

Министерство науки и высшего образования
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)
Кафедра промышленной электроники (ПрЭ)

Михальченко С. Г.

Введение в профессию

**Учебно-методическое пособие
по проведению практических работ**



ТОМСК 2019

Михальченко Сергей Геннадьевич

Введение в профессию: Учебно-методическое пособие по проведению практических работ / С. Г. Михальченко; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники – Томск: ТУСУР, 2019. – 102 с. : ил., табл., прил. – Библиогр.: с. 96.

Настоящее руководство имеет целью ознакомление студентов направления *11.03.04 Электроника и наноэлектроника (профиль - Промышленная электроника)* и *09.03.01 Информатика и вычислительная техника (профиль - Микропроцессорные системы обработки информации и управления)* с полем их будущей профессиональной деятельности, погружение в предметную область и терминологию.

Вторичной целью данной дисциплины является формирование профессиональных компетенций в области применения математических пакетов для численных и аналитических расчетов в различных видах деятельности (инженерной, научно–исследовательской, управленческой, и др.).

Руководство может быть использовано *для проведения практических занятий*. Преподавание данной дисциплины может сопровождаться одноименным *электронным курсом*.

Для освоения дисциплины «Введение в профессию» не требуется специальных знаний. Достаточно навыков, полученных обучающимся в школьных курсах математики, информатики и физики.

Настоящее учебное пособие может применяться так же для обучения студентов по дисциплинам «Профессиональные математические пакеты», «Инженерные расчеты в MathCAD», «Математика» и «Теоретические основы электротехники».

© Михальченко С.Г., 2019

© Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР), 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС МАТНСАД	6
1.1. ИНТЕРФЕЙС МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССОРА МАТНСАД	6
1.2. ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ ПАНЕЛИ И ШАБЛОНЫ	8
1.3. ОПЕРАТОРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЪЕКТОВ И ИНДИКАЦИИ ЗНАЧЕНИЙ	9
1.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ ПАКЕТА МАТНСАД	12
1.5. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ ПАКЕТА МАТНСАД	13
1.6. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1. ВЫЧИСЛЕНИЯ НА МАТНСАД	24
2. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ МАТНСАД	31
2.1. ПАНЕЛЬ ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ШАБЛОНЫ ОПЕРАТОРОВ	31
2.2. ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРОНИКИ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В МАТНСАД	34
2.3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2. ПРОГРАММИРОВАНИЕ В МАТНСАД	43
3. ОПЕРАЦИИ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ В СРЕДЕ МАТНСАД	49
3.1. МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАЦИИ МАТНСАД	49
3.2. ВЕКТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ	54
3.3. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ (НЕЗАВИСИМОСТЬ) ВЕКТОРОВ	55
3.4. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3 МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАЦИИ	56
4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	61
4.1. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СЛАУ	61
4.2. ПОИСК РЕШЕНИЙ СЛАУ ЧЕРЕЗ ОБРАТНУЮ МАТРИЦУ	62
4.3. МЕТОД ГАУССА	62
4.4. ПРАВИЛО КРАМЕРА	63
4.5. СЛАУ ВЫРОЖДЕННЫЙ СЛУЧАЙ	64
4.6. ОДНОРОДНАЯ СЛАУ	66
4.7. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	67
5. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА	71
5.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ЗАКОН ОМА. ЗАКОНЫ КИРХГОФА	71
5.2. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5. РАСЧЕТ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА	74
6. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ	79
6.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА	79
6.2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА	79
6.3. ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ	80
6.4. ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ	81
7. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА	83
7.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛОМ	83
7.2. ЭЛЕМЕНТЫ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА	83
7.3. ПОЛНОЕ КОМПЛЕКСНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ УЧАСТКА ЦЕПИ	85
7.4. МОЩНОСТЬ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА	85
7.5. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТОКА	86
7.6. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6. РАСЧЕТ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА	90
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРОВЕРОЧНЫХ РАБОТ	95
ЛИТЕРАТУРА	96

ВВЕДЕНИЕ

В отличие от мощных и ориентированных на высокоэффективные вычисления программных пакетов, описанных выше, программа *MathCAD* – это, скорее, простой, но продвинутый редактор математических текстов с широкими возможностями символьных вычислений и прекрасным интерфейсом.

MathCAD [4] был задуман и первоначально написан Алленом Раздовом из Массачусетского технологического института (MIT), соучредителем компании *Mathsoft* [<http://www.mathsoft.com/>], которая с 2006 г. является частью корпорации PTC [<http://communities.ptc.com>] (*Parametric Technology Corporation*).



MathCAD не имеет языка программирования как такового, а ядро символьных вычислений заимствовано из пакета *Maple*. Некоторые из математических возможностей *MathCAD* (версии до 13.1 включительно) основаны на подмножестве системы компьютерной алгебры *Maple* (MKM, *Maple Kernel Mathsoft*). Начиная с 14 версии — использует символьное ядро *MuPAD*.

Зато интерфейс программы *MathCAD* очень простой, а возможности визуализации богатые. Все вычисления здесь осуществляются на уровне визуальной записи выражений в общеупотребительной математической форме. Пакет имеет хорошие подсказки, подробную документацию, функцию обучения использованию, целый ряд дополнительных модулей и приличную техническую поддержку производителя. Однако пока математические возможности *MathCAD* в области компьютерной алгебры намного уступают системам *Maple*, *Mathematica*, *MatLab*. Однако по программе *MathCAD* выпущено много книг и обучающих курсов, в том числе у нас в России. Сегодня эта система стала буквально международным стандартом для прикладных технических вычислений.

1. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС MATHCAD

1.1. Интерфейс математического процессора MathCAD

Программный комплекс **MathCAD** (*Mathematical Computer Aided Design* – математическое автоматизированное проектирование) предназначен для автоматизации решений широкого круга задач, связанных с математическими расчетами. Это многофункциональная вычислительная среда, снабженная дружелюбным, во многом интуитивно понятным графическим интерфейсом.

MathCAD имеет интуитивный и простой для использования интерфейс пользователя. Для ввода формул и данных можно использовать как клавиатуру, так и специальные панели инструментов.

При запуске **MathCAD** на экране появляется окно интерфейса (Рис. 1).

