d^2 f$ является квадратичной формой относительно $dx_1, dx_2, ..., dx_n$. В частности, для функции двух независимых переменных $f(x,y)$

$$d^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\,.$$

Вводя символическую запись

$$D=\sum_{i=i}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}dx_i=\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n,$$

можем выражение (2.34) записать в форме

$$d^2 f=D^2 f=\left(\sum_{i=i}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}dx_i\right)^2 f=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 f\,.$$

Аналогично, для независимой переменной x, $d^k f$ записывается в виде

$$d^k f=D^k f=\left(\sum_{i=i}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}dx_i\right)^k f=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k f\ .$$

Пример 3. Найти $d^2 f$ для функции $f(x,y)=2x^2y^3+\sin xy$.

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4xy^3+y\cos xy,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=6x^2y^2+x\cos xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4y^3-y^2\sin xy,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12x^2y-x^2\sin xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=12xy^2+\cos xy-xy\sin xy,$$

то

$$d^2 f=(4y^3-y^2\sin xy)dx^2+2(12xy^2+\cos xy-xy\sin xy)dxdy+$$
$$+(12x^2y-x^2\sin xy)dy^2.$$

Следует отметить, что мы получили квадратичную форму относительно dx и dy с матрицей

$$\begin{pmatrix} 4y^3-y^2\sin xy & 12xy^2+\cos xy-xy\sin xy \\ 12xy^2+\cos xy-xy\sin xy & 12x^2y-x^2\sin xy \end{pmatrix}.$$

2.14. Формула Тейлора

Если f – скалярная функция одной или многих переменных, имеющая определённые в некоторой окрестности точки x_0 производные до порядка $n+1$ включительно, непрерывные в точке x_0, то её приращение в точке x_0, вызванное приращением аргумента Δx, можно представить в виде

$$\Delta f(x,x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}\cdot d^2 f(x_0)+...+\frac{1}{n!}\cdot d^n f(x_0)+R_{n+1}(x,x_0)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{d^k f(x_0)}{k!}+R_{n+1}(x,x_0). \qquad (2.35)$$

Соотношение (2.35) называется формулой Тейлора для функции f в точке x_0. Величина $R_{n+1}(x, x_0)$ называется остаточным членом. Можно доказать, что $R_{n+1}(x, x_0)$ имеет порядок малости относительно Δx выше n. Справедливость формулы (2.35) для скалярных функций одного аргумента мы докажем при изучении рядов Тейлора.

Пусть $f(x)$ – скалярная функция одного скалярного аргумента. Учитывая, что в этом случае $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,dx^n$, где $dx = \Delta x = x - x_0$, формулу Тейлора можем записать в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n + R_{n+1}(x, x_0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + R_{n+1}(x, x_0), \qquad (2.36)$$

(по определению $f^{(0)}(x) = f(x)$). В этом случае остаточный член $R_{n+1}(x, x_0)$ может быть найден по формуле

$$R_{n+1}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x - x_0)^{n+1},$$

где ξ – некоторая точка, лежащая между x и x_0.

В такой записи $R_{n+1}(x, x_0)$ называют остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа. При $x_0 = 0$ формула Тейлора носит название формулы Маклорена для функции f.

Для скалярной функции двух переменных формула (2.35) принимает вид

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \right.$$

$$+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\Bigg)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^n f(x_0,y_0)+R_{n+1}(x,y,x_0,y_0). \quad (2.37)$$

Аналогичное соотношение можно записать для скалярной функции любого числа переменных.

Совершенно очевидным является применение формулы Тейлора в приближенных вычислениях.

Важнейшими разложениями по формуле Маклорена являются:

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_{n+1}(x)\text{ , (по определению } 0!=1\text{);}$$

$$\sin x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2n+1}(x)\,;$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2n+2}(x)\,;$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{k}}{k}+R_{n+1}(x)\,;$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+R_{n+1}(x)\,.$$

Эти разложения легко получить, используя формулы для производных n-го порядка: $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$; $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$;

$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$; $(\ln(1+x))^{(n)}=(-1)^n\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$;

$(x^{\alpha})^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

2.15. Основные теоремы дифференциального исчисления функций одной переменной

В этом подразделе сосредоточены теоремы, лежащие в основе применений дифференциального исчисления.

Докажем вначале лемму.

Лемма. Пусть скалярная функция f одной переменной имеет в точке x_0 конечную производную. Если $f'(x_0) > 0$, то существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(x) > f(x_0)$ для всех x из правосторонней её части $U^+(x_0)$ и $f(x) < f(x_0)$ для всех x из левосторонней части $U^-(x_0)$. Если $f'(x_0) < 0$, то в соответствующих полуокрестностях выполнены противоположные неравенства.

Доказательство. По определению производной скалярной функции одной переменной

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

и если $f'(x_0) > 0$, то существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, для всех точек x которой выполнено неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

доказывающее утверждение леммы.

Определение 1. Говорят, что точка $x_0 \in D$ есть точка локального максимума функции f, если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех x из $U(x_0)$ выполнено неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Аналогично определяется точка локального минимума с заменой неравенства на противоположное. Предлагается сформулировать это определение самостоятельно.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2.5 (Ферма). Пусть функция f определена на множестве (a,b) и точка ξ этого множества является точкой локального максимума или локального минимума функции f. Тогда, если существует производная $f'(\xi)$ в этой точке, то она равна нулю.

Доказательство. Пусть точка ξ – точка максимума функции f и $f'(\xi) \neq 0$. Тогда либо $f'(\xi) > 0$, либо $f'(\xi) < 0$. Будем считать для определенности, что $f'(\xi) > 0$. Тогда, по лемме, $f(\xi) < f(x)$ для всех x из некоторой правосторонней окрестности $U^{+}(\xi)$ точки ξ, что приводит к противоречию с определением наибольшего значения. Аналогично получаем противоречие и при $f'(\xi) < 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.6 (Ролля). Пусть

1) $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) существует производная $f'(x)$, по крайней мере, в интервале (a,b);

3) $f(a) = f(b)$.

Тогда существует точка ξ из интервала (a,b) такая, что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она принимает на нем свои наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их M и m. Рассмотрим два случая.

1. $M = m$. Тогда $f(x) \equiv M$ для всех x из $[a,b]$ и $f'(x) \equiv 0$ на (a,b), т.е. в качестве точки ξ может служить любая точка из промежутка (a,b).

2. $M > m$. Оба эти значения достигаются. Так как по условию теоремы $f(a) = f(b)$, то по крайней мере одно из них достигается во внутренней точке ξ. Тогда это точка максимума или минимума функции $f(x)$, и, по теореме Ферма, в этой точке $f'(\xi) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.7 (Лагранжа). Пусть

1) $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) существует производная $f'(x)$ на интервале (a,b).

Тогда между a и b найдется точка ξ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

Замечание. Вспоминая геометрический смысл производной можем сказать, что при выполнении условий теоремы существует между a и b точка в которой касательная параллельна прямой соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-k(x-a).$$

Константу k найдем из условия $F(b)=F(a)$. Имеем $F(a)=f(a)$, $F(b)=f(b)-k(b-a)=f(a)$. Тогда

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Функция

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, $F(b)=F(a)$, $F'(x)$ существует, так как

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Поэтому, по теореме Ролля, существует точка ξ из (a,b) такая, что $F'(\xi)=0$, отсюда и следует утверждение теоремы.

Применим теорему Лагранжа к отрезку $[x, x+\Delta x]$. Имеем

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x+\theta\cdot\Delta x),$$

или, что то же самое,

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x, \qquad (2.38)$$

где $0\le\theta\le 0$.

В форме (2.38) теорема Лагранжа носит название теоремы о конечных приращениях. Теорема Лагранжа может быть обобщена для производных по направлению функции многих переменных [2-6].

Теорема 2.8 (Коши). Пусть

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$;

2) существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$ в интервале (a,b);

3) $g'(x) \neq 0$ для всех x из (a,b).

Тогда существует точка ξ из интервала (a,b) такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Докажем вначале, что $g(b) \neq g(a)$. Предположим противное, то есть, что $g(b) = g(a)$. Тогда функция $g(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля и, следовательно, существует точка ξ из (a,b), в которой $g'(x) = 0$, что вступает в противоречие с третьим условием теоремы.

Рассмотрим теперь вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - k(g(x) - g(a)).$$

Как и при доказательстве теоремы Лагранжа, константу k найдем из условия $F(b) = F(a)$. Имеем $F(a) = f(a)$, $F(b) = f(b) - k(g(b) - g(a))$, отсюда

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Функция

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля и поэтому существует точка ξ из (a,b) такая, что

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\xi) = 0,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Применим теорему Лагранжа для доказательства сформулированной в подразделе 2.7 теоремы о равенстве смешанных производных.

Теорема 2.9. Если смешанные частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

существуют в некоторой окрестности точки $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и непрерывны в этой точке, то они равны между собой.

Доказательство достаточно провести для случая функции двух переменных. Рассмотрим оператор $\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$. Оператор Δ_y вводится аналогично. Покажем, что

$$\Delta_x \Delta_y f(x, y) = \Delta_y \Delta_x f(x, y). \tag{2.39}$$

Имеем

$$\Delta_y \Delta_x f(x, y) = \Delta_y (\Delta_x f(x, y)) = \Delta_y (f(x + \Delta x, y) - f(x, y)) =$$
$$= (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)) - (f(x + \Delta x, y) + f(x, y)),$$
$$\Delta_x \Delta_y f(x, y) = \Delta_x (\Delta_y f(x, y)) = \Delta_x (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) =$$
$$= (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)) - (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)).$$

Так как правые части совпадают, то совпадают и левые, что и требовалось доказать.

Далее

$$\frac{\Delta_y \Delta_x f(x, y)}{\Delta y \, \Delta x} = \frac{\Delta_y \left(\dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \right)}{\Delta y},$$

откуда, применяя теорему Лагранжа к отрезку $[x, x + \Delta x]$, имеем

$$\frac{\Delta_y \left(\dfrac{\partial f(x + \theta_1 \cdot \Delta x, y)}{\partial x} \right)}{\Delta y} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x + \theta_1 \Delta x, y)}{\Delta y}.$$

Применяя теорему Лагранжа к отрезку $[y, y + \Delta y]$, из последнего соотношения окончательно получаем

$$\frac{\Delta_y \Delta_x f(x, y)}{\Delta y \Delta x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y).$$

Таким образом, мы показали, что

$$\frac{\Delta_y \Delta_x f(x,y)}{\Delta y\, \Delta x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x+\theta_1 \Delta x, y+\theta_2 \Delta y)\,. \qquad (2.40)$$

Аналогично получается равенство

$$\frac{\Delta_x \Delta_y f(x,y)}{\Delta x\, \Delta y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x+\theta_3 \Delta x, y+\theta_4 \Delta y)\,. \qquad (2.41)$$

Приравнивая, в силу соотношения (2.39), правые части равенств (2.40) и (2.41), имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x+\theta_1 \Delta x, y+\theta_2 \Delta y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x+\theta_3 \Delta x, y+\theta_4 \Delta y)\,.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, получаем, в силу непрерывности производных, утверждение теоремы.

2.16. Достаточные условия дифференцируемости

В начале раздела было было введено понятие дифференцируемой функции и для таких функций введена производная. Таким образом, если функция дифференцируема, то у неё есть производная и, следовательно, существование производной является необходимым условием дифференцируемости функции.

Займемся теперь выяснением достаточных условий дифференцируемости, то есть таких условий, при выполнении которых функция будет дифференцируема. Желательно, чтобы эти условия были связаны с существованием производной. Для функции одной переменной эти условия заключены в следующей теореме.

Теорема 2.10. Если скалярная функция f одной переменной имеет в точке x_0 конечную производную, то она дифференцируема в этой точке.

Доказательство. Нам нужно показать, что при выполнении условия теоремы

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot \Delta x + \alpha(x_0, \Delta x)\,,$$

при этом

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = 0\,.$$

По определению производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

поэтому величина

$$\beta(x_0, \Delta x) = f'(x_0) - \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2.42}$$

стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Следовательно, $\beta(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx, а так как (2.42) можно записать в виде

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x - \beta(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x,$$

то теорема доказана.

Аналогичный результат справедлив и для векторнозначных функций одной переменной.

Теорема 2.10а. Если вектор-функция f одной переменной имеет в точке x_0 конечную производную, то она дифференцируема в этой точке.

Доказательство. Переходя к координатной форме записи из предыдущей теоремы получаем требуемое.

Таким образом, для скалярнозначных и векторнозначных функций скалярного аргумента существование производной является одновременно и необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции.

Для функции двух и большего числа переменных это не так. Существования производной в точке недостаточно для дифференцируемости функции. Для них справедлива следующая теорема.

Теорема 2.11. Если скалярная функция многих переменных имеет конечную производную в окрестности точки x_0 и эта производная непрерывна в точке x_0, то функция дифференцируема в этой точке.

Доказательство приведем для функции двух переменных. Обобщение на случай функции большего числа переменных не представляет трудности. Рассмотрим приращение функции f

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \big(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) -$$

$$-f(x_0, y_0+\Delta y)\big)+\big(f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)\big).$$

Применяя к каждой скобке в правой части этого равенства теорему Лагранжа, получаем, что

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y, \quad (2.43)$$

где $0\le\theta_1\le1$, $0\le\theta_2\le1$. В силу непрерывности частных производных, из (2.43) имеем

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y,$$

где α_1,α_2 – бесконечно малые, стремящиеся к нулю, когда Δx и Δy стремятся к нулю.

Таким образом, для доказательства теоремы осталось показать, что $\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^{1/2}$, то есть, что

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0.$$

Последнее следует из оценок

$$0\le\left|\frac{\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|=\left|\alpha_1\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+\alpha_2\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\le$$

$$\le|\alpha_1|\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+|\alpha_2|\frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\le|\alpha_1|+|\alpha_2|\ .$$

Аналогичный результат справедлив и для векторнозначных функций многих переменных.

Теорема 2.11а. Если вектор-функция многих переменных имеет конечную производную в окрестности точки x_0 и эта производная непрерывна в точке x_0, то функция дифференцируема в этой точке.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.10а.

3. Применения дифференциального исчисления

3.1. Раскрытие неопределенностей. Теорема Лопиталя

Под неопределённостями будем понимать случаи вычисления пределов, в которых не удаётся воспользоваться теоремами о пределе суммы, произведения, дроби, степени и другими из-за того, что результат соответствующей операции, в силу различных причин, не определён. Например, при нахождении предела дроби $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, когда числитель и знаменатель стремятся к нулю, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (неопределённость $\frac{0}{0}$), или при нахождении того же предела, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ (неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$). В данном подразделе будем заниматься этими двумя неопределённостями, т.к. неопределённости $0 \cdot \infty$, $0^0, 1^\infty, \infty^0$ и $\infty - \infty$ можно свести к ним. Покажем, как это сделать для каждой из перечисленных неопределённостей.

1. Неопределённость $0 \cdot \infty$ является символической записью того факта, что требуется найти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$ в случае, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$. Преобразуем эту неопределённость, например, к неопредёленности $\frac{0}{0}$. Имеем $f(x) \cdot g(x) = \dfrac{f(x)}{1/g(x)}$. Аналогично можно преобразовать к неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$. Действительно, $f(x) \cdot g(x) = \dfrac{g(x)}{1/f(x)}$.

2. Неопределённости $0^0, 1^\infty, \infty^0$ сводятся к неопределённости вида $0 \cdot \infty$ логарифмированием. Действительно, первая из

них – 0^0 есть символическая запись нахождения $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, вторая – 1^∞ является символической записью $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, третья – ∞^0 есть символическая запись нахождения того же самого предела при $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. Прологарифмировав $f(x)^{g(x)}$, имеем $\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\cdot\ln f(x),$ что и доказывает сказанное.

3. Для неопределённости $\infty-\infty$, означающей необходмость нахождения $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, имеем

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/g(x)}=\frac{(1/g(x))-(1/f(x))}{(1/f(x))\cdot(1/g(x))}.$$

Таким образом, неопределённость $\infty-\infty$ свелась к неопределённости $\frac{0}{0}$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.1 (Лопиталя). Пусть

1) $f(x)$ и $g(x)$ определены на интервале (a,b), точка $x_0\in(a,b)$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$,

3) всюду на интервале (a,b) существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x)\neq 0$.

Если существует предел отношения производных

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K,$$

то существует предел отношения самих функций, тоже равный K

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K\,.$$

Доказательство. Положим $f(x_0)=g(x_0)=0$. Тогда f и g непрерывны на отрезках $[x_0,x]$ и $[x,x_0]$, $a<x<b$, и удовлетворяют на них условиям теоремы Коши. Следовательно,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,,$$

где ξ – точка либо отрезка $[x_0,x]$, либо отрезка $[x,x_0]$.

Так как и в первом и во втором случаях $\xi\to x_0$ при $x\to x_0$, то теорема доказана.

Следствие. Теорема верна и при $x\to\infty$.

Доказательство. Положим $y=\frac{1}{x}$, тогда $y\to 0$ при $x\to\infty$. Функции $f_1(y)=f(\frac{1}{y})$ и $g_1(y)=g(\frac{1}{y})$ удовлетворяют условиям теоремы Лопиталя при $x_0=0$, что и доказывает следствие.

Аналогичный результат имеет место и для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 3.2 (Лопиталя). Пусть

1) $f(x)$ и $g(x)$ определены на интервале (a,b), точка $x_0\in(a,b)$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$,

3) всюду на интервале (a,b), за исключением быть может точки x_0, существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x)\neq 0$.

Если существует предел отношения производных

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K\,,$$

то существует предел отношения самих функций, тоже равный K

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=K\,.$$

Доказательство несложно и желающие могут ознакомиться с ним в [8]. Теорема верна и при $x \to \infty$.

Если предел отношения производных снова есть одна из неопределенностей, то теорему Лопиталя применяют повторно до тех пор, пока предел отношения соответствующих производных может быть вычислен. Точнее, имеют место следующие обобщения теорем 1 и 2.

Теорема 3.3 (Лопиталя). Пусть

1) $f(x)$ и $g(x)$ определены на интервале (a,b), точка $x_0 \in (a,b)$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(k)}(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g^{(k)}(x)=0$, $0 \le k < n$,

3) всюду на интервале (a,b) существуют производные $f^{(n)}(x)$ и $g^{(n)}(x)$, причем $g^{(n)}(x) \neq 0$.

Если существует предел отношения производных

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = K,$$

то существует предел отношения производных порядка $0 \le k < n$, тоже равный K

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)} = K.$$

Теорема 3.4 (Лопиталя). Пусть

1) $f(x)$ и $g(x)$ определены на интервале (a,b), точка $x_0 \in (a,b)$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(k)}(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g^{(k)}(x)=\infty$, $0 \le k < n$,

3) всюду на интервале (a,b), за исключением быть может точки x_0, существуют производные $f^{(n)}(x)$ и $g^{(n)}(x)$, причем $g^{(n)}(x) \neq 0$.

Если существует предел отношения производных

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = K,$$

то существует предел отношения производных порядка $0 \le k < n$, тоже равный K

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)} = K .$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$. Так как $\lim\limits_{x \to 0} (e^x - 1) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, то мы имеем дело с неопределённостью $\frac{0}{0}$. Производные числителя и знаменателя соответственно равны $(e^x - 1)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$, поэтому предел отношения производных

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \mathrm{arctg} x}{x^3}$. Здесь $\lim\limits_{x \to 0} (x - \mathrm{arctg} x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} (x^3) = 0$, поэтому у нас вновь неопределённость $\frac{0}{0}$. Так как

$$(x - \mathrm{arctg} x)' = 1 - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{x^2}{1 + x^2}, \quad (x^3)' = 3x^2,$$

то

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x - \mathrm{arctg} x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \big/ (1 + x^2)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3(1 + x^2)} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \mathrm{arctg} x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$. Так как $\lim\limits_{x\to+0}(\ln\sin 2x)=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to+0}(\ln\sin x)=-\infty$, то у нас неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$. Далее имеем

$$(\ln\sin 2x)'=\frac{2\cos 2x}{\sin 2x},\quad (\ln\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin 2x)'}{(\ln\sin x)'}=.\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x\cdot\sin x}{\sin 2x\cdot\cos x}=1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=1.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$ по теореме Лопиталя не удаётся, так как предел отношения производных не существует. Действительно, $(x+\sin x)'=1+\cos x,$ $(x-\sin x)'=1-\cos x$ и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}.$$

Последний предел не существует, так как для последовательности $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1+\cos x_k}{1-\cos x_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1+0}{1-0}=1,$$

а для последовательности $y_k=(2k+1)\pi$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1+\cos y_k}{1-\cos y_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1-1}{1+1}=0,$$

что и означает отсутствие указанного предела (см. теорему о единственности предела и её следствия). Тем не менее

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$$

существует, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{\sin x}{x})}{x(1-\frac{\sin x}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{\sin x}{x})}{(1-\frac{\sin x}{x})}=1,$$

ибо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

Как показывает предыдущий пример, предел отношения производных может не существовать, а предел отношения функций – существовать.

3.2. Монотонные функции

Займёмся установлением связи между производной и монотонностью функции. Заметим, что для определения монотонности используется понятие линейного порядка Так как понятие линейного порядка введено у нас лишь для точек числовой прямой, то в пределах этого подраздела будем иметь дело со скалярными функциями скалярного аргумента. Напомним, что определение монотонных функций дано в п.1.3.2.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.5. Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет конечную производную хотя бы на интервале (a,b). Для того, чтобы функция f была возрастающей (убывающей) на отрезке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$).

Доказательство проведем для возрастающей функции. Для убывающей функции доказательство аналогично.

Необходимость. Пусть f – возрастающая функция и $\Delta x>0$. Так как $f(x+\Delta x)\geq f(x)$, то

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0. \qquad (3.1)$$

Аналогично доказывается справедливость неравенства (3.1) в случае $\Delta x < 0$, т.к. при этом $f(x+\Delta x) \le f(x)$. Переходя в неравенстве (3.1) к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем $f'(x) \ge 0$.

Достаточность. Пусть $f'(x) \ge 0$ для всякого x из интервала (a,b). Возьмем две произвольные точки x_1 и x_2 из этого интервала. Тогда по теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

и, так как $f'(c) \ge 0$, то при $x_1 < x_2$ $f(x_1) \le f(x_2)$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть всюду на (a,b) $f'(x) > 0$. Тогда из равенства $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$ следует, что при $x_2 > x_1$ выполняется и неравенство $f(x_2) - f(x_1) > 0$, или, что то же самое, $f(x_2) > f(x_1)$. Таким образом, если всюду на (a,b) $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ строго возрастает, то есть условие $f'(x) > 0$ является достаточным для того, чтобы функция f была строго возрастающей. То что условие $f'(x) > 0$ не является необходимым для строгого возрастания функции $f(x)$ показывает пример функции $f(x) = x^3$, которая строго возрастает на всей числовой оси, но $f'(0) = 0$, т.е. неравенство $f'(x) > 0$ выполнено не для всех точек строгого возрастания функции $f(x) = x^3$.

Доказанная теорема позволяет выделить участки монотонного поведения функции f (если они есть).

Пример 1. Найти участки монотонности функции

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5.$$

Функция f всюду дифференцируема, поэтому для выяснения участков монотонности функции f найдем производную

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12.$$

Это квадратный трехчлен, находим его корни:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2},$$

то есть $x_1=-1,\ x_2=2$. Тогда $f'(x)=6(x+1)(x-2)$ и, следовательно, $f'(x)<0$ при $-1<x<2$, $f'(x)>0$ при $x<-1$ и $x>2$. Таким образом, функция f при $x<-1$ и $x>2$ возрастающая, а при $-1<x<2$ убывающая.

Пример 2. Найти участки монотонности функции $f(x)=x^2e^{-x}$.

Функция дифференцируема на всей числовой оси и $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$. Так как $e^{-x}>0$ для всех вещественных x, то знак производной определяется знаком сомножителя $x(2-x)$, который положителен при $0<x<2$ и отрицателен при $x<0$ и $x>2$. Следовательно, $f(x)=x^2e^{-x}$ возрастает при $0<x<2$ и убывает при $x<0$ и $x>2$.

Пример 3. Найти участки монотонности функции $f(x)=e^{-|x|}$.

Функция дифференцируема на всей числовой оси, за исключением точки $x=0$. Действительно, при $x=0$, по определению производной скалярной функции скалярного аргумента, можем записать $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{-|\Delta x|}-e^0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{-|\Delta x|}-1}{\Delta x}$. Последний предел не существует, так как $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{e^{-|\Delta x|}-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{e^{-\Delta x}-1}{\Delta x}=-1$, $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{e^{-|\Delta x|}-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$. Мы получили, что левосторонний и правосторонний пределы различны, следовательно, и предела нет. Таким образом, $f(x)=e^{-|x|}$ не дифференцируема в нуле. В остальных точках числовой прямой функции e^y и $|x|$ дифференцируемы, следовательно сложная функция $f(x)=e^{-|x|}$ так же дифференцируема. Вычисляя производную, получаем

$$f'(x)=\begin{cases}-e^{-x}, & \text{если } x>0,\\ e^{x}, & \text{если } x<0,\end{cases}=-e^{-|x|}\cdot\operatorname{sign}x,$$

где $\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0, \\ 1, \text{ если } x > 0, \end{cases}$ – функция "знак x".

Таким образом, $f(x)$ убывающая на $R_+ = (0, +\infty)$ и возрастающая на $R_- = (-\infty, 0)$.

3.3. Экстремумы

3.3.1. Необходимые условия экстремума

В повседневной жизни мы постоянно сталкиваемся с задачами о выборе наилучшего, в том или ином смысле, варианта: достижения максимальной прибыли, максимального выхода продукта и т.д. Все такие задачи носят название экстремальных. Подобными задачами мы и будем заниматься в данном подразделе. Так как в нижеследующих определениях будет использовано понятие линейного порядка в области значений функции f, то в пределах данного подраздела f – скалярнозначная функция.

Определение 1. Говорят, что точка x_0 есть точка минимума (локального минимума) функции f, если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in U(x_0)$ выполнено неравенство $f(x_0) \le f(x)$. Если для всех $x \in U(x_0)$ выполнено строгое неравенство $f(x_0) < f(x)$, то точка x_0 называется точкой строгого минимума (строгого локального минимума).

Определение 2. Точка x_0 называется точкой максимума (локального максимума) функции f, если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in U(x_0)$ выполнено неравенство $f(x_0) \ge f(x)$. Если для всех $x \in U(x_0)$ выполнено строгое неравенство $f(x_0) > f(x)$, то точка x_0 называется точкой строгого максимума (строгого локального максимума).

Определение 3. Точка x_0 называется точкой экстремума функции f, если она является точкой максимума или точкой минимума.

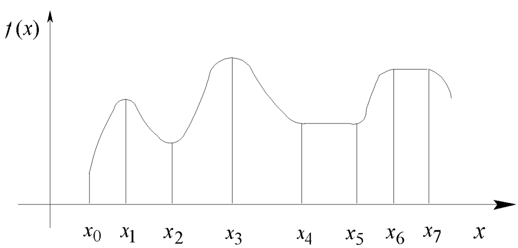
Между точками наименьшего и наибольшего значений функции (глобальных минимума и максимума), с одной стороны, и точками минимума и максимума (локальных минимума и максимума), с другой стороны, имеется связь, выражаемая следующей теоремой.

Теорема 3.6. Если точка наименьшего (наибольшего) значения есть внутренняя точка множества D, то она является точкой минимума (максимума).

Доказательство очевидно, так как всякая внутренняя точка множества D входит в него вместе с некоторой своей окрестностью и поэтому, если соответствующее неравенство выполнено для всех x из множества D, то оно выполнено и для всех точек соответствующей окрестности.

Отметим, что не всякая точка минимума или максимума является точкой наименьшего или наибольшего значения в области, но в некоторой своей окрестности точки минимума (максимума) являются точками наименьшего (наибольшего) значения. Поэтому точки минимума и максимума называют также точками локального минимума и максимума (локального экстремума) в отличие от точек наименьшего и наибольшего значений, которые называют точками глобального минимума и максимума.

На приведённом рисунке x_0 – точка наименьшего значения



(но не минимума), x_1, x_3 – точки максимума, причем x_3 – точка наибольшего значения, x_2 – точка минимума, точки отрезка $[x_4, x_5]$ – точки нестрогого минимума, точки отрезка $[x_6, x_7]$ – точки нестрогого максимума.

Нетрудно устанавливаются необходимые условия экстремума, выражаемые следующей теоремой.

Теорема 3.7. Если x_0 – точка экстремума функции f и существует $f'(x_0)$, тогда $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Пусть вначале f – скалярная функция одного аргумента. Так как по определению экстремума x_0 – точка наибольшего или наименьшего значения в некоторой своей окрестности, то по теореме Ферма $f'(x_0)=0$.

Пусть теперь f – скалярная функция многих переменных, т.е. $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ и $x_0=(x_{01},x_{02},...,x_{0n})^T$. Рассмотрим функцию $\varphi(x_i)=f(x_{01},x_{02},...,x_{0(i-1)},x_i,x_{0(i+1)},...,x_{0n})$, $i=1,2,...,n$. Это функция одной переменной x_i имеющая в точке x_{0i} экстремум. Следовательно, по доказанному выше, $\dfrac{d\varphi(x_{0i})}{dx_i}=0$.

Вспоминая определение частной производной функции f по переменной x_i, можем записать

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}=\frac{\partial f(x_{01},x_{02},...,x_{0n})}{\partial x_i}=\frac{d\varphi(x_{0i})}{dx_i}=0,\ i=1,2,...,n,$$

что и влечет утверждение теоремы, так как

$$f'(x_0)=\frac{df(x_0)}{dx}=\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\right)=$$

$=(0,0,...,0)=0\in R^n$. Теорема доказана.

Для дифференцируемой функции равенство нулю производной эквивалентно обращению в нуль дифференциала. Действительно, если $f'(x_0)=0$, то

$$df(x_0)=f'(x_0)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}\cdot dx_i=0.$$

С другой стороны, если $df(x_0)=0$, то в силу произвольности $dx=(dx_1,dx_2,\dots,dx_n)^T$ это возможно только при

$$f'(x_0)=\frac{df(x_0)}{dx}=\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\right)=0.$$

Поэтому для дифференцируемой функции теорема 3.7 может быть сформулирована в эквивалентной форме.

Теорема 3.7а. Если x_0 – точка экстремума дифференцируемой функции f, то в этой точке $df(x_0)=0$.

В дальнейшем нам потребуется следующее определение.

Определение 4. Точка x_0, в которой производная обращается в нуль ($f'(x_0)=0$), называется стационарной точкой функции f.

Из теоремы 3.7 следует, что подозрительными на экстремум точками, то есть точками, в которых может достигаться экстремум функции f, являются её стационарные точки. Кроме этого, подозрительными на экстремум точками являются точки, в которых производная не существует.

Есть функции, для которых необходимые условия первого порядка являются и достаточными. Примером таких функций служат так называемые выпуклые функции, о которых мы поговорим позже. В частности, для квадратичной функции $f(x)=x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$ точка $x=(0,0,\dots,0)$, в которой $f'(0)=0$, есть точка минимума. Тем не менее в общем случае обращение в нуль первой производной, а равно и дифференциала первого порядка, не является достаточным условием существования экстремума. Например, для функции $f(x)=x^3$ $f'(x)=3x^2$ и, следовательно, $f'(0)=0$, но точка $x=0$ не является точкой экстремума функции $f(x)=x^3$, т.к. эта функция монотонно возрастающая на всей числовой оси.

3.3.2. Достаточные условия экстремума

В тех случаях, когда необходимые условия экстремума не являются достаточными, они не позволяют выяснить наличие экстремума. Поэтому возникает потребность получения достаточных условий экстремума в общем случае, чем мы сейчас и займемся.

Для скалярной функции одной переменной достаточные условия экстремума формулируются: 1) с помощью первой производной; 2) с помощью второй производной.

Достаточные условия на основе первой производной.

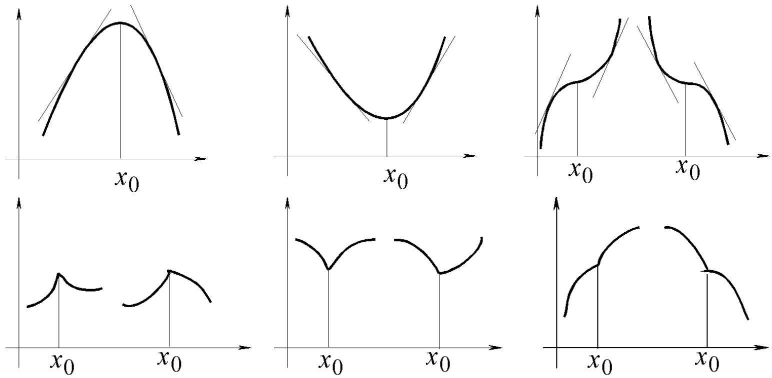
Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в точке x_0 и некоторой её окрестности и эта точка является подозрительной на экстремум для функции $f(x)$. Если при переходе через подозрительную на экстремум точку x_0 производная $f'(x)$

1) меняет знак с "+" на "$-$", то в точке x_0 максимум;

2) меняет знак с "$-$" на "+", то в точке x_0 минимум;

3) не меняет знака, то в точке x_0 экстремума нет.

Доказательство этого утверждения иллюстрируется рисун-



ками в верхнем ряду – для стационарных точек и рисунками в нижнем ряду – для точек, в которых производной нет.

Отметим, что достаточные условия, сформулированные с помощью первой производной на случай функции многих переменных не обобщаются.

Достаточные условия на основе второй производной.

Отметим, что если x_0 – стационарная точка, то есть $f'(x_0)=0$ и существует вторая производная $f''(x_0)$ функции f

в точке x_0, то по формуле Тейлора, учитывая, что $f'(x_0)=0$, можем записать

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{1}{2!}f''(x_0)\cdot\Delta x^2+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x^2, \qquad (3.2)$$

где $\alpha(\Delta x)\to 0$, и поэтому знак приращения вблизи точки x_0 определяется знаком $f''(x_0)$. При этом, если $f''(x_0)<0$, то $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<0$ и, следовательно, в точке x_0 – максимум, а при $f''(x_0)>0$ $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>0$ и в точке x_0 – минимум.