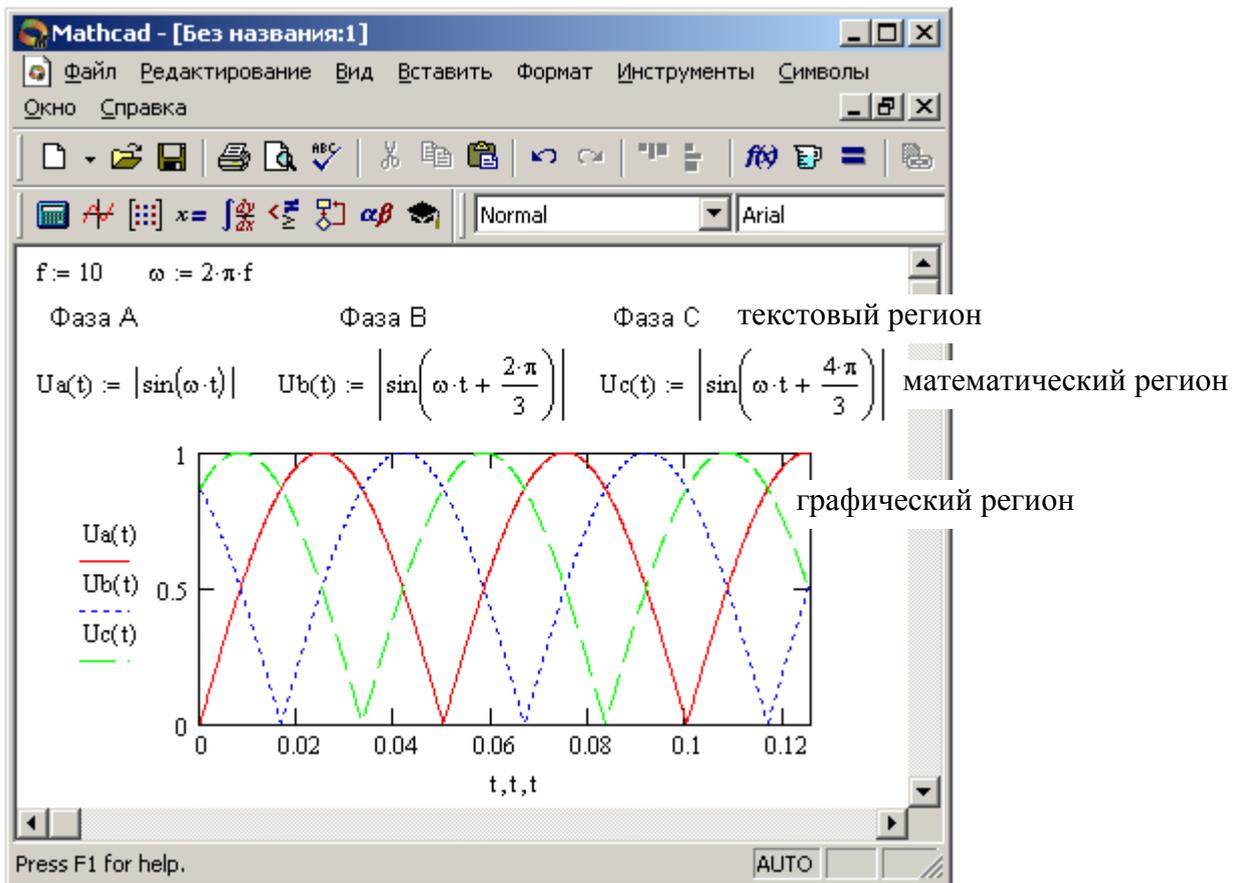


Рис. 1 – Окно интерфейса MathCAD с загруженным документом

Работа осуществляется в пределах рабочего листа, на котором уравнения и выражения отображаются графически, в противовес текстовой записи в языках программирования. При создании документов-приложений используется принцип WYSIWYG (*What You See Is What You Get* – что видишь, то и получаешь).

Рабочий лист и регионы

В поле основного окна отображается продолжаемый вправо и вниз бесконечный рабочий лист (*worksheet*). На рабочем листе в произвольном порядке располагаются **регионы**. Существует три типа регионов:

- математические,
- графические,
- текстовые.

Математические регионы содержат формульные выражения, операторы назначения и индикации результатов. С математическими регионами связаны вычислительные модули – участки исполняемого кода. Преобразование входной информации, занесенной в математический регион, в реализуемый код выполняется **интерпретатором MathCAD**. В отличие от компиляторов, выполняющих просмотр текста программы целиком, интерпретатор обрабатывает каждый регион в отдельности, что, собственно, и дает возможность использовать **MathCAD** как мощный калькулятор для разовых вычислений. Последовательность обработки математических регионов – *слева направо и сверху вниз* по рабочему листу. К моменту выполнения математического региона все объекты, участвующие в его выражениях, должны быть определены либо непосредственно в этом регионе, либо в предшествующих по времени выполнения регионах. Для удобства ввода информации в математические регионы в **MathCAD** широко используется система шаблонов.

Текстовые регионы содержат комментирующий текст и служат для оформления рабочего листа как удобочитаемого документа. Поскольку никакой исполнительный код с текстовыми регионами не связывается, их расположение на рабочем листе ничем не регламентировано. В текстовые регионы можно помещать изображения.

Графические регионы предназначены для вывода информации в виде графиков и изображений. Для программирования графического региона также применяются шаблоны.

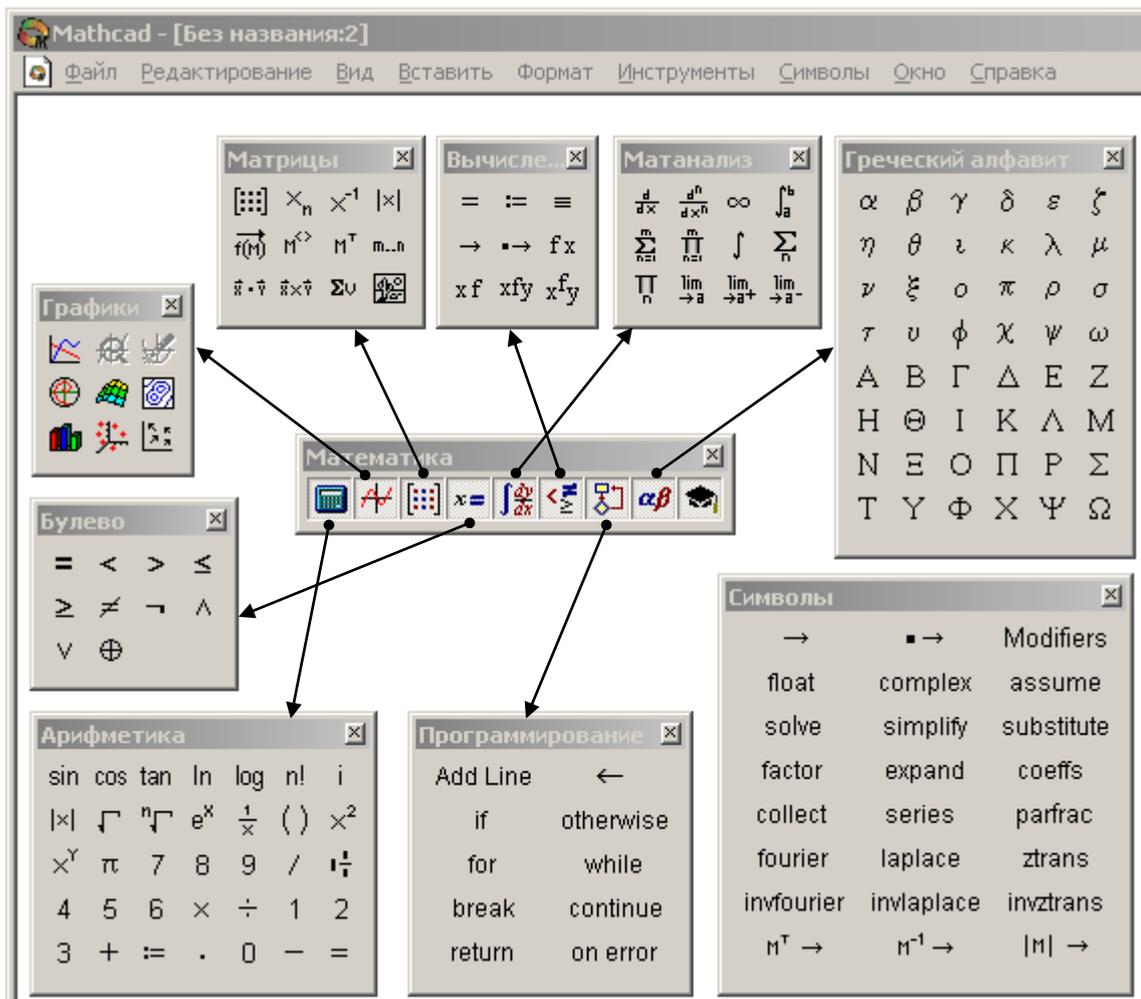


Рис. 2 – Панели инструментов и линейка их вызова

1.2. Инструментальные панели и шаблоны

Интерфейс *MathCAD* предоставляет пользователю представительный набор шаблонов для программирования математических и графических регионов. Для вызова шаблонов и занесения специфических символов операций используются инструментальные панели с виртуальными кнопками или «горячие» клавиши – акселераторы.