Пусть f – скалярная функция многих переменных. Рассмотрим для простоты функцию двух переменных. Пусть (x_0,y_0) – стационарная точка функции f, тогда $df(x_0,y_0)=0$ и по формуле Тейлора для функции двух переменных имеем

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\alpha(\Delta x,\Delta y)=$$

$$=\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot\Delta x^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot\Delta x\cdot\Delta y+f''_{yy}(x_0,y_0)\cdot\Delta y^2\right)+$$

$$+\alpha(\Delta x,\Delta y), \qquad (3.3)$$

где $\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)$ – величина более высокого порядка малости, чем $\Delta x^2+\Delta y^2$.

Поэтому вблизи точки (x_0,y_0) знак приращения (3.3) определяется знаком квадратичной формы

$$d^2f(x_0,y_0)=f''_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+f''_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2. \qquad (3.4)$$

Возможны три нижеследующих варианта:

1. Квадратичная форма (3.4) положительно определена, тогда $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)>0$ и, следовательно, в точке (x_0,y_0) минимум. Применяя критерий Сильвестра к матрице

$$\begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

квадратичной формы (3.4), получаем достаточные условия минимума функции двух переменных в стационарной точке (x_0, y_0):

$$f''_{xx}(x_0, y_0) > 0, \quad f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 > 0.$$

2. Квадратичная форма (3.4) отрицательно определена, тогда $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0$ и, следовательно, в точке (x_0, y_0) максимум. Так как квадратичная форма (3.4) отрицательно определена, то квадратичная форма $(-d^2 f)$ положительно определена и, применяя критерий Сильвестра к матрице

$$\begin{pmatrix} -f''_{xx}(x_0, y_0) & -f''_{xy}(x_0, y_0) \\ -f''_{xy}(x_0, y_0) & -f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

квадратичной формы $(-d^2 f)$, получаем достаточные условия максимума функции двух переменных в стационарной точке (x_0, y_0):

$$f''_{xx}(x_0, y_0) < 0, \quad f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 > 0.$$

в) Квадратичная форма (3.4) не является ни положительно, ни отрицательно определенной в точке (x_0, y_0). В этом случае в точке (x_0, y_0) экстремума нет. Таким образом, мы доказали теоремы.

Теорема 3.8. Если в стационарной точке матрица вторых производных отрицательно определена, то в этой точке достигается максимум функции f.

Теорема 3.8а. Если в стационарной точке матрица вторых производных положительно определена, то в этой точке достигается минимум функции f.

Общий случай функции многих переменных исследуется аналогично.

Пример 1. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

Так как функция f дифференцируема на всей числовой оси, то подозрительными на экстремум точками будут только стационарные точки. Найдем их. Для этого решим уравнение $f'(x)=0$: $f'(x)=3x^2-12x+9$, $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm1$, $x_1=1$, $x_2=3$. Следовательно, стационарные точки функции f : $x_1=1$, $x_2=3$. Для уточнения, являются ли эти точки экстремальными, в данном случае можно воспользоваться достаточными условиями экстремума как в терминах первой производной, так и с помощью второй производной. Исследуем знак первой производной при переходе через точки $x=1$ и $x=3$. Имеем

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

и, следовательно, $f'(x)$ при переходе через точку $x=1$ меняет знак с "+" на "−", и поэтому в точке $x=1$ функция $f(x)$ имеет максимум, а при переходе через точку $x=3$ производная $f'(x)$ меняет знак с "−" на "+", и поэтому в точке $x=3$ функция $f(x)$ достигает минимума. Воспользуемся теперь второй производной для установления того же факта. Вычисляя

$$f''(x)=(f'(x))'=6x-12=6(x-2),$$

получаем $f''(1)=6(1-2)=-6<0$, и поэтому в точке $x=1$ – максимум, $f''(3)=6(3-2)=6>0$ и, следовательно, $x=3$ – точка минимума.

Пример 2. Найти точки экстремума функции $f(x)=x^3e^{-x}$.

Находим стационарные точки функции. Имеем

$$f'(x)=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}=x^2e^{-x}(3-x),$$

откуда $f'(x)=0$ при $x=0$ и $x=3$. При переходе через точку $x=0$ производная $f'(x)$ знака не меняет и, следовательно, в точке $x=0$ экстремума нет, а при переходе через точку $x=3$ производная $f'(x)$ меняет знак с "+" на "−", и поэтому в точке $x=3$ – максимум.

Пример 3. Найти точки экстремума функции двух переменных $f(x,y)=1+6x-x^2-xy-y^2$.

Используя необходимые условия экстремума

$$f'(x,y)=\left(f'_x(x,y),\, f'_y(x,y)\right)=(0,0),$$

находим стационарные точки. Имеем $f'_x = 6 - 2x - y$, $f'_y = -x - 2y$, откуда получаем для нахождения этих точек систему уравнений

$$\begin{cases} 6 - 2x - y = 0, \\ \quad -x - 2y = 0. \end{cases}$$

Решая её, находим единственную стационарную точку $(x_0, y_0) = (4,-2)$. Так как $f''_{xx} = -2$, $f''_{xy} = -1$, $f''_{yy} = -2$, то из достаточных условий экстремума

$$f''_{xx}(4,-2) = -2 < 0,$$

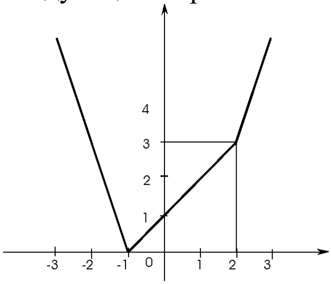
$$f''_{xx}(4,-2) \cdot f''_{yy}(4,-2) - (f''_{xy}(4,-2))^2 = (-2)\cdot(-2) - (-1)^2 = 3 > 0$$

получаем, что в точке $(4,-2)$ – максимум. Так как $f(x,y)$ дифференцируема во всей плоскости, то других подозрительных на экстремум точек у неё нет.

Пример 4. Найти экстремумы функции

$$f(x) = 2|x+1| + |x-2| - 3.$$

Используя определение модуля, эту функцию можно задать следующим образом



$$f(x) = \begin{cases} -3x - 3 & \text{при} \quad x < -1, \\ x + 1 & \text{при} \quad -1 \le x < 2, \\ 3x - 3 & \text{при} \quad x \ge 2. \end{cases}$$

Вычислив производную

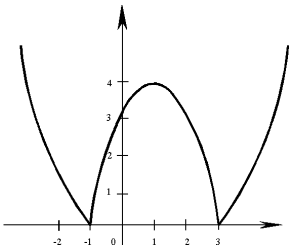
$$f'(x) = \begin{cases} -3 & \text{при} \quad x < -1, \\ 1 & \text{при} \quad -1 \le x < 2, \\ 3 & \text{при} \quad x \ge 2, \end{cases}$$

получаем, что подозрительными на экстремум являются точки $x = -1$, $x = 2$ разрыва производной $f'(x)$. Очевидно, что использовать достаточные условия экстремума в терминах второй производной здесь не удаётся, так как не только вторая, но и первая производная в подозрительных на экстремум точках не существует. Тем не менее достаточные условия экстремума на основе первой производной позволяют сделать вывод, что в точке $x=-1$ функция f достигает минимума, а в точке $x=2$ экстремума нет. Это же видно из графика функции f, приведенного на рисунке выше.

Пример 5. Найти точки экстремума функции

$$f(x)=\left|x^2-2x-3\right|.$$

Так как при $-1<x<3$ $x^2-2x-3<0$, а при $x<-1$ и $x>3$ $x^2-2x-3>0$, то, вспоминая определение модуля, функцию $f(x)$ можно записать в виде



$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-3 & \text{при} \quad x<-1, \\ -(x^2-2x-3) & \text{при} \quad -1\le x<3, \\ x^2-2x-3 & \text{при} \quad x\ge 3. \end{cases}$$

Вычислив производную

$$f(x)=\begin{cases} 2(x-1) & \text{при} \quad x<-1, \\ -2(x-1) & \text{при} \quad -1\le x<3, \\ 2(x-1) & \text{при} \quad x\ge 3, \end{cases}$$

получим, что $f'(x)=0$ при $x=1$. Кроме стационарной точки $x=1$, подозрительными на экстремум являются точки $x=-1$, $x=3$, в которых производная не существует. Использование достаточных условий на основе первой производной позволяет сделать вывод, что в точке $x=1$ функция $f(x)=\left|x^2-2x-3\right|$ имеет максимум, а в точках $x=-1$, $x=3$ достигается минимум функции $f(x)=\left|x^2-2x-3\right|$. Сказанное выше хорошо видно на приведённом рисунке.

Последние два примера показывают, что использование классической методики нахождения экстремума, изложенной выше, часто затруднительно, а иногда и невозможно. В этих случаях используют другие методы поиска экстремума (методы недифференцируемой и стохастической оптимизации, итерационные и др.). Часть из них можно найти в [9 - 15].

3.3.3. Метод наименьших квадратов

Достаточно простым и в то же время весьма интересным приложением необходимых условий экстремума первого порядка является метод наименьших квадратов. Его суть изложим на примере нахождения коэффициентов линейной зависимости по экспериментальным данным.

Пусть выход объекта y линейно зависит от входа объекта x, то есть $y = ax + b$. Примером может служить зависимость напряжения линейной цепи от силы тока. Пусть, далее, (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ – серия измерений входа и выхода объекта, с помощью которых нам нужно восстановить коэффициенты a и b линейной зависимости (параметры a и b объекта). Если бы измерения проводились без ошибок, то каждая пара (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ удовлетворяла бы уравнению

$$y_i = a\,x_i + b, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.5}$$

или, что то же самое, выполнялись бы равенства

$$a\,x_i + b - y_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.6}$$

и параметры a, b можно было бы найти, решив систему уравнений (3.5) или (3.6). Так как, по разным причинам, ошибки измерений неизбежны, то эти системы при $n > 2$ чаще всего несовместны. При этом в измерениях допускаются ошибки

$$\varepsilon_i = a\,x_i + b - y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Поставим задачу нахождения коэффициентов a, b из условия достижения минимума суммы квадратов невязок (ошибок), то есть из условия достижения минимума функционала

$$J(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} ((a\,x_i + b) - y_i)^2 \,. \tag{3.7}$$

Используя необходимые условия экстремума, получаем из (3.7) систему уравнений для нахождения a и b

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial a} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} ((a\,x_i + b) - y_i) \cdot x_i = 0, \\ \dfrac{\partial J}{\partial b} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} ((a\,x_i + b) - y_i) = 0, \end{cases}$$

отсюда, раскрывая скобки и приводя подобные, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\,, \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b\,n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Заметим, что подобным образом можно восстановить коэффициенты любой функциональной зависимости, если коэффициенты входят в эту зависимость линейно (в противном случае получается нелинейная система уравнений для определения коэффициентов).

3.3.4. Условные экстремумы

Пусть $f(x, y, z)$ – функция трёх переменных, $g(x, y, z) = 0$ – поверхность в R^3. Представляет интерес задача о нахождении экстремумов функции $f(x, y, z)$ среди значений принимаемых этой функцией в точках поверхности $g(x, y, z) = 0$. Кривую в пространстве можно задать как линию пересечения двух поверхностей, то есть как множество точек, удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} g_1(x, y, z) = 0, \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$. Также как и в предыдущем случае интересна задача о нахождении экстремумов функции $f(x, y, z)$ среди значений принимаемых этой функцией в точках данной кривой. Подобные рассмотренным выше задачи носят название задач на условный экстремум. В общем случае условные экстремумы – это экстремумы при наложении на переменные некоторых условий или, что то же самое, ограничений. В пределах этого пункта будем рассматривать ограничения в виде равенств.

Определение. Точка $x_0=(x_{01},x_{02},\dots,x_{0n})$, удовлетворяющая ограничениям

$$g_i(x)=g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=0 \quad i=1,2,\dots,m, \tag{3.8}$$

называется точкой условного минимума функции

$$f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_n) \tag{3.9}$$

при ограничениях (3.8), если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех x из $U(x_0)$, удовлетворяющих условиям (3.8), выполняется неравенство

$$f(x_0)\le f(x). \tag{3.10}$$

Аналогично определяется точка условного максимума функции f при ограничениях (3.8) с заменой неравенства (3.10) на противоположное.

Один из путей решения задачи поиска экстремумов функции $f(x)$ при ограничениях (3.8) заключается в следующем. Предположим, что $m<n$ и ранг производной матрицы $g'(x)$ функции $g(x)=\left(g_1(x),g_2(x),\dots,g_m(x)\right)^T$

$$g'(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

равен m. Тогда по теореме о неявной функции [8] система уравнений (3.8) определяет m из n переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$ как функции остальных. Будем считать, что это первые m переменных $x_1,x_2,\dots,x_m$. Предположим, что удается найти эти функции

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = \varphi_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n). \end{cases} \tag{3.11}$$

Подставляя $x_1, x_2, \dots, x_m$ из (3.11) в функцию $f(x)$, получаем задачу о нахождении экстремумов функции

$$f\left(\varphi_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)\right) \tag{3.12}$$

$n-m$ переменных $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$.

Укажем другой способ отыскания точек $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots . x_n^0)$, подозрительных на условный экстремум. В этих точках $\Gamma_0(x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots . x_n^0)$ функция (3.12) имеет безусловный экстремум, и потому её дифференциал равен нулю. По свойству инвариантности первого дифференциала имеем

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot dx_j = 0. \tag{3.13}$$

Из системы $dg_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \cdot dx_j = 0,\ i = 1,2,\dots,m,$ можно найти $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ и подставить в (3.13). В результате получим соотношение $A_{m+1}dx_{m+1} + A_{m+2}dx_{m+2} + \dots + A_n dx_n = 0$. В точке Γ_0 должны выполняться равенства $A_{m+1} = A_{m+2} = \dots = A_n = 0$. Вместе с уравнениями связей получаем n соотношений для нахождения точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots . x_n^0)$.

Недостатками этих вариантов решения являются трудности практической разрешимости получающихся систем уравнений (3.11) и неравноправие части переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Другой путь решения задачи на условный экстремум, называемый методом множителей Лагранжа, заключается в следующем. Составляем функцию Лагранжа задачи

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x).$$

Подозрительные на экстремум точки находятся среди решений системы $n+m$ уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,\dots,n, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0, \quad i = 1,2,\dots,m. \end{cases}$$

Обоснование этого метода имеется в [8,12] и других книгах по математическому анализу. К ним мы и отсылаем читателя.

3.3.5. Глобальные экстремумы. Нахождение наибольших и наименьших значений

Историю вопроса можно найти в [10]. Более подробное изложение постановок задач в [12].

Рассмотрим задачу о нахождении точек наименьшего значения функции $f(x)$ на множестве G. Формализованная запись этой задачи имеет вид:

найти точки, в которых $f(x) = \min\limits_{x \in G}$ *;*

найти точки $\min\limits_{x \in G} f(x)$ *;*

найти решение задачи $\arg\min\limits_{x \in G} f(x)$

и некоторые другие виды записи.

Аналогично записывается задача о нахождении наибольшего значения функции $f(x)$ с заменой $\min$ на $\max$.

Задачи о нахождении наименьшего или наибольшего значений функции $f(x)$ носят соответственно названия задач минимизации или максимизации. Заметим, что если x_0 – точка минимума (наименьшего значения) функции $f(x)$, то x_0 – точка максимума (наибольшего значения) функции $f_1(x) = -f(x)$ и наоборот. Поэтому, говоря об экстремальных задачах, имеют в виду либо одну из них (чаще всего задачу минимизации), либо обе вместе.

Если множество $G \subseteq R^n$, то экстремальная задача называется конечномерной. Мы будем заниматься конечномерными экстремальными задачами. В том случае, когда G совпадает со всем пространством R^n, экстремальная задача называется экстремальной задачей без ограничений, в противном случае мы имеем экстремальную задачу с ограничениями. Чаще всего рассматривают ограничения в виде равенств (задача на условный экстремум из предыдущего пункта), ограничения в виде неравенств

$$g_i(x) \le 0,\ i = 1,2,\dots,m,$$

а также ограничения в виде равенств и неравенств

$$\left.\begin{aligned} g_i(x) = 0,\ i = 1,2,\dots,m, \\ g_i(x) \le 0,\ i = m+1,\dots,l. \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Если функция $f(x)$, экстремум которой мы ищем, и ограничения (3.14) линейны, то мы имеем задачу линейного программирования. Во всех остальных случаях, то есть когда либо $f(x)$, либо ограничения (3.14) нелинейны, экстремальная задача называется задачей нелинейного программирования. Среди задач нелинейного программирования выделяют задачи квадратичного и выпуклого программирования в тех случаях, когда функция $f(x)$ квадратичная или выпуклая (термин будет определён позже).

Естественен вопрос о разрешимости экстремальной задачи. Если множество $G \subseteq R^n$ ограничено и замкнуто (содержит все свои граничные точки), а функция $f(x)$ непрерывна, то вторая теорема Вейерштрасса гарантирует разрешимость экстремальной задачи в том смысле, что существуют точки множества G, в которых функция $f(x)$ принимает свои наибольшее и наименьшее значения. Классический вариант решения экстремальной задачи в последнем случае описывается и обосновывается следующим образом. Точки, в которых функция $f(x)$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений, могут быть как внутренними точками множества G, тогда это точки локального экстремума функции $f(x)$, так и точками границы множества G. В соответствии со сказанным получаем следующий алгоритм:

1) находим подозрительные на экстремум точки функции $f(x)$;

2) отбираем среди найденных точек лежащие в области G и вычисляем значения функции в этих точках;

3) задав границу области G в виде системы равенств, решаем задачу нахождения подозрительных на условный экстремум точек; вычисляем значения функции в этих точках;

4) сравнивая значения функции в точках, полученных в пунктах 2 и 3, находим среди них наибольшее и наименьшее.

Другие методы решения общей экстремальной задачи, а также задач линейного, выпуклого и квадратичного программирования, можно найти в [9-15].

Применим рассмотренный алгоритм для решения задачи линейного программирования. Тогда функция цели $f(x)$ и ограничения (3.14) – линейные функции, то есть мы имеем задачу нахождения глобального экстремума функции

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + c = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + c$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} g_i(x) &= b_1^i x_1 + b_2^i x_2 + \dots + b_n^i x_n + d_i = \sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i = 0,\ i = 1,2,\dots,m, \\ g_i(x) &= b_1^i x_1 + b_2^i x_2 + \dots + b_n^i x_n + d_i = \sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i \le 0,\ i = m+1,\dots,l. \end{aligned}\right\}$$

Заметим, что множество точек, удовлетворяющих системе линейных ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i = 0,\ i = 1,2,\dots,m,\ \sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i \le 0,\ i = m+1,\dots,l,$$

представляет собой многогранник в R^n, так как есть пересечение гиперповерхностей $\sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i = 0,\ i = 1,2,\dots,m$ и полупространств $\sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i \le 0,\ i = m+1,\dots,l$. Далее, если ранг r матрицы системы равенств

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i = 0,\ i = 1,2,\dots,m$$

меньше m, то $m-r$ строк этой матрицы есть линейная комбинация r линейно независимых строк и может быть вычеркнута [1]. Поэтому предположим, что ранг матрицы этой системы равен m. Тогда из неё можно выразить m переменных через остальные $n-m$. Подставляя найденные переменные в функцию цели и систему неравенств $\sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i \le 0,\ i = m+1,\dots,l$ получаем эквивалентную исходной задачу линейного программирования содержащую $n-m$ переменных с ограничениями в виде неравенств. В силу сделанного замечания, рассмотрим задачу нахождения наибольшего и наименьшего значений функции

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + c = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + c$$

с ограничениями в виде неравенств

$$g_i(x) = b_1^i x_1 + b_2^i x_2 + \dots + b_n^i x_n + d_i = \sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i \le 0,\ i = 1,\dots,l\,.$$

Находя частные производные функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по переменным $x_i, i = 1,2,\dots,n$, получаем $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i, i = 1,2,\dots,n$. Таким образом, производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1,2,\dots,n$ обращаются в нуль тогда и только тогда, когда все $a_i, i = 1,2,\dots n$, равны нулю, то есть функция $f(x)$ есть тождественная константа. В этом случае наибольшее и наименьшее значения функции цели совпадают и равны этой константе. Если функция цели $f(x)$ не тождественная константа, то производная $f'(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ функции $f(x)$ нигде в области решений системы ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i \le 0,\ i=1,...,l\ ,$$

в нуль не обращается. Таким образом, внутри этой области экстремумов у функции цели $f(x)$ нет. Будем теперь искать наибольшее и наименьшее значения на границе области. Границей области служат многогранники, лежащие в гиперплоскостях

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i = 0,\ i=1,...,l\ .$$

Рассмотрим многогранник лежащий в гиперплоскости $\sum_{j=1}^{n} b_j^l x_j + d_i = 0$. Он представляет собой пересечение этой гиперплоскости с полупространствами $\sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i \le 0,\ i=1,...,l-1$. Таким образом мы снова имеем задачу нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j + c$ при ограничениях $\sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i \le 0,\ i=1,...,l-1$, $\sum_{j=1}^{n} b_j^l x_j + d_i = 0$. Выразив одно из неизвестных из уравнения $\sum_{j=1}^{n} b_j^l x_j + d_i = 0$ и подставляя его в функцию цели и в систему неравенств $\sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i \le 0,\ i=1,...,l-1$ получаем задачу линейного программирования с ограничениями в виде неравенств содержащую $n-1$ переменную, то есть задачу размерности на единицу меньше. Повторяя предыдущие рассуждения приходим к выводу, что наибольшее и наименьшее значения функции цели могут достигаться только на границе многогранника $\sum_{j=1}^{n} b_j^i x_j + d_i \le 0,\ i=1,\dots,l-1$, $\sum_{j=1}^{n} b_j^l x_j + d_i = 0$. Аналогичный вывод получается и относительно граней лежащих в других гиперплоскостях. Так как число переменных конечно, то через конечное число шагов получим, что глобальный экстремум в задаче линейного программирования достигается в вершинах многогранника. При большом количестве вершин нужен алгоритм их перебора с наименьшим числом шагов. Один из таких алгоритмов и лежит в основе симплекс метода [23].

Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y,z) = 2x-3y+5z+4$ в пирамиде с вершинами $A=(1,0,0), B=(0,-2,-1), C=(-1,2,1), D=(1,1,3)$.

Напишем уравнения граней пирамиды. Грань в которой лежит треугольник ABC параллельна векторам $AB = (-1,-2,-1)^T$ и $AC = (-2,2,1)^T$, поэтому её вектором нормали является вектор

$$[AB, AC] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} = (0,3,1)^T .$$

Записывая уравнение плоскости проходящей через точку $A=(1,0,0)$ перпендикулярно вектору $(0,3,1)^T$ получаем уравнение искомой плоскости $3y+z=0$. Аналогично получаются уравнения остальных трёх граней: ABD – $-5x+3y-z+5=0$, ACD – $5x+6y-2z-5=0$, BCD – $10x+6y-7z+5=0$. Запишем теперь систему линейных неравенств, которым должны удовлетворять координаты точки, лежащей в области. Заметим, что если $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – непрерывная в R^n функция, то гиперповерхность, описываемая уравнением $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, делит R^n

на две части так, что для точек, лежащих в одной из этих частей, выполняется неравенство $F(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0$, а для точек из другой части – противоположное. Подставляя координаты точки в левую часть уравнения $3y + z = 0$ плоскости ABC, получаем $0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 = 6 \ge 0$. Так как точка $D = (1,1,3)$ принадлежит рассматриваемой нами области, то во всех точках, лежащих по ту же сторону от плоскости $3y + z = 0$, что и точка $D = (1,1,3)$, выполняется неравенство $3y + z \ge 0$ или, что то же самое, неравенство $-3y - z \le 0$. Подстановка координат точек $A = (1,0,0)$, $B = (0,-2,-1)$, $C = (-1,2,1)$ в левые части уравнений плоскостей BCD, ACD и ABD соответственно даёт систему неравенств $5x - 3y + z - 5 \le 0$, $5x + 6y - 2z - 5 \le 0$, $-10x - 6y + 7z - 5 \le 0$.

Таким образом имеем задачу линейного программирования: найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y, z) = 2x - 3y + 5z + 4$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -3y - z \le 0, \\ 5x - 3y + z - 5 \le 0, \\ 5x + 6y - 2z - 5 \le 0, \\ -10x - 6y + 7z - 5 \le 0. \end{cases}$$

Вычисляя производную функции цели, имеем $f'(x, y, z) = (2,3,-5)$. Так как найденный вектор не нулевой, то внутри области экстремумов нет. Рассмотрим теперь грань в которой лежит треугольник ABC. Таким образом имеем задачу линейного программирования: найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y, z) = 2x - 3y + 5z + 4$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -3y - z = 0, \\ 5x - 3y + z - 5 \le 0, \\ 5x + 6y - 2z - 5 \le 0, \\ -10x - 6y + 7z - 5 \le 0. \end{cases}$$

С одной стороны, можно понизить размерность задачи выразив одну из переменных, например z, через остальные из уравнения плоскости $-3y-z=0$. С другой стороны, так как производная функции цели внутри треуголника ABC в нуль не обращается, то наибольшее и наименьшее значения функции цели достигаются на границе этого треугольника, то есть на прямых AB, AC и BC задаваемых уравнениями

$$\begin{cases} -3y-z=0, \\ 5x-3y+z-5=0, \end{cases} \quad \begin{cases} -3y-z=0, \\ 5x+6y-2z-5=0, \end{cases} \quad \begin{cases} -3y-z=0, \\ -10x-6y+7z-5=0. \end{cases}$$

Получаемые при этом задачи линейного программирования заключаются в нахождении наибольшего и наименьшего значений функции цели при соответствующих ограничениях

$$\begin{cases} -3y-z=0, \\ 5x-3y+z-5=0, \\ 5x+6y-2z-5\le 0, \\ -10x-6y+7z-5\le 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -3y-z=0, \\ 5x-3y+z-5\le 0, \\ 5x+6y-2z-5=0, \\ -10x-6y+7z-5\le 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -3y-z=0, \\ 5x-3y+z-5\le 0, \\ 5x+6y-2z-5\le 0, \\ -10x-6y+7z-5=0. \end{cases}$$

Повторяя предыдущие рассуждения приходим к выводу, что наибольшее и наименьшее значения функции цели могут достигаться в точках A, B и C. К аналогичным выводам приводит рассмотрение задач поиска наибольшего и наименьшего значений функции цели на гранях ABD, ACD, BCD. Таким образом получаем, что наибольшее и наименьшее значения функции цели могут достигаться лишь в вершинах пирамиды. Вычисляя значения функции цели $f(x,y,z)=2x-3y+5z+4$ в этих точках, получаем $f(1{,}0{,}0)=6,\ f(0,-2,-1)=5,\ f(-1{,}2{,}1)=1,\ f(1{,}1{,}3)=18$. Следовательно, наименьшее значение функции цели равно 1 и достигается в точке $C=(-1{,}2{,}1)$, а наибольшее значение равно 18 и достигается в точке $D=(1{,}1{,}3)$.

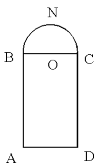
Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^4-2x^2+3$ на отрезке $[-2{,}1]$.

Так как функция f дифференцируема на всей числовой оси, то подозрительные на экстремум точки совпадают со стационарными точками, которые и находим. Имеем

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ и, следовательно, подозрительными на экстремум точками являются точки $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Внутренними точками отрезка $[-2, 1]$ являются точки $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Вычисляем значения функции в этих точках $f(0) = 3$, $f(-1) = 2$. Граничными точками отрезка $[-2, 1]$ являются точки $x_3 = -2$ и $x_4 = 1$. Вычисляем значения функции в этих точках $f(-2) = 11$, $f(1) = 2$. Сравнивая найденные значения, получаем, что наибольшее значение функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-2, 1]$ достигается в точке $x = -2$ и равно 11, наименьшее значение достигается в точках $x = -1$ и $x = 1$ и равно 2.

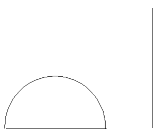
Пример 3. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определить размеры окна, имеющего наибольшую площадь при заданном периметре.

Рассмотрим вначале общий случай. Он изображён на рисунке. Обозначим через p периметр окна, через $2x$ – длину стороны BC. Тогда $AD = BC = 2x$, $OC = OB = ON = x$, длина полуокружности $BNC = \pi x$, $CD = AB = \dfrac{p - (\pi + 2)x}{2}$, и, наконец, площадь окна



$$S = \frac{2x(p - (\pi + 2)x)}{2} + \frac{\pi x^2}{2} = px - \frac{(\pi + 4)x^2}{2}.$$

Рассматривая изображённые на рисунках вырожденные случаи,



когда окно превращается в полукруг или щель, получаем границы изменения x от $x = 0$ до $x = \dfrac{p}{\pi + 2}$. Таким образом, для решения задачи требуется найти наибольшее значение функции $S = px - \dfrac{(\pi + 4)x^2}{2}$ на отрезке $\left[0, \dfrac{p}{\pi + 2}\right]$. Имеем

$S'(x) = p - (\pi + 4)x = 0$, откуда $x = \dfrac{p}{\pi + 4}$. Подставляя в $S(x)$ значения $x = 0$, $x = \dfrac{p}{\pi + 4}$, $x = \dfrac{p}{\pi + 2}$ получаем $S(0) = 0$,

$$S\left(\frac{p}{\pi+4}\right) = \frac{p^2}{\pi+4} - \frac{\pi+4}{2} \cdot \frac{p^2}{(\pi+4)^2} = \frac{p^2}{2(\pi+4)},$$

$$S\left(\frac{p}{\pi+2}\right) = \frac{p^2}{\pi+2} - \frac{\pi+4}{2} \cdot \frac{p^2}{(\pi+2)^2} = \frac{2(\pi+2)-(\pi+4)}{2(\pi+2)^2} = \frac{p^2 \cdot \pi}{2(\pi+2)^2}.$$

Сравнивая $S\left(\dfrac{p}{\pi+4}\right)$ и $S\left(\dfrac{p}{\pi+2}\right)$ имеем

$$S\left(\frac{p}{\pi+4}\right) - S\left(\frac{p}{\pi+2}\right) = \frac{p^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{\pi+4} - \frac{\pi-2}{(\pi+2)^2}\right) =$$

$$= \frac{p^2}{2} \cdot \frac{\pi^2 + 4\pi + 4 - \pi^2 - 4\pi}{(\pi+4)(\pi+2)^2} = \frac{p^2}{(\pi+4)(\pi+2)^2} > 0.$$

Следовательно,

$$S\left(\frac{p}{\pi+4}\right) > S\left(\frac{p}{\pi+2}\right)$$

и потому наибольшее значение достигается в точке $x = \dfrac{p}{\pi+4}$, т.е. когда $BC = 2AB$.

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 y(2 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Найдем стационарные точки функции. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy(2-x-y) - x^2 y = xy(4-3x-2y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2(2-x-y) - x^2 y = x^2(2-x-2y),$$

откуда получаем систему уравнений для определения стационарных точек

$$\begin{cases} xy(4-3x-2y)=0, \\ x^2(2-x-2y)=0. \end{cases}$$

Решения этой системы: 1) $x=0$, y – любое; 2) $x=2$, $y=0$; 3) $x=1$, $y=1/2$. Из них внутренней точкой области является точка $(1,1/2)$, в которой $f(1,1/2)=1/4$. На участках границы $x=0$ и $y=0$ $f(0,y)=0,\ f(x,0)=0$. Остается исследовать поведение функции на участке границы, заданном уравнением $x+y=6$. Подставляя $y=6-x$, получаем

$$\varphi(x)=f(x,6-x)=x^2(6-x)(2-x-6+x)=4x^2(x-6)=4x^3-24x^2.$$

Найдем наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[0,6]$. Имеем $\varphi'(x)=12x^2-48x=0$, откуда $x_1=0$, $x_2=4$. Так как $\varphi(0)$ и $\varphi(6)$ уже найдены, вычислим $\varphi(4)=f(4,6-4)=4\cdot 4^3-24\cdot 4^2=-128$. Сравнивая $f(1,1/2)$, $f(4,6-4)$, $f(0,y)=0,\ f(x,0)=0$, получаем, что наименьшее значение функции $f(x,y)=x^2y(2-x-y)$ в заданном треугольнике достигается в точке (4,2) и равно -128, а наибольшее значение этой функции на данном множестве достигается в точке $(1,1/2)$ и равно $1/4$.

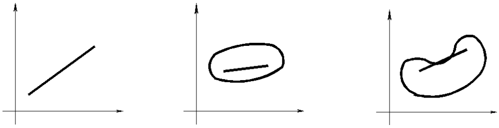
3.4. Выпуклые и вогнутые функции

Выпуклые функции играют большую роль в теории экстремальных задач. В частности, для них разрешима задача минимизации. Изложение - общепринятое в литературе по минимизации и выпуклому анализу. Этот материал можно найти в $[8-15]$ и других книгах.

Определение 1. Множество G линейного пространства X называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками $x_1, x_2 \in G$ множеству G принадлежат и все точки отрезка, их соединяющего, то есть точки вида

$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, где $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, или, что то же самое, точки вида $x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$, где $0 \leq \alpha \leq 1$.

На первых двух рисунках приведены примеры выпуклых множеств в R^2, а на третьем рисунке – пример невыпуклого множества.



Примерами выпуклых множеств также являются круг, квадрат, треугольник, параллелограмм, шар, параллелепипед, точка, всё пространство X .