Панели инструментов объединены в 9 тематических групп (палитр). Каждая группа может быть вызвана на экран из *линейки вызова палитр*: – она же *панель «Математика»*.



Соответствие кнопок линейки вызываемым панелям показано на *Рис. 2*.

Всего на инструментальных панелях представлено 169 позиций, воздействие на которые вызывает вставку определенного шаблона или символа в точку расположения курсора на рабочем листе. Как видно из *Рис. 2*, некоторые позиции дублируются, присутствуя на разных панелях, некоторые предназначены для вставки обычных символов, имеющих на клавиатуре, так что более удобно вводить непосредственным набором с клавиатуры, нежели через панель инструментов. Назначение ряда инструментов очевидно из соответствующих пиктограмм и не требует пояснений.

Здесь мы рассмотрим лишь те инструменты, применение которых необходимо для выполнения заданий лабораторных работ, информацию обо всех инструментах можно получить, воспользовавшись справочной системой *MathCAD*, вызываемой нажатием кнопки $\langle F1 \rangle$ или из основного меню.

В составе пакета *MathCAD* имеется достаточно обширный набор встроенных функций. Вставка встроенных функций на рабочий лист может быть выполнена двумя путями:

- набором имени функции на клавиатуре – «горячих клавиш»;
- выбором функции из списка в окне диалога, открывающегося после воздействия на элемент управления с пиктограммой: 

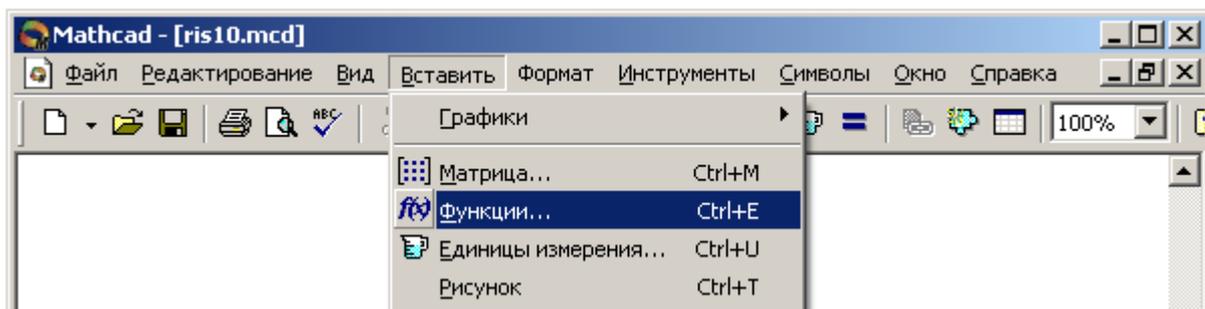


Рис. 3 – Панель вызова набора встроенных функций

Второй вариант представляется более удобным, так как на рабочий лист помещается шаблон функции с правильным названием и шаблоном списка параметров. Кроме того, в открывающемся окне диалога выбора функции имеется кнопка вызова контекстно-зависимой справки ($\langle \text{Ctrl-F1} \rangle$).

Таблица 1 – Инструменты и клавиши быстрого вызова

Описание операции	Пиктограмма	Клавиши	Панель
Извлечение квадратного корня	$\sqrt{\quad}$	\	Calculator
Возведение в степень	x^y	Shift+6	Calculator
Ввод матрицы или вектора	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	Ctrl+M	Matrix
Ввод индекса (в элементах массива)	x_n	[Matrix

Описание операции	Пиктограмма	Клавиши	Панель
Определитель, модуль, абсолютное значение	$ x $		Matrix
Выделение столбца матрицы	$M \langle$	Ctrl+6	Matrix
Создание ранжированной переменной	m..n	;	Matrix
Векторизация функции	$\vec{f(M)}$	Ctrl+ –	Matrix
Оператор назначения – присваивания	$:=$:	Evaluation
Оператор глобального назначения	\equiv	~	Evaluation
Индикация значения в символьной форме	\rightarrow	Ctrl+.	Evaluation
График в прямоугольных координатах		Shift+2	Graph

1.3. Операторы определения объектов и индикации значений

Операторы определения (присваивания, назначения) объектов размещаются в математических регионах и выполняют три функции:

- создают объект, связывая с ним его имя – идентификатор;
- определяют тип объекта;
- инициализируют (задают) объект значением.

В качестве определяемого объекта могут выступать *переменные и функции*. *Листинг 1* демонстрирует примеры применения операторов определения объектов различного типа: вещественного числа a , векторов b и c , матрицы A и функции $z(x)$.

Листинг 1. Операторы определения и индикации

$a := 17$	$b := (1 \ 2 \ 3)$	$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$c := \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.8 \\ 2.1 \end{pmatrix}$	$c = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.8 \\ 2.1 \end{pmatrix}$
$a = 17$	$b = (1 \ 2 \ 3)$				
$z(x) := \text{Re}(x) + i \cdot \text{Im}(x)$	$z(x) \rightarrow x$			$z(3 - i) = 3 - i$	

Тип объекта, соответствующего тому или иному имени-идентификатору, определяется типом правой части. Далее любые операции с объектом интерпретируются в соответствии с его определенным типом.

В примере (*Листинг 1*) определена функция $z(x)$, которая получает в качестве аргумента комплексное число x и возвращает в качестве значения комплексно-сопряженное число. Функция, задаваемая подобным образом, называется *функцией, определяемой пользователем*. В скобках после имени функции находится список *формальных параметров*. В рассмотренном примере этот список состоит из единственной переменной x . При вызове – применении этой функции формальные параметры заменяются фактическими. До вызова функции, переменные, перечисленные в списке формальных параметров, будут оставаться неопределенными.

Тип объекта, возвращаемого функцией, т.е. связанного с ее именем, определяется по контексту определения точно так же, как это происходит при определении переменной. Например, $\sin(x)$ возвращает вещественное число, а $|x|$ – целое число.

В составе определения функции могут присутствовать переменные, не передаваемые через список формальных параметров. В этом случае такие переменные должны быть определены до оператора назначения функции. Необходимо отметить, что передача параметров через глобальные переменные в общем случае нежелательна,

т.к. нарушает изолированность функции и может служить источником трудно обнаруживаемых ошибок.

Виды операторов определения MathCAD

Операторы назначения в MathCAD имеют три разновидности:

- $:=$ оператор назначения (стандартный);
- \equiv оператор глобального назначения;
- \leftarrow оператор локального назначения в блоке.

Все три разновидности операторов, помимо операции присваивания значения правого операнда левому, выполняют *передачу типа* левому операнду.

Оператор $:=$ связывает значение и тип объекта с его идентификатором во всех регионах, выполняемых после региона, содержащего этот оператор.

Оператор \equiv действует на все регионы рабочего листа независимо от их расположения относительно региона, содержащего этот оператор.

The image shows two panels from the MathCAD software interface. The top panel, titled 'Вычисле...' (Calculate), shows assignment operators: $=$, $:=$, \equiv , \rightarrow , \rightarrow with $f(x)$, $x \leftarrow f$, $x \leftarrow f_y$, and $x \leftarrow f_y$. The bottom panel, titled 'Програ...' (Program), shows control flow operators: 'Add Line', \leftarrow , 'if', 'otherwise', 'for', 'while', and 'break'.

The main part of the image illustrates the scope of these operators for a variable a :

- $a = 3 + 4i$: переменная a определена глобальным назначением ниже
- $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: переменная a переопределена назначением $:=$
- $a \leftarrow 123.45 = 120.45$: переменная a переопределена назначением \leftarrow
- $a \leftarrow a - 3$: назначение оператора \leftarrow распространяется только на этот блок
- $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: (repeated from above)
- $a \equiv 3 + 4 \cdot i$: переменная a определена глобальным назначением \equiv
- $a = 3 + 4i$: (repeated from above)

Рис. 4 – Области действия (видимости) операторов назначения

Оператор \leftarrow предназначен для использования в изолированных блоках, формируемых при программировании в пределах одного региона. Действие этого оператора распространяется только на тот регион, в котором он расположен. На Рис. 4 показан пример переопределения типа и значения объекта a .