Определение 2. Скалярная функция $f(x)$, заданная на выпуклом множестве G, называется выпуклой, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in G$ и любого $0 \leq \alpha \leq 1$ выполнено неравенство

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \qquad (3.15)$$

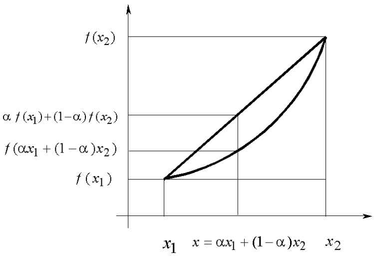
и называется вогнутой, если выполнено противоположное неравенство

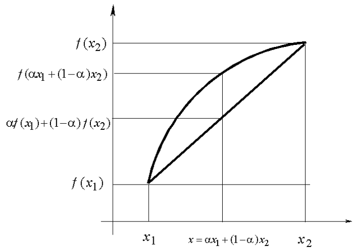
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)\,. \qquad (3.16)$$

Заметим, что если $f(x)$ – выпуклая функция, то функция $f_1(x) = -f(x)$ является вогнутой и наоборот.

На первом рисунке расположеном ниже изображена выпуклая, а на втором рисунке – вогнутая функции одного аргумента.

Рассмотрим более подробно условия, при которых скалярная функция одного переменного выпукла или вогнута.





Прежде всего отметим, что если $x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ и $0 \leq \alpha \leq 1$, то x лежит между x_1 и x_2 и при $x_1 < x_2$ удовлетворяет неравенству $x_1 \le x \le x_2$. С другой стороны, если $x_1 < x < x_2$, то x можно представить в виде $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, где

$$\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}; \quad 1-\alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Действительно, для $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ имеем $\alpha(x_2 - x_1) = x_2 - x$, откуда $\alpha = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$; $1-\alpha = 1 - \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \dfrac{x_2 - x_1 - x_2 + x}{x_2 - x_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Учитывая сделанное замечание, условие выпуклости (3.15) для скалярной функции одного переменного можно переписать в виде

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2). \tag{3.17}$$

Поэтому можно дать другое определение выпуклой функции.

Определение 3. Скалярная функция одного переменного называется выпуклой, если для любых x, x_1, x_2, удовлетворяющих неравенствам $x_1 \le x \le x_2$, $x_1 < x_2$, выполнено неравенство (3.17).

Следующая теорема характеризует выпуклую функцию с помощью производной.

Теорема 3.9. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет там конечную производную. Для выпуклости $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была возрастающей на интервале (a,b).

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $f(x)$ выпукла и $x_1 < x_2$. Умножая обе части неравенства (3.17) на $x_2 - x_1$, имеем

$$f(x)(x_2 - x_1) = f(x)(x_2 - x + x - x_1) \le$$
$$\le f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1),$$

отсюда

$$(f(x) - f(x_1))(x_2 - x) \le (f(x_2) - f(x))(x - x_1).$$

Разделив обе части полученного неравенства на $(x_2 - x)(x - x_1)$, окончательно получаем

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \tag{3.18}$$

Переходя в (3.18) к пределу при $x \to x_1$, имеем

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \tag{3.19}$$

Аналогично, переходя в (3.18) к пределу при $x \to x_2$, получаем

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2). \tag{3.20}$$

Из неравенств (3.19), (3.20) в силу произвольности x_1 и x_2 получаем утверждение теоремы.

Достаточность. Пусть $f'(x)$ возрастающая на (a,b) и пусть $x_1 < x < x_2$. Применяя к отрезкам $[x_1, x]$, $[x, x_2]$ формулу конечных приращений, получаем

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1), \tag{3.21}$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2), \tag{3.22}$$

где ξ_1 и ξ_2 удовлетворяют неравенствам $x_1 < \xi_1 < x$, $x < \xi_2 < x_2$, и поэтому $\xi_1 < \xi_2$. Так как по условию $f'(x)$ возрастающая и $\xi_1 < \xi_2$, то для $f'(x)$ имеет место неравенство $f'(\xi_1) < f(\xi_2)$, из которого, с учетом (3.21), (3.22), получаем, что для функции f выполнено неравенство (3.18), эквивалентное условию выпуклости (3.17). Теорема доказана.

Доказанная теорема не очень удобна в применении, но с её помощью легко доказывается следующий критерий выпуклости.

Теорема 3.10. Пусть функция f определена на отрезке $[a,b]$ и существует вторая производная $f''(x)$ на интервале (a,b). Тогда для выпуклости f необходимо и достаточно, чтобы вторая производная была неотрицательна ($f''(x) \ge 0$) на интервале (a,b).

Доказательство следует из теоремы 1 и критерия монотонности, доказанного в п. 3.3.

Аналогично теоремам 3.9 и 3.10 формулируются и доказываются следующие критерии вогнутости.

Теорема 3.11. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет там конечную производную. Для вогнутости $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была убывающей на интервале (a,b).

Теорема 3.12. Пусть функция f определена на отрезке $[a,b]$ и существует вторая производная $f''(x)$ на интервале (a,b). Тогда для вогнутости f необходимо и достаточно, чтобы вторая производная была неположительна ($f''(x) \leq 0$) на интервале (a,b).

Доказательства теорем 3.11 и 3.12 аналогичны доказательствам теорем 3.9 и 3.10 с заменой неравенств, полученных на основе неравенства (3.15), на соответствующие неравенства, полученные на основе неравенства (3.16).

Теоремы 3.10 и 3.12 обобщаются на случай скалярной функции многих переменных и выглядят следующим образом.

Теорема 3.13. Для того, чтобы функция $f(x)$, имеющая матрицу вторых производных $f''(x)$, была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы $f''(x)$ была неотрицательно определенной.

Аналогично формулируется критерий вогнутости. Доказательства критериев выпуклости и вогнутости можно найти в [9,14] и др.

С помощью теорем 3.9–3.12, выделяются участки выпуклости и вогнутости скалярной функции одного переменного. Весьма полезным для исследования функции оказывается следующее понятие.

Определение 4. Точка x_0 перехода от вогнутости к выпуклости или от выпуклости к вогнутости называется точкой перегиба.

Очевидно из определения, что если x_0 – точка перегиба и существует вторая производная $f''(x_0)$, то $f''(x_0)=0$.

Пример 1. Пусть $f(x)=x^3$. Тогда $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$. Поэтому при $x<0$ $f''(x)<0$ и функция f вогнута, при $x>0$ $f''(x)>0$ и функция f выпукла. Следовательно, точка $x=0$ есть точка перегиба функции $f(x)=x^3$.

Пример 2. Пусть $f(x)=x^4$. Тогда $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$. Точка $x=0$ не является точкой перегиба, несмотря на то, что $f''(0)=0$, так как всюду на числовой прямой $f''(x)\geq 0$ и потому функция $f(x)=x^4$ всюду на числовой прямой выпукла.

Можно сформулировать эквивалентные определения выпуклости и вогнутости на основе поведения касательной к графику функции, распространяемые и на случай функции многих переменных (критерии выпуклости и вогнутости в терминах опорной гиперплоскости).

Более подробно с выпуклыми и вогнутыми функциями можно познакомиться в книге Рокафеллара [16], а в книгах [9–15] ещё и с выпуклым программированием.

3.5. Исследование функций и построение графиков

Подводя итог описанным в этом разделе элементам исследования поведения функций, можно дать общую схему исследования скалярной функции скалярного аргумента.

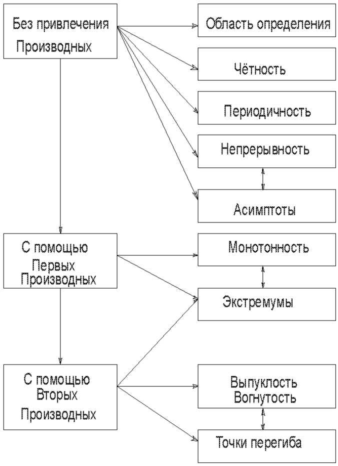
1. Без привлечения производных

а) находится область определения, по возможности находятся область значений функции и точки пересечения функции с осями координат;

б) выясняются четность и нечетность;

в) выясняются периодичность или непериодичность;

г) производятся исследования непрерывности функции и поведение функции на границах области определения, находятся и охарактеризовываются точки разрыва, находятся вертикальные асимптоты;



д) находятся наклонные асимптоты.

2. С привлечением производных первого порядка находятся участки монотонности и точки экстремума.

3. С применением производных второго порядка находятся точки экстремума (если не получилось с помощью первой производной), выясняется вогнутость, выпуклость и находятся точки перегиба.

Описанный алгоритм удобнее приводить в виде структурной схемы исследования, изображенной на рисунке.

В заключение приведем пример.

Пример. Провести полное исследование и построить график функции $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

1. Область определения $x^3-1\neq 0$, отсюда следует, что $(x-1)(x^2+x+1)\neq 0$ и потому $x\neq 1$.

2. $f(-x)=\dfrac{(-x)^4}{(-x)^3-1}=\dfrac{x^4}{-x^3-1}$, то есть $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$, следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Для проверки периодичности требуется либо найти не равное нулю и не зависящее от x решение уравнения $f(x+T)=f(x)$, либо показать, что такого решения нет. Для последнего достаточно показать, что при каком-нибудь x $T=0$,

или что при двух разных x получаются разные решения уравнения $f(x+T)=f(x)$. При $x=0$ получаем

$f(0+T)=\dfrac{T^4}{T^3-1}$, $f(0)=0$ и поэтому уравнение $f(0+T)=f(0)$

превращается в уравнение $\dfrac{T^4}{T^3-1}=0,$

имеющее единственное решение $T=0$. В соответствии со сказанным, исследуемая функция непериодична.

4. Так как $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}$ есть отношение двух полиномов,

то функция разрывна лишь в точках обращения знаменателя в нуль. Получаем $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$, отсюда следует, что знаменатель обращается в нуль при $x=1$. Исследуем характер разрыва в этой точке. Имеем

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^4}{x^3-1}=-\infty, \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^4}{x^3-1}=+\infty.$$

Таким образом, в точке $x=1$ функция имеет разрыв второго рода и прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика функции.

5. Находим наклонные асимптоты:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x(x^3-1)}=1,$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{x(x^3-1)}=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_1x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4-x^4+x}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3-1}=0,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^3-1}=0.$$

Таким образом, прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика функции как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

6. У производной

$$f'(x) = \frac{4x^3 \cdot (x^3 - 1) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{4x^6 - 4x^3 - 3x^6}{(x^3 - 1)^2} = \frac{x^6 - 4x^3}{(x^3 - 1)^2} =$$

$$= \frac{x^3(x^3 - 4)}{(x^3 - 1)^2} = \frac{x^3(x - \sqrt[3]{4})(x^2 + \sqrt[3]{4} \cdot x + (\sqrt[3]{4})^2)}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)^2}$$

знаменатель всегда положителен, и поэтому знак производной определяется знаком числителя. Следовательно, при $x < 0$ $f'(x) > 0$, при $0 < x < 1$ и $1 < x < \sqrt[3]{4}$ $f'(x) < 0$ и при $x > \sqrt[3]{4}$ $f'(x) > 0$, из чего следует, что $f(x)$ при $x < 0$ и $x > \sqrt[3]{4}$ возрастающая, а при $0 < x < 1$ и $1 < x < \sqrt[3]{4}$ убывающая. Кроме того, $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = \sqrt[3]{4}$ и, так как при переходе через точку $x = 0$ производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x = \sqrt[3]{4}$ с минуса на плюс, то в точке $x = 0$ максимум, а в точке $x = \sqrt[3]{4}$ минимум.

7. Находим вторую производную нашей функции

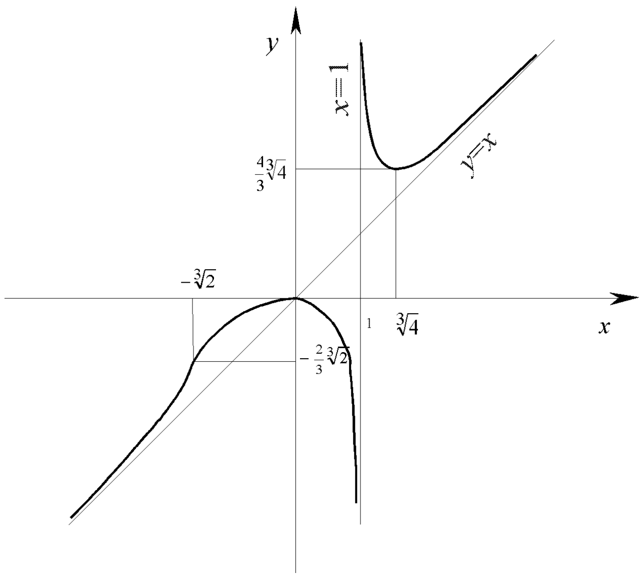
$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{x^6 - 4x^3}{(x^3 - 1)^2} \right)' =$$

$$= \frac{(6x^5 - 12x^2) \cdot (x^3 - 1)^2 - 2(x^3 - 1) \cdot 3x^2 \cdot (x^6 - 4x^3)}{(x^3 - 1)^4} =$$

$$= \frac{6x^2((x^3 - 2) \cdot (x^3 - 1) - x^6 + 4x^3)}{(x^3 - 1)^3} =$$

$$= \frac{6x^2(x^6 - 2x^3 - x^3 + 2 - x^6 + 4x^3)}{(x^3 - 1)^3} = \frac{6x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3}.$$

Отсюда видим, что вторая производная обращается в нуль при $x=0$ и при $x=-\sqrt[3]{2}$. Кроме того, при $x<-\sqrt[3]{2}$ $f''(x)>0$, при



$-\sqrt[3]{2}<x<1$ $f''(x)<0$ и при $x>1$ $f''(x)>0$. Следовательно, при $x<-\sqrt[3]{2}$ и $x>1$ $f(x)$ выпукла, а при $-\sqrt[3]{2}<x<1$ $f(x)$ вогнута и точка $x=-\sqrt[3]{2}$ является точкой перегиба. Суммируя вышесказанное и вычисляя значения функции в точках $x=-\sqrt[3]{2}$, $x=0$, $x=\sqrt[3]{4}$, строим график функции, изображенный на рисунке.

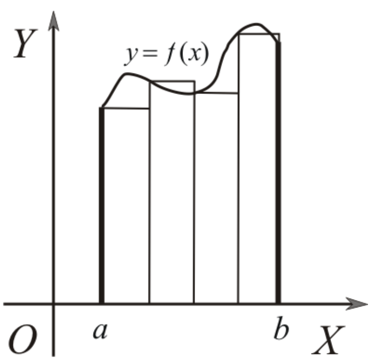
4. Интегральное исчисление функций одной переменной

4.1. Определённый интеграл

4.1.1. Определение, свойства, существование

Математика долгое время была сугубо прикладной наукой. Многие её разделы зародились из решения практических задач. Ещё древние греки решали задачи о вычислении площадей плоских фигур и объёмов сложных тел.

Задача о вычислении площади плоской фигуры. Пусть требуется найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, прямыми $x=a, x=b$ и кривой $y=f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ неотрицательна на $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a=x_0<x_1<...<x_n=b$. Пусть m_i – наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, а M_i – наибольшее значение функции $f(x)$ на том же отрезке. Заменим площадь трапеции между точками x_i, x_{i+1} площадью $m_i\Delta x_i$ прямоугольника с высотой m_i. Это площадь с недостатком. Тогда $\underline{\sigma}_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i$ – приблизительная площадь исходной трапеции с недостатком. Аналогично $\overline{\sigma}_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i$ – приблизительная площадь исходной трапеции с избытком. Площадь S исходной криволинейной трапеции находится между этими значениями. Мы также можем заменить площадь трапеции между точками x_i, x_{i+1} площадью $f(\xi_i)\Delta x_i$ прямоугольника



с высотой $f(\xi_i)$, где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ – некоторая фиксированная точка. Сумма $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ также будет давать приблизительную площадь исходной трапеции и будет находиться между суммами $\underline{\sigma}_n$ и $\overline{\sigma}_n$. Интуитивно ясно, что, переходя во всех трёх суммах к пределу по всевозможным разбиениям, при условии, что максимальная длина $\max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$ отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ стремится к нулю, получаем некоторую величину, которую и принимают за площадь исходной криволинейной трапеции.

Подобная идея суммирования и предельного перехода используется и при решении некоторых физических задач.

Задача о вычислении пути. Пусть тело движется со скоростью $V = f(t)$, $t \in [T_1, T_2]$. Разобьём отрезок времени $[T_1, T_2]$ на части точками $T_1 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T_2$. Пусть далее $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, i = 0,1,..., n-1$. За время Δt_i тело пройдёт путь $f(\tau_i)\Delta t_i$, где τ_i – некоторый момент времени между моментами t_i и $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$. Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу по всевозможным разбиениям, получаем путь, пройденный телом за время от момента T_0 до момента T_1.

Задача о вычислении количества электричества. Пусть по проводнику течёт ток с силой тока $I(t)$ и $I(t) \ge 0$ для всех $t \in [T_1, T_2]$. Разобьём отрезок времени $[T_1, T_2]$ на части точками $T_1 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T_2$. Пусть далее $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0,1,..., n-1$. Тогда количество электричества, протекшее по проводнику за время Δt_i, равно $\Delta Q_i = I(\tau_i)\Delta t_i$, где τ_i – некоторый момент времени между моментами t_i и $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$. Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу по всевозможным разбиениям, при условии, что $\max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta t_i$ стремится к нулю, получаем количество электричества, протекшего по проводнику за время от момента T_1 до момента T_2. Если сила тока

$I(t)$ меняет знак за отрезок времени от T_1 до T_2, то получаем разность между количеством электричества, протёкшим по проводнику в ту и другую сторону.

Задача о вычислении работы силы при прямолинейном движении материальной точки. Пусть $f(x)$ – переменная сила, направленная параллельно отрезку $[a,b]$, под действием которой материальная точка движется по прямой от точки a к точке b. Разобьем отрезок $[a,b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Будем считать, что на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ сила постоянна и равна $f(\xi_i)$, где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ – некоторая фиксированная точка. Тогда работа по перемещению материальной точки из начала в конец отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ приблизительно равна $f(\xi_i)\Delta x_i$. Суммируя по всем участкам разбиения, получаем, что $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ приближённо есть работа по перемещению точки из начала в конец отрезка $[a,b]$. Работу по перемещению точки из начала в конец отрезка $[a,b]$ положим равной пределу по всевозможным разбиениям суммы $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ при условии, что $\max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$ стремится к нулю.

Подобные задачи и легли в основу рассмотренного далее понятия определённого интеграла.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$ ($-\infty < a \le b < \infty$). Разобьем отрезок $[a,b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, выберем внутри каждого элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ по точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ (если $b < a$, то разбиваем точками $a = x_0 > x_1 > ... > x_n = b$ и ξ_i выбираем из отрезка $[x_{i+1}, x_i]$) и составим сумму $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Предел сумм σ_n по всевозможным разбиениям, если этот предел существует, не зависит от способа разбиения, способа выбора точек ξ_i, при условии, что максимальная длина $\lambda = \max\limits_{0\le i\le n-1}|\Delta x_i| = \max\limits_{0\le i\le n-1}|x_{i+1} - x_i|$ отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ стремится к нулю, называется определенным интегралом (интегралом Римана) от функции $f(x)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, а сама функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману.

Строго говоря, функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ и $I = \int\limits_a^b f(x)dx$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[a,b]$, удовлетворяющего условию $\max\limits_{1\le i\le n}|\Delta x_i| < \delta$, и интегральных сумм σ_n, построенных с помощью этого разбиения, выполняется неравенство $|\sigma_n - I| < \varepsilon$.

Отметим некоторые свойства определенного интеграла при условии существования всех используемых ниже интегралов.

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$ Следует из определения, так как все Δx_i меняют знак.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$ Действительно, если $c \in [a,b]$, то, включив c в число точек разбиения, получаем требуемое. Если $c \notin [a,b]$, то при $b < c$ применяем только что доказанное к отрезку $[a,c]$ и пользуемся свойством 1. При $c < a$ аналогично.

3. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$

4. $\int\limits_a^b k\, f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$

5. Если $f(x)\geq 0$ на $[a,b]$ и $a\leq b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

6. Если $f(x)\leq g(x)$ на $[a,b]$ и $a\leq b$, то

$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.

7. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx\ (a\leq b).$

8. Если $m\leq f(x)\leq M$ и $a\leq b$, то

$m(b-a)\leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$

9. (**Первая теорема о среднем**). $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a),$ где

μ - некоторое число, $m\leq \mu \leq M$.

Свойства 3 - 9 следуют из определения, так как все записанные в них соотношения справедливы для любых интегральных сумм и сохраняются при переходе к пределу.

10. (**Вторая теорема о среднем**). Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует точка c из $[a,b]$ такая, что

$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$

Действительно, так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме о промежуточных значениях существует точка c из $[a,b]$ такая, что $f(c)=\mu$, что в силу свойства 9 влечёт требуемое.

Приведём условия интегрируемости функции $f(x)$.

Теорема 4.1. Всякая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на этом отрезке.

Доказательство. (Не обязательный материал, для справки). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и ξ_i, η_i - точки наименьшего и наибольшего значений этой функции на каждом из отрезков $[x_i,\, x_{i+1}]$, которые достигаются согласно второй теореме Вейерштрасса. Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то, согласно теореме Римана [5, 6], она равномерно непрерывна, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, y, удовлетворяющих условию $|x-y| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Пусть теперь разбиение отрезка $[a,b]$ таково, что $\max\limits_{1\le i\le n}|x_{i+1} - x_i| < \delta$. Тогда, по только что сказанному, $f(\eta_i) - f(\xi_i) < \varepsilon$ для любого $i = 1, 2, ..., n$ (знак модуля опущен, так как разность $f(\eta_i) - f(\xi_i)$ неотрицательна). Поэтому

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(\eta_i) - f(\xi_i))\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}\varepsilon\Delta x_i =$$

$\varepsilon\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon(b-a)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$ и, по предыдущей теореме, функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$.

Следствие 4.2. Функция $f(x)$, имеющая на отрезке $[a,b]$ конечное число точек разрыва первого рода, интегрируема по Риману.

Доказательство. Разбиваем отрезок $[a,b]$ на участки непрерывности. На каждом из них функция интегрируема. По свойству 2 аддитивности интеграла получаем требуемое.

Теорема 4.3. Всякая монотонная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на этом отрезке.

Примем эту теорему без доказательства.

Доказательство существования интеграла Римана для других классов функций требует введения новых понятий и дополнительных рассмотрений. Желающие могут ознакомиться с этим в [5, 6].

Примером функции, для которой не существует интеграл Римана, служит функция Дирихле

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x-\text{рациональн ое число},\\ 0, & \text{если } x-\text{иррационал ьное число}.\end{cases}$$

Действительно, если при любом разбиении отрезка $[a,b]$ точки ξ_i выберем рациональными, то интегральная сумма будет равна длине отрезка интегрирования, а если точки ξ_i выберем иррациональными, то интегральная сумма будет равна нулю. Отсюда следует, что предел интегральных сумм зависит от выбора точек ξ_i и поэтому интеграл Римана от функции $D(x)$ не существует.

4.1.2. Интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница

Совершенно ясно, что вычислять пределы сумм, полученных в определении интеграла Римана, достаточно сложно и утомительно. Нужен метод, позволяющий обойти возникающие сложности. Этот метод был найден Ньютоном и Лейбницем и связан с решением задачи, обратной задаче дифференцирования, к решению которой мы приступаем.

Рассмотрим функцию $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$. Эту функцию называют: интеграл как функция верхнего предела. Отметим несколько свойств этой функции.

Теорема 4.4. Если $f(x)$ интегрируемая на $[a,b]$ функция, то $\Phi(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство. По свойству 9 определенного интеграла (теорема о среднем) имеем $\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int\limits_x^{x+h} f(t)dt=\mu h$, откуда при $h\to 0$ получаем требуемое.

Теорема 4.5. Если $f(x)$ непрерывная на $[a,b]$ функция, то функция $\Phi(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и $\Phi'(x)=f(x)$.

Доказательство. По свойству 10 определенного интеграла (вторая теорема о среднем) имеем $\dfrac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=f(c)$, где c – некоторая точка отрезка $[x,x+h]$. В силу непрерывности функции f получаем

$$\Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}f(c)=f(x).$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Функция $F(x)$, производная $F'(x)$ которой совпадает с функцией $f(x)$, называется первообразной для $f(x)$.

Задача нахождения первообразной решается неоднозначно в том смысле, что у одной и той же функции существует много первообразных. Непосредственным вычислением проверяется, что функции $2\sin^2 x$, $-\cos 2x$, $-2\cos^2 x$ являются первообразными для функции $2\sin 2x$. Этот факт не случаен. Оказывается, что первообразные одной и той же функции отличаются одна от другой на константу. Для указанных выше функций это подтверждается школьными формулами тригонометрии, а в общем случае будет доказано позже при изучении неопределённого интеграла. Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом от этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом, $\Phi(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$. Ниже мы докажем, что две первообразных одной и той же функции связаны соотношением $\Phi(x)=F(x)+C$, где $F(x)$ - другая первообразная $f(x)$. Далее, так как $\Phi(a)=0$, то $0=F(a)+C$, следовательно, $C=-F(a)$ и поэтому $\Phi(x)=F(x)-F(a)$. Полагая $x=b$, получаем формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)=F(b)-F(a).$$

Из формулы Ньютона-Лейбница следует, что для вычисления определённых интегралов мы можем применять весь набор приёмов и методов нахождения неопределённых интегралов.

Пример 1. $\int\limits_0^1 e^{x^2} x dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{e^1 - e^0}{2} = \frac{e-1}{2}.$

Пример 2.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x \cos x dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x d\sin x = \frac{\sin^4 x}{4}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}(\sin^4 \tfrac{\pi}{3} - \sin^4 \tfrac{\pi}{4}) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right) = \frac{5}{64}.$$

4.2. Неопределенный интеграл

4.2.1. Определение и свойства

В дифференциальном исчислении по данной функции находилась её производная. В этом разделе будем заниматься задачей, обратной к задаче нахождения производной.

*Определение***.** Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ (дифференциала $f(x)dx$) на отрезке $[a,b]$, если $F(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a,b]$ ($dF(x) = f(x)dx$).

Нетрудно видеть, что функция $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ является первообразной для функции $\cos^3 x$. Действительно,

$$\left(\sin x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x\right)' = \cos x - \sin^2 x \cos x = \cos x\left(1 - \sin^2 x\right) = \cos^3 x .$$

Аналогично доказывается, что $\sin 2x$ является первообразной для $2\cos 2x$.

Докажем несколько свойств первообразных.

Теорема 4.6. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то $F(x)+C$**,** где C - некоторая константа, также является первообразной для $f(x)$.

Доказательство. Действительно, $(F(x)+C)' = F'(x)+C' = f(x).$ Теорема доказана.

Теорема 4.7. Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ – две первообразные одной и той же функции, то их разность $F(x)-\Phi(x)$ есть константа.

Доказательство. Докажем вначале, что если для $\forall x\in[a,b]$ $\varphi'(x)=0$, то $\varphi(x)$ есть константа на $[a,b]$. Пусть x_1,x_2 - любые две точки из $[a,b]$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях, существует точка ξ из отрезка $[x_1,x_2]$ такая, что $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\varphi'(\xi)(x_2-x_1)$. Так как по условию $\varphi'(\xi)=0$, то $\varphi(x_2)=\varphi(x_1)$, и поэтому, в силу произвольности x_1,x_2, $\varphi(x)$ есть константа на $[a,b]$. Вычисляя производную, получаем $(F(x)-\Phi(x))'=F'(x)-\Phi'(x)= f(x)-f(x)=0$ для всех x из $[a,b]$, и, по доказанному выше, $F(x)-\Phi(x)$ есть константа. Теорема доказана.

Из теорем 4.6 и 4.7 получается важный результат.

Теорема 4.8. Любые две первообразные одной и той же функции связаны соотношением $\Phi(x)=F(x)+C.$

Теорема 4.8 позволяет ввести нижеследующий объект.

Определение. Множество всех первообразных функции $f(x)$ (дифференциала $f(x)dx$) называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.

Укажем несколько свойств неопределенного интеграла.

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

Действительно, если $F(x)$ - какая-либо первообразная функции $f(x)$, то $d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = F'(x)dx = f(x)dx$.

2. $\int dF(x) = F(x)+C$.

Доказывается аналогично.

3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.

Вычисляя дифференциал правой части, получаем $d\left(a\int f(x)dx\right) = ad\left(\int f(x)dx\right) = af(x)dx$. Последнее означает справедливость доказываемого свойства.

4. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Аналогично предыдущему, вычисляя дифференциал правой части, получаем $d\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right) = d\int f(x)dx \pm d\int g(x)dx = f(x)dx \pm g(x)dx =$
$= (f(x) \pm g(x))dx = d\left(\int (f(x) \pm g(x))dx\right)$. Свойство доказано.

Заметим, что свойства 3 и 4 означают линейность операции интегрирования.

5. $\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt$.

Так как по свойству инвариантности формы первого дифференциала $f(x)dx = f(x(t))x'(t)dt$, то, используя свойство1, получаем

$$d\int f(x)dx = f(x)dx = f(x(t))x'(t)dt = d\int f(x(t))x'(t)dt.$$

Утверждение доказано. Это свойство лежит в основе нахождения интеграла с помощью замены переменной.

Используя свойства 1-5 и свойства дифференциалов, сводят вычисление интегралов к так называемым табличным интегралам.

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = C$. 2. $\int 1dx = x + C$.

3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$. 4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + \tilde{C}$.

5а. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \tilde{C}$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \tilde{C}$.

6а. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + \tilde{C}$.

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$. 7а. $\int e^x dx = e^x + C$.

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$. 9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$. 11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$. 13. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$. 15. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

Иногда возникает необходимость вычисления интегралов $\int e^{ax}\cos bx dx$ и $\int e^{ax}\sin bx dx$ которые, соответственно, равны

16. $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$.

17. $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$.

Формулы 5а, 6а, 16, 17 будут доказаны позднее. Остальные обратны табличным производным и могут быть легко получены.

4.2.2. Приемы нахождения неопределенных интегралов

Вычисление неопределённых интегралов производится сведением исходных интегралов к табличным с помощью эквивалентных преобразований с использованием свойств неопределённых интегралов.

4.2.2.1. Подведение под знак дифференциала

Иногда удается представить подынтегральное выражение $f(x)dx$ в виде $\varphi(u)du$, где u - некоторая функция от x, то есть записать его в форме $f(x)dx = \varphi(u(x))du(x)$, и при этом интеграл $\int \varphi(u)du$ является табличным. Тогда если $\int \varphi(u)du = F(u) + C$, то по свойству 5 неопределённого интеграла $F(u(x)) + C = \int \varphi(u(x))du(x) = \int \varphi(u(x))u'(x)dx = \int f(x)dx$.

Этот прием называется подведением под знак дифференциала и представляет собой простейший вариант использования формулы замены переменной, выраженной свойством 5. Для овладения этим приёмом необходимы устойчивое (доведённое до автоматизма) знание таблиц производных и дифференциалов и умение ими пользоваться в обе стороны, то есть необходимо не только уметь вычислять по исходной функции производную и дифференциал, но и по дифференциалу увидеть исходную функцию. Нам также понадобится свойство дифференциала

$$\boxed{df(x) = \frac{1}{a}d(af(x)) = \frac{1}{a}d(af(x) + b)}.$$

Пример 1. $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$

С другой стороны,

$$\int \sin 2x dx = \int 2\sin x \cos x dx = \int 2\sin x d\sin x = \sin^2 x + C;$$

$$\int \sin 2x dx = \int 2\sin x \cos x dx = -\int 2\cos x d\cos x = -\cos^2 x + C.$$

Этот пример показывает, что у одной и той же функции может быть несколько разных первообразных, связанных между собой соотношением $\Phi(x) = F(x) + C$.

Займёмся более подробно указанным приёмом. Вначале приведём таблицу дифференциалов в необходимой нам форме.

Таблица основных дифференциалов

1. $dx=\frac{1}{a}d(ax)=\frac{1}{a}d(ax+b)$, где a и b - некоторые числа. В частности, $dx=\frac{1}{2}d(2x)=\frac{1}{2}d(2x+b)=\frac{1}{3}d(3x)=\frac{1}{3}d(3x+b)$ и так далее.

2. $x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}d(x^{\alpha+1})=\frac{1}{\alpha+1}d(x^{\alpha+1}+b), \alpha\neq-1$.

В частности, $xdx=\frac{1}{2}d(x^2)=\frac{1}{2}d(x^2+b)$,

$x^2dx=\frac{1}{3}d(x^3)=\frac{1}{3}d(x^3+b)$, $\frac{dx}{x^2}=-d\left(\frac{1}{x}\right)=-d\left(\frac{1}{x}+b\right)$,

$\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}+b\right)$,

$\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d\left(\sqrt{x}\right)=2d\left(\sqrt{x}+b\right)$.

3. $\frac{dx}{x}=d(\ln x)=d(\ln x+b)=\frac{1}{a}d(a\ln x+b)$.

4. $e^x dx=d(e^x)=d(e^x+b)$.

5. $\cos x dx=d\sin x=d(\sin x+b)$.

6. $\sin x dx=-d\cos x=-d(\cos x+b)$.

7. $\frac{dx}{\cos^2 x}=d\mathrm{tg}x=d(\mathrm{tg}x+b)$.

8. $\frac{dx}{\sin^2 x}=-d\mathrm{ctg}x=-d(\mathrm{ctg}x+b)$.

9. $\frac{dx}{1+x^2}=d(\mathrm{arctg}\,x)=-d(\mathrm{arcctg}\,x)$.

10. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d(\arcsin x)=-d(\arccos x)$.

Остальное читатель в состоянии восстановить самостоятельно из таблицы производных.

Покажем теперь применение вышесказанного для некоторых интегралов с указанием табличных, к которым они сводятся.

Интегралы $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$

Пример 2. $\int x \cdot \sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2}\,d(x^2) =$

$= \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2}\,d(x^2+1)$. В этом месте можно либо продолжить вычисления непосредственно и тогда получим

$$\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2}\,d(x^2+1) = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}} d(x^2+1) =$$

$$\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} : \frac{4}{3} + C = \frac{3}{8}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} + C,$$

либо сделать замену переменных $u = x^2 + 1$ и тогда $\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2}\,d(x^2+1) \;= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}} du = \frac{1}{2} u^{\frac{4}{3}} : \frac{4}{3} + C = \frac{3}{8}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} + C$.

Пример 3. $\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx = \int \sin^3 x\,d\sin x = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.