Действие оператора глобального назначения \equiv распространяется на все пространство рабочего листа. Появление в регионе оператора назначения $:=$ вызывает переопределение типа объекта, сохраняющееся до появления следующего оператора назначения, которым может быть либо еще один оператор $:=$, либо (как в примере) оператор глобального назначения \equiv .

Оператор локального назначения \leftarrow не оказывает никакого действия на тип и значение объекта a за пределами блока, выделенного слева жирной вертикальной чертой. Такие блоки создаются при использовании инструментальной панели «Программирование» и занимают один регион.

Определенные однажды объекты могут быть переопределены в последующих регионах. Таким образом, при интерпретации действий с объектом актуально последнее, ближайшее к точке выполнения определение его типа. Если на рабочем листе есть несколько операторов глобального назначения \equiv , то свойство «глобальности» сохраняет только последний из них.

MathCAD содержит несколько сотен встроенных стандартных функций, которые можно использовать в расчетах. Для вставки функции нужно нажать пиктограмму или

в меню выбрать опцию «Вставить Функцию» – откроется окно выбора (Рис. 5), где все функции размещены по категориям.

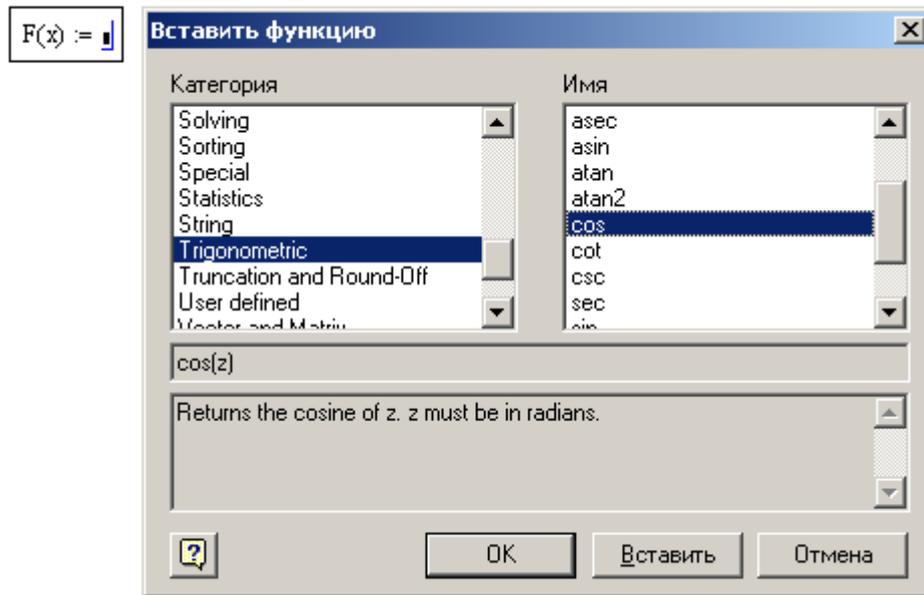


Рис. 5 – Диалоговое окно выбора стандартной функции из библиотеки

Операторы индикации значений

Весьма часто при выполнении вычислений требуется выводить на экран значения того или иного объекта, либо результата выполнения выражения. Эта задача решается *операторами индикации значений*. В *MathCAD* существуют два вида операторов индикации:

- = оператор индикации числовых значений;
- → оператор индикации символьных значений.

$$x := \frac{1}{3} \quad x \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$x = 3.333333333 \times 10^{-1}$$

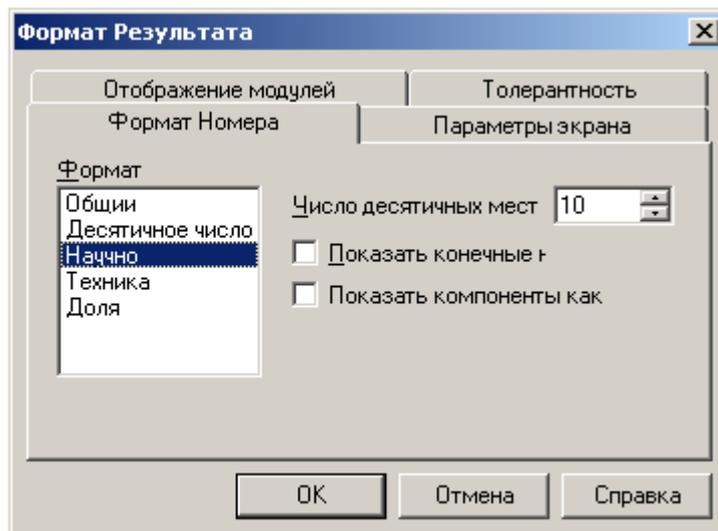


Рис. 6 – Диалоговое окно задания формата вывода чисел

Оператор индикации символьных значений → применяется для вывода результатов символьных преобразований, значений объектов, в составе которых имеются компоненты с неопределенными числовыми значениями. Такими объектами являются, например, функции с формальными параметрами, формульные выражения при выполнении над ними операций *символьных преобразований* (Рис. 6).

1.4. Исследование функции при помощи пакета MathCAD

Общая схема исследования функции известна еще из курса средней школы:

1. Найти область определения функции. Выделить особые точки (точки разрыва).
2. Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения.
3. Найти точки пересечения с осями координат.
4. Установить, является ли функция чётной или нечётной.
5. Определить, является ли функция периодической или нет;
6. Найти точки экстремума и интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции.
7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
8. Найти наклонные асимптоты функции.
9. Построить график функции.

Рассмотрим, насколько облегчается этот процесс при использовании *MathCAD*. Рассмотрим сначала последний (целевой) пункт списка – построение графика. Средства *MathCAD* позволяют *начать* (!) исследование функции с построения графика. Согласитесь, это значительно проще и нагляднее. Однако, имейте в виду, что построение графика – это еще не конец исследований, это начало.

Вывод графиков в MathCAD

Вывод графической информации производится в графических регионах с использованием *шаблонов*, создаваемых инструментами панели «Графики». На рисунке показан начальный вид шаблона в прямоугольной (декартовой) системе координат (значок  или комбинация клавиш *Shift+2*). Здесь изображена прямоугольная область «экрана», на которой будет строиться график, а также имеются поля ввода выражения для переменной, значения которой отображаются по вертикальной оси (*Поле Y – ордината*) и переменной, отображаемой по горизонтальной оси (*Поле X – абсцисса*).