Пример 4. $\int \sin^3 5x \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \sin^3 5x\,d\sin 5x =$

$= \frac{\sin^4 5x}{5 \cdot 4} + C = \frac{\sin^4 5x}{20} + C$.

Пример 5. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \int \operatorname{arctg} x\,d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$.

Интегралы $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

Пример 6. $\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$

$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$. Знак модуля опущен в силу того, что $1 + x^2 \geq 1 > 0$ для $\forall\ x$ из R.

Пример 7. $\int \frac{x^3dx}{1+x^4}=\frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{1+x^4}=\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{1+x^4}=\frac{1}{4}\int \frac{d(1+x^4)}{1+x^4}=$
$=\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C$.

Пример 8. $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}=\int \frac{d(e^x)}{e^x+1}=\int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1}=\ln(e^x+1)+C$.

Пример 9. $\int \frac{\sin 3x}{1+\cos 3x}dx=-\frac{1}{3}\int \frac{d(\cos 3x)}{1+\cos 3x}=$
$=-\frac{1}{3}\int \frac{d(\cos 3x+1)}{1+\cos 3x}=-\frac{1}{3}\ln(1+\cos 3x)+C$.

Пример 10. $\int \frac{\cos 5x}{1+\sin 5x}dx=\frac{1}{5}\int \frac{d(\sin 5x)}{1+\sin 5x}=$
$=\frac{1}{5}\ln(1+\sin 5x)+C$.

Интегралы $\int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x+C=-\operatorname{arcctg} x+\tilde{C}$.

Пример 11.

$$\int \frac{x^3dx}{1+x^8}=\frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{1+(x^4)^2}=\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{1+(x^4)^2}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4)+C.$$

Пример 12.

$$\int \frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C.$$

Пример 13. $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}=\int \frac{dx}{x^2+6x+9+1}=$
$=\int \frac{dx}{(x+3)^2+1}=\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1}=\operatorname{arctg}(x+3)+C$.

Пример 14.

$$\int \frac{x^5}{1+x^{12}}dx=\frac{1}{6}\int \frac{dx^6}{1+x^{12}}=\frac{1}{6}\int \frac{dx^6}{1+(x^6)^2}=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(x^6)+C.$$

Пример 15. $\int \frac{x^4}{1+x^{10}}dx = \frac{1}{5}\int \frac{dx^5}{1+x^{10}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx^5}{1+(x^5)^2} =$

$= \frac{1}{5}\operatorname{arctg}(x^5) + C$.

Пример 16. $\int \frac{e^{5x}dx}{e^{10x}+1} = \frac{1}{5}\int \frac{d(e^{5x})}{1+(e^{5x})^2} = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}(e^{5x}) + C$.

Пример 17. $\int \frac{e^{4x}dx}{e^{8x}+1} = \frac{1}{4}\int \frac{d(e^{4x})}{1+(e^{4x})^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(e^{4x}) + C$.

Пример 18. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x} =$

$= -\operatorname{arctg}(\cos x) + C$.

Для интеграла $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ имеем $\int \frac{dx}{a^2+x^2} =$

$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$. Таким образом, нами доказана формула 5а таблицы интегралов. Часть из приведённых выше примеров можно решить используя эту формулу.

Интегралы $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \tilde{C}$

Пример 19. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{\sqrt{1-(x^4)^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{\sqrt{1-(x^4)^2}} =$

$= \frac{1}{4}\arcsin(x^4) + C$.

Пример 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} =$

$= \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$.

Пример 21. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-6x-8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+6x+8)}} =$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+6x+9-1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x^2+6x+9)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+3)^2}} =$$

$$= \int \frac{d(x+3)}{\sqrt{1-(x+3)^2}} = \arcsin(x+3) + C.$$

Пример 22. $\int \frac{e^{5x}dx}{\sqrt{1-e^{10x}}} = \frac{1}{5}\int \frac{d(e^{5x})}{\sqrt{1-(e^{5x})^2}} = \frac{1}{5}\arcsin(e^{5x}) + C$.

Пример 23. $\int \frac{e^{4x}dx}{\sqrt{1-e^{8x}}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(e^{4x})}{\sqrt{1-(e^{4x})^2}} = \frac{1}{4}\arcsin(e^{4x}) + C$.

Пример 24. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 x}{4}}} =$

$$= -\arcsin\left(\frac{\cos x}{2}\right) + C.$$

Для интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ имеем $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$

$= \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$. Таким образом нами доказана формула 6а таблицы интегралов. Часть из приведённых выше примеров можно решить используя эту формулу.

Интегралы $\int e^x dx = e^x + C$

Пример 25. $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$.

Пример 26. $\int x^3 e^{2x^4+1}dx = \frac{1}{8}\int e^{2x^4+1}d(2x^4) =$

$= \frac{1}{8}\int e^{2x^4+1}d(2x^4+1) = \frac{1}{8}e^{2x^4+1} + C$.

Пример 27. $\int e^{3\sin 2x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{6}\int e^{3\sin 2x}d(3\sin 2x) =$

$= \frac{1}{6}e^{3\sin 2x} + C$.

Пример 28. $\int \frac{e^{2\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2\mathrm{tg}x}d(2\mathrm{tg}x) = \frac{1}{2}e^{2\mathrm{tg}x} + C$.

Интегралы $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

Пример 29. $\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d2x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Пример 30. $\int x\cos(x^2+3)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2+3)\,d(x^2+3) =$

$= \frac{1}{2}\sin(x^2+3) + C$.

Интегралы $\int f\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\cdot\frac{dx}{x^{\alpha+1}} = -\frac{1}{\alpha}\int f\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\cdot d\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

Пример 31. $\int \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2} = -\int \cos\frac{1}{x}\cdot d\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + C$.

Пример 32. $\int e^{1/x^2}\cdot\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\int e^{1/x^2}d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}e^{1/x^2} + C$.

Пример 33. $\int \sin\frac{1}{x^3}\cdot\frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3}\int \sin\frac{1}{x^3}d\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{3}\cos\frac{1}{x^3} + C$.

4.2.2.2. Интегрирование по частям

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда, вычисляя дифференциал произведения функций $U(x)$ и $V(x)$, получаем $d(U(x)V(x)) = U(x)dV(x) + V(x)dU(x)$. Поэтому можем записать $U(x)dV(x) = \ d(U(x)V(x)) - V(x)dU(x)$. Вычисляя интеграл от обеих частей последнего равенства с учетом того, что $\int d(U(x)V(x)) = U(x)V(x)+C$, получаем соотношение

$$\int U(x)dV(x) = UV - \int V(x)dU(x) \ ,$$

называемое формулой интегрирования по частям. Понимают его в том смысле, что множество первообразных, стоящее в левой части, совпадает со множеством первообразных, получаемых по правой части.

Интегрирование по частям в определённом интеграле

В определенном интеграле сохраняется формула интегрирования по частям. В этом случае она приобретает вид

$$\boxed{\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU.}$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$. Полагаем $U = x^2$, $dV = xe^{x^2} dx$. Тогда $dU = 2xdx,\ V = \frac{1}{2}e^{x^2}$ и

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{2}(e-0-e+1) = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int xe^x dx.$

Положим $U = x,\ dV = e^x dx.$ Тогда $dU = dx$, $\int dV = \int e^x dx = e^x + C$, и в качестве V можем взять $V = e^x$. Поэтому $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int x\cos xdx$.

Полагаем $U = x,\ dV = \cos xdx.$ Тогда $dU = dx$, $\int dV = \int \cos xdx = \sin x + C$, и в качестве V можем взять $V = \sin x$. Следовательно, $\int x\cos xdx = x\sin x - \int \sin xdx =$

$= x\sin x + \cos x + C$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int x\cos 5x dx$.

Полагаем $U = x,\ dV = \cos 5x dx.$ Тогда $dU = dx$, $\int dV = \int \cos 5x dx = \ = \frac{1}{5}\sin 5x + C$, и в качестве V можем взять $V = \frac{1}{5}\sin 5x$, поэтому можем написать $\int x\cos 5x dx = \frac{1}{5}x\sin 5x - \frac{1}{5}\int \sin 5x dx = \frac{1}{5}x\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$.

При использовании формулы интегрирования по частям нужно удачно выбрать U и dV так, чтобы интеграл, полученный в правой части формулы, находился легче. Приведём пример неудачного выбора U и dV. Положим в первом примере $U = e^x, dV = xdx.$ Тогда $dU = e^x dx, V = \frac{x^2}{2}$ и $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx$. Вряд ли интеграл $\int x^2 e^x dx$ можно считать проще исходного. Основные рекомендации здесь такие.

Если подынтегральная функция есть произведение полинома (многочлена) на экспоненту ($e^x = \exp(x)$***) или тригонометрическую функцию, то обычно в качестве*** $U(x)$ ***выбирают полином, а всё остальное относят к*** $dV(x)$**.**

Заметим, что иногда требуется применить формулу интегрирования по частям несколько раз, например, при вычислении интеграла $\int x^2 e^{3x} dx$. Полагаем $U = x^2,\ dV = e^{3x}dx.$ Тогда $dU = 2xdx,\ V = \frac{1}{3}e^{3x}$ и $\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{1}{3}\int 2xe^{3x} dx$. Для вычисления второго слагаемого снова применяем формулу интегрирования по частям, полагая $U = x,\ dV = e^{3x}dx.$ Тогда $dU = dx$,

$V=\frac{1}{3}e^{3x}$, и поэтому $\int xe^{3x}dx=\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}xe^{3x}-$ $-\frac{1}{9}e^{3x}+C$. Таким образом, $\int x^2e^{3x}dx=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+$ $+\frac{2}{27}e^{3x}+C$.

Интеграл $\int x^2\sin x dx.$ предлагается найти самостоятельно.

Приведём ещё несколько примеров на применение формулы интегрирования по частям.

Пример 5. Вычислить $\int x\,\mathrm{tg}^2 6x\,dx$.

Полагаем $U=x,\ dV=\mathrm{tg}^2 6x\,dx.$ Тогда $dU=dx$, $\int \mathrm{tg}^2 6x\,dx= \ =\int\frac{\sin^2 6x}{\cos^2 6x}dx=\int\frac{1-\cos^2 6x}{\cos^2 6x}dx=\frac{1}{6}\mathrm{tg}6x-x+C$, и в качестве V можем взять $\frac{1}{6}\mathrm{tg}6x-x$. Поэтому

$$\int x\,\mathrm{tg}^2 6x\,dx=\frac{1}{6}x\,\mathrm{tg}6x-x^2-\int\left(\frac{1}{6}\mathrm{tg}6x-x\right)dx=\frac{1}{6}x\,\mathrm{tg}6x-x^2+$$
$$+\frac{1}{36}\ln\left|\cos 6x\right|+\frac{x^2}{2}+C=\frac{1}{6}x\,\mathrm{tg}6x+\frac{1}{36}\ln\left|\cos 6x\right|-\frac{x^2}{2}+C.$$

Пример 6. Вычислить $\int \arcsin^2 x\,dx$.

Полагаем $U=\arcsin^2 x$, $dV=dx$. Тогда $dU=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ V=x$ и $\int \arcsin^2 x\,dx=x\arcsin^2 x-$ $-2\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx$. Для нахождения второго слагаемого снова применяем формулу интегрирования по частям, полагая $U=\arcsin x,\quad dV=\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Тогда $dU=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$ и в качестве V можно взять $V = -\sqrt{1-x^2}$. Таким образом, окончательно получаем

$$\int \arcsin^2 x\,dx = x\arcsin^2 x - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x\,dx =$$

$$= x\arcsin^2 x - 2\left(-\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) =$$

$$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C.$$

Пример 7. Вычислить $\int x \operatorname{arctg}^2 x\,dx$.

Полагаем $U = \operatorname{arctg}^2 x,\ dV = x\,dx$. Тогда $dU = \frac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$, $V = \frac{1}{2}x^2$ и $\int x\operatorname{arctg}^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg}^2 x - \int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x\,dx$. Полагая во втором слагаемом $U = \operatorname{arctg} x,\ dV = \frac{x^2}{1+x^2}dx$, имеем $dU = \frac{dx}{1+x^2}$, $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = x - \operatorname{arctg} x + C$, поэтому в качестве V можно взять $V = x - \operatorname{arctg} x$ и, следовательно,

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x\,dx = (x - \operatorname{arctg} x)\operatorname{arctg} x - \int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx =$$

$$= (x - \operatorname{arctg} x)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\int x\operatorname{arctg}^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}^2 x - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

.

Пример 8. Вычислить $\int \ln^2 x\,dx$.

Полагаем $U=\ln^2 x,\ dV=dx$. Тогда $dU=\frac{2\ln x}{x}dx,\ V=x$, и поэтому $\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx$. Применяя ко второму слагаемому формулу интегрирования по частям с $U=\ln x,\ dV=dx$, имеем $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$. Поэтому $\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$.

Пример 9. Вычислить $\int x\,\ln^2 x\,dx$.

Полагаем $U=\ln^2 x,\ dV=xdx$. Тогда $dU=\frac{2\ln x}{x}dx,\ V=\frac{1}{2}x^2$ и поэтому $\int x\,\ln^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x -$ $-\int x\ln x dx$. Применяя ко второму слагаемому формулу интегрирования по частям с $U=\ln x$, $dV=xdx$, имеем $\int x\,\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$. Поэтому

$$\int x\,\ln^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Пример 10. Вычислить $\int \ln(x^2+3)\,dx$.

Полагаем $U=\ln(x^2+3)$, $dV=dx$. Тогда $dU=\frac{2xdx}{x^2+3},\ V=x$ и поэтому $\int \ln(x^2+3)\,dx = x\ln(x^2+3) -$ $-2\int \frac{x^2}{x^2+3}dx = x\ln(x^2+3) - 2x + 2\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

Пример 11. Интеграл $\int \frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx$ вычисляется либо интегрированием по частям с $U=x^5,\ dV=\frac{x^4}{(1+x^5)^3}dx$, либо с помощью замены переменной $z=1+x^5$. В первом случае

$dU = 5x^4dx,\ V = -\dfrac{1}{10(1+x^5)^2}$, и поэтому $\displaystyle\int \frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx =$

$$= -\frac{x^5}{10(1+x^5)^2} + \int \frac{5x^4}{10(1+x^5)^2}dx = -\frac{x^5}{10(1+x^5)^2} - \frac{1}{10(1+x^5)} + C.$$

Во втором случае $dz = 5x^4dx,\ x^5 = z-1$, и поэтому

$$\int \frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx = \frac{1}{5}\int \frac{z-1}{z^3}dz = \frac{1}{5}\int \frac{1}{z^2}dz - \frac{1}{5}\int \frac{1}{z^3}dz =$$

$$-\frac{1}{5z} + \frac{1}{10z^2} + C = -\frac{1}{5(1+x^5)} + \frac{1}{10(1+x^5)^2} + C.$$

Приведём два примера применения формулы интегрирования по частям с далеко не очевидным итогом.

Пример 12. Вычислим интеграл $J = \int e^x \cos x\, dx$.

Положив $U = e^x$, $dV = \cos x\, dx$, получаем $J = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$.. Применив к интегралу в правой части формулу интегрирования по частям с $U = e^x$, $dV = \sin x\, dx$, имеем $J = e^x \sin x + e^x \cos x - J$. Разрешая последнее равенство относительно J, получаем

$$J = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C.$$

Таким образом нами, в частном случае $a = 1,\ b = 1$, доказана формула 16 из таблицы интегралов. Интеграл примера 11, равно как и интегралы $\int e^x \sin x\, dx$, $\int e^{ax} \cos bx\, dx$, $\int e^{ax} \sin bx\, dx$ называется циклическим. Циклические интегралы вычисляются по схеме примера 12. Предлагается вывести формулы для вычисления этих интегралов самостоятельно или ознакомиться с их получением, например, в [5, 6].

Пример 13. С помощью формулы интегрирования по частям найдём $J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$. Положив $U = \frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$, $dV = dx$, получаем

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \int \frac{2nx^2dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} +$$

$$+ \int \frac{2n(x^2 + a^2 - a^2)dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} -$$

$$-2na^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n\, J_n - 2na^2 J_{n+1}.$$

Из крайних частей последнего равенства, разрешая относительно J_{n+1}, получаем рекуррентную формулу

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} J_n + \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} \tag{4.1}$$

для вычисления интеграла J_{n+1} при любом n. Действительно, $J_1 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$. Тогда $J_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + C = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} +$ $+ \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + C$. Аналогично находятся $J_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}$, J_4 и так далее. По приведённой схеме эти интегралы получены в таблицах интегралов [27] и других.

4.2.2.3. Простейшие преобразования подынтегрального выражения

Рассмотрим некоторые преобразования подынтегрального выражения, применение которых позволяет иногда достаточно легко найти интеграл.

Выделение целой части

Суть приёма видна из примеров.

Пример 1. $\int \frac{x}{x+2}dx = \int \frac{x+2-2}{x+2}dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x+2} =$
$= x - 2\ln|x+2| + C$.

Пример 2. $\int \frac{x}{x+3}dx = \int \frac{x+3-3}{x+3}dx = \int dx - 3\int \frac{dx}{x+3} =$
$= x - 3\ln|x+3| + C$.

Пример 3. $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx = \int \frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx = \int dx - 4\int \frac{dx}{x^2+4} =$
$= x - 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$.

Пример 4. $\int \frac{x^2}{x^2+16}dx = \int \frac{x^2+16-16}{x^2+16}dx = \int dx - 16\int \frac{dx}{x^2+16} =$
$= x - 4\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C$.

Пример 5. $\int \frac{(x+2)^2}{x^2+4}dx = \int \frac{x^2+4+4x}{x^2+4}dx = \int dx + \int \frac{4xdx}{x^2+4} =$
$= \int dx + 2\int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = x + 2\ln(x^2+4) + C$.

Преобразование тригонометрического выражения

Наиболее часто применяется понижение степени с использованием формул

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

преобразование произведения в сумму по формулам

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

и некоторые другие.

Пример 6. $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

Пример 7. $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

Пример 8. $\int \cos 3x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 4x)dx =$

$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$.

Пример 9. $\int \cos 2x \sin 5x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 7x + \sin 3x)dx =$

$= -\frac{\cos 7x}{14} - \frac{\cos 3x}{6} + C$.

Пример 10. $\int \sin 2x \sin 6x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 8x)dx =$

$= \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$.

Пример 11. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx =$

$= -\operatorname{ctg}x - x + C$.

Выделение полного квадрата

Иногда удаётся получить табличный интеграл выделив в подынтегральной функции выражения вида $(ax+b)^2$, то есть полный квадрат двучлена $ax+b$. Покажем на примерах, как это делается.

Пример 12. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$.

Знаменатель дроби можем преобразовать следующим образом $x^2+4x+20 = (x^2+4x+4)+16 = (x+2)^2+4^2$. Сделав замену $x+2=t$, окончательно получаем $\int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \int \frac{dt}{t^2+4^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4} + C$.

Пример 13. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{18x-9x^2-5}}$.

Выражение под корнем можно преобразовать следующим образом $18x-9x^2-5=-9(x^2-2x+1)+9-5=4-9(x-1)^2$. Поэтому можем написать $\int \frac{dx}{\sqrt{18x-9x^2-5}}=\int \frac{dx}{\sqrt{4-9(x-1)^2}}=$

$=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3(x-1)}{2}+C$.

Пример 14. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}}$.

Аналогично предыдущим примерам можно написать $-x^2-2x=-(x^2+2x+1)+1=1-(x+1)^2$. Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}}=\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}}=\arcsin(x+1)+C.$$

Выделение дифференциала

Интегралы $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$ выделением в числителе дифференциала выражения x^2+px+q сводятся к интегралам $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$.

Пример 15. Вычислить интеграл $\int \frac{3x+3}{x^2+4x+20}dx$.

Производная знаменателя равна $2x+4$. Поэтому

$$\int \frac{3x+3}{x^2+4x+20}dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+20}dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+20}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+4x+20)}{x^2+4x+20}-\frac{3}{2}\int \frac{2}{x^2+4x+20}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+20)-\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4}+C.$$

(Интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$ найден ранее.)

Аналогично, интеграл $\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}$ выделением в числителе дифференциала подкоренного выражения сводится к интегралу $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}$. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 16. Вычислить интеграл $\int \frac{(4x+2)dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$.

Производная подкоренного выражения равна $-2(x+1)$. Поэтому

$$\int \frac{(4x+2)dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}} = -2\int \frac{(-2(x+1)-1)dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}} =$$

$$= -2\sqrt{1-(x+1)^2} + 2\arcsin(x+1) + C.$$

4.2.2.4. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью или рациональной функцией называется отношение двух полиномов (многочленов), то есть выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$*, где*

$$P(x) = \sum_{l=0}^{k} b_l x^l = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

и

$$Q(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ -}$$

полиномы (многочлены) степеней k *и* n *соответственно. Если степень полинома (многочлена) в числителе меньше степени полинома в знаменателе, то есть* $k < n$*, то такую рациональную дробь называют правильной.*

В дальнейшем будем считать, что $k < n$, так как в противном случае всегда можно представить числитель в виде $P(x) = Q(x)R(x) + S(x)$, где $R(x)$ и $S(x)$ - полиномы, называемые обычно, как и в случае действительных чисел, частным и остатком, причем степень полинома $S(x)$ меньше n. Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}, \tag{4.2}$$

а интеграл от полинома $R(x)$ мы вычислять умеем.

Покажем на примере, как можно получить разложение (4.2). Пусть $P(x)= x^7 + 3x^6 + 3x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2$, $Q(x) = x^3 + 3x^2 + x - 2$. Разделим полином $P(x)$ на полином $Q(x)$ так же, как мы делим вещественные числа. Имеем

$$
\begin{array}{l|l}
-\; x^7 + 3x^6 + 3x^5 \qquad - 3x^3 + 4x^2 + x - 2 & x^3 + 3x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2}
\quad \underline{x^7 + 3x^6 + x^5 - 2x^4} & x^4 + 2x^2 - 4x + 7 \\
\qquad -\; 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2 & \\
\qquad \quad \underline{2x^5 + 6x^4 + 2x^3 - 4x^2} & \\
\qquad \qquad -\; -4x^4 - 5x^3 + 8x^2 + x - 2 & \\
\qquad \qquad \quad \underline{-4x^4 - 12x^3 - 4x^2 + 8x} & \\
\qquad \qquad \qquad -\; 7x^3 + 12x^2 - 7x - 2 & \\
\qquad \qquad \qquad \quad \underline{7x^3 + 21x^2 + 7x - 14} & \\
\qquad \qquad \qquad \qquad -9x^2 - 14x + 12 &
\end{array}
$$

Таким образом, мы получили целую часть дроби (частное от деления полинома P на полином Q) $R(x)= x^4 + 2x^2 - 4x + 7$ и остаток $S(x) = -9x^2 - 14x + 12$ от этого деления. Поэтому можем записать

$$\frac{x^7 + 3x^6 + 3x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2}{x^3 + 3x^2 + x - 2} = x^4 + 2x^2 - 4x + 7 + \frac{-9x^2 - 14x + 12}{x^3 + 3x^2 + x - 2}$$

.

Простейшими рациональными дробями назовём дроби $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{(x-a)^n}$, $\frac{1}{x^2+a^2}$, $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $\frac{1}{x^2+px+q}$, $\frac{1}{(x^2+px+q)^n}$, $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$.

Рассмотрим интегрирование этих дробей. Интегралы $\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C$, $\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C,\ n\neq 1$, $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$ являются табличными, а интеграл $J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ может быть найден или по рекуррентной формуле (4.1) $J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}J_n$, полученной выше интегрированием J_n по частям, или с помощью таблиц [27]. Интегралы $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$ в случае, когда знаменатель имеет комплексные корни (дискриминант $D=p^2-4q<0$), сводятся с помощью выделения полного квадрата к интегралам $\int\frac{dt}{t^2+a^2}$, $\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ заменой $x+\frac{p}{2}=t$. Наконец, как это указывалось ранее, интегралы $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$ выделением в числителе дифференциала выражения x^2+px+q сводятся к интегралам $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$.

Таким образом, осталось научиться раскладывать правильные рациональные дроби на сумму простейших.

По основной теореме алгебры любой полином может быть разложен на простейшие множители, то есть представлен в виде $Q(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) = a_n\prod_{l=1}^{n}(x-x_l)$, где x_l – действительные или комплексные корни полинома $Q(x)$, повторенные столько раз, какова их кратность.

Пусть полином $Q(x)$ имеет n различных корней $x_1, x_2, ..., x_n$. Тогда правильная рациональная дробь может быть представлена в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \frac{A_n}{x-x_n}$, где $A_1, A_2, ..., A_n$ - числа, подлежащие определению. Если x_i - корень кратности α, то ему в разложении на простейшие дроби соответствует α слагаемых $\frac{A_1}{x-x_i} + \frac{A_2}{(x-x_i)^2} + ... + \frac{A_\alpha}{(x-x_i)^\alpha}$. Если x_j - комплексный корень кратности α полинома с действительными коэффициентами, то комплексно–сопряженное число $\overline{x_j}$ - тоже корень кратности α этого полинома. Чтобы не иметь дело с комплексными числами при интегрировании рациональных дробей, слагаемые в разложении правильной рациональной дроби, соответствующие парам комплексно сопряженных корней, объединяют и записывают одним слагаемым вида $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, если $x_j, \overline{x_j}$ – корни кратности один. Если $x_j, \overline{x_j}$ – корни кратности α, то им соответствует α слагаемых, и соответствующее разложение имеет вид

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + ... + \frac{M_\alpha x+N_\alpha}{(x^2+px+q)^\alpha}.$$

Таким образом, интегрирование правильных рациональных дробей свелось к интегрированию простейших дробей, рассмотренных выше.

Одним из способов нахождения коэффициентов A_j, M_j, N_j в разложении правильной рациональной дроби является следующий. Правую часть полученного разложения с неопределенными коэффициентами A_j, M_j, N_j приводят к общему знаменателю. Так как знаменатели правой и левой частей равны, то должны быть равны и числители, которые являются полиномами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (так как полиномы равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях x), получаем систему линейных уравнений для определения этих коэффициентов. Продемонстрируем изложенное на примерах.

Пример 1. Найти $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx$.

Корни знаменателя – $x_1 = -2$ кратности 1 и $x_2 = 1$ кратности 2. Поэтому $x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$, и подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2(x-1)(x+2) + A_3(x+2)}{x^3 - 3x + 2} =$$

$$= \frac{(A_1 + A_2)x^2 + (-2A_1 + A_2 + A_3)x + (A_1 - 2A_2 + 2A_3)}{x^3 - 3x + 2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ -2A_1 + A_2 + A_3 = -1, \\ A_1 - 2A_2 + 2A_3 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1 = \dfrac{7}{9}, A_2 = \dfrac{2}{9}, A_3 = \dfrac{1}{3}$.

Таким образом,

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx = \frac{7}{9} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{7}{9} \ln|x+2| + \frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + C.$$

Пример 2. Найти $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 2x - 2}{x^3 - 2x - 4} dx$.

Корни знаменателя – $x_1 = 2$ кратности 1 и два комплексных корня $x_{2,3} = -1 \pm i$. Поэтому $x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2 + 2x + 2)$, и подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{2x^2 + 2x - 2}{x^3 - 2x - 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 2}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{2x^2 + 2x - 2}{x^3 - 2x - 4} = \frac{A(x^2 + 2x + 2) + (Mx + N)(x-2)}{x^3 - 2x - 4} =$$

$$= \frac{(A + M)x^2 + (2A - 2M + N)x + (2A - 2N)}{x^3 - 2x - 4}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A + M = 2, \\ 2A - 2M + N = 2, \\ 2A - 2N = -2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A = 1, M = 1, N = 2$.

Таким образом,

$$\int \frac{2x^2+2x-2}{x^3-2x-4}dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{dx}{x-2} +$$

$$+\int \frac{x+1+1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1) + \mathrm{C}.$$

Пример 3. Найти $\int \frac{-14x^2+54x+43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2}dx$.

Корни знаменателя – $x_{1,2} = 5$ кратности 2 и пара комплексно – сопряжённых корней $x_{3,4} = -1 \pm i$ кратности 1. Поэтому подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{-14x^2+54x+43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{(x-5)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+2}.$$

Приводя к общему знаменателю и подобные, получаем

$$\frac{-14x^2+54x+43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2} = \frac{(A_1+M)x^3 + (-3A_1+A_2-10M+N)x^2}{(x^2+2x+2)(x-5)^2} +$$

$$+\frac{(-8A_1+2A_2+25M-10N)x + (-10A_1+2A_2+25N)}{(x^2+2x+2)(x-5)^2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A_1 + M = 0, \\ -3A_1 + A_2 - 10M + N = -14, \\ -8A_1 + 2A_2 + 25M - 10N = 54, \\ -10A_1 + 2A_2 + 25N = 43. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1 = -2, A_2 = -1, M = 2,\ N = 1$.

Таким образом,

$$\int \frac{-14x^2+54x+43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2}dx = -2\int \frac{dx}{x-5} - \int \frac{dx}{(x-5)^2} + \int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx =$$
$$= -2\ln|x-5| + \frac{1}{x-5} + \ln(x^2+2x+2) - \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{2x^3+6x^2+4}{(x^2+1)^2(x-1)}dx$.

Корни знаменателя – $x_1 = 1$ кратности 1 и два комплексных корня $x_{2,3,4,5} = \pm i$ кратности 2. Поэтому подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{2x^3+6x^2+4}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Дальнейшие вычисления предлагается проделать самостоятельно.

4.2.2.5. Интегрирование простейших иррациональностей и выражений, содержащих тригонометрические функции

Рациональной функцией переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ *назовём отношение двух полиномов от этих переменных, или, что то же самое, отношение двух линейных комбинаций всевозможных произведений целых степеней этих переменных.*

Пусть $R\left(x, \sqrt[r_1]{x}, \sqrt[r_2]{x}, ..., \sqrt[r_n]{x}\right)$ – рациональная функция от $x, \sqrt[r_1]{x}, \sqrt[r_2]{x}, ..., \sqrt[r_n]{x}$. Эта функция, а следовательно, и интеграл от неё, рационализируется подстановкой $x = t^r$, где r – наименьшее общее кратное чисел $r_1, r_2, ..., r_n$. Тогда $dx = rt^{r-1}dt$ и Тогда $dx = rt^{r-1}dt$ и, подставляя x и dx в подынтегральное выражение, получаем под интегралом рациональную функцию аргумента t. Аналогично, если подынтегральное выражение $R\left(x, \sqrt[r_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[r_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ..., \sqrt[r_n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ есть рациональная функция от $x, \sqrt[r_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[r_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ..., \sqrt[r_n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, то подынтегральная функция рационализируется подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^r$, где $r-$ наименьшее общее кратное чисел $r_1, r_2, ..., r_n$. Тогда $x = \frac{dt^r - b}{-ct^r + a}$. Подставляя в исходное выражение, получаем рациональную функцию от t.

Пример 1. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx.$

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 3 равно 6. Поэтому делаем замену $x = t^6$. Тогда $dx = 6t^5 dt$, и

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{t^6 - t^4} = 6\int \frac{t^4}{t^2 - 1} dt = 6\int \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt =$$

$$= 6\int (t^2 + 1) dt + 6\int \frac{dt}{t^2 - 1} = 6\int (t^2 + 1) dt + 3\int \frac{dt}{t - 1} - 3\int \frac{dt}{t + 1} =$$

$$= 2t^3 + 6t + 3\ln|t - 1| - 3\ln|t + 1| + C = 2t^3 + 6t + 3\ln\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1}\right| + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int \frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{\sqrt{x+2} - \sqrt[5]{(x+2)^8}} dx$.

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 5 равно 10. Поэтому делаем замену $x + 2 = t^{10}$. Тогда $dx = 10t^9 dt$, и

$$\int \frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{\sqrt{x+2} - \sqrt[5]{(x+2)^8}} dx = \int \frac{t^6 10t^9 dt}{t^5 - t^{16}} = 10\int \frac{t^{10}}{1 - t^{11}} dt =$$

$$= -\frac{10}{11} \ln\left|1 - t^{11}\right| + C = -\frac{10}{11} \ln\left|1 - (x+2)^{\frac{11}{10}}\right| + C.$$

Пример 3. $\int \frac{\sqrt[4]{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{(x-1)^3}}dx.$

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 4 равно 4. Поэтому делаем замену $x-1=t^4$. Тогда $dx=4t^3dt$, и

$$\int \frac{\sqrt[4]{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{(x-1)^3}}dx=\int \frac{(t+1)4t^3dt}{t^2+t^3}=$$

$$=4\int tdt=2t^2+C=2\sqrt{x-1}+C.$$

Для интегрирования рациональных функций вида $R(\sin x, \cos x)$ применяют подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, которая называется универсальной тригонометрической подстановкой. Тогда $x=2\operatorname{arctg}t, dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. К сожалению, универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к большим вычислениям. Поэтому по возможности пользуются следующими подстановками. Если $R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x)$, то делают замену $\cos x=t$, и тогда $\sin xdx=-dt.$ При $R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x)$ полагают $\sin x=t$, при этом $\cos xdx=dt,$ а в случае $R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x, \cos x)$ делают замену $\operatorname{tg}x=t$, при которой $x=\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}, \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ или замену $\operatorname{ctg}x=t$. Проиллюстрируем сказанное примерами.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx$.

Делаем замену $\cos x=t$. Тогда $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx=$

$$=-\int t^4(1-t^2)dt=\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^5 x}{5}+C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

Делая замену $\sin x = t$, получаем

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1-t^2)dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C =$$
$$= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx$.

Делаем замену $\mathrm{tg} x = t$. Подставляя, получаем

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^4(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t^4} =$$
$$= \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \mathrm{ctg} x + C.$$

Заметим, что в данном примере лучше было сделать замену $\mathrm{ctg} x = t$, так как эта подстановка быстрее приводит к цели. Действительно, тогда $dx = -\frac{dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и поэтому $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = -\int \frac{(1+t^2)^2 dt}{(1+t^2)} = -\int (1+t^2)dt = -\frac{t^3}{3} - t + C$ $= -\frac{t^3}{3} - t + C = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \mathrm{ctg} x + C$.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$.