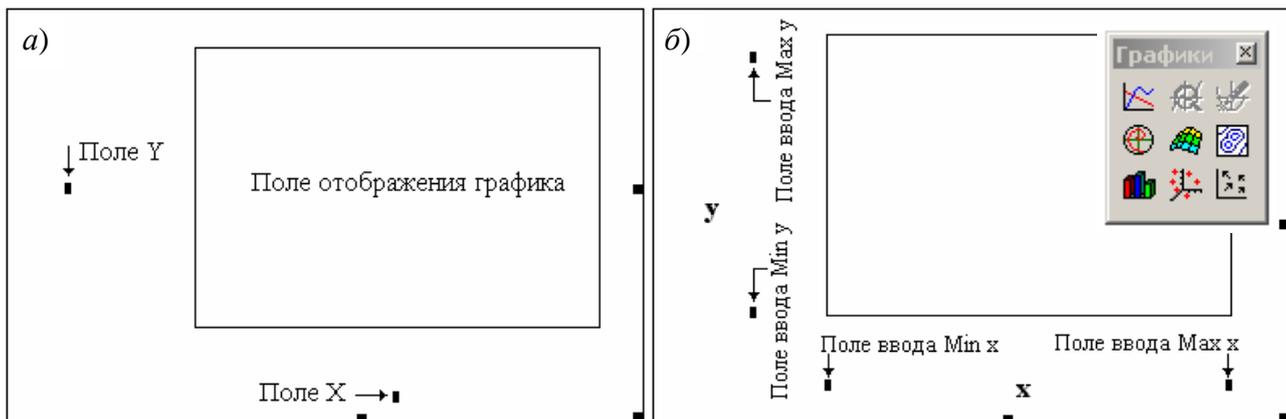


Рис. 7 – Шаблон вывода графика

После занесения выражений отображаемых переменных на шаблоне появляются поля ввода *границ диапазонов* этих переменных (*Min X*, *Max X*, *Min Y*, *Max Y*), в пределах которых происходит построение графика (Рис. 7, б). Если выражение для $y(x)$ определено к моменту заполнения шаблона, то график выдается сразу после его занесения в *Поле Y*, при этом границы изменения x устанавливаются по умолчанию, а границы изменения y определяются автоматически.

В *MathCAD* при построении графиков непрерывных зависимостей $y(x)$ производится автоматический выбор шага независимой переменной x . Если требуется, выбора шага построения графика можно *задать принудительно*. Для этого надо перед

графическим регионом ранжировать массив x переменных с требуемым шагом изменения, например, $x := 0, 0.1 .. 1$. В этом случае при построении графика значения $y(x)$ будут вычисляться только в точках $x_1=0$; $x_2=0.1$; $x_3=0.2$ и т.д. до $x_{11}=1$. Массивы значений $(x_i, y(x_i))$ будут образовывать узловые точки графика, по умолчанию узловые точки графика будут соединены отрезками прямой.

Графические регионы позволяют строить в одних осях несколько графиков одновременно. Для этого необходимо в *Поле Y* поместить *список выводимых переменных, разделенных запятыми*. Запятая при этом не отображается, а каждое имя вводимой переменной помещается на новую строку. На рисунке (Рис. 8, а) приведен пример графика, отображающего две различные зависимости (от одной переменной x).

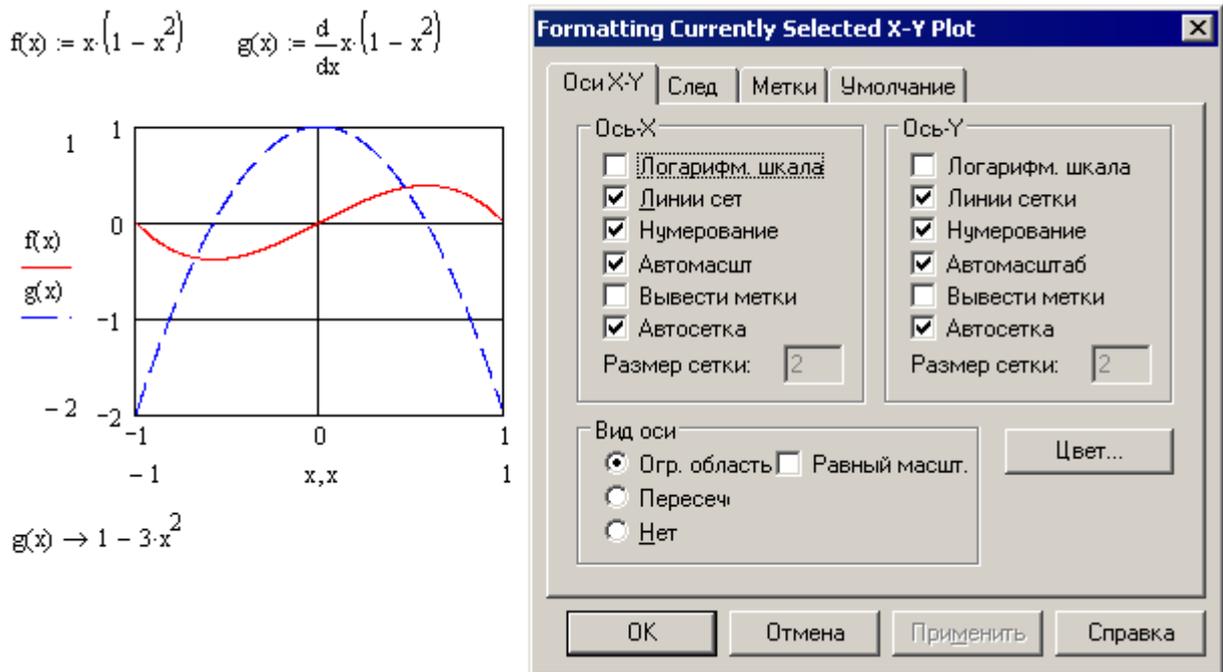


Рис. 8 – Вывод нескольких графиков в одних осях. Панель настройки графика

Абсциссы графиков так же могут быть представлены разнотипными переменными – как дискретными, так и непрерывными, они так же должны перечисляться через запятую.

График в *MathCAD* допускает гибкую настройку. Двойной клик в поле шаблона вызывает на экран диалоговое окно настройки с четырьмя вкладками (Рис. 8, б). Назначение большинства элементов управления, размещенных на вкладках окна, понятно из соответствующих подписей.

На вкладке *X-Y Axes* устанавливаются параметры осей графика и размерной сетки в его поле. Вкладка *Traces* позволяет настроить параметры линий, отображающих графики. Здесь можно выбрать тип графика (*Type*), цвет отображения графика (*Color*), вид линии (*Line*), вид символа, помечающего положение узловых точек (*Symbol*).

1.5. Исследование функции при помощи пакета MathCAD

Исследование области определения

Это очень важный шаг исследования функции, так как все дальнейшие действия будут проводиться на области определения.

В приложении к элементарным функциям и их суперпозициям, учитываются следующие знания:

- для дробных функций $f(x)/g(x)$ необходимо найти нули знаменателя и исключить их из области определения $g(x) \neq 0$;

- для логарифмической функции $\log_a(g(x))$ – область определения задается неравенством $g(x) > 0$;
- для корня $\sqrt[n]{g(x)}$ четной степени n – область определения находится из неравенства $g(x) \geq 0$.

Если имеется возможность сразу же оценить область значений функции, то это необходимо сделать.

Вычисление пределов функции в MathCAD

Самое главное при исследовании области определения – осмыслить поведение функции на ее границах – в особых точках и на бесконечности (при $x \rightarrow \pm\infty$). Для этого используется такой математический аппарат, как *предел (limit) функции*, при этом используется шаблон *предел функции* и *предел функции справа (слева)*: из вкладки *calculus (мат.анализ)*.

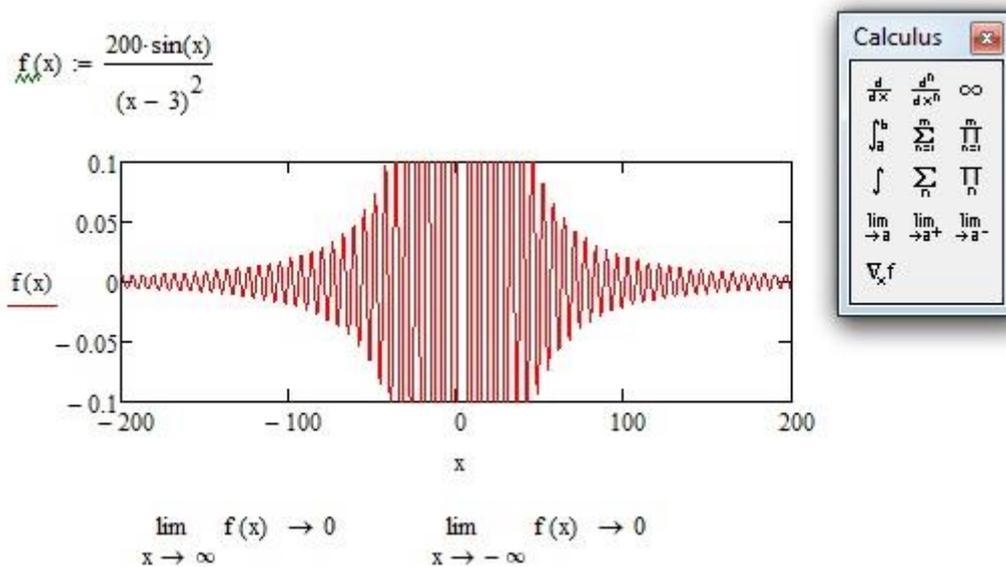


Рис. 9 - Вычисление пределов функции на $+\infty$ и на $-\infty$

Из графика не всегда ясно, как ведет себя функция в тех или иных точках. Например, на Рис. 9, четко видно, что при $x \rightarrow \infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ функция $f(x)$ бесконечно убывает, что и подтверждается вычисленными пределами. Но поведение $f(x)$ вблизи особой точки $x=3$ из графика не ясно. Изменив масштаб графика можно более подробно рассмотреть особую точку (см. Рис. 10 - это та же самая функция, что и на Рис. 9). Рассмотрим пределы справа и слева в этой точке $x=3$.

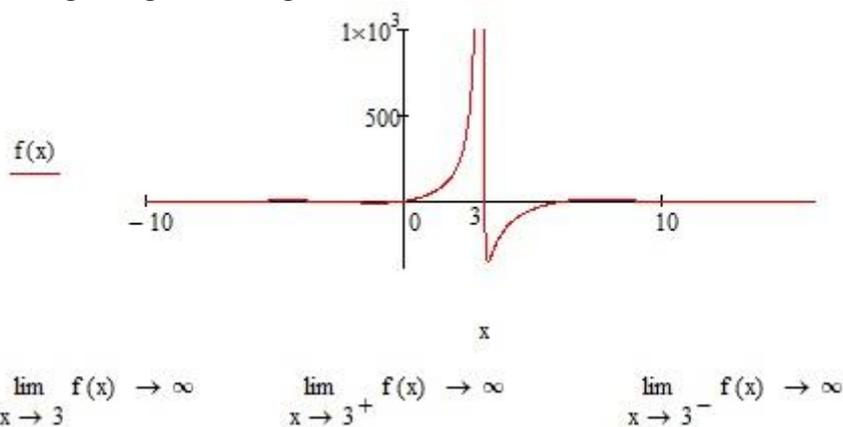


Рис. 10 - Вычисление пределов функции справа и слева в точке

Пределы могут быть вычислены не всегда. Рассмотрим *Рис. 11*: заданная здесь функция $g(x)$ так же имеет особую точку $x=3$, однако пределы при приближении слева и справа к этой точке различные, а потому общий предел не существует (*undefintd*).

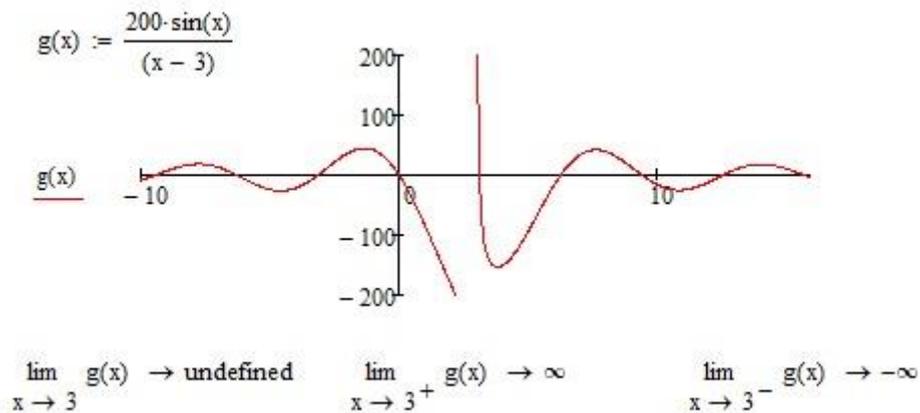


Рис. 11 - Вычисление пределов функции справа и слева в точке

Листинг 2. Вычисление пределов в MathCAD

$$f(x) := \frac{e^x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow 0$$

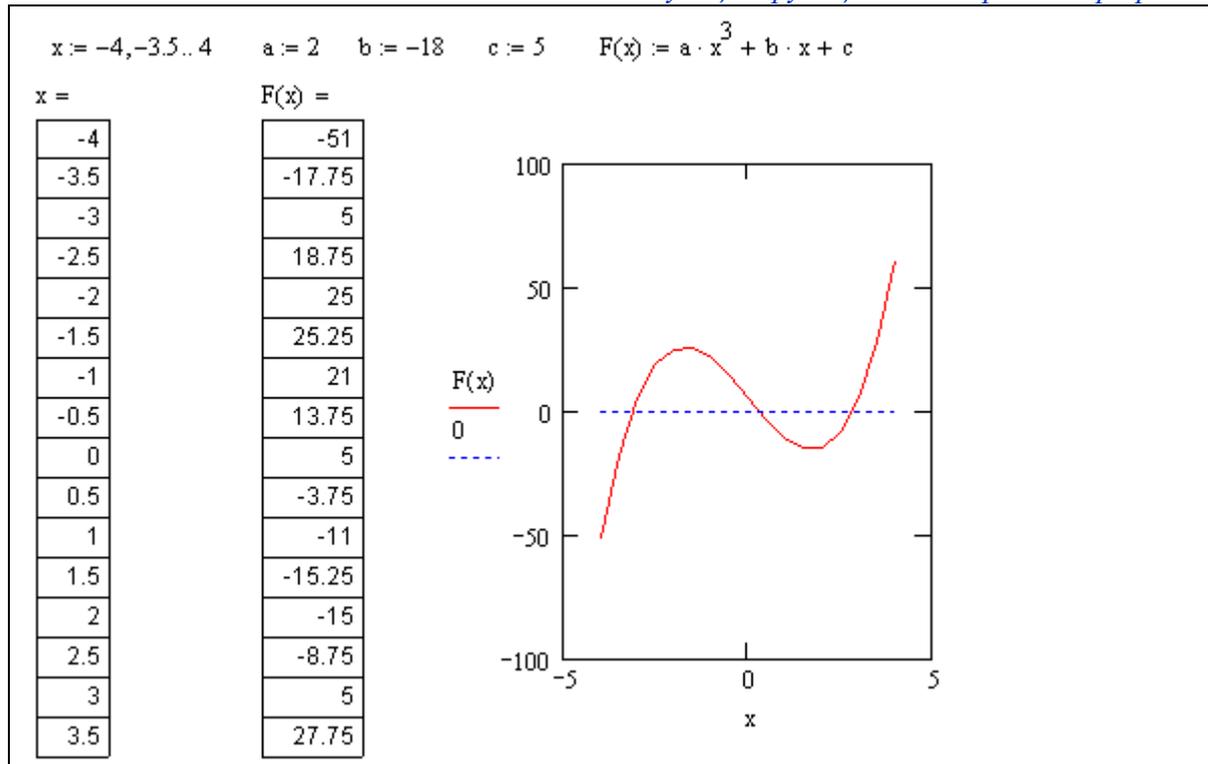
Область определения приведенной на листинге функции: $x \neq 0$, то есть $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. С учетом вычисленных пределов, можно заключить, что прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота, при $x \rightarrow +\infty$ функция стремится вверх со скоростью экспоненты, а при $x \rightarrow -\infty$ монотонно возрастает бесконечно, приближаясь к нулю снизу.