Делаем замену $\sin x = t$. Тогда $\int \cos^3 x \sin^8 x dx =$ $\int t^8(1-t^2)dt = \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} dx$.

Делая замену $\sin x = t$, получаем

$$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{(1-t^2)dt}{1+t^2} = \int \frac{2-(t^2+1)}{1+t^2}dt =$$
$$2\operatorname{arctg} t - t + C = 2\operatorname{arctg}\sin x - \sin x + C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{1}{\cos^6 x}dx$.

Делаем замену $\operatorname{tg} x = t$. Подставляя, получаем

$$\int \frac{1}{\cos^6 x}dx = \int \frac{(1+t^2)^3 dt}{(1+t^2)} = \int (1+t^2)^2 dt =$$

$$= \int dt + \int 2t^2 dt + \int t^4 dt = t + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \operatorname{tg} x + \frac{2\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

Для интегрирования рациональных выражений вида $R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$ применяют замену $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$, выражений вида $R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)$ - подстановку $x = \frac{a}{\cos t}$ или $x = \frac{a}{\sin t}$, а для интегрирования выражений вида $R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$ применяют замену $x = a\operatorname{tg} t$ или $x = a\operatorname{ctg} t$. Можно в этих случаях пользоваться также заменами с гиперболическими функциями.

Пример 10. Для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ воспользуемся заменой $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t dt,$ $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\cos t$, и исходный интеграл равен интегралу $\int \frac{2\cos t dt}{4\sin^2 t \cdot 2\cos t}$. Тогда $\int \frac{2\cos t\, dt}{4\sin^2 t \cdot 2\cos t} = \int \frac{dt}{4\sin^2 t} = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg} t + C.$ Делая обратную замену

$t = \arcsin\frac{x}{2}$, получаем $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg}(\arcsin\frac{x}{2}) + C$. После преобразований получаем $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$.

Пример 11. Для вычисления интеграла $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ воспользуемся заменой $x = \operatorname{tg} t$. Тогда $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{\cos t}$, и исходный интеграл равен интегралу $\int\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$. Тогда $\int\frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C$. Делая обратную замену $t = \operatorname{arctg} x$, получаем $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sin(\operatorname{arctg} x)} + C$. После преобразований получаем $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$.

4.3. Задача интегрирования в конечном виде

В этой главе мы научились находить первообразные, а следовательно, и неопределённые интегралы для некоторых типов функций. В связи с этим совершенно естественным является вопрос о классе функций, для каждой из которых существует первообразная. Ответ на него даёт следующая теорема.

Теорема 4.9. Для любой непрерывной функции существует первообразная.

Обобщение понятия первообразной на функции, имеющие конечное число точек разрыва, даётся следующим образом.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ (дифференциала $f(x)dx$) на отрезке $[a,b]$, если $F(x)$ дифференцируема на $[a,b]$, за исключением конечного числа точек, и $F'(x)=f(x)$ во всех точках существования производной функции $F(x)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.10. Для любой функции, имеющей конечное число точек разрыва 1-го рода, существует первообразная, дифференцируемая во всех точках непрерывности подынтегральной функции.

Как известно, элементарными функциями называют степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрические и им обратные функции, а также полученные из перечисленных с помощью конечного числа их суперпозиций и конечного числа операций сложения, умножения, вычитания, деления и извлечения корня. При изучении производных мы видели, что производная элементарной функции снова есть элементарная функция. Для первообразной это не так. Не для каждой элементарной функции первообразная есть элементарная функция. Это даёт возможность введения новых, неэлементарных функций, с помощью операции интегрирования. Интегралы от функций, для которых первообразная не является элементарной функцией, называются неберущимися. Наиболее известными неэлементарными функциями являются $\int e^{-x^2}dx$, $\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx = \mathrm{si}x + C$ - интегральный синус, $\int \frac{\cos x}{x}dx = \mathrm{ci}x + C$ - интегральный косинус, $\mathrm{li}x + C = \int \frac{dx}{\ln x} = \int \frac{e^y}{y}dy$ - интегральный логарифм.

4.4. Замена переменных в определённом интеграле

Иногда возникает необходимость перейти в интеграле к новой переменной. Имеет место следующий результат.

Теорема 4.11. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ - дифференцируемое биективное (взаимно однозначное) отображение, такое, что $\varphi(\alpha)=a;\ \varphi(\beta)=b$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Доказательство. Докажем теорему в предположении, что функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема на отрезке $[\alpha,\beta]$.Это выполнено, например, когда функции $f(x)$ и $\varphi'(t)$ имеют конечное число точек разрыва первого рода (кусочно–непрерывны), так как в этом случае функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ также кусочно–непрерывна и, по следствию из теоремы 2.3, интегрируема. Разобьём отрезок $[\alpha,\beta]$ на части точками $t_0, t_1, \dots, t_n$. Этому разбиению отрезка $[\alpha,\beta]$ соответствует разбиение отрезка $[a,b]$ точками $x_i=\varphi(t_i)$. Так как $\varphi(t)$ дифференцируема, то, по теореме Лагранжа о конечных приращениях [3], $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i=\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$, где $\tau_i\in[t_i,t_{i+1}]$ - некоторая точка. Положим $\xi_i=\varphi(\tau_i)\in[x_i,x_{i+1}]$. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\,\varphi'(\tau_i)\Delta t_i\ .$$

В левой части этого равенства стоит интегральная сумма для интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, а справа - для интеграла $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Так как оба интеграла существуют, то, переходя в этом равенстве к пределу по всевозможным разбиениям, получаем справедливость утверждения теоремы.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^4 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$. Положим $x=t^2$. Тогда $\alpha=0, \beta=2$, $dx=2tdt$ и поэтому исходный интеграл равен

$$\int\limits_0^2 \frac{2t^3dt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{((t^3+1)-1)dt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{((t+1)(t^2-t+1)-1)dt}{1+t} =$$

$$= 2\int\limits_0^2 (t^2-t+1)dt - 2\int\limits_0^2 \frac{dt}{1+t} = 2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln(1+t)\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}+2-(\ln 3-\ln 1)\right) = \frac{16}{3}-2\ln 3.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_3^8 \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}}$. Положим $x+1=t^2$. Тогда $\alpha=2, \beta=3$, $dx=2tdt$ и поэтому

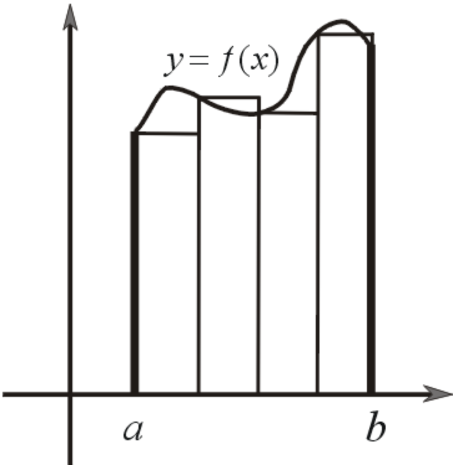
$$\int\limits_3^8 \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}} = 2\int\limits_2^3 \frac{tdt}{t+2} = 2\int\limits_2^3 \frac{t+2-2}{t+2}dt = 2\int\limits_2^3 dt - 4\int\limits_2^3 \frac{dt}{t+2} =$$

$$= 2t\Big|_2^3 - 4\ln(t+2)\Big|_2^3 = 2(3-2)-4(\ln 5-\ln 4) = 2-4\ln 1{,}25.$$

4.5. Приближённое вычисление определённого интеграла

Если первообразная является неэлементарной функцией или находится достаточно сложно, то использование формулы Ньютона-Лейбница для вычисления определённого интеграла затруднено. В этом случае определённый интеграл вычисляют приближённо, чаще всего численно. Получением некоторых формул для численного вычисления интеграла мы и займёмся.

Пусть непрерывная функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$. Так как интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует, то разобьём отрезок $[a,b]$ на n частей точками $x_i = a + ih, i = 0,1,..., n$, где $h = \dfrac{b-a}{n}$. Положив в интегральной сумме $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ последовательно $\xi_i = x_i$, $\xi_i = x_{i+1}$ и $\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$, получаем в результате формулы для приближённого вычисления интеграла



$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i),$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

называемые формулами прямоугольников.

Называются они так потому, что криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = 0, x = x_i, x = x_{i+1}, y = f(x)$, заменяется в первом случае прямоугольником, ограниченным линиями $y = 0, x = x_i, x = x_{i+1}$, $y = f(x_i)$, во втором случае прямоугольником, ограниченным линиями $y = 0, x = x_i, x = x_{i+1}$,

$y=f(x_{i+1})$, а в третьем случае прямоугольником, ограниченным линиями $y=0, x=x_i, x=x_{i+1},\ \ y=f\left(\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$.

Если криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y=0, x=x_i, x=x_{i+1}, y=f(x)$, заменить трапецией с вершинами в точках $(x_i,0), (x_{i+1},0), (x_i, f(x_i)), (x_i, f(x_{i+1}))$, то для приближённого вычисления интеграла получаем формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right),$$

называемую формулой трапеций.

Точность формул прямоугольников и формулы трапеций имеет порядок $\dfrac{1}{n^2}$.

4.6. Несобственные интегралы

Выше был определён интеграл для ограниченных и заданных на ограниченном отрезке функций. Распространим понятие интеграла на случаи, когда одно или оба этих условия нарушаются.

4.6.1. Несобственные интегралы первого рода

Рассмотрим вначале случай, когда функция задана на промежутке $[a,\infty)$. Так как понятие интеграла по конечному промежутку уже введено, то рассмотрим конечный отрезок $[a,A]$ входящий в полуинтервал $[a,\infty)$ и, соответственно, интеграл $\int_a^A f(x)dx$ по этому промежутку. Переходя к пределу, при стремлении A к бесконечности, получаем понятие несобственного интеграла по бесконечному промежутку (первого рода). Формализация этой идеи приводит к следующему определению.

Определение. Пусть $f(x)$ задана на бесконечном промежутке $[a,\infty)$ и для всякого $A \geq a$ существует интеграл

$\int\limits_a^A f(x)dx$. Предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$ называется несобственным интегралом первого рода (интегралом по неограниченному промежутку) и обозначается $\int\limits_a^\infty f(x)dx$. Если $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл первого рода называется сходящимся, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл первого рода называется расходящимся.

Пример 1. Рассмотрим $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$. Пусть $\alpha=1$. Тогда $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}=$ $=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_1^A \frac{dx}{x}=\lim\limits_{A\to\infty}\left(\ln x\Big|_1^A\right)=\lim\limits_{A\to\infty}(\ln A-\ln 1)=\infty$. Таким образом, рассмотренный интеграл при $\alpha=1$ расходится. Пусть теперь $\alpha\neq 1$. Тогда

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_1^A \frac{dx}{x^\alpha}=\lim\limits_{A\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^A=\begin{cases}\infty & \text{при}\,\alpha<1,\\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при}\,\alpha>1,\end{cases}$$

и мы окончательно получили, что рассматриваемый интеграл при $\alpha\le 1$ расходится и при $\alpha>1$ сходится. *Этот интеграл часто используется в признаке сравнения в качестве эталонного.*

Пример 2. Выясним сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2-2x+2}$.

Имеем $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2-2x+2}=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_1^A \frac{dx}{x^2-2x+2}=$

$$= \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \lim_{A\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(x-1)\Big|_1^A\right) = \lim_{A\to\infty}(\operatorname{arctg}(A-1) - \operatorname{arctg} 0) =$$

$= \dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\dfrac{\pi}{2}$.

Пример 3. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty xe^{-x^2}dx = \int\limits_1^\infty x\exp(-x^2)dx$.

По определению получаем

$$\int_1^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^A xe^{-x^2}dx = \lim_{A\to\infty}(-\frac{1}{2})\int_1^A e^{-x^2}d(-x^2) =$$

$$\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^A\right) = \frac{1}{2e} - \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}e^{-A^2} = \frac{1}{2e}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $0{,}5e^{-1}$.

Пример 4. Для интеграла $\int\limits_e^\infty \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ имеем

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to\infty}\int_e^A \frac{d\ln x}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to\infty} 2\sqrt{\ln x}\Big|_e^A = \lim_{A\to\infty}\left(2\sqrt{\ln A} - 2\right) = \infty$$

.

Следовательно, интеграл расходится.

Пример 5. Для интеграла $\int\limits_e^\infty \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$ по определению имеем

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{A\to\infty}\int_e^A \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_e^A = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln A}+1\right) = 1$$

.

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 1.

Пример 6. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}dx$, $\alpha > 0$.

По определению

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_0^A e^{-\alpha x}dx = \lim_{A\to\infty}(-\frac{1}{\alpha})\int\limits_0^A e^{-\alpha x}d(-\alpha x) =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^A\right) = \frac{1}{\alpha} - \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\alpha}e^{-A} = \frac{1}{\alpha}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\frac{1}{\alpha}$.

Нам в дальнейшем понадобится следующий важный результат.

Теорема 4.11. (Критерий Коши). Несобственный интеграл первого рода сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $A \geq a$ такое, что для всех $A_1, A_2 \geq A$ выполнено неравенство $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$

Доказательство этого результата опустим.

Определение. Несобственный интеграл первого рода $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx.$

Отметим, что если несобственный интеграл первого рода сходится абсолютно, то он сходится. Действительно, тогда для интеграла $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ выполнен критерий Коши, а в силу справедливости неравенства $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| \le \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx\right|$ критерий Коши выполнен и для интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx.$

Обратное утверждение неверно, точнее, если интеграл сходится, то он не обязан сходиться абсолютно.

Сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ определяется аналогично. Предлагается проделать это самостоятельно.

Для несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ можем записать $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ и назвать этот интеграл сходящимся, если сходятся оба слагаемых. Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то будем считать интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ расходящимся. В качестве точки a выбирают обычно 0.

Пример 7. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$. По определению сходимости этого интеграла получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2} = \lim_{A_1\to-\infty} \int\limits_{A_1}^{0} \frac{xdx}{1+x^2} + \lim_{A_2\to+\infty} \int\limits_{0}^{A_2} \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{A_1\to-\infty} \ln(x^2+1)\Big|_{A_1}^{0} + \frac{1}{2} \lim_{A_2\to+\infty} \ln(x^2+1)\Big|_{0}^{A_2}.$$

Так как оба слагаемых расходятся, то исходный интеграл расходится. Получаемая при этом неопределённость $\infty - \infty$ при разных скоростях стремления A_1 к $-\infty$ и A_2 к $+\infty$ даёт разные результаты. В частности, если $A_1 = -\sqrt{n^2-1}$, $A_2 = \sqrt{n-1}$, то

$$\frac{1}{2}\lim_{A_1\to-\infty}\ln(x^2+1)\Big|_{A_1}^{0}+\frac{1}{2}\lim_{A_2\to+\infty}\ln(x^2+1)\Big|_{0}^{A_2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(\ln n-2\ln n)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=-\infty .$$

Если $A_1=-\sqrt{n-1}$, $A_2=\sqrt{n^2-1}$, то абсолютно аналогично показывается, что этот предел равен $+\infty$. Подобрав скорости стремления A_1 к $-\infty$ и A_2 к $+\infty$, можно получить в пределе любое заранее заданное число от $-\infty$ до $+\infty$.

С другой стороны, при согласованном стремлении верхнего и нижнего пределов к ∞ можем записать

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{xdx}{1+x^2}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_{-A}^{A}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}(\ln(A^2+1)-\ln(A^2+1))=0.$$

Это дает возможность ввести новое понятие.

Определение. Говорят, что несобственный интеграл первого рода $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ сходится в смысле главного значения Коши, если существует и конечен предел $\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$.

В случае, если рассматривают сходимость интеграла в смысле главного значения Коши, то перед знаком интеграла добавляют буквы V.P., то есть пишут V.P. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ (V.P. – начальные буквы французских слов valeur principal переводящихся как «главное значение»).

Рассмотренный выше пример показывает, что несобственный интеграл первого рода $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ может сходиться в смысле главного значения Коши и расходиться в обычном смысле.

Отметим несколько свойств несобственных интегралов первого рода $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

1. Если интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, то для всякого $b \geq a$ интеграл $\int_b^{\infty} f(x)dx$ сходится и $\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx.$

2. Если интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int_a^{\infty} \alpha\, f(x)dx$ и имеет место равенство $\int_a^{\infty} \alpha\, f(x)dx = \alpha \int_a^{\infty} f(x)dx.$

3. Если интегралы $\int_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{\infty} g(x)dx$ сходятся, то сходятся интегралы $\int_a^{\infty} (f(x) \pm g(x))dx$ и имеет место равенство

$$\int_a^{\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^{\infty} f(x)dx \pm \int_a^{\infty} g(x)dx.$$

Обратное утверждение неверно, то есть, если интеграл от алгебраической суммы функций сходится, то интегралы от слагаемых сходиться не обязаны. Например, интегралы $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ и

$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x+1}$ расходятся, а интеграл $\int\limits_1^\infty \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$, как будет показано позднее, сходится.

Для других типов несобственных интегралов первого рода свойства аналогичны.

Сходимость не всех несобственных интегралов первого рода просто выяснить по определению. Поэтому часто используют так называемые признаки сравнения в непредельной и предельной формах.

Теорема 4.13. Пусть для всякого $x \ge A (A \ge a)$ выполнено неравенство $|f(x)| \le |g(x)|$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ абсолютно сходится, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ абсолютно сходится, а если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ абсолютно расходится, то интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ абсолютно расходится.

Доказательство. Действительно, в условиях теоремы для всех $A \ge a$ имеем $\int\limits_a^A |f(x)|dx \le \int\limits_a^A |g(x)|dx$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^\infty |g(x)|dx$ сходится, то $\int\limits_a^A |f(x)|dx$ есть монотонно возрастающая ограниченная сверху функция от A, и поэтому имеет предел при $A \to \infty$. Если интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ расходится, то $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A |f(x)|dx = \infty$, и поэтому $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A |g(x)|dx = \infty$.

Теорема 4.14. Если $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые в $+\infty$ одного порядка малости, то есть $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K\neq 0,\infty$, то интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ либо оба абсолютно сходятся, либо оба абсолютно расходятся.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|=|K|$. Возьмем $0<\varepsilon<|K|$. По определению предела существует $M>0$ такое, что для всех $x>M$ выполнено неравенство $|K|-\varepsilon<\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|<|K|+\varepsilon,$ а следовательно, и неравенство $|g(x)|\big(|K|-\varepsilon\big)<|f(x)|<\big(|K|+\varepsilon\big)|g(x)|$. Из последнего неравенства и теоремы 4.13 получаем утверждение теоремы.

Замечание. После изучения теоремы 4.14 может сложиться впечатление, что для сходимости несобственного интеграла первого рода, в том числе и абсолютной, необходимо, чтобы подынтегральная функция была бесконечно малой при $x\to\infty$. То, что это не так, показывает следующий пример [5, 6, 33].

Возьмем функцию, график которой состоит из отрезков прямых, соединяющих точки $\left(n-\dfrac{1}{2^n},0\right)$, $(n,1)$, $\left(n+\dfrac{1}{2^n},0\right)$,

$n=1,2,\ldots$. Ее аналитическое выражение имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 2^n x+1-n2^n, & x\in\left[n-\dfrac{1}{2^n},n\right],\\ -2^n x+1+n2^n, & x\in\left[n,n+\dfrac{1}{2^n}\right],\\ 0, & x\notin\left[n-\dfrac{1}{2^n},n+\dfrac{1}{2^n}\right].\end{cases}$$

Площадь, заключенная между графиком этой функции и осью OX, равна сумме площадей треугольников с вершинами в точках $\left(n-\dfrac{1}{2^n},0\right)$, $(n,1)$, $\left(n+\dfrac{1}{2^n},0\right)$, $n=1,2,\ldots$. Так как площадь каждого такого треугольника равна $\dfrac{1}{2^n}$, $n=1,2,\ldots$, то $\int\limits_1^\infty f(x)dx=\dfrac{1}{4}+\dfrac{0{,}25}{1-0{,}5}=\dfrac{3}{4}$. Заметим, что условие ограниченности функции $f(x)$ несущественно, так как вершины треугольников можно взять, например, в точках $\left(n-\dfrac{1}{n2^n},0\right)$, (n,n), $\left(n+\dfrac{1}{n2^n},0\right)$, $n=1,2,\ldots$.

Пример 8. Интегралы $\int\limits_\pi^\infty \dfrac{\sin x}{x^\alpha}dx$ и $\int\limits_\pi^\infty \dfrac{\cos x}{x^\alpha}dx$ сходятся абсолютно при любом $\alpha>1$. Действительно, $\left|\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\right|\le\dfrac{1}{x^\alpha}$, $\left|\dfrac{\cos x}{x^\alpha}\right|\le\dfrac{1}{x^\alpha}$ для всех $x>0$, а интеграл $\int\limits_\pi^\infty \dfrac{dx}{x^\alpha}$ – сходящийся, а так как $\dfrac{1}{x^\alpha}>0$ если $x>0$, то и абсолютно сходящийся при любом

$\alpha > 1$. Напомним, что если $f(x) \geq 0$, то понятия сходимости и абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ совпадают.

Покажем теперь, что при любом $0 < \alpha \leq 1$ интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx$ сходится, но не абсолютно. Действительно, $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx = \lim\limits_{A \to \infty} \int\limits_{\pi}^{A} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx$. Применим к стоящему справа интегралу формулу интегрирования по частям. Положим $U = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $dV = \sin x dx$. Тогда $dU = -\frac{\alpha\, dx}{x^{\alpha+1}}$, $\int dV = \int \sin x dx = -\cos x + C$ и можем положить $V = -\cos x$. Далее получаем

$$\lim_{A \to \infty} \int\limits_{\pi}^{A} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx = \lim_{A \to \infty} \left(-\frac{\cos x}{x^{\alpha}} \Bigg|_{\pi}^{A} - \int\limits_{\pi}^{A} \frac{\alpha \cos x}{x^{\alpha+1}} dx \right) =$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left(-\frac{\cos x}{x^{\alpha}} \Bigg|_{\pi}^{A} \right) - \lim_{A \to \infty} \left(\int\limits_{\pi}^{A} \frac{\alpha \cos x}{x^{\alpha+1}} dx \right).$$

Предел выражения справа существует, так как оба слагаемых имеют конечный предел. Действительно $\lim\limits_{A \to \infty} \left(-\frac{\cos x}{x} \Bigg|_{\pi}^{A} \right) = -\frac{1}{\pi}$, а так как интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx$ сходится абсолютно при $\alpha > 0$ (показано выше), то существует и конечен предел второго слагаемого. Поэтому существует предел выражения слева и, следовательно, интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx$ сходящийся. Аналогично показывается, что при любом $0 < \alpha \leq 1$ интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}} dx$ сходится. Покажем теперь, что при любом $0 < \alpha \leq 1$

интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ не является абсолютно сходящимся. Действительно, для всех вещественных чисел выполнено неравенство $\sin^2 x \le |\sin x|$. Следовательно, можем записать

$$\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx=\lim_{A\to\infty}\int\limits_{\pi}^{A}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx\ge\lim_{A\to\infty}\int\limits_{\pi}^{A}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}dx=\lim_{A\to\infty}\int\limits_{\pi}^{A}\frac{1-\cos 2x}{2x^{\alpha}}dx=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int\limits_{\pi}^{A}\frac{dx}{2x^{\alpha}}-\lim_{A\to\infty}\int\limits_{\pi}^{A}\frac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}dx.$$

Так как при $0<\alpha\le 1$ интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ расходящийся и $\frac{1}{x}>0$, то $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{\pi}^{A}\frac{dx}{2x^{\alpha}}=\infty$. Далее, интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}dx$ сходящийся, так как можем записать $\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}dx=2^{\alpha-2}\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(2x)^{\alpha}}d(2x)=2^{\alpha-2}\int\limits_{2\pi}^{\infty}\frac{\cos u}{u^{\alpha}}du$, а последний интеграл сходящийся. Следовательно, предел второго слагаемого конечен. Тогда $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{\pi}^{A}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx=\infty$ и поэтому $\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx$ расходится.

Заметим, что при $\alpha=1$ эти примеры рассмотрены в [5, 6] и [8].

Пример 9. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{2+\sin x}{x^2}dx.$

Так как $\left|\frac{2+\sin x}{x^2}\right|\le\frac{3}{x^2}$ для всех $x\ge 1,$ а интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{3}{x^2}dx$ сходится, то и исходный интеграл тоже сходится.

Пример 10. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$, получаем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha}}{x(x+1)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 2; \\ 1, & \text{если } \alpha = 2; \\ \infty, & \text{если } \alpha > 2. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен 2 и так как $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то исходный интеграл сходится.

Пример 11. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}} dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$ получаем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha}}{(x+1)\sqrt{x+2}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 1{,}5; \\ 1, & \text{если } \alpha = 1{,}5; \\ \infty, & \text{если } \alpha > 1{,}5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен 1,5 и так как $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1,5}}$ сходится, то исходный интеграл сходится.

Пример12. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x+2)\sqrt[3]{x+5}} dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{(x+2)\sqrt[3]{x+5}}=\begin{cases}0, & \text{если } \alpha<\frac{4}{3};\\ 1, & \text{если } \alpha=\frac{4}{3};\\ \infty, & \text{если } \alpha>\frac{4}{3}.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен $\frac{4}{3}$ и, следовательно, интеграл сходится.

Пример 13. Выяснить сходимость интеграла $\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+4}dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}\;x^{\alpha}}{x^2+4}=\begin{cases}0, & \text{если } \alpha<1{,}5;\\ 1, & \text{если } \alpha=1{,}5;\\ \infty, & \text{если } \alpha>1{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен 1,5 и, следовательно, интеграл сходится.

Пример 14. Выяснить сходимость интеграла $\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x^3+2}}{x^2+5}dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}\sqrt{x^3+2}}{x^2+5}=\begin{cases}0, & \text{если } \alpha<0{,}5;\\ 1, & \text{если } \alpha=0{,}5;\\ \infty, & \text{если } \alpha>0{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен 0,5 и, следовательно, интеграл расходится.

Пример 15. Интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} e^{-x^2}dx$ сходится, так как имеет место оценка $e^{-x^2} \le xe^{-x^2}$ для всех $x \ge 1$, а интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} xe^{-x^2}dx$, как было показано ранее, сходящийся.

Пример 16. Интеграл $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\ln x}}$ расходится, так как имеет место оценка $\frac{1}{\sqrt{\ln x}} \ge \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ для всех $x \ge e$, а интеграл $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, как было показано ранее, расходится.

4.6.2. Несобственные интегралы второго рода

Предположим теперь, что подынтегральная функция $f(x)$ неограничена на промежутке (a,b). Эта особенность может быть в точках a, b или во внутренней точке этого промежутка. Мы рассмотрим случай с особенностью в точке b, то есть в случае, когда функция $f(x)$ неограничена в некоторой окрестности точки b. При этом функцию будем считать заданной на полуинтервале $[a,b)$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)dx$ от функции $f(x)$ по несколько меньшему отрезку $[a,b-\delta]$, входящему в полуинтервал $[a,b)$. Устремляя в интеграле $\int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)dx$ верхний предел интегрирования к точке b, то есть при δ стремящемся к нулю, получаем понятие несобственного интеграла второго рода (интеграла от неограниченной функции). Формализация рассмотренной идеи приводит к следующему определению.

Определение. Пусть $f(x)$ задана на полуинтервале $[a,b)$ и неограничена вблизи точки b (в некоторой окрестности точки b). Пусть далее для всякого $0<\delta<b-a$ существует интеграл $\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx.$ Предел $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$ называется несобственным интегралом второго рода (интегралом от неограниченной функции) и обозначается $\int\limits_a^{b} f(x)dx.$ Если $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл второго рода называется сходящимся, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл второго рода называется расходящимся.

Аналогично определяются несобственные интегралы второго рода в случаях, когда подынтегральная функция неограниченна вблизи точки a, во внутренней точке отрезка $[a,b]$, вблизи точек a и b одновременно. Для удобства изложения мы рассматриваем случай особенности на верхнем пределе. Для остальных вариантов предлагается проделать это самостоятельно.

Пример 1. Рассмотрим $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Пусть $\alpha=1$. Тогда $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}=$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x}= =\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\ln x\Big|_\varepsilon^1\right)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln 1-\ln\varepsilon)=\infty.$ Таким образом, рассмотренный интеграл при $\alpha=1$ расходится. Пусть теперь $\alpha\neq 1.$ Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_\varepsilon^1=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при}\,\alpha<1,\\ \infty & \text{при}\,\alpha>1,\end{cases}$$

и мы окончательно получили, что рассматриваемый интеграл при $\alpha<1$ сходится и при $\alpha\geq 1$ расходится. Аналогичные выводы можно сделать про несобственные интегралы $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$.

Интегралы $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ *используются в признаке сравнения в качестве эталонных.*

Пример 2. В интеграле $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=1$, поэтому

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{1+\delta}^e \frac{d\ln x}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{\delta\to 0} 2\sqrt{\ln x}\Big|_{1+\delta}^e =$$
$$\lim_{\delta\to 0}\left(2\sqrt{\ln e} - 2\sqrt{\ln(1+\delta)}\right) = 2.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 2.

Пример 3. В интеграле $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точках $x=0$ и $x=1$, поэтому интеграл разбиваем на сумму двух, например, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} = \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} + \int\limits_{0,5}^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}}$. Для первого из них $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_\delta^{0,5} \frac{d\ln x}{\sqrt{-\ln x}} = -\lim_{\delta\to 0} 2\sqrt{-\ln x}\Big|_\delta^{0,5} =$ $\lim_{\delta\to 0}\left(-2\sqrt{-\ln 0{,}5} + 2\sqrt{-\ln\delta}\right) = -\infty$. Следовательно, интеграл расходится, и поэтому исходный интеграл также расходится.

Пример 4. В интеграле $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$, поэтому

$$\int\limits_0^{1/e}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\delta}^{1/e}\frac{d\ln x}{\ln^2 x}\qquad=\lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_{\delta}^{1/e}=\lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{\ln\frac{1}{e}}+\frac{1}{\ln\delta}\right)=1$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 1.

Пример 5. Выясним сходимость интеграла $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=1$. Поэтому $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_0^{1-\delta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{\delta\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\delta}=$

$=\lim\limits_{\delta\to 0}(\arcsin(1-\delta)-\arcsin 0)=\frac{\pi}{2}$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\frac{\pi}{2}$.

Пример 6. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=1$. По определению имеем $\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{1+\delta}^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{\delta\to 0}\left(2\sqrt{x-1}\Big|_{1+\delta}^2\right)2\sqrt{x-1})\Big|_{1+\delta}^2=2$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 2.

Пример 7. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt{2-x}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=2$. По определению имеем $\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_1^{2-\delta}\frac{dx}{\sqrt{2-x}}=-\lim\limits_{\delta\to 0}\left(2\sqrt{2-x}\right)\Big|_1^{2-\delta}=2$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 2.

Пример 8. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^3\frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=2$. Поэтому разбиваем интеграл на сумму двух $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$. Для первого из них имеем $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \lim_{\delta\to 0} \int_1^{2-\delta} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = -\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2-x)^2}\right)\Bigg|_1^{2-\delta} = \frac{3}{2}$. Аналогично доказывается сходимость второго слагаемого. Следовательно, исходный интеграл сходится.

Аналогично случаю несобственных интегралов первого рода формулируются и доказываются критерий Коши и признаки сравнения для несобственных интегралов второго рода.

Теорема 4.15. (Критерий Коши). Несобственный интеграл второго рода сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\delta_1, \delta_2 \le \delta$ выполняется неравенство $\left|\int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Доказательство этого результата опустим.

Теорема 4.16. Пусть для всякого $b-\delta \le x < b$ выполнено неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int_a^b g(x)dx$ расходится.

Доказательство аналогично случаю несобственного интеграла первого рода.

Теорема 4.17. Если $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно большие одного порядка роста, то есть $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0,\infty$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство аналогично случаю несобственного интеграла первого рода.

Замечание. После изучения теоремы 4.17 может сложиться впечатление, что для сходимости несобственного интеграла второго рода, в том числе и абсолютной, необходимо, чтобы подынтегральная функция была бесконечно большой при $x \to b$. То, что это не так, показывает следующий пример.

Пусть функция $f(x) \geq 0$, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность точек интервала (a,b), сходящаяся к точке b. Возьмем функцию $\varphi(x)$, график которой на отрезке $[a, x_1]$ совпадает с графиком функции $f(x)$, а на интервале (x_1, b) состоит из отрезков прямых, соединяющих точки $(x_{2k-1}, 0)$, $(x_{2k}, f(x_{2k}))$, $(x_{2k+1}, 0)$, $k = 1, 2, \ldots$. Функция $\varphi(x)$ не является бесконечно большой, так как $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x)$ не существует ($\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(x_{2k-1}) = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(x_{2k}) = \infty$). По теореме 4.16, интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ сходится, так как по построению $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$.

Пример 9. Для интеграла $\int\limits_2^3 \dfrac{dx}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt[3]{3-x^2}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точках $x = 2$ и $x = \pm\sqrt{3}$. Точки $x = \pm\sqrt{3}$ в промежуток интегрирования не входят. Поэтому, находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{x-2}$, имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^{\alpha}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt[3]{3-x^2}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<0{,}5;\\ -1, & \text{если } \alpha=0{,}5;\\ 0, & \text{если } \alpha>0{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 0,5, и интеграл сходится.

Пример 10. В интеграле $\int\limits_2^3\frac{dx}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{9-x^2}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точках $x=1$ и $x=\pm 3$. Точки $x=1$ и $x=-3$ в промежуток интегрирования не входят. Поэтому, находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{3-x}$, имеем

$$\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)^{\alpha}}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{9-x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)^{\alpha}}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{3-x}\cdot\sqrt[3]{3+x}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<\frac{1}{3};\\ \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{6}}, & \text{если } \alpha=\frac{1}{3};\\ 0, & \text{если } \alpha>\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $\frac{1}{3}$, и интеграл сходится.

Пример 11. Выясним сходимость интеграла $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{\sin x}}{x^2}dx$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$. Находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{x}$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin x}\cdot x^{\alpha}}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin x}\cdot x^{\alpha}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^{3}}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<1{,}5;\\ 1, & \text{если } \alpha=1{,}5;\\ 0, & \text{если } \alpha>1{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 1,5, и интеграл расходится.

Пример 12. В интеграле $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{x}dx$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$. Находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{x}$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\sin x}\cdot x^{\alpha}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\sin x}\cdot x^{\alpha}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^{2}}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<\frac{2}{3};\\ 1, & \text{если } \alpha=\frac{2}{3};\\ 0, & \text{если } \alpha>\frac{2}{3}.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $\frac{2}{3}$, и интеграл сходится.

Пример 13. Выясним сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)}{x}dx.$

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$. Находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{x}$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)\cdot x^{\alpha}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)\cdot x^{\alpha}}{\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^{4}}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<0{,}8;\\ 1, & \text{если } \alpha=0{,}8;\\ 0, & \text{если } \alpha>0{,}8.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $0{,}8$, и интеграл сходится.

Пример 14. В интеграле $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}dx$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$. Находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{x}$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)\cdot x^{\alpha}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)\cdot x^{\alpha}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<0{,}5;\\ 1, & \text{если } \alpha=0{,}5;\\ 0, & \text{если } \alpha>0{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $0{,}5$, и интеграл сходится.

Пример 15. Выяснить сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точках $x=0$ и $x=1$. Обе входят в промежуток интегрирования. Разбиваем интеграл на два

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}=\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}+\int_{0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}.$$

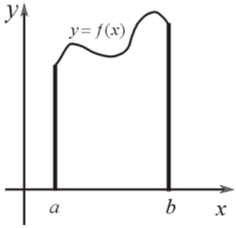
Первый из этих интегралов сходится, так как порядок роста подынтегральной функции при $x\to 0$ относительно $\frac{1}{x}$ равен $\frac{1}{2}$, а второй– расходится, так как порядок роста подынтегральной функции при $x\to 1$ относительно $\frac{1}{1-x}$ равен 1. Поэтому интеграл расходится.

4.7. Приложения определённого интеграла

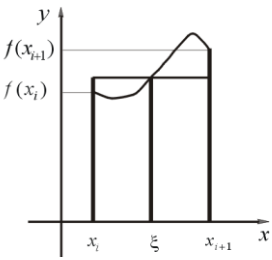
4.7.1. Вычисление площадей плоских фигур

Пусть $f(x)\geq 0$ для $\forall x\in[a,b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную кривыми $y=0, x=a, x=b$, $y=f(x)$. Разобьём отрезок $[a,b]$ на части точками

$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, выберем внутри каждого элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ по точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Заменим криволинейную



трапецию, ограниченную линиями $y = 0, x = x_i, x = x_{i+1}, y = f(x)$, прямоугольником $y = 0, x = x_i, x = x_{i+1}$, $y = f(\xi_i)$. Площадь этого прямоугольника равна $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)\Delta x_i$ и, если f - непрерывная функция, то при достаточно малом Δx_i близка площади заменяемой трапеции. Просуммировав, получим, с одной стороны, приближенное значение площади криволинейной трапеции, с другой



стороны, интегральную сумму $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ для интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Переходя к пределу при увеличении числа точек разбиения, получаем площадь S исходной криволинейной трапеции $S = \int_a^b f(x)dx$.

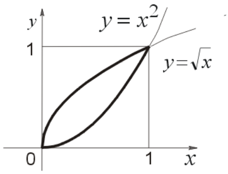
Назовём трапецию простейшей областью, если она ограничена кривыми $x = a, x = b, y = f_1(x), y = f_2(x)$ и для всех $x \in [a, b]$ выполнено неравенство $f_1(x) \le f_2(x)$. Нетрудно видеть, что для простейшей области $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

Аналогично, если $\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)$ для всех $y \in [c, d]$, то для криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = c, y = d$, $x = \varphi_1(y), x = \varphi_2(y)$ (простейшей области второго типа), имеем

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy .$$

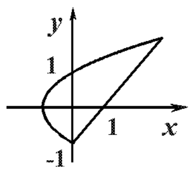
В общем случае плоскую область разбивают на простейшие области рассмотренных выше типов.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $x = y^2$. Эти кривые пересекаются в точках $A(0,0)$ и $B(1,1)$. Поэтому



$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x+1$ и $x - y - 1 = 0$. Эти кривые пересекаются в точках $A(0,-1)$ и $B(4,3)$. В данном случае лучше рассматривать простейшую область второго типа. Поэтому



$$S = \int_{-1}^{3}\left(y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2}\right)dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2} - \frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{16}{3}.$$

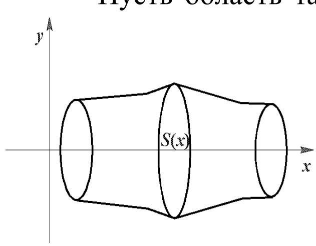
Пример 3. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = -2$, $x = 1$, $y = 0$, $y = e^{-|x|}$. В данном случае

$$S = \int_{-2}^{1} e^{-|x|}dx = \int_{-2}^{0} e^{-|x|}dx + \int_{0}^{1} e^{-|x|}dx = \int_{-2}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{1} e^{-x}dx =$$

$$= e^x\Big|_{-2}^{0} - e^{-x}\Big|_{0}^{1} = 1 - e^{-2} - e^{-1} + 1 = 2 - e^{-1} - e^{-2}.$$

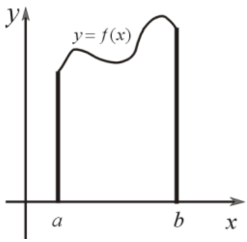
4.7.2. Вычисление объёмов

Пусть область такова, что для $\forall x \in [a,b]$ известна площадь $S(x)$ сечения плоскостью $x = const.$ Тогда, заменяя объём области, заключенной между плоскостями $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, на объём цилиндра $S(\xi_i)\Delta x_i$, где ξ_i - некоторая



точка отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ получаем $V = \int_a^b S(x)dx$.

Для тел, полученных вращением криволинейной трапеции $a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$ вокруг оси OX, имеем $V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx$. Если эту трапецию вращать вокруг оси OY, то можно показать, что $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$.



Аналогично для тел, полученных вращением криволинейной трапеции $c \le y \le d,\ 0 \le x \le \varphi(y)$ вокруг оси OY, имеем $V = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$. Если эту трапецию вращать вокруг оси OX, то $V = 2\pi\int_c^d y\varphi(y)dy$.

Пример 1. Трапеция ограничена кривыми $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1.$ Вычислить объём тела, полученного вращением этой трапеции вокруг оси $OX.$

Подставляя в формулу, получаем

$$V = \pi\int_0^1 f^2(x)dx = \pi\int_0^1 xdx = \frac{\pi}{2}$$

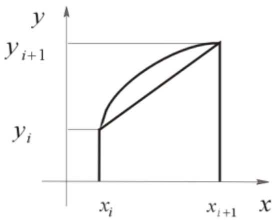
Пример 2. Трапеция ограничена кривыми $y = x, y = 0, x = 1.$ Вычислить объём тела, полученного вращением этой трапеции вокруг оси $OY.$

Подставляя в формулу, получаем

$$V = 2\pi\int_0^1 xf(x)dx = 2\pi\int_0^1 x^2 dx = \frac{2\pi}{3}.$$

4.7.3. Вычисление длины дуги кривой

Рассмотрим кривую L. Разделим кривую на части точками $(x_i, y_i), i = 1,..., n.$ Заменим дугу кривой между точками (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) хордой, эти точки соединяющей. Тогда для длины дуги Δl_i имеем $\Delta l_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$. Просуммировав по всем точкам деления,



получаем $l \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$.

Пусть кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме $r = r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (x(t),\ y(t))^T$. Разделив отрезок $[\alpha, \beta]$ точками $t_0, t_1, ..., t_n$ получаем разбиение кривой точками $(x(t_i),\ y(t_i))^T$. Тогда $\Delta l_i \approx \sqrt{\left(x_t'(\tau_i)\right)^2 + \left(y_t'(\tau_i)\right)^2} \Delta t_i$, где τ_i - точка, лежащая между t_i и t_{i+1}. Просуммировав по всем точкам деления, получаем $l \approx \sum_{i=1}^{n-1} \Delta l_i \approx \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\left(x_t'(\tau_i)\right)^2 + \left(y_t'(\tau_i)\right)^2} \Delta t_i$. Переходя в этой сумме к пределу при увеличении числа точек разбиения, имеем

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x_t'(t)\right)^2 + \left(y_t'(t)\right)^2}\, dt. \qquad (4.3)$$

Аналогично, для пространственной кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме $r = r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = (x(t),\ y(t),\ z(t))^T = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, длина кривой равна

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2 + \left(z_t'\right)^2}\, dt\,. \tag{4.4}$$

Для кривой, заданной явно уравнением $y = f(x)$, формула (2.1) приобретает вид

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx\,. \tag{4.5}$$

Если кривая задана в полярной системе координат, то

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{cases} x'_\varphi = r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi, \\ y'_\varphi = r'_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi. \end{cases}$$

Подставляя в формулу (4.3) для вычисления длины кривой, получаем

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(r_\varphi'\right)^2 + (r)^2}\, d\varphi\,. \tag{4.6}$$

Пример 1. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$, заключенной между точками $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{8}$. Так как кривая задана явно, то $l=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$. Делаем замену $t=\sqrt{x^2+1}$. Тогда $x^2=t^2-1,\ 2xdx=2tdt$, и поэтому

$$l=\int\limits_{2}^{3}\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int\limits_{2}^{3}dt+\int\limits_{2}^{3}\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=\int\limits_{2}^{3}dt+\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{3}\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{3}\frac{dt}{t+1}=1+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Bigg|_2^3=1+\ln\sqrt{\frac{3}{2}}\ .$$

Пример 2. Найти длину дуги кривой $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ заключенной между точками $t_1=0$ и $t_2=2\pi$.

Так как кривая задана параметрически, то $x'_t=-3a\cos^2 t\sin t,\ y'_t=3a\sin^2 t\cos t$, и поэтому

$$l=3a\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}\ dt=\frac{3a}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\left|\sin 2t\right|dt=$$

$$=6a\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin 2t\,dt=-6a\frac{\cos 2t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}=3a\ .$$

Пример 3. Найти длину дуги кривой $\rho=2\cos\varphi$, заключенной между точками $\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$ и $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ Так как кривая задана в полярной системе координат, $\rho'_\varphi=-2\sin\varphi$, то

$$l=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-2\sin\varphi)^2+(2\cos\varphi)^2}\ d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\,d\varphi=2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi\,.$$

Получился ожидаемый результат, так как уравнение $\rho=2\cos\varphi,\ \ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, определяет окружность радиуса 1 с центром в точке $x=1,\ y=0$.

5. Интегральное исчисление функций многих переменных

5.1. Криволинейные интегралы. Теория поля

5.1.1. Кривые на плоскости и в пространстве

Рассмотрим вектор-функцию одного аргумента

$$r(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=(x(t),y(t),z(t))^T=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ - векторы декартова базиса. В случае плоскости эта запись приобретает вид $r(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$. Если функции $x(t),y(t),z(t)$ непрерывны при $t\in[\alpha,\beta]$ и начала всех векторов $r(t)$ поместить в начало координат, то их концы опишут в R^3 некоторую кривую, называемую годографом вектор-функции $r(t)$, а вектор-функцию $r(t)$ называют векторным представлением этой кривой. Эта функция широко используется в физике для описания движения материальной точки М, так как, чтобы знать положение точки в момент времени $t,$ необходимо указать координаты этой точки как функции времени, т.е. задать ее в виде $M(x(t),y(t),z(t))$. Например, функция

$$r(t)=a\cos t\mathbf{i}+a\sin t\mathbf{j}+bt\mathbf{k}$$

определяет движение точки по винтовой линии, а функция

$$r(t)=a\cos t\mathbf{i}+a\sin t\mathbf{j}$$

- движение точки по окружности. Зафиксировав момент времени $t=t_0$, мы найдем положение точки в этот момент.

Кривую $r(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ назовем гладкой на $[\alpha,\beta],$ если существует $r'(t)$ и $r'(t)\neq 0$ для всех $t\in[\alpha,\beta]$. Непрерывную кривую назовем кусочно-гладкой на $[\alpha,\beta],$ если отрезок $[\alpha,\beta]$ можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых кривая гладкая.

Кривую будем обозначать одной из букв Γ, γ, L. Будем говорить, что кривая замкнута, если $r(\alpha) = r(\beta)$. Если существуют значения $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ параметра такие, что $r(t_1) = r(t_2)$, то кривая имеет самопересечения, если таких значений t_1, t_2 нет, то кривая без самопересечений.

5.1.2. Криволинейные интегралы первого рода

Реализованная выше для скалярной функции скалярного аргумента схема построения интеграла Римана применима и для других классов функций. Покажем, как это делается для некоторых из них.

Функция $f(x, y)$ двух переменных, скалярная или векторная, может быть задана в некоторой плоской области или на кривой, лежащей на плоскости. Аналогично функция трёх переменных может быть задана в некоторой пространственной области, на поверхности или на кривой в пространстве.

Назовём кривую Γ гладкой, если в каждой её точке существует касательная, и кусочно-гладкой, если кривую можно разбить на конечное число участков, на каждом из которых кривая гладкая.

Определение. Пусть задана непрерывная кусочно-гладкая ограниченная кривая L и на L – ограниченная скалярнозначная функция $f(M)$, где $M(x, y, z)$ – некоторая точка кривой. Разобьем L на элементарные участки точками. Внутри каждого полученного элементарного участка кривой выберем по точке $M_0, M_1, ..., M_n$. Вычислим значения $f(M_k)$ функции в этих точках, умножим полученные значения на длину Δl_k данного элементарного участка кривой и просуммируем. Предел полученных сумм, $S_n = \sum_{i=0}^{n} f(M_k)\Delta l_k$, если он существует, не зависит от способа разбиения кривой на части и выбора точек внутри каждого элементарного участка кривой при условии, что длина элементарного участка стремится к нулю, называется криволинейным интегралом первого рода и обозначается $\int\limits_L f(x,y,z)dl$.

Вычисление криволинейных интегралов первого рода сводится тем или иным способом к вычислению определённых интегралов. Как это делается, показано ниже.

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t), z(t))^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

$t \in [\alpha, \beta]$, то $dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt$, и поэтому криволинейный интеграл первого рода вычисляется по формуле

$$\int\limits_L F(x,y,z)dl = \int\limits_\alpha^\beta F(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt.$$

В случае плоской кривой

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t))^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \ (t \in [\alpha, \beta])$$

эта формула приобретает вид

$$\int\limits_L F(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta F(x(t),y(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt.$$

Пусть плоская кривая задана явно уравнением $y = f(x), x \in [a, b]$. Всякую такую кривую можно считать заданной параметрически $\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases}$ взяв в качестве параметра переменную x. Тогда последняя формула приобретает вид

$$\int\limits_L F(x,y)dl = \int\limits_a^b F(x, f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Теорема 5.1. Величина криволинейного интеграла первого рода не изменяется при изменении ориентации кривой, то есть

$$\int_L F(x,y,z)dl = \int_{L-} F(x,y,z)dl$$

Доказательство. Докажем теорему в случае кривой, заданной параметрически. Введем новый параметр τ по формуле $t = t(\tau) = b + a - \tau$. Тогда

$$r(t) = r(b+a-\tau) = x(b+a-\tau)\mathbf{i} + y(b+a-\tau)\mathbf{j} + z(b+a-\tau)\mathbf{k}$$

.

Заметим, что когда τ движется от a к b, то t движется от b к a и наоборот. При этом $dt = -d\tau$, и кривая обходится в противоположном направлении. Поэтому

$$\int_{\gamma^-} F(x,y,z)dl = \int_a^b F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau)))\|r'(t(\tau))\|d\tau =$$

$$= -\int_b^a F(x(t), y(t), z(t))\|r'(t)\|dt = \int_\gamma F(x,y,z)dl,$$

где $\|r'(t(\tau))\| = \sqrt{(x'(t(\tau))^2 + (y'(t(\tau)))^2 + (z'(t(\tau)))^2}$, $\|r'(t)\| = \sqrt{(x'(t)^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ - норма (длина) векторов $r'(t(\tau))$ и $r'(t)$ соответственно. Теорема доказана.

Пример 1. Вычислить $\int_\gamma ydl$, где а) γ – парабола $y = 2\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$; б) γ – прямая, соединяющая точки (0, 0) и (1, 1).

а) $\int\limits_{\gamma} y\,dl = \int\limits_{0}^{1} 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+((2\sqrt{x})')^2}\,dx = \int\limits_{0}^{1} 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}\,dx = \int\limits_{0}^{1} 2\sqrt{x+1}\,dx =$

$= \dfrac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \dfrac{4}{3}(2\sqrt{2}-1).$

б) $\int\limits_{\gamma} y\,dl = \int\limits_{0}^{1} x\sqrt{1+(1)^2}\,dx = \sqrt{2}\,\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{\gamma}\sqrt{x^2+y^2}\,dl$ вдоль кривой

$\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = a\cos t, \end{cases}$ если $t\in[0,\pi].$

Имеем

$$\int\limits_{\gamma}\sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int\limits_{0}^{\pi} a\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}\,dt = \int\limits_{0}^{\pi} a^2\,dt = a^2\pi.$$

5.1.3. Криволинейные интегралы второго рода

5.1.3.1. Определение

Будем называть кривую Г ориентированной, если задан порядок следования точек на кривой. Для кривой заданной параметрически ориентацию кривой можно сменить, введя новый параметр, например, по формуле $\tau=\beta+\alpha-t$. Замкнутую кривую на плоскости ориентируют обычно так, чтобы при обходе кривой против часовой стрелки область, ограничиваемая этой кривой, оставалась слева. Если кривая гладкая, то её можно ориентировать с помощью направляющего вектора касательной, так как в этом случае имеет место следующий результат.

Теорема 5.2. В каждой точке гладкой кривой существует касательная. Производная $r'(t)$ направлена по этой касательной в сторону возрастания параметра.

Доказательство можно найти в дифференциальном исчислении.

Заметим, что координаты любого единичного вектора равны косинусам углов, образованных этим вектором с соответствующей координатной осью. Таким образом, если $\tau(x,y,z)$ единичный вектор касательной к Γ в точке (x,y,z), то $\tau(x,y,z)=(\cos\alpha(x,y,z),\cos\beta(x,y,z),\cos\gamma(x,y,z))$, где α,β,γ – углы, образованные вектором касательной с осями OX,OY,OZ соответственно. Поэтому ориентацию кривой можно задать с помощью косинусов углов между вектором касательной и координатными осями. Если $\alpha_k,\beta_k,\gamma_k$ – углы между касательной к кривой в точке $M_k(x_k,y_k,z_k)$ и осями OX,OY,OZ соответственно, то $\Delta l_k\cos\alpha_k=\Delta x_k$, $\Delta l_k\cos\beta_k=\Delta y_k$, $\Delta l_k\cos\gamma_k=\Delta z_k$.

Определение. Пусть задана ориентированная непрерывная кусочно-гладкая ограниченная кривая L и на L – ограниченная скалярнозначная функция $f(M)$, где $M(x,y,z)$ – некоторая точка кривой. Разобьем L на элементарные участки точками. Внутри каждого полученного элементарного участка кривой выберем по точке $M_0,M_1,...,M_n$. Вычислим значения $f(M_k)$ функции в этих точках, умножим полученные значения на $\Delta l_k\cos\alpha_k=\Delta x_k$, $\Delta l_k\cos\beta_k=\Delta y_k$, $\Delta l_k\cos\gamma_k=\Delta z_k$. Полученные суммы

$$S_n^{\alpha}=\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k,z_k)\Delta l_k\cos\alpha_k=\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k,z_k)\Delta x_k\ ,$$

$$S_n^{\beta}=\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k,z_k)\Delta l_k\cos\beta_k=\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k,z_k)\Delta y_k\ ,$$

$$S_n^{\gamma}=\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k,z_k)\Delta l_k\cos\gamma_k=\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k,z_k)\Delta z_k\ ,$$

называются интегральными суммами Римана. Предел этих сумм, если он существует, не зависит от способа разбиения кривой на части и выбора точек внутри каждого элементарного участка кривой при условии, что длина элементарного участка стремится к нулю, называется криволинейным интегралом второго рода или криволинейным интегралом по координатам и обозначается соответственно $\int\limits_L f(x,y,z)dx$, $\int\limits_L f(x,y,z)dy$, $\int\limits_L f(x,y,z)dz$.

Пусть теперь на ориентированной непрерывной кусочно-гладкой кривой L задана вектор-функция $f(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Если L – ориентированная кривая, то у нас уже определены криволинейные интегралы второго рода:

$$\int\limits_L P(x,y,z)\cos\alpha dl = \int\limits_L P(x,y,z)dx,$$

$$\int\limits_L Q(x,y,z)\cos\beta dl = \int\limits_L Q(x,y,z)dy,$$

$$\int\limits_L R(x,y,z)\cos\gamma dl = \int\limits_L R(x,y,z)dz,$$

Взяв сумму однотипных интегралов, получаем

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \ -$$

криволинейный интеграл второго рода, который иногда обозначают $\int\limits_L \left(f(x,y,z),\overline{dl}\right)$, где $\overline{dl} = \tau(x,y,z)dl$.

Заметим, что между криволинейными интегралами первого и второго рода существует связь, выражаемая формулой

$$\int\limits_L \left(f(x,y,z),\overline{dl}\right) = \int\limits_L \left(f(x,y,z),\tau(x,y,z)\right)dl.$$

5.1.3.2. Физический смысл

Пусть $\overline{F}(x,y,z)$ - сила, действующая на материальную точку, движущуюся под действием этой силы по кривой l. Тогда $(\overline{F},\overline{dl})$ - работа, затраченная на перемещение точки по кривой на участке dl. Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу, получаем, что $\int\limits_{\gamma}(\overline{F}(x,y,z),\overline{dl})$ - работа этой силы по перемещению материальной точки вдоль кривой.

Если кривая L замкнута, то работа по перемещению точки вдоль L называется циркуляцией.

5.1.3.3. Вычисление и свойства

Пусть кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t), z(t))^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Тогда вектор касательной приобретает вид $r'(t) = \left(x'_t, y'_t, z'_t\right)$, а единичный вектор касательной $\tau = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$ равен

$$\left(\frac{x'_t}{\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}}, \frac{y'_t}{\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}}, \frac{z'_t}{\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}}\right)^T$$

Так как $dl = \|r'(t)\|dt = \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}\,dt$, то

$$\overline{dl} = \tau dl = \tfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|}\|r'(t)\|dt = r'(t)dt = (x'_t dt,\ y'dt,\ z'_t dt)^T,$$

и для криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\int\limits_{\gamma}(F(x,y,z),\overline{dl})=$$

$$=\int\limits_{\gamma}(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt=$$

$$=\int\limits_{\gamma}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.$$

В случае плоской кривой $r(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=(x(t),\, y(t))^T=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$ получим

$$\int\limits_{\gamma}(F(x,y,z),\overline{dl})=\int\limits_{\gamma}(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)dt=$$

$$=\int\limits_{\gamma}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,.$$

Если плоская кривая задана явно уравнением $y=f(x), x\in[a,b]$, то её можно считать заданной параметрически $\begin{cases}x=x,\\ y=f(x),\end{cases}$ взяв в качестве параметра переменную x. Тогда последняя формула приобретает вид

$$\int\limits_{\gamma}(F(x,y,z),\overline{dl})=\int\limits_{a}^{b}P(x,f(x))dx+Q(x,\,f(x))\,f'(x)dx\,.$$

Заметим, что все формулы для вычисления криволинейного интеграла второго рода получены при соглашении, что направлением обхода кривой считается направление, задаваемое вектором касательной $r'(t)$, если кривая задана параметрически или векторно, и вектором касательной $(1, f'(x))^T$, если кривая задана явно. Если по каким-либо соображениям обходить кривую необходимо в обратном направлении, то все знаки в формулах нужно поменять на противоположные.

Заметим, что для криволинейных интегралов имеют место общие для всех интегралов свойства. Отметим некоторые из них в формулировках, отражающих специфику этих интегралов.

Теорема 5.3. Криволинейный интеграл 2-го рода зависят от ориентации кривой, точнее,

$$\int_L (F(x,y,z),\overline{dl}) = -\int_{L^-} (F(x,y,z),\overline{dl}) .$$

Доказательство опустим.

Замечание. Если в качестве ориентированной кривой взять отрезок $[a,b]$ оси OX с направлением обхода от a к b, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ можно рассматривать как криволинейный интеграл второго рода по этой кривой, а теорему 1 считать обобщением свойства 1 определённого интеграла на случай ориентированного многообразия.

Теорема 5.4. Пусть $L = L_1 \cup L_2$ и размерность пересечения $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$, то есть составляющие кривой L пересекаются только в конце участка L_1 и начале участка L_2 Тогда

$$\int_{L_1 \cup L_2} (F,\overline{dl}) = \int_{L_1} (F,\overline{dl}) + \int_{L_2} (F,\overline{dl}) .$$

Доказательство. Включив в число точек разбиения в определении криволинейного интеграла второго рода общую границу L_1 с L_2 , получаем требуемое.

Теорема 5.5. (о среднем для криволинейного интеграла). Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на гладкой кривой γ , то существует точка (x_0,y_0,z_0) на кривой γ такая, что для криволинейного интеграла второго рода выполнено соотношение

$$\int_\gamma (f,\overline{dl}) = (f(x_0,y_0,z_0),\tau(x_0,y_0,z_0)) \cdot L ,$$

где L - длина кривой γ .

Доказательство опустим.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_{\gamma} y^2dx + x^2dy$ вдоль кривой $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ если $t \in [0, \pi]$, в направлении увеличения параметра.

Имеем

$$\int\limits_{\gamma} y^2dx + x^2dy = \int\limits_0^{\pi} (b^2\sin^2 t(-a\sin t) + a^2\cos^2 t(b\cos t))dt =$$

$$= -\frac{4}{3}ab^2.$$

Пример 2. Найти работу по перемещению материальной точки под действием силы $f(x, y, z) = (x^3,\ xy,\ (x+z))^T = x^3\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + (x+z)\mathbf{k}$ вдоль одного витка винтовой линии $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,\ 0 \le t \le 2\pi$ в направлении увеличения параметра.

Работа по перемещению материальной точки равна криволинейному интегралу второго рода $\int\limits_L (f, \overline{dl}) = \int\limits_L x^3dx + xydy + (x+z)dz$. Так как кривая задана параметрически и $dx = -\sin tdt, dy = \cos tdt, dz = dt$, то

$$\int\limits_L (f, \overline{dl}) = \int\limits_0^{2\pi} (\cos^3 t(-\sin t) + \cos^2 t\sin t + (\cos t + t))dt =$$

$$= \left(\frac{\cos^4 t}{4} - \frac{\cos^3 t}{3} + \sin t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

5.1.4. Элементы теории поля

Криволинейные и поверхностные интегралы второго рода находят важные применения в теории поля. К её изложению мы и приступаем.

Определение. Говорят, что в области $G \subset R^3$ ($D \subset R^2$) задано векторное поле, если задана вектор-функция $f: G \subset R^3 \to R^3$
($f: G \subset R^3 \to R^2$, $f: D \subset R^2 \to R^2$, $f: D \subset R^2 \to R^3$), то есть функция вида

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

$$\left(f(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \end{pmatrix} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j}, \right.$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j},$$

$$\left. f(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \\ R(x,y) \end{pmatrix} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j} + R(x,y)\mathbf{k} \right)$$

с областью определения $G \subset R^3$ ($D \subset R^2$). Аналогично говорят, что в области $G \subset R^3$ ($D \subset R^2$) задано скалярное поле, если задана скалярнозначная функция $f: G \subset R^3 \to R$ ($f: D \subset R^2 \to R$) с областью определения $G \subset R^3$ ($D \subset R^2$).

Если областью определения векторного поля является множество точек на плоскости, то поле называют плоским. Векторное поле можно интерпретировать как множество точек, к каждой из которых присоединён вектор. Примерами векторных полей являются: поле скоростей текущей жидкости, электрическое поле точечного заряда, магнитное поле, плотность электрического тока.

Напомним введённые ранее понятия, имеющие отношение к векторным и скалярным полям.

Вектор

$$\mathrm{grad}U = (U')^T = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)^T$$

называется *градиентом скалярной функции (скалярного поля).*

Скаляр

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{a}} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma\right)$$

называется *производной по направлению вектора* $\overline{a}$ *от скалярной функции векторного аргумента.*

Векторное поле или вектор-функцию назовём потенциальным, если существует скалярная функция (скалярное поле) $U(x,y,z)$ такая, что $\mathrm{grad}U = (U')^T = f(x,y,z) = (P,Q,R)^T$. Функцию U назовём при этом потенциалом поля f.

Заметим, что если U - потенциал поля f, то $U+C$ тоже потенциал этого поля.

Критерием потенциальности поля служит следующий результат.

Теорема 5.6. Векторное поле $f(x,y,z) = P(x,y,z)\mathrm{i} + Q(x,y,z)\mathrm{j} + R(x,y,z)\mathrm{k} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))^T$ является потенциальным в области $\Omega \subset R^3$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

1) криволинейный интеграл второго рода по любому замкнутому контуру L, полностью лежащему в Ω, равен нулю ($\int\limits_L (f, \overline{dl}) = 0$ для $\forall L \subset \Omega$), или, что то же самое, циркуляция поля по любому замкнутому пути равна нулю;

2) если A_1, A_2 - любые две точки из Ω и $L_1, L_2 \subset \Omega$ -две произвольные кривые, их соединяющие, то $\int\limits_{L_1} (f, \overline{dl}) = \int\limits_{L_2} (f, \overline{dl})$, то есть криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования.

Если поле потенциально и $U(x,y,z)$ - его потенциал, то

$$\int_L (f, \overline{dl}) = U(A_2) - U(A_1).$$

Доказательство. Покажем вначале, что условия 1 и 2 эквивалентны. Пусть выполнено условие 1, A_1, A_2 - две произвольные точки из Ω и $L_1, L_2 \subset \Omega$ - две кривые, соединяющие A_1 и A_2. Рассмотрим замкнутый контур $L = L_1^+ \cup L_2^-$. Тогда

$$0 = \int_L (f, \overline{dl}) = \int_{L_1^+} (f, \overline{dl}) + \int_{L_2^-} (f, \overline{dl}) = \int_{L_1^+} (f, \overline{dl}) - \int_{L_2^+} (f, \overline{dl}),$$

откуда и следует требуемое. Пусть теперь выполнено условие 2, L - произвольный замкнутый контур, лежащий в Ω и A_1, A_2 - две произвольные точки, лежащие на контуре L. Точками A_1, A_2 контур L разбивается на два контура $L_1, L_2 \subset \Omega$ так, что $L = L_1^+ \cup L_2^-$. Тогда, аналогично предыдущему, имеем

$$0 = \int_{L_1^+} (f, \overline{dl}) - \int_{L_2^+} (f, \overline{dl}) = \int_{L_1^+} (f, \overline{dl}) + \int_{L_2^-} (f, \overline{dl}) = \int_L (f, \overline{dl}).$$

Перейдём к доказательству теоремы.

Необходимость. Пусть поле потенциально, то есть существует скалярная функция U такая, что $\mathrm{grad}U = (U')^T = (P, Q, R)^T$, A_1, A_2 - произвольные точки из Ω и $L \subset \Omega$ - произвольный путь, соединяющий A_1, A_2. Пусть кривая L задана параметрически так, что значению параметра t_1 соответствует точка A_1, а значению параметра t_2 соответствует точка A_2. Так как $(U')^T = (U'_x, U'_y, U'_z)^T = (P, Q, R)^T$, то

$$\int_L (f(x, y, z), \overline{dl}) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt.$$

Подынтегральная функция есть производная $\dfrac{dU}{dt}$ сложной функции $U(x(t), y(t), z(t))$. Поэтому последний интеграл равен

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dt} dt = U(t_2) - U(t_1) = U(A_2) - U(A_1).$$

Мы получили, что интеграл зависит от конечных точек и не зависит от пути, соединяющего эти точки. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, $A(x, y, z)$ - произвольная точка из Ω, A_0 - фиксированная точка из Ω. Покажем, что функция $U(x, y, z) = \int_{A_0}^{A} (f(x, y, z), \overline{dl})$ есть потенциал поля $f(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$. Для этого достаточно показать, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y, z),\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y, z),\ \frac{\partial U}{\partial z} = R(x, y, z)$. Возьмём точку $A_1(x + \Delta x, y, z)$. Тогда $U(x + \Delta x, y, z) = \int_{A_0}^{A_1} (f(x, y, z), \overline{dl})$. В силу независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования последний интеграл равен

$$\int_{A_0}^{A} (f(x, y, z), \overline{dl}) + \int_{A}^{A_1} (f(x, y, z), \overline{dl}) =$$

$$U(x, y, z) + \int_{x}^{x+\Delta x} P(t, y, z) dt.$$

По теореме о среднем $\int_{x}^{x+\Delta x} P(t, y, z) dt = P(x_1, y, z)\Delta x,$ где x_1 - некоторая точка отрезка $[x, x + \Delta x]$. Заметим, что эту точку можно записать в виде $x_1 = x + \theta\Delta x$, где $0 \le \theta \le 1$ - некоторое число. Поэтому

$$\frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} = P(x_1, y, z).$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем, что $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z).$ Аналогично устанавливается справедливость оставшихся соотношений $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z),\ \ \dfrac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z).$ Теорема доказана.

Доказанная теорема даёт возможность восстановить потенциал, если известно, что поле потенциально, но она не даёт практических рецептов выяснения потенциальности поля. Попытаемся получить характеристики, позволяющие установить потенциальность поля.

Введём вектор

$$\operatorname{rot} f(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

который назовём *ротором (вихрем) вектор-функции* $f(x,y,z)$.

Определение. Поле называется безвихревым, если $\operatorname{rot} f = 0$.