Поиск корней функции

Задача решения нелинейных (трансцендентных) уравнений состоит в поиске всех значений переменных, удовлетворяющих данному уравнению. На листинге ниже (*Листинг 3*) приводится пример поиска корней кубической параболы $F(x)$, на интервале $x \in [-5, 5]$. Этот способ визуальный и очень грубый.

Корни могут быть уточнены методом табуляции – вычисления значений функции в точках x , выбираемых из интервала $[-4, 4]$ с шагом 0.5. Точность вычисления корней при таком методе не превосходит $\varepsilon=0.5$. Для выделения корня с заданной точностью необходимо повторить вычислительный эксперимент требуемое число раз, уменьшая каждый раз границы интервала табуляции, шаг табуляции и точность вывода полученных значений на экран (*Рис. 6*).

Листинг 3. Табуляция функции и построение графика



В пакете *MathCAD* существует встроенная функция $root(f(x), x)$, выполняющая такие действия автоматически. Нужно только явно задать функцию $f(x)$ и начальное значение x_0 , от которого начинается итерационное численное уточнение корня.

В примере (Листинг 4) приведены примеры уточнения корня трансцендентной функции $f(x) = x^2 \cdot \sin(x) - e^{-x}$, для различных начальных условий.

Можно видеть, что значения отличаются друг от друга, начиная с четвертого знака после запятой. Это связано с тем, что точность расчетов по умолчанию имеет значение $TOL = 10^{-3}$.

Численные расчеты всегда выполняются с определенной точностью. Эта точность задается константой TOL .

Меняя принудительно значение TOL , как в примере (Листинг 4), можно управлять точностью вычислений.

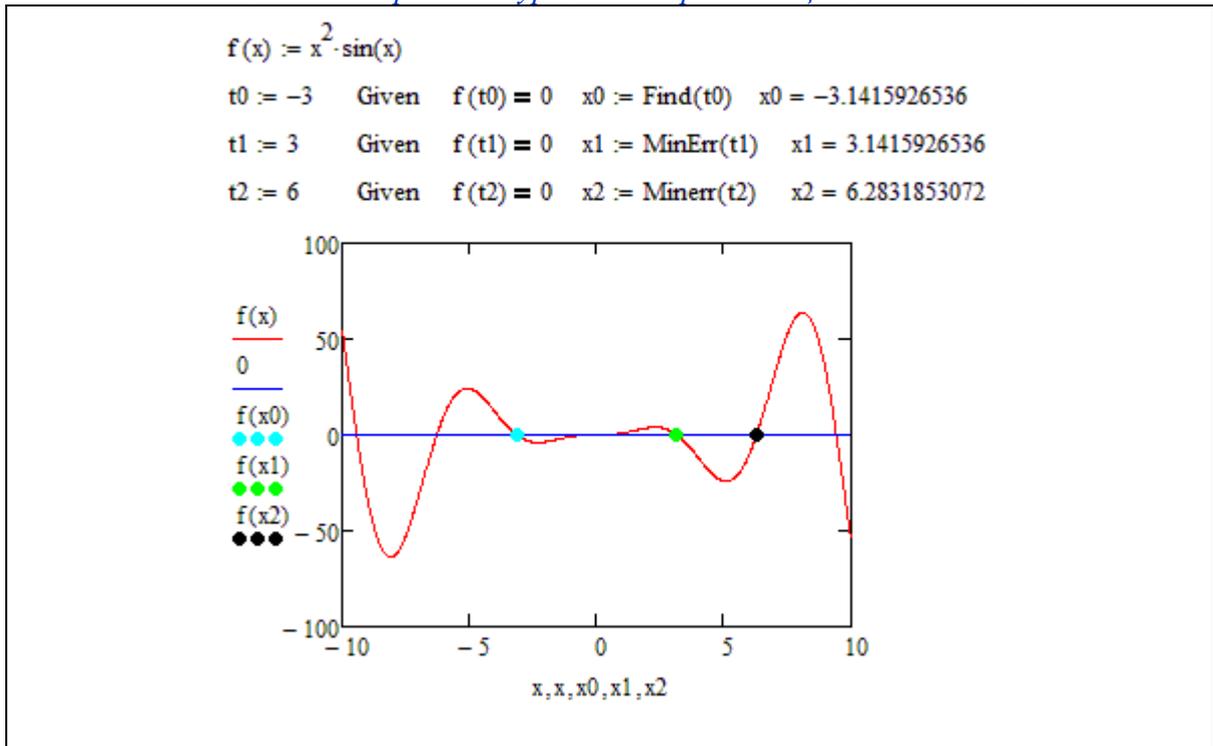
Листинг 4. Поиск корней функции. Точность численного метода

$f(x) := x^2 \cdot \sin(x) - e^{-x}$		$TOL := 10^{-6}$	
$z := 0.7951$	$root(f(z), z) = 0.79519783$	$z := 0.7951$	$root(f(z), z) = 0.79519788$
$z := 0.1$	$root(f(z), z) = 0.7951641$	$z := 0.1$	$root(f(z), z) = 0.79519783$
$z := 0.9$	$root(f(z), z) = 0.79563728$	$z := 0.9$	$root(f(z), z) = 0.79519788$

Аналитические функции поиска корней нелинейного уравнения

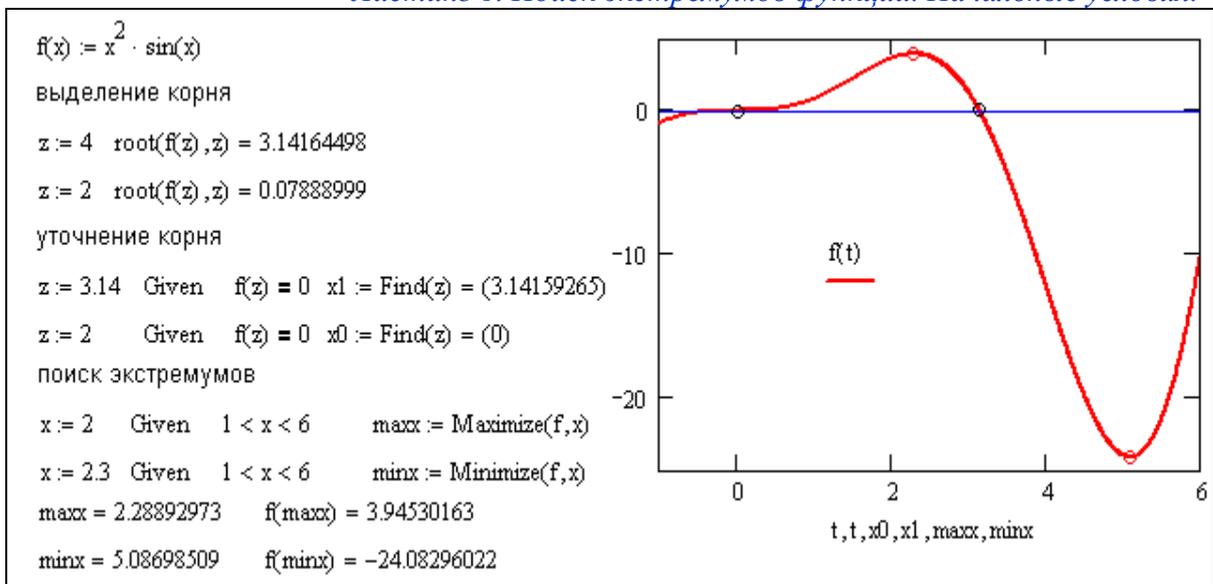
Пара операторов *Given-Find* и *Given-Minerr* позволяет находить корни уравнения аналитически (см. Листинг 5). Здесь точность вычисления корня не зависит от TOL , а ограничивается точностью округления вещественных чисел.