Между величиной $\operatorname{rot} f$ и потенциальностью поля $f(x,y,z)$ существует связь, выражаемая следующей теоремой.

Теорема 5.7. Если поле

$$f(x,y,z) = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))^T$$

потенциально и существует непрерывная производная $f'(x,y,z)$, то оно безвихревое (*всякое потенциальное дифференцируемое поле является безвихревым*), то есть $\operatorname{rot} f = 0$.

Доказательство. Если поле потенциально, то существует скалярнозначная функция $U(x,y,z)$ такая, что

$$U'(x,y,z) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))^T$$

.

Следовательно, $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P,\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q,\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = R.$ Тогда

$$\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{k} = 0.$$

Теорема доказана.

Обратное утверждение верно лишь при дополнительных ограничениях на область в которой задано векторное поле. Для уточнения формулировок введём некоторые понятия.

*Определение***.** Множество называется связным, если для любых двух точек из этого множества существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки и целиком лежащая в данном множестве.

Определение. Точку множества назовём внутренней точкой, если существует окрестность этой точки, целиком лежащая в данном множестве; внешней точкой, если существует окрестность этой точки, целиком лежащая вне данного множества; граничной, если во всякой окрестности этой точки есть как точки данного множества, так и точки, ему не принадлежащие. Совокупность всех граничных точек данного множества назовём его границей.

Определение. Множество назовём односвязным, если его граница есть связное множество.

Теорема 5.8. Если область Ω является односвязной и векторное поле безвихревое ($\operatorname{rot} f = 0$), то оно потенциально.

Доказательство этого результата опустим. Желающие могут познакомиться с ним в [8].

Рассмотрим более подробно плоский случай. Пусть векторное поле задано на плоскости, то есть имеет вид

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}.$$

Тогда

$$\operatorname{rot} f(x,y) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\mathbf{k}.$$

Таким образом, для плоского поля условие $\operatorname{rot} f = 0$ эквивалентно условию $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Тогда сформулированные выше результаты о потенциальности поля приобретают следующий вид.

Теорема 5.9. Если плоское поле потенциально, то $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

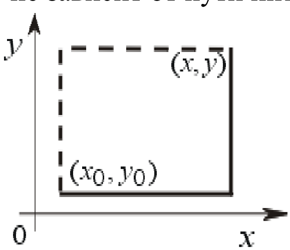
Теорема 5.10. Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ и область односвязная, то плоское поле f потенциально.

Теорема 5.11. Если область односвязная, то любой криволинейный интеграл $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ по произвольному контуру L не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Теорема 5.12. Если область односвязная, то поле потенциально тогда и только тогда, когда $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Пример 1. Доказать, что поле $f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ потенциально и восстановить его потенциал.

Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, то $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, и поле потенциально во всей плоскости. Следовательно, криволинейный интеграл $\int\limits_{A_0}^{A} P\,dx + Q\,dy$ по любому пути, соединяющему две точки, не зависит от пути интегрирования. В качестве начальной точки



интегрирования A_0 выберем начало координат $(0,0)$. Конечную точку возьмём произвольную с координатами (x, y). Наиболее простыми путями интегрирования являются две возможные ломаные, состоящие из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Поэтому для пути, изображённого на рисунке (с учётом того, что $(x_0, y_0) = (0{,}0)$),

$$U(x,y) = \int_{A_0}^{A} (f, \overline{dl}) = \int_0^x P(x,0)\,dx + \int_0^y Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int_0^x (2x \cdot 0)\,dx + \int_0^y x^2\,dy = x^2 y\,.$$

Таким образом, $U(x,y) = x^2 y$.

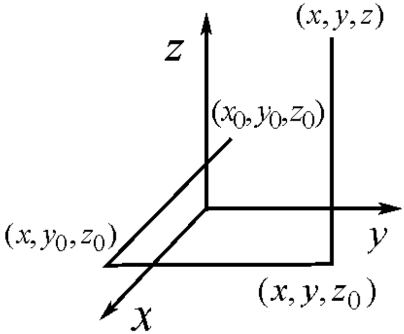
Пример 2. Доказать, что поле

$$f(x,y,z) = \left(y^2 z,\ 2xyz,\ xy^2 + 3z^2\right)^T =$$
$$= y^2 z\mathbf{i} + 2xyz\mathbf{j} + (xy^2 + 3z^2)\mathbf{k} = (P,Q,R)^T$$

потенциально и восстановить его потенциал.

Найдём $\mathrm{rot} f = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$.

Так как $\frac{\partial R}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = 2xy$, $\frac{\partial P}{\partial z} = y^2$, $\frac{\partial R}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2yz$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2yz$, то $\mathrm{rot} f = 0$, и поле потенциально во всём пространстве. Следовательно, криволинейный интеграл $\int_{A_0}^{A} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$



по любому пути, соединяющему две точки, не зависит от пути интегрирования. В качестве начальной точки интегрирования A_0 выберем начало координат $(0{,}0{,}0)$. Конечную точку возьмём произвольную с координатами (x,y,z). Наиболее простыми путями интегрирования являются всевозможные ломаные, состоящие из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Поэтому, для пути, изображённого на рисунке (с учётом того, что $(x_0, y_0, z_0) = (0{,}0{,}0)$),

$$U(x,y,z) = \int_{A_0}^{A} (f, \overline{dl}) = \int_0^x P(x,0,0)\,dx + \int_0^y Q(x,y,0)\,dy + \int_0^z R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_0^x (0\cdot 0)\,dx + \int_0^y (2xy\cdot 0)\,dy + \int_0^z (xy^2 + 3z^2)\,dz = xy^2 z + z^3 .$$

Таким образом, $U(x,y,z) = xy^2 z + z^3$.

Введём ещё одну характеристику векторного поля, называемую дивергенцией, или функцией источника, по формуле

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} .$$

Назовём поле соленоидальным или трубчатым, если дивергенция равна нулю в каждой его точке. Соленоидальные поля однородны по структуре. В них нет ни источников ни стоков.

5.2. Кратные интегралы

5.2.1. Определение и свойства

Идея, использованная при построении определённого интеграла Римана, может быть распространена для построения кратных интегралов от функций многих переменных. Только для области на плоскости разбивать область интегрирования на части нужно кривыми, а для области в пространстве поверхностями. Формализация этой идеи для функций многих переменных приводится в этом пункте.

Пусть $D \subset R^n$ - некоторое множество. *Диаметром* этого множества назовём число равное точной верхней грани расстояний между точками этого множества, то есть равным $d = \sup\limits_{x,y \in D} \rho(x,y)$, где $\rho(x,y)$ - расстояние между точками x и y из множества $D \subset R^n$.

Определение. Пусть $D \subset R^2$ область на плоскости и функция $f(x,y)$ определена и ограничена в этой области. Разобьем область D на части кривыми, пронумеруем полученные элементарные области D_i, выберем внутри каждой из них по точке $\left(\xi^i, \eta^i\right)$ и составим сумму $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi^i, \eta^i)\sigma(D_i)$, где $\sigma(D_i)$ - площадь области D_i. Предел полученных сумм по всевозможным разбиениям, если этот предел существует, не зависит от способа разбиения, способа выбора точек $\left(\xi^i, \eta^i\right)$, при условии, что максимальный из диаметров элементарных областей стремится к нулю, называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$ и обозначается $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, а функция $f(x,y)$ называется интегрируемой по Риману.

Определение. Пусть $D \subset R^3$ область в R^3 и функция $f(x,y,z)$ определена и ограничена в этой области. Разобьем область D на части поверхностями, пронумеруем полученные элементарные области D_i, выберем внутри каждой из них по точке $\left(\xi^i, \eta^i, \varsigma^i\right)$ и составим сумму $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi^i, \eta^i, \varsigma^i)\sigma(D_i)$, где $\sigma(D_i)$ - объём области D_i. Предел полученных сумм по всевозможным разбиениям, если этот предел существует, не зависит от способа разбиения, способа выбора точек $\left(\xi^i, \eta^i, \varsigma^i\right)$, при условии, что максимальный из диаметров элементарных областей стремится к нулю, называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ и обозначается $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$, а функция $f(x, y, z)$ называется интегрируемой по Риману.

Аналогично можно определить n-кратный интеграл от функции заданной в R^n. В случае, когда нам не важна размерность области задания функции, будем обозначать интеграл по n-мерной области через $\int\limits_D f(x)dx$.

Отметим некоторые свойства кратных интегралов при условии существования всех используемых ниже интегралов.

1. Если область D разбита на две области D_1, D_2 так, что $D = D_1 \bigcup D_2$ и D_1, D_2 пересекаются лишь по поверхности разбиения, то $\int\limits_D f(x)dx = \int\limits_{D_1} f(x)dx + \int\limits_{D_2} f(x)dx$.

2. $\int\limits_D (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_D f(x)dx \pm \int\limits_D g(x)dx$.

3. $\int\limits_D k\, f(x)dx = k\int\limits_D f(x)dx$.

Следующие ниже свойства справедливы для скалярнозначных функций.

4. Если $f(x) \geq 0$ для всех x из D, то $\int\limits_D f(x)dx \geq 0$.

5. Если $f(x) \leq g(x)$ для всех x из D, то $\int\limits_D f(x)dx \leq \int\limits_D g(x)dx$.

6. $\left|\int\limits_D f(x)dx\right| \leq \int\limits_D |f(x)|dx$.

7. Если $m \le f(x) \le M$, то $m\sigma(D) \le \int\limits_D f(x)dx \le M\,\sigma(D)$.

8. $\int\limits_D f(x)dx = \mu\sigma(D),$ где μ - некоторое число такое, что $m \le \mu \le M$.

9. Если $f(x)$ непрерывна в области D, то существует точка c из D такая, что $\int\limits_D f(x)dx = f(c)\sigma(D)$.

Теорема 5.13. Для всякой непрерывной на ограниченном замкнутом множестве функции существует интеграл по этой области.

Теорема 5.14. Если область D можно разбить на конечное число областей, в замыкании каждой из которых функция непрерывна, то она интегрируема на этом множестве.

Определения ограниченного и замкнутого множеств можно найти в разделах 1.2 и 1.4 соответственно. Любознательным читателям предлагается доказать теоремы 5.13, 5.14 самостоятельно или посмотреть их доказательства в [5, 6, 8, 33].

5.2.2. Вычисление кратных интегралов

5.2.2.1. Вычисление двойных интегралов

Рассмотрим вначале самый простой случай прямоугольной области $D = [a,b] \times [c,d]$. Предположим, что для всякого $x \in [a,b]$ существует интеграл $\int\limits_c^d f(x,y)dy$. Разобьём отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$ $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$. Положим $D_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $m_{i,j} = \min\limits_{(x,y)\in D_{i,j}} f(x,y)$, $M_{i,j} = \max\limits_{(x,y)\in D_{i,j}} f(x,y)$. Выберем на каждом из отрезков

$[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, ..., n$, по точке ξ_i. При любых $i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m$ и $y \in [y_j, y_{j+1}]$ справедливо неравенство

$$m_{i,j} \le f(\xi_i, y) \le M_{i,j}.$$

Интегрируя это неравенство по y на отрезке $[y_j, y_{j+1}]$, имеем

$$m_{i,j}\Delta y_j \le I_j(\xi_i) = \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)dy \le M_{i,j}\Delta y.$$

Умножая последнее неравенство на Δx_i и суммируя, получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{i,j}\Delta y_j \Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)dy\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{i,j}\Delta y_j \Delta x_i. \quad (5.1)$$

Заметим, что в левой и правой частях неравенства (5.1) стоят, соответственно, нижняя и верхняя суммы Дарбу для интеграла $\iint_D f(x, y)dxdy$, которые могут быть введены так же, как и для определённого интеграла. В случае, когда функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, каждая из сумм Дарбу совпадает с одной из интегральных сумм. Так как $\sum_{j=0}^{m-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)dy\Delta x_i = \int_c^d f(\xi_i, y)dy$, то, переходя в неравенстве (5.1) к пределу, имеем, в случае интегрируемости функции $f(x, y)$,

$$\iint_D f(x, y)dxdy \le \int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx \le \iint_D f(x, y)dxdy.$$

Последнее неравенство эквивалентно соотношению

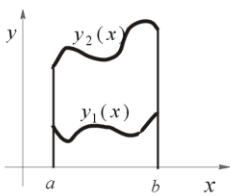
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx.$$

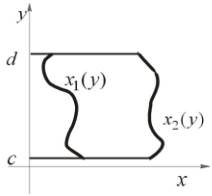
Аналогично, если существует $\int\limits_a^b f(x,y)dx$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

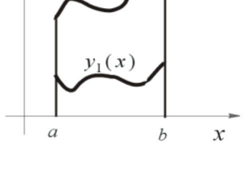
Обычно вместо $\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$ пишут $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$.

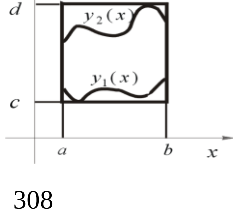
Простейшей областью первого типа на плоскости назовём криволинейную трапецию, ограниченную линиями $x=a,\ x=b,\ y=y_1(x),\ y=y_2(x)$ ($y_1(x) \le y_2(x)$ для всякого $x \in [a,b]$). Простейшей областью второго типа на плоскости назовём криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y=c,\ y=d,\ \ x=x_1(y),\ x=x_2(y)$ ($x_1(y) \le x_2(y)$ для всякого $y \in [c,d]$).





Пусть теперь D - криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x=a,\ x=b,\ y=y_1(x),\ y=y_2(x)$ и при этом выполнено неравенство $y_1(x) \le y_2(x)$. Заключим эту область в прямоугольник $D_1 = [a,b] \times [c,d]$, где





$c=\min\limits_{x\in[a,b]} y_1(x),\ d=\max\limits_{x\in[a,b]} y_2(x)$. Положим

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & \text{если } x\in D,\\ 0, & \text{если } x\notin D.\end{cases}$$

В силу построения $f^*(x,y)$ получаем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f^*(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f^*(x,y)dy\right)dx. \quad (5.2)$$

Далее,

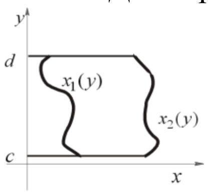
$\int\limits_c^d f^*(x,y)dy=\int\limits_c^{y_1(x)} f^*(x,y)dy+\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)dy+\int\limits_{y_2(x)}^{d} f^*(x,y)dy$. Так как $\int\limits_c^{y_1(x)} f^*(x,y)dy=\int\limits_{y_2(x)}^{d} f^*(x,y)dy=0$, то (5.2) можно переписать в виде

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)dy\right)dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx,$$

или, что то же самое,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \quad (5.3)$$

Для криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=c,\ y=d$, $x=x_1(y),\ x=x_2(y)$ ($x_1(y)\le x_2(y)$ для $\forall y\in[c,d]$) имеем

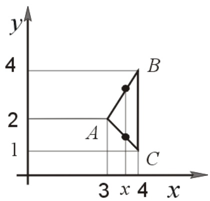


$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \quad (5.4)$$

Интегралы, стоящие в правых частях формул (5.3) и (5.4), называются повторными, а результат о сведении кратного интеграла к одному из повторных носит название теоремы Фубини. Таким образом, мы свели вычисление двойного интеграла к последовательному вычислению одномерных интегралов, вначале внутреннего, а затем внешнего. Заметим, что порядок, в котором производится интегрирование, иногда влияет на сложность вычислений. Соответствующие примеры есть в [34] и в практикуме [25].

Пример 1. Пусть область D - внутренность треугольника с вершинами $A(3,2)$, $B(4,4)$, $C(4,1)$. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$.

Перейдём к повторному интегралу типа (5.3) и расставим пределы интегрирования в нём.



Найдём уравнения прямых AB, BC, AC. Записывая уравнение прямой, проходящей через две точки, получаем уравнение прямой AB: $\dfrac{x-3}{4-3}=\dfrac{y-2}{4-2}$ или, что то же самое, $y=2x-4$. Аналогично, для прямой AC: $\dfrac{x-3}{4-3}=\dfrac{y-2}{1-2}$, или $y=-x+5$. Уравнение прямой BC имеет вид $x=1$. Таким образом, область может быть задана неравенствами $3\le x\le 4$, $-x+5\le y\le 2x-4$. Поэтому

$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy=\int\limits_3^4 dx\int\limits_{-x+5}^{2x-4}(x+2y)dy=\int\limits_3^4 (xy+y^2)\Big|_{-x+5}^{2x-4}dx=$$

$$=\int\limits_3^4 (x(2x-4)+(2x-4)^2-x(-x+5)-(-x+5)^2)dx=$$

$$=\int\limits_3^4 (6x^2-15x-9)dx=(2x^3-\frac{15}{2}x^2-9x)\Big|_3^4=12,5.$$

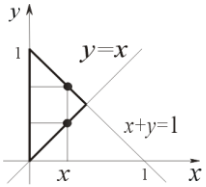
Для перехода к интегралу типа (5.4) требуется разбить область на две. Мы подобное проделаем в следующем примере, а читателю предлагаем в данном примере сделать это самостоятельно

Пример 2. Пусть область D задана неравенствами $y+x\le 1,\ \ y-x\ge 0, x\ge 0$. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.

Перейдем вначале к повторному интегралу типа (5.3). Тогда $a=0;\ b=0{,}5;\ y_1(x)=x;\ y_2(x)=1-x$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^{0,5}dx\int\limits_x^{1-x}f(x,y)dy.$$

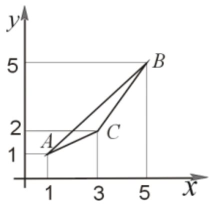


Для перехода к интегралу типа (5.4) требуется разбить область на две: D_1 с границами $c_1=0;\quad d_1=0{,}5;\quad x_1^1(y)=0;\quad x_2^1(y)=y$ и D_2 с границами $c_2=0{,}5;\quad d_2=1;\quad x_1^2(y)=0;$ $x_2^2(y)=1-y$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^{0,5}dy\int\limits_0^{y}f(x,y)dx+\int\limits_{0,5}^{1}dy\int\limits_0^{1-y}f(x,y)dx.$$

Пример 3. Пусть область D - внутренность треугольника с вершинами $A(1,1)$, $B(5,5)$, $C(3,2)$. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.

Найдём уравнения прямых AB, BC, AC. Уравнение



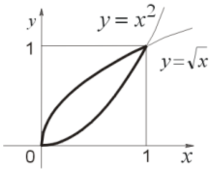
прямой AB можно записать в виде $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}$ или, что то же самое, в форме $y=x$; прямой AC – в форме $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}$ или $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$; прямой CB – в виде $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{3}$ или $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{2}$. Как для перехода к интегралу вида (5.3), так и для перехода к интегралу вида (5.4) приходится разбивать область на две. Для интеграла вида: (5.3) соответствующие области задаются неравенствами:

D_1 – $1 \le x \le 3;$ $0{,}5x + 0{,}5 \le y \le x$, D_2 – $3 \le x \le 5;$ $1{,}5x - 2{,}5 \le y \le x$. Таким образом

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_1^3 dx \int\limits_{0,5x+0,5}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_3^5 dx \int\limits_{1,5x-2,5}^{x} f(x,y)dy.$$

Расставить пределы интегрирования, взяв внешний интеграл по y (то есть представить двойной интеграл в виде повторного интеграла вида (5.4)), предлагается самостоятельно.

Пример 4. Пусть область D задана неравенствами $y \ge x^2, y \le \sqrt{x}$. Тогда

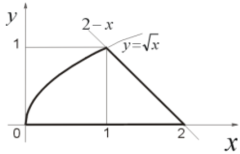


$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \cdot$$

Пример 5. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dx$$

Исходная область представлена в виде объединения двух областей: D_1 – $0 \le x \le 1;$ $0 \le y \le \sqrt{x}$ и D_2 – $1 \le x \le 2;$ $0 \le y \le 2 - x$. Таким образом, эта область ограничена кривыми $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ и $x = 0$. Её также можно задать неравенствами $0 \le y \le 1,$ $y^2 \le x \le 2 - y$. Поэтому



$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{2-y} f(x,y)dx.$$

5.2.2.2. Вычисление тройных интегралов

Аналогично случаю двойного интеграла доказывается, что если $V=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ - параллелепипед, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d\left(\int\limits_e^f f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx.$$

Пусть теперь V - область, расположенная между плоскостями $x=a, x=b$ и для $\forall x\in[a,b]$ область V однозначно проектируется на плоскость YOZ и D - эта проекция. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b\left(\iint\limits_D f(x,y,z)dydz\right)dx\,.$$

Если V - цилиндр с образующими, параллельными оси OZ, направляющей, лежащей в плоскости XOY и являющейся границей области D, ограниченный поверхностями $z=z_1(x,y),\ z=z_2(x,y)$, то

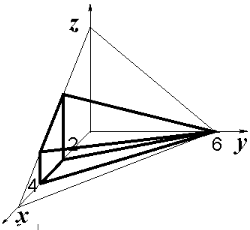
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\left(f(x,y,z)\right)dz\,.$$

Пример 1. Пусть область V ограничена поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0,\ x=4,\ y=4,\ z=x^2+y^2+1$. В тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.

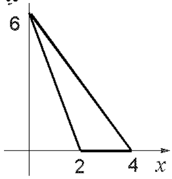
Данная область есть цилиндр, ограниченный поверхностями $z=0, z=x^2+y^2+1$. Проекция этого цилиндра на плоскость XOY есть квадрат с границей $x=0$, $y=0$, $x=4$, $y=4$, которая одновременно является направляющей цилиндра. Поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{x^2+y^2+1} f(x,y,z)dz.$$

Пример 2. Область V ограничена поверхностями $y=0,\ \ z=0,\ \ 3x+y=6,\ \ 3x+2y=12,\ \ x+y+z=6.$ В тройном



интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.



Область однозначно проектируется на треугольник $y=0,$ $3x+y=6, 3x+2y=12,$ лежащий в плоскости XOY, является цилиндром, ограниченным поверхностями $z=0,\ \ z=6-x-y,$ направляющая которого есть указанный выше треугольник. Поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_0^6 dy\int\limits_{\frac{6-y}{3}}^{\frac{12-2y}{3}} dx\int\limits_0^{6-x-y} f(x,y,z)dz.$$

5.2.3. Замена переменных в кратных интегралах

5.2.3.1. Криволинейные системы координат

Положение точки на прямой, на плоскости, в R^3 и в R^n можно определить различными способами. В частности, это можно сделать, задав её декартовы координаты. Иногда же бывает удобно фиксировать положение точки при помощи других величин, например, связанных с решаемой задачей. Выяснением этих вопросов для общего случая мы и займёмся.

Пусть $D, D_1\subseteq R^n$ - области, $r:D_1\to D$ – отображение

$$x = r(u) = r(u_1, u_2, ..., u_n) = \begin{pmatrix} x_1(u_1, u_2, ..., u_n) \\ x_2(u_1, u_2, ..., u_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n(u_1, u_2, ..., u_n) \end{pmatrix}.$$

Если r - биективное (взаимно однозначное) отображение, то будем говорить, что задана криволинейная система координат, так как в этом случае положение точки $x \in D$ однозначно определяется точкой $u \in D_1$. Если вектор-функция r дифференцируема, то криволинейную систему координат будем называть регулярной. Заметим, что в этом случае, по теореме о производной обратной функции [раздел 2.5], обратное отображение, осуществляемое вектор-функцией r^{-1}, дифференцируемо.

Система вектор-функций $x = r(u) = r(u_1, u_2, ..., u_n)$ при $u_l = \text{const}$ образует, как и в случае декартовых координат, систему координатных поверхностей. Пересечения координатных поверхностей образуют координатные поверхности меньшей размерности. В частности при $n = 2$, отображение $r = r(u, v)$ задаёт криволинейную систему координат на плоскости, а кривые

$$(x, y)^T = r(u, C_2) = x(u, C_2)\mathbf{i} + y(u, C_2)\mathbf{j},$$

$$(x, y)^T = r(C_1, v) = x(C_1, v)\mathbf{i} + y(C_1, v)\mathbf{j},$$

образуют координатные линии. Аналогично при $n = 3$ отображение $r = r(u, v, w)$ задаёт криволинейную систему координат в пространстве R^3, поверхности

$$(x, y, z)^T = r(u, v, C_3) = x(u, v, C_3)\mathbf{i} + y(u, v, C_3)\mathbf{j} + z(u, v, C_3)\mathbf{k},$$

$$(x, y, z)^T = r(u, C_2, w) = x(u, C_2, w)\mathbf{i} + y(u, C_2, w)\mathbf{j} + z(u, C_2, w)\mathbf{k},$$

$$(x, y, z)^T = r(C_1, v, w) = x(C_1, v, w)\mathbf{i} + y(C_1, v, w)\mathbf{j} + z(C_1, v, w)\mathbf{k},$$

образуют координатные поверхности, а их пересечения, то есть кривые

$$(x,y,z)^T=r(u,C_2,C_3)=x(u,C_2,C_3)\mathbf{i}+y(u,C_2,C_3)\mathbf{j}+z(u,C_2,C_3)\mathbf{k},$$
$$(x,y,z)^T=r(C_1,v,C_3)=x(C_1,v,C_3)\mathbf{i}+y(C_1,v,C_3)\mathbf{j}+z(C_1,v,C_3)\mathbf{k},$$
$$(x,y,z)^T=r(C_1,C_2,w)=x(C_1,C_2,w)\mathbf{i}+y(C_1,C_2,w)\mathbf{j}+z(C_1,C_2,w)\mathbf{k},$$
образуют систему координатных линий.

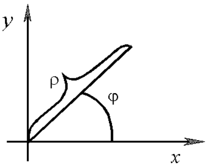
Длины векторов $r'_{u_l}, l=1,2,...,n,$ то есть числа $h_i=\left|r'_{u_l}\right|$, $l=1,2,...,n,$ называются ***коэффициентами Ламе*** криволинейной системы координат. Если векторы $r'_{u_l}, l=1,2,...,n,$ попарно ортогональны, то криволинейная система координат называется ортогональной. В частности, криволинейная система координат на плоскости будет ортогональной, если перпендикулярны векторы $r'_u(u,v)$, $r'_v(u,v)$. Аналогично криволинейная система координат в R^3 будет ортогональной, если перпендикулярны векторы $r'_u(u,v,w)$, $r'_v(u,v,w)$, $r'_w(u,v,w)$. Коэффициенты Ламе на плоскости равны $h_u=\sqrt{(x'_u)^2+(y'_u)^2}$, $h_v=\sqrt{(x'_v)^2+(y'_v)^2}$, а в R^3 соответственно – $h_u=\sqrt{(x'_u)^2+(y'_u)^2+(z'_u)^2}$, $h_v=\sqrt{(x'_v)^2+(y'_v)^2+(z'_v)^2}$, $h_w=\sqrt{(x'_w)^2+(y'_w)^2+(z'_w)^2}$.

Заметим, что для ортогональной криволинейной системы координат модуль определителя матрицы Якоби r' (производной матрицы) [раздел 2.1] равен произведению коэффициентов Ламе.

5.2.3.2. Полярная система координат на плоскости

Наиболее часто используемой криволинейной системой координат на плоскости является полярная система координат. Положение точки в этой системе координат определяется длиной ρ радиус-вектора точки и углом φ между радиус-вектором точки и осью. Если в роли оси полярной системы взять ось OX, то в координатном виде переход от декартовых координат к полярным осуществляется по формулам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$. В векторной форме то же самое записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} x(\rho,\varphi) \\ y(\rho,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix} = (\rho\cos\varphi)\,\mathbf{i} + (\rho\sin\varphi)\,\mathbf{j}\,.$$



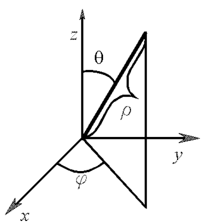
Угол φ при этом может быть выбран из любого полуинтервала длиной 2π. Чаще всего берут полуинтервалы $[0,2\pi)$, $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$, $[-\pi,\pi)$. Полярная система координат является ортогональной. Действительно, вычисляя скалярное произведение векторов

$$r'_\rho = (\cos\varphi,\ \sin\varphi)^T,\ r'_\varphi = (-\rho\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi)^T,$$

получаем требуемое. Коэффициенты Ламе для полярной системы координат равны $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho$.

5.2.3.3. Сферическая и цилиндрическая системы координат в R^3

Возможны два обобщения полярной системы координат на случай пространства R^3. Первое из них называется сферической системой координат. Положение точки в этой системе координат определяется длиной ρ радиус-вектора точки, углом θ между радиус-вектором точки и осью OZ, углом φ между проекцией радиус-вектора точки на плоскость XOY и осью OX. Формулы перехода в координатной форме приобретают вид



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$

При этом $0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$. В векторной форме то же самое записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r(\rho,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} x(\rho,\varphi,\theta) \\ y(\rho,\varphi,\theta) \\ z(\rho,\varphi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \rho\sin\varphi\sin\theta \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= (\rho\cos\varphi\sin\theta)\mathbf{i} + (\rho\sin\varphi\sin\theta)\,\mathbf{j} + \rho\cos\theta\mathbf{k}.$$

Сферическая система координат является ортогональной. Действительно, вычисляя скалярное произведение векторов

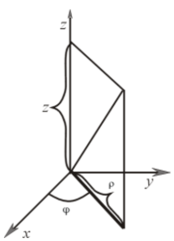
$$r'_\rho = (\cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\theta)^T,$$

$$r'_\varphi = (-\rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi\sin\theta, 0)^T,$$

$$r'_\theta = (\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, -\rho\sin\theta)^T,$$

получаем требуемое. Коэффициенты Ламе для сферической системы координат равны $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho\sin\theta$, $h_\theta = \rho$.

Второе обобщение полярной системы координат называется цилиндрической системой координат. Положение точки в этой системе координат определяется длиной ρ проекции радиус-вектора точки на плоскость XOY, углом φ между этой проекцией и осью OX, координатой z. Формулы перехода в координатной форме приобретают вид



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

При этом $0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty$. В векторной форме то же самое записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \chi(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} x(\rho,\varphi,z) \\ y(\rho,\varphi,z) \\ z(\rho,\varphi,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= (\rho\cos\varphi)\mathbf{i} + (\rho\sin\varphi)\mathbf{j} + z\mathbf{k} .$$

Цилиндрическая система координат также ортогональна. Предлагается проверить это самим. Коэффициенты Ламе для цилиндрической системы координат равны $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho$, $h_z = 1$.

5.2.3.4. Замена переменных в интегралах

Теорема 5.15. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - функция, заданная в области $D \subset R^n$, $r : D_1 \to D$ - биективное (осуществляющее взаимно однозначное соответствие) дифференцируемое отображение,

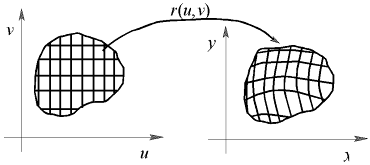
$$x = r(u) = r(u_1, u_2, ..., u_n) = \begin{pmatrix} x_1(u_1, u_2, ..., u_n) \\ x_2(u_1, u_2, ..., u_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n(u_1, u_2, ..., u_n) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\int\limits_D f(x)dx = \int\limits_{D_1} f((u))\|r'(u)\|du,$$

где $\|r'(u)\|$ - модуль якобиана $|r'(u)|$ (определителя матрицы Якоби или, что то же самое, производной матрицы $r'(u)$).

Доказательство. Пусть $n = 2$. Тогда взаимно однозначное дифференцируемое отображение D_1 в D можно записать в виде $r = r(u,v) = (x(u,v), y(u,v))^T$. Разобьём область D_1 на части прямыми $u = u_k, k = 1, 2, ..., n,$

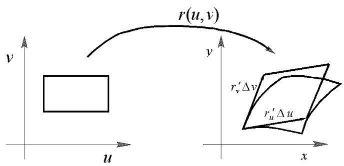


$v = v_l, l = 1, 2, ..., m,$ параллельными координатным осям. Этому разбиению соответствует разбиение области D кривыми $r = r(u_k, v) = (x(u_k, v), y(u_k, v))^T$, $k = 1, 2, ..., n,$ $r = r(u, v_l) = (x(u, v_l), y(u, v_l))^T$, $l = 1, 2, ..., m$. При этом прямоугольник D_{1kl} с вершинами (u_k, v_l), (u_{k+1}, v_l), (u_k, v_{l+1}), (u_{k+1}, v_{l+1}) перейдёт в криволинейный четырёхугольник D_{kl}, ограниченный линиями $r(u_k, v)$, $r(u, v_l)$, $r(u_{k+1}, v)$, $r(u, v_{l+1})$.

Пусть $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_l)$ - точка прямоугольника D_{1kl}, $\tilde{x}_{kl} = x(\tilde{u}_k, \tilde{v}_l)$, $\tilde{y}_{kl} = y(\tilde{u}_k, \tilde{v}_l)$. Рассмотрим интегральную сумму

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} f(\tilde{x}_{kl}, \tilde{y}_{kl}))\sigma(D_{kl})$$

для вычисления интеграла от функции f по области D, в которой $\sigma(D_{kl})$ - площадь четырёхугольника D_{kl}. Из геометрического смысла производной [раздел 2.10] следует, что вектор $r'_u(u_k, v_l)$ является касательным к кривой $r(u, v_l)$ в точке (u_k, v_l), а вектор $r'_v(u_k, v_l)$ будет касательным вектором кривой $r(u_k, v)$ в той же точке. Далее,



$$r(u_{k+1}, v_l) - r(u_k, v_l) = r'_u(\tilde{u}_k, v_l)\Delta u_k = r'_u(u_k, v_l)\Delta u_k + \alpha_1(\Delta u_k),$$

$$r(u_k, v_{l+1}) - r(u_k, v_l) = r'_v(u_k, \tilde{v}_l)\Delta v_l = r'_v(u_k, v_l)\Delta v_l + \alpha_2(\Delta v_l),$$

где $\alpha_1(\Delta u_k)$ и $\alpha_2(\Delta v_l)$ - бесконечно малые более высокого порядка малости, чем Δu_k и Δv_l. Можно показать, что площади криволинейного четырёхугольника D_{kl} и параллелограмма, построенного на векторах

$r'_u(u_k,v_l)\Delta u_k = \begin{pmatrix} x'_u(u_k,v_l)\Delta u_k \\ y'_u(u_k,v_l)\Delta u_k \end{pmatrix}$, $r'_v(u_k,v_l)\Delta v_l = \begin{pmatrix} x'_v(u_k,v_l)\Delta v_l \\ y'_v(u_k,v_l)\Delta v_l \end{pmatrix}$, отличаются на бесконечно малую более высокого порядка малости, чем $(\Delta u_k)^2 + (\Delta v_l)^2$. Заметим, что если $r(u,v)$ - линейное преобразование координат, то четырёхугольник D_{kl} совпадает с параллелограммом, построенным на векторах $r'_u(u_k,v_l)\Delta u_k$, $r'_v(u_k,v_l)\Delta v_l$. Поэтому заменим четырёхугольник D_{kl} указанным параллелограммом. Его площадь ΔS равна $\left|[r'_u(u_k,v_l), r'_v(u_k,v_l)]\right|\Delta u_k \Delta v_l$. Вычисляя $\left|[r'_u(u,v), r'_v(u,v)]\right|$, получаем

$$\left|[r'_u(u,v), r'_v(u,v)]\right| = \left\|\begin{matrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x'_u & y'_u & 0 \\ x'_v & y'_v & 0 \end{matrix}\right\| = \left|\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}\mathrm{k}\right| = \left\|\begin{matrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{matrix}\right\| = \left|\det r'\right| \cdot$$

Таким образом,

$$S \approx \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} f\,(x(\tilde{u}_k,\tilde{v}_l), y(\tilde{u}_k,\tilde{v}_l))\left|r'(u_k,v_l)\right|\Delta u_k\,\Delta v_l\ .$$

Переходя в последней сумме к пределу при увеличении числа разбиений, получаем вывод о справедливости теоремы в случае $n=2$. Для $n=3$ доказательство аналогично, если заменить объём соответствующей элементарной области объёмом параллелепипеда, построенного на векторах

$$r'_u(u,v,w)\Delta u = \begin{pmatrix} x'_u(u,v,w)\Delta u \\ y'_u(u,v,w)\Delta u \\ z'_u(u,v,w)\Delta u \end{pmatrix},\ r'_v(u,v,w)\Delta v = \begin{pmatrix} x'_v(u,v,w)\Delta v \\ y'_v(u,v,w)\Delta v \\ z'_v(u,v,w)\Delta v \end{pmatrix},$$

$$r'_w(u,v,w)\Delta w = \begin{pmatrix} x'_w(u,v,w)\Delta w \\ y'_w(u,v,w)\Delta w \\ z'_w(u,v,w)\Delta w \end{pmatrix},$$

который равен $\left|(r'_u(u,v,w), r'_v(u,v,w), r'_w(u,v,w))\right|\Delta u\,\Delta v\,\Delta w$ или, что то же самое, модулю определителя матрицы Якоби (модулю якобиана) $|\det r'|$ вектор-функции, отображающей R^3 в R^3, умноженному на объём $\Delta u\Delta v\Delta w$. В общем случае требуется замена меры $n-$мерной элементарной области на меру $n-$мерного параллелепипеда, которая равна модулю определителя матрицы Якоби (модулю определителя производной матрицы), умноженному на объём элементарной области в новых переменных. Теорема доказана.

Заметим, что для ортогональной системы координат на плоскости $dS = h_u h_v du\,dv$, где h_u и h_v - коэффициенты Ламе. Аналогично в R^3 $dV = h_u h_v h_w du\,dv\,dw$.

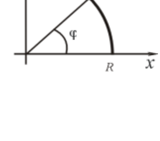
Для полярной системы координат на плоскости матрица Якоби равна

$$r'(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $|r'|$ равен ρ, поэтому модуль Якобиана $\|r'\|$ тоже равен ρ, и формула перехода к полярным координатам в двойном интеграле приобретает вид

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi$$

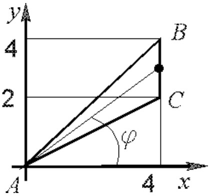
Пример 1. В интеграле $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$ перейдём к



полярным координатам. Так как область интегрирования есть четверть круга радиуса R, лежащая в первом квадранте, то

$$\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy = \int\limits_0^R \rho d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\varphi .$$

Пример 2. Пусть область D - внутренность треугольника с вершинами $A(0,0)$, $B(4,4)$, $C(4,2)$. В интеграле



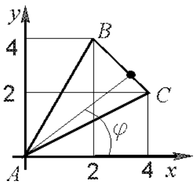
$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в нём.

Уравнения прямых AB, AC и BC - $y=x$, $y=0,5x$ и $x=4$ соответственно. Поэтому угол φ между радиус-вектором точки, принадлежащей треугольнику ABC, и осью OX меняется в пределах $\operatorname{arctg}0,5 \le \varphi \le \operatorname{arctg}1 = \pi/4$. Уравнение прямой $x=4$ в полярных координатах переписывается в виде $\rho\cos\varphi = 4$ или, что то же самое, $\rho = \frac{4}{\cos\varphi}$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\operatorname{arctg}0,5}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\frac{4}{\cos\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho .$$

Пример 3. Пусть область D - внутренность треугольника с вершинами $A(0,0)$, $B(2,4)$, $C(4,2)$. В интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в нём.

Уравнения прямых AC, AB и BC - $y=2x$, $y=0,5x$

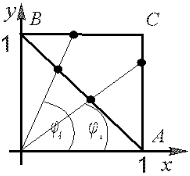


и $x+y=6$ соответственно. Поэтому угол φ между радиус-вектором точки, принадлежащей треугольнику ABC, и осью OX меняется в пределах $\operatorname{arctg}0,5 \le \varphi \le \operatorname{arctg}2$. Уравнение прямой $x+y=6$ в полярных координатах переписывается в виде $\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi = 6$ или, что то же самое, $\rho = \dfrac{6}{\cos\varphi + \sin\varphi}$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\operatorname{arctg}0,5}^{\operatorname{arctg}2} d\varphi \int\limits_0^{\frac{6}{\cos\varphi+\sin\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho .$$

Пример 4. Пусть область D - внутренность треугольника с вершинами $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$. В интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в нём.

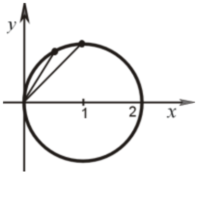
Уравнения прямых AB, AC и BC есть $x+y=1$, $x=1$ и $y=1$ соответственно. Уравнение прямой $x+y=1$ в полярных координатах имеет вид $\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi=1$, или, выражая ρ через φ, $\rho=\dfrac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}$, уравне-



ние прямой $x=1$ имеет вид $\rho\cos\varphi=1$, или $\rho=\dfrac{1}{\cos\varphi}$, а уравнение прямой $y=1$ переписывается в виде $\rho\sin\varphi=1$ или, что то же самое, $\rho=\dfrac{1}{\sin\varphi}$. С учётом того, что при изменении угла φ в пределах $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ длина радиус-вектора точки, принадлежащей треугольнику ABC, меняется в разных пределах, имеем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\rho,\varphi)\rho d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(\rho,\varphi)\rho d\rho .$$

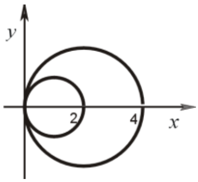
Пример 5. Пусть область D - внутренность круга с центром в точке $A(1,0)$ и радиуса 1. В интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в нём.



Уравнение данной окружности в декартовых координатах записывается в виде $(x-1)^2+y^2=1$ или, после преобразований, $x^2+y^2=2x$. Переходя к полярным координатам, получаем для этой окружности уравнение $\rho=2\cos\varphi$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho.$$

Пример 6. Пусть область D задана неравенствами $x^2+y^2\le 4x$, $x^2+y^2\ge 2x$. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.



Уравнение окружности $x^2+y^2=4x$ в полярных координатах имеет вид $\rho=4\cos\varphi$, а окружности $x^2+y^2=2x$ имеет вид $\rho=2\cos\varphi$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho.$$

Для сферической системы координат матрица Якоби $r'(\rho,\varphi,\theta)$ равна

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial z}{\partial\rho} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta\end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $|r'|$ равен $-\rho^2\sin\theta$, поэтому модуль Якобиана $\|r'\|$ равен $\rho^2\sin\theta$, и формула перехода к сферическим координатам в тройном интеграле приобретает вид

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta .$$

Для цилиндрической системы координат матрица Якоби $r'(\rho,\varphi,z)$ равна

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $|r'|$ равен ρ, поэтому модуль Якобиана $\|r'\|$ также равен, ρ и формула перехода к цилиндрическим координатам в тройном интеграле приобретает вид

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz .$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz$, перейдя к сферической системе координат.

Область интегрирования есть верхняя половина шара с центром в начале координат и радиуса R. Поэтому $0 \le \rho \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$. Далее, $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\theta$.

Следовательно,

$$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz = \int\limits_0^R d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho^2\sin^2\theta)\rho^2 \sin\theta d\theta =$$

$$=\int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4\pi}{15} R^5.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz$, перейдя к цилиндрической системе координат.

Область интегрирования есть половина кругового цилиндра радиуса 1, лежащая в полупространстве $x \geq 0$. Поэтому $0 \leq \rho \leq 1$, $\frac{-\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq z \leq a$. Следовательно,

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz = \int_0^1 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \rho\, dz = \frac{a\pi}{2}.$$

5.2.4. Приложения кратных интегралов

5.2.4.1. Вычисление площадей плоских фигур

Из определения двойного интеграла следует, что площадь $S(D)$ плоской области D выражается формулой $S(D) = \iint\limits_D dxdy$. Если область D есть криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x = a, y = b$, $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ и для $\forall x \in [a,b]$ $y_1(x) \leq y_2(x)$, то

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx$$

- формула площади области D, полученная нами в п. 4.7.1.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x,$ $y = 5x,$ $x = 1.$ Имеем $S = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{5x} dy = \int\limits_0^1 (5x - x)dx = \left.\frac{4x^2}{2}\right|_0^1 = 2.$

5.2.4.2. Вычисление объёмов тел

Из определения тройного интеграла следует, что объём $V(G)$ пространственной области G выражается формулой $V(G) = \iiint\limits_G dxdydz$.

Если G - цилиндр с образующими, параллельными оси OZ, направляющей, лежащей в плоскости XOY и являющейся границей области D, ограниченный поверхностями $z = z_1(x,y),$ $z = z_2(x,y)$, такими, что $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$ для $\forall (x,y) \in D$, то

$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = \iint\limits_D (z_2(x,y) - z_1(x,y))dxdy.$$

Пример 1. Найти объём области, ограниченной поверхностями $x = 0,$ $y = 0,$ $z = 0,$ $x = 4,$ $y = 3,$ $z = x^2 + y^2 + 1.$ Данная область является цилиндром, проекция которого на плоскость XOY есть прямоугольник с границей $x = 0,$ $y = 0,$ $x = 4,$ $y = 3,$ одновременно являющейся направляющей цилиндра. Сверху и снизу цилиндр ограничен поверхностями $z = 0,$ $z = x^2 + y^2 + 1$. Поэтому

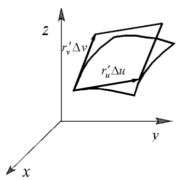
$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{x^2+y^2+1} dz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^3 (x^2 + y^2 + 1)dy =$$

$$= \int\limits_0^4 \left.\left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + y\right)\right|_0^3 dx = \int\limits_0^4 (3x^2 + 12)dx = \left.(x^3 + 12x)\right|_0^4 = 112.$$

5.2.4.3. Вычисление площади поверхности

Пусть поверхность задана параметрически $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D \\ z = z(u,v), \end{cases}$, или в векторной форме

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = r(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}\,.$$



Рассмотрим кусок поверхности, ограниченный линиями $r = r(u,v_0)$, $r = r(u_0,v)$, $r = r(u,v_0+\Delta v)$, $r = r(u_0+\Delta u,v)$. Из геометрического смысла производной [раздел 2.10] следует, что вектор $r_u'(u_0,v_0)$ является касательным к кривой $r(u,v_0)$ в точке (u_0,v_0), а вектор $r_v'(u_0,v_0)$ будет касательным вектором кривой $r(u_0,v)$ в той же точке. Далее, $r(u_0+\Delta u,v_0) - r(u_0,v_0) = r_u'(\tilde{u}_0,v_0)\Delta u = r_u'(u_0,v_0)\Delta u + \alpha_1(\Delta u)$, $r(u_0,v_0+\Delta v) - r(u_0,v_0) = r_v'(u_0,\tilde{v}_0)\Delta v = r_v'(u_0,v_0)\Delta v + \alpha_2(\Delta v)$, где $\alpha_1(\Delta u)$ и $\alpha_2(\Delta v)$ - бесконечно малые более высокого порядка малости, чем Δu и Δv. Можно показать, что площади криволинейного четырёхугольника D_{kl} и параллелограмма, лежащего в касательной плоскости и построенного на векторах $r_u'(u,v)\Delta u = \begin{pmatrix} x_u'(u,v)\Delta u \\ y_u'(u,v)\Delta u \\ z_u'(u,v)\Delta u \end{pmatrix}$ и $r_v'(u,v)\Delta v = \begin{pmatrix} x_v'(u,v)\Delta v \\ y_v'(u,v)\Delta v \\ z_v'(u,v)\Delta v \end{pmatrix}$, отличаются на бесконечно малую более высокого порядка малости, чем $(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2$. Поэтому заменим четырёхугольник D_{kl} указанным параллелограммом. Площадь ΔS

этого параллелограмма равна $|[r'_u(u,v), r'_v(u,v)]|\Delta u \Delta v$. Проводя построения, аналогичные построениям в определении двойного интеграла, получаем, что площадь поверхности равна

$$S = \iint_D |[r'_u(u,v), r'_v(u,v)]| du dv .$$

Пусть поверхность задана явно уравнением $z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$. Всякую такую поверхность можно задать параметрически (взяв в качестве параметров x, y) или в векторной форме уравнением $r = r(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k}$. Тогда

$$r'_x(x,y) = \mathbf{i} + f'_x(x,y)\mathbf{k}, \; r'_y(x,y) = \mathbf{j} + f'_y(x,y)\mathbf{k},$$

$$[r'_x(x,y), r'_y(x,y)] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x,y) \\ 0 & 1 & f'_y(x,y) \end{vmatrix} = -f'_x(x,y)\mathbf{i} - f'_y(x,y)\mathbf{j} + \mathbf{k} .$$

Поэтому $|[r'_x(x,y), r'_y(x,y)]| = \sqrt{1 + (f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2}$, и площадь поверхности может быть найдена по формуле

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2} dx dy .$$

Пример 1. Вычислить площадь поверхности $z = x^2 + y^2, (x,y) \in D$, если область D задаётся неравенством $x^2 + y^2 \le 16$.

Так как $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, то, подставляя в формулу площади поверхности, имеем $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$. Переходя к полярным координатам, получаем

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{12} (1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(65)^{\frac{3}{2}} - 1}{12} d\varphi = \pi \frac{65\sqrt{65} - 1}{6} .$$

Пример 2. Вычислить площадь поверхности сферы.

Параметрическое уравнение сферы радиуса R можно записать в виде $x = R\cos\varphi\sin\theta,\ y = R\sin\varphi\sin\theta,\ z = R\cos\theta$, где $0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$, или, что то же самое, в векторной форме $r = (R\cos\varphi\sin\theta)\mathbf{i} + (R\sin\varphi\sin\theta)\,\mathbf{j} + R\cos\theta\mathbf{k}$. Тогда $r'_\varphi = (-R\sin\varphi\sin\theta,\ R\cos\varphi\sin\theta, 0)^T$,

$r'_\theta = (R\cos\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\cos\theta, -R\sin\theta)^T$.

Поэтому

$$[r'_\varphi, r'_\theta] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\sin\varphi\cos\theta & -R\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -R^2\sin^2\theta\cos\varphi\mathbf{i} - R^2\sin^2\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} - R^2\cos\theta\sin\theta\mathbf{k}.$$

Вычисляя модуль этого вектора, получаем $\left|[r'_\varphi, r'_\theta]\right| = R^2\sin\theta$. Поэтому

$$S = \iint_D \left|[r'_\varphi(\varphi,\theta), r'_\theta(\varphi,\theta)]\right| d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} R^2\sin\theta d\theta = 4\pi R^2.$$

Приложение 1

1.1. Комплексные числа и действия над ними

При решении алгебраических уравнений степени два и выше иногда приходится рассматривать конструкции вида $a+b\cdot\sqrt{-1}$, где a и b – некоторые действительные числа. Например, подставляя формально конструкцию $1+2\cdot\sqrt{-1}$ в не имеющее действительных корней уравнение $x^2-2x+5=0$, получаем $\left(1+2\cdot\sqrt{-1}\right)^2-2\left(1+2\cdot\sqrt{-1}\right)+5$. Действуя в полученном выражении с конструкцией $1+2\cdot\sqrt{-1}$ как с двучленом по правилам алгебры, известным из школы, раскрывая скобки и приводя подобные, имеем

$$(1)^2+2\cdot2\cdot\sqrt{-1}+\left(2\cdot\sqrt{-1}\right)^2-2-2\cdot2\cdot\sqrt{-1}+5=4+4\cdot(-1)=0\,.$$

Таким образом, конструкцию $1+2\cdot\sqrt{-1}$ можно считать корнем новой природы (не действительным) уравнения $x^2-2x+5=0$.

Пусть i – некоторый формальный символ, x и y – действительные (вещественные) числа. Конструкции вида $z=x+iy$ назовём комплексными числами, x действительной, а y мнимой частями комплексного числа $z=x+iy$ и будем обозначать их соответственно $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$. Число $x-iy$ будем называть сопряжённым (комплексно сопряжённым) к числу $z=x+iy$ и обозначать $\bar{z}$. Два комплексных числа будем считать равными, если совпадают их действительные и мнимые части. На множестве комплексных чисел введём операции сложения и умножения по формулам:

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)\,;$$

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)\,.$$

Заметим, что $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z=2x$, $z-\bar{z}=2\operatorname{Im}z=2y$, следовательно $x=\operatorname{Re}z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\operatorname{Im}z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

Если действительные числа отождествить с комплексными числами вида $x+0\cdot i$, то складывая и умножая числа $x+0\cdot i$ и $y+0\cdot i$ по приведённым выше формулам, получаем

$$(x+0\cdot i)+(y+0\cdot i)=(x+y)+i\cdot(0+0)=(x+y)+0\cdot i,$$

$$(x+0\cdot i)(y+0\cdot i)=(xy-0\cdot 0)+i(x\cdot 0+y\cdot 0)=xy+0\cdot i.$$

Как видим, операции сложения и умножения комплексных чисел вида $x+0\cdot i$ не выводят за множество чисел этого вида (то есть получаются числа того же вида). Поэтому можно считать, что операции сложения и умножения совпадают с обычными операциями над действительными числами и считать комплексные числа расширением множества действительных чисел. Из введённых выше операций над комплексными числами следует, что для комплексного числа $i=0+i\cdot 1$ получаем

$$i^2=(0+i\cdot 1)(0+i\cdot 1)=(0\cdot 0-1\cdot 1)+i(0\cdot 1+1\cdot 0)=-1+0\cdot i=-1.$$

Заметим, что операции сложения и умножения комплексных чисел производятся как соответствующие операции над двучленами с раскрытием скобок и приведением подобных и учётом того, что $i\cdot i=-1$. Слагаемые вида 0 и $0\cdot i$ обычно опускаются.

Обратные операции определяются однозначно и задаются формулами:

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{(x_2)^2+(y_2)^2}.$$

Каждому комплексному числу $z=x+iy$ сопоставим точку (x,y) плоскости R^2. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости. Операция сложения комплексных чисел совпадает с операцией сложения радиус-векторов точек (x, y). Для операции умножения комплексных чисел не находится соответствующей операции над векторами.

Модулем $|z|$ комплексного числа $z = x + iy$ назовём длину радиус-вектора точки (x, y), то есть число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Заметим, что $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. Далее,

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Числа $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ являются соответственно косинусом и синусом угла φ между радиус-вектором точки (x, y) и осью OX. Поэтому можем записать $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Эта форма записи числа z называется тригонометрической формой комплексного числа. Угол φ при этом называется аргументом числа z. Совершенно ясно, что числа, аргументы которых отличаются на 2π, совпадают. Среди всех значений аргумента числа z выбирают значение, называемое главным и обозначают его $\arg z$.

Совмещая алгебраическую и тригонометрическую формы комплексного числа z, можем записать

$$z = x + iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi.$$

Следовательно, $x = \operatorname{Re} z = |z|\cos\varphi$, $y = \operatorname{Im} z = |z|\sin\varphi$. Разделив мнимую часть на действительную, получаем $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \dfrac{|z|\sin\varphi}{|z|\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$, или выписывая крайние части соотношения, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$. Если $x = \operatorname{Re} z > 0$, то есть комплексное число z лежит в правой полуплоскости (в первой или четвёртой четверти), то $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ Если же $x=\operatorname{Re}z<0$, то есть комплексное число z лежит в левой полуплоскости (во второй или третьей четверти), то $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi$. Отметим частные случаи. Если число z действительное и положительное, то есть $x=\operatorname{Re}z>0$, $y=\operatorname{Im}z=0$, то $\varphi=0$, если число z действительное и отрицательное, то есть $x=\operatorname{Re}z<0$, $y=\operatorname{Im}z=0$, то $\varphi=\pi$. Если число z мнимое, то есть $x=\operatorname{Re}z=0$, то в случае $y=\operatorname{Im}z>0$ $\varphi=\frac{\pi}{2}$, а в случае $y=\operatorname{Im}z<0$ можно взять либо $\varphi=\frac{3\pi}{2}$, либо $\varphi=-\frac{\pi}{2}$.

Подводя итог вышесказанному, получаем, что при выборе главного значения аргумента из промежутка $[0,2\pi)$ его находят по формулам

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x>0, y>0,\\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x=0, y>0,\\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x<0,\\ \frac{3\pi}{2}, & \text{если } x=0, y<0,\\ 2\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x>0, y<0.\end{cases}$$

Удобным также является выбор главного значения аргумента из промежутков $[-\pi,\pi)$ и $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$. Формулы для нахождения главного значения аргумента при выборе его из промежутков $[-\pi,\pi)$ и $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ предлагается написать самостоятельно. Все значения аргумента обозначают $\operatorname{Arg} z$. Отметим, что $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

Полагая $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, можем записать $z = |z|e^{i\varphi}$. Эта форма записи числа z называется показательной формой записи комплексного числа. Так как $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$, то, складывая и вычитая с $e^{i\varphi}$, получаем формулы Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Далее,

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Поэтому

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1| \cdot |z_2|\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big) = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Таким образом, мы получили, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Аналогично можно получить, что при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Как следствие этих результатов, получаем формулы возведения комплексного числа в степень n и извлечения корня n-ой степени из комплексного числа, называемые формулами Муавра:

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi);$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Заметим, что для любого действительного отрицательного числа главное значение аргумента равно π, для любого действительного положительного числа главное значение аргумента равно 0.

Пример 1. Найдём $\sqrt[3]{1}$. Так как $|1|=1$, $\arg 1=0$, то, используя вышеприведённую формулу, имеем $\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k=0,1,2$. Придавая k последовательно значения 0,1,2, получаем три значения корня кубического из единицы $\sqrt[3]{1}_1=1$, $\sqrt[3]{1}_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\sqrt[3]{1}_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Пример 2. Найдём $\sqrt{1+i}$. Так как $|1+i|=\sqrt{2}$, $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$, то

$$\sqrt{1+i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right),\ k=0,1.$$

Придавая k последовательно значения 0,1, получаем два значения $\sqrt{1+i}_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $\sqrt{1+i}_2=\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{8}+\pi)+i\sin(\frac{\pi}{8}+\pi)\right)$ корня квадратного из $\sqrt{1+i}$.

1.2. Некоторые функции комплексного переменного

Перечислим элементарные функции комплексного переменного. Всюду ниже константы a, b, c, d и так далее предполагаются комплексными числами.

Линейное отображение $w=az$ и линейная функция $w=az+b$. Рассмотрим этот оператор немного подробнее. Запишем числа a и z в показательной форме, $a=|a|e^{i\arg a}$, $z=|z|e^{i\arg z}$. Тогда

$$w=az=|a|e^{i\arg a}\cdot|z|e^{i\arg z}=|a|\cdot|z|\cdot e^{i(\arg z+\arg a)},$$

$$w=az+b=|a|e^{i\arg a}\cdot|z|e^{i\arg z}+b=|a|\cdot|z|\cdot e^{i(\arg z+\arg a)}+b$$

Таким образом, при отображении $w = az$ комплексная плоскость в точке z растянулась в $|a|$ раз и повернулась на угол $\arg a$. При отображении $w = az + b$ плоскость ещё и сдвинулась на число b.

Перечислим и некоторые другие функции комплексного переменного.

Дробно-линейная функция $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Степенная функция $w = z^n$ и её частные случаи при различных n.

Дробно-рациональная функция

$$w = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0}.$$

Показательная функция $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$.

Логарифмическая функция

$$w = Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) = \ln|z| + iArgz$$

и её главное значение

$$w = \ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Тригонометрические функции комплексного переменного

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \ \mathrm{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Гиперболические функции

$$\mathrm{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ \mathrm{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\mathrm{th} z = \frac{\mathrm{sh} z}{\mathrm{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \ \mathrm{cth} z = \frac{\mathrm{ch} z}{\mathrm{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Функции обратные к тригонометрическим и гиперболическим.

Функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Пример 3. Решить уравнение $\cos z = 2$;

Так как $\cos z = 2$, то $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$. Следовательно, $e^{iz} + e^{-iz} = 4$. Умножая обе части равенства на e^{iz} получаем $e^{i2z} - 4e^{iz} + 1 = 0$. Это квадратное уравнение относительно e^{iz}. Решая его получаем $e^{iz} = 2 + \sqrt{3}$ или $e^{iz} = 2 - \sqrt{3}$.

Из первого соотношения получаем

$$iz = Ln(2+\sqrt{3}) = \ln\left|2+\sqrt{3}\right| + i(\arg(2+\sqrt{3}) + 2k\pi) =$$

$= \ln\left|2+\sqrt{3}\right| + 2k\pi i$. Поэтому $z = 2k\pi - i\ln\left|2+\sqrt{3}\right|$.

Из второго соотношения имеем

$$iz = Ln(2-\sqrt{3}) = \ln\left|2-\sqrt{3}\right| + i(\arg(2-\sqrt{3}) + 2k\pi) =$$

$= \ln\left|2-\sqrt{3}\right| + 2k\pi i$. Поэтому $z = 2k\pi - i\ln\left|2-\sqrt{3}\right|$.

Приложение 2

Основные формулы дифференцирования

1. $(f_1(x) \pm f_2(x))' = f_1'(x) \pm f_2'(x)$. 2. $\left(C \cdot f(x)\right)' = C \cdot f'(x)$.

3. $\left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right)' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$.

4. $\left(\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \dfrac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{(f_2(x))^2}$.

5. Производная сложной функции
$(f(\varphi(x)))' = ((f \circ \varphi)(x))' = (f' \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

6. Производная вектор-функции $f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\right)^T$ по скалярному аргументу

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots\dots\dots \\ f_k(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \dots\dots\dots \\ f_k'(x) \end{pmatrix} = \left(f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_k'(x)\right)^T.$$

7. Производная от скалярной функции $f(x)$ по векторному аргументу $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

$$f'(x) = \nabla f(x) = \left(f'_{x_1}(x), f'_{x_2}(x), ..., f'_{x_n}(x)\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \left(\operatorname{grad} f(x)\right)^T.$$

8. Производная вектор-функции $f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\right)^T$ по векторному аргументу $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \cdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x} \end{pmatrix} = \left(D_1 f(x), D_2 f(x), ..., D_n f(x)\right)$$

Приложение 3

Таблица производных

1. $(C)' = 0$;

2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$;

3. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{1}{x\ln a}$;

4. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$;

5. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$;

5a. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$;

6. $\left(\sin x\right)' = \cos x$;

7. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$;

8. $\left(\mathrm{tg x}\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

9. $\left(\mathrm{ctg}x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

10. $\left(\mathrm{sh}x\right)' = \mathrm{ch}x$;

11. $\left(\mathrm{ch}x\right)' = \mathrm{sh}x$;

12. $\left(\mathrm{th}x\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;

13. $\left(\mathrm{cth}x\right)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$;

14. $\left(\mathrm{arctg}x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

15. $\left(\mathrm{arcctg}x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

16. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

17. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Приложение 4

Таблица основных дифференциалов

1. $du^{\alpha} = \alpha \cdot u^{\alpha-1}du;$

2. $d\ln u = \frac{du}{u}$;

3. $d\,a^{u} = a^{u}\ln a\,du$;

4. $d\cos u = -\sin u\,du$;

5. $d\sin u = \cos u\,du$;

6. $d\,\mathrm{tg}u = \dfrac{du}{\cos^2 u}$;

7. $d\,\mathrm{ctg}u = -\dfrac{du}{\sin^2 u}$;

8. $d\arcsin u = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$;

9. $d\arccos u = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$;

10. $d\,\mathrm{arctgu} = \dfrac{\mathrm{du}}{1+\mathrm{u}^2}$;

11. $d\,\mathrm{arcctgu} = -\dfrac{\mathrm{du}}{1+\mathrm{u}^2}$;

где $u = u(x)$ - любая дифференцируемая функция.

В интегральном исчислении данная таблица нужна в следующем виде:

1. $dx = \frac{1}{a}d(ax) = \frac{1}{a}d(ax+b)$, где a и b - некоторые числа. В частности, $dx = \frac{1}{2}d(2x) = \frac{1}{2}d(2x+b) = \frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}d(3x+b)$ и так далее;

2. $x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}d(x^{\alpha+1}) = \frac{1}{\alpha+1}d(x^{\alpha+1}+b), \alpha \neq -1$. В частности, $xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2+b)$, $x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3) = \frac{1}{3}d(x^3+b)$, $\dfrac{dx}{x^2} = -d\left(\dfrac{1}{x}\right) = -d\left(\dfrac{1}{x}+b\right)$, $\dfrac{dx}{x^3} = -\dfrac{1}{2}d\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{2}d\left(\dfrac{1}{x^2}+b\right)$, $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x}) = 2d(\sqrt{x}+b)$;

3. $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x) = d(\ln x + b) = \dfrac{1}{a}d(a\ln x + b)$;

4. $e^{x}dx = d(e^{x}) = d(e^{x}+b)$;

5. $\cos x dx = d\sin x = d(\sin x + b)$;

6. $\sin x dx = -d\cos x = -d(\cos x + b)$;

7. $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = d\mathrm{tg}x = d(\mathrm{tg}x + b)$;

8. $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -d\mathrm{ctg}x = -d(\mathrm{ctg}x + b)$;

9. $\dfrac{dx}{1+x^2} = d(\mathrm{arctg}\,x) = -d(\mathrm{arcctg}\,x)$;

10. $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$.

Приложение 5

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = C$;

2. $\int 1dx = x + C$;

3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \ \alpha \neq -1$;

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

5. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + \tilde{C}$;

5a. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + \tilde{C}$;

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \tilde{C}$;

6a. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + \tilde{C}$;

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

7a. $\int e^x dx = e^x + C$;

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;

13. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;

14. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;

15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;

16. $\int e^{ax} \cos bx dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$;

17. $\int e^{ax}\sin bx dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$.

18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$;

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбанев Н.Н., Ельцов А.А., Магазинников Л.И. Высшая математика I. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – Томск: Томск. гос ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2001. – 163 с.
2. Булдырев В.С., Павлов Б.С. Линейная алгебра и функции многих переменных: Учебное пособие. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 496 с.
3. Грибанов Ю.И. Дифференциальное исчисление в евклидовых пространствах: Учебное пособие. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1984. – 111 с.
4. Величенко В.В. Матрицы, геометрия, механика и ЭВМ: Учебное пособие. – М.: Изд-во МИФИ, 1984. – 267 с.
5. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
6. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 2. – М.: Наука, 1984. – 640 с.
7. Пестов Г.Г. Дифференцируемые отображения в конечномерных пространствах. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983. – 74 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Наука, 1969; Т. 2. – М.: Наука, 1969; Т. 3. – М.: Наука, 1970.
9. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
10. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 204 с.
11. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
12. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. –М.: Наука, 1978. – 351 с.
13. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
14. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 320 с.

15. Рубан А.И. Оптимизация систем. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1984. – 197 с.
16. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. –М.: Мир, 1973. – 472 с.
17. Куваев М.Р. Методика преподавания математики в вузе. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1990. – 390 с.
18. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных. – М.: Высшая школа, 1988. – 288 с.
19. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. – М.: Высшая школа, 1984. – 200 с.
20. Виленкин Н.Я., Бохан К.А. и др. Задачник по курсу математического анализа. – М.: Просвещение, 1971. – 336 с.
21. Кручкович Г.И., Гутарина Н.И. и др. Сборник задач по курсу высшей математики. – М.: Высшая школа, 1973. – 576 с.
22. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной. – М.: Наука, 1970. – 400 с.
23. Райков Д.А. Одномерный математический анализ: Учеб. пособие для мат. спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1982. – 415 с.
24. Райков Д.А. Многомерный математический анализ: Учеб. пособие для мат. спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1989. – 271 с.
25. Ельцов А.А. Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям./ А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова – Томск: Томск. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2005.
26. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Физматгиз, 1963.
27. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971.
28. Келли Дж.Л. Общая топология. – М.: Наука, 1968.
29. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной (введение в теорию интеграла). – М.: Наука, 1973. – 350 с.

30. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974.
31. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967.
32. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики./ Б.П. Демидович, И.А. Марон – М.: Наука, 1970.
33. Будак Б.Н. Кратные интегралы и ряды./ Б.Н. Будак, С.В. Фомин – М.: Наука, 1967.
34. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов./ А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович – М.: Наука, 1969.
35. Гюнтер Н.М. Сборник задач по высшей математике./ Н.М. Гюнтер, Р.О Кузьмин. Т.2. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы , 1959.