Листинг 5. Поиск решения уравнений при помощи Given-Find и Given-Minerr



Для автоматизированного поиска экстремумов функции используются операторы *Given-Minimize* и *Given-Maximize* (Листинг 6). Для выполнения поиска экстремумов необходимо задать начальное приближение x , так как максимумов и минимумов у функции может быть несколько, и поиск производится в окрестности начального приближения.

Листинг 6. Поиск экстремумов функции. Начальные условия.



Кроме того, диапазон поиска экстремума можно ограничить при помощи неравенства-ограничения, накладываемого на начальное приближение x . Список неравенств-ограничений (в предыдущем примере он такой: $1 < x < 6$) располагается после оператора *Given*, но перед *Minimize* или *Maximize*.

Построение точек экстремума и точек перегиба

Из определения и геометрических свойств производной функции в точке следует, что изменение знака первой производной определяет участки монотонности

функции и точки экстремума, а знак второй производной – участки выпуклости (вогнутости) и точки перегиба.

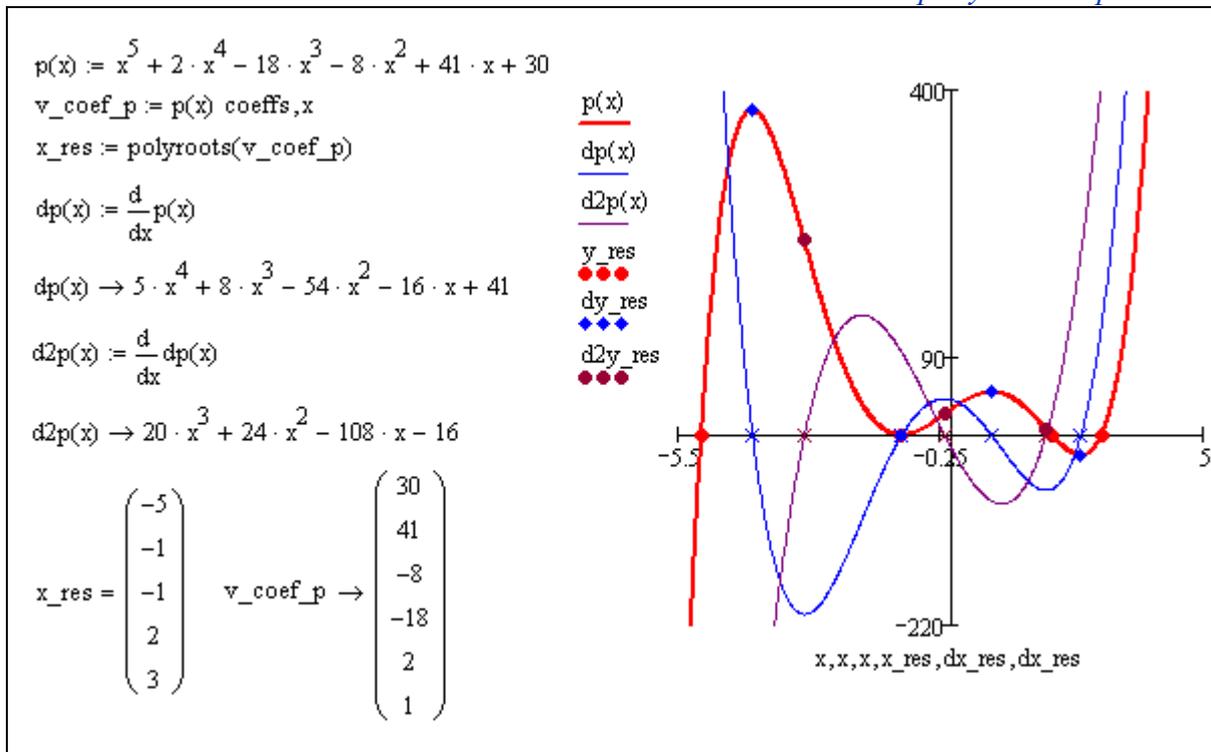
В MathCAD существует встроенный инструмент, позволяющий *аналитически находить производную любой функции*, составленной из произвольной комбинации элементарных функций. Если же этого не достаточно, то существует возможность *численно находить производную любой функции* в точке (из области определения).

Как видно из примера (Листинг 7), корни полинома $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ можно найти используя встроенную функцию **polyroots(v)**. В качестве аргумента функции **polyroots** должен вводиться вектор коэффициентов полинома $v = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$. А результат действия функции **polyroots** – это вектор корней полинома $p(x)$, причем, кратные корни встречаются положенное количество раз.

В примере (Листинг 7) опущен процесс поиска корней производной функции $dp(x)$ – точек экстремума и корней второй производной $d^2p(x)$ – точек перегиба: этот поиск производится аналогично при помощи функции **polyroots**.

Исследование полинома – самый простой из примеров исследования функции. Полином 5 степени, очевидно, имеет 5 корней – $(x_1 = -5, x_2 = -1, x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = 3)$, и (так как первая производная имеет 4-ю степень) – 4 экстремума: $(x'_1 = -3.981, x'_2 = -1, x'_3 = 0.797, x'_4 = 2.584)$. Кроме того, он имеет 3 точки перегиба $(x''_1 = -2.943, x''_2 = -0.144, x''_3 = 1.887)$, так как вторая производная имеет 3-ю степень.

Листинг 7. Исследование экстремумов и перегибов



Возможность автоматически строить производные практически любой функции в комплексе с богатым набором средств *отыскания корней* функции делают задачу отыскания точек экстремума и точек перегиба чрезвычайно легкой. Для этого необходимо:

- вычислить $dp(x) = df(x)/dx$ – первую производную функции $f(x)$ и найти ее корни аналитически или численно;

- найденные точки – *точки экстремума*, а интервалы между ними и границами области определения – *участки монотонности*;
- вычислить $ddp(x) = d^2 f(x)/dx^2 = dp(x)/dx$ – вторую производную функции $f(x)$ (или первую производную от $dp(x)$) и найти ее корни;
- найденные точки – *точки перегиба*, а участки, расположенные между *точками перегиба* и границами области определения – *участки вогнутости или выпуклости*.

Листинг 8. Исследование экстремумов и перегибов

$y(x) := \ln \frac{x+1}{x+2}$; область определения $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Вычислим первую производную:

$$y'(x) := \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right) \quad dy(x) := \frac{d}{dx} y(x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{(x+1) \cdot (x+2)} \quad dy(x) \rightarrow \frac{1}{(x+1) \cdot (x+2)}$$

Находим особые точки $x_1 = -1, x_2 = -2$. Определим знак производной на интервалах, на которые особые точки делят область определения функции:

$$dy(5) = 0.024 \quad dy(-5) = 0.083$$

	<i>возрастает</i>	-----	<i>возрастает</i>	
$y'(x)$	+	-2	-1	+
		o	o	x

Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -2), (-1; +\infty)$. Экстремумов нет.

Исследуем функцию на выпуклость и точки перегиба. Найдем вторую производную:

$$ddy(x) := \frac{d^2}{dx^2} y(x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{-(2 \cdot x + 3)}{(x+2)^2 \cdot (x+1)^2} \quad ddy(x) \rightarrow \frac{(-2) \cdot x - 3}{(x+2)^2 \cdot (x+1)^2}$$

Особые точки $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -1.5$. Исследуем знак второй производной на интервалах, на которые особые точки делят область определения функции:

$$ddy(5) = -7.37 \times 10^{-3} \quad ddy(-5) = 0.049$$

	<i>выпукла вниз</i>	-----	<i>выпукла вверх</i>	
$y''(x)$	+	-2	-1	-
		o	o	x

Функция выпукла вниз на интервале $(-\infty; -2)$ и выпукла вверх на $(-1; +\infty)$. Перегибов нет.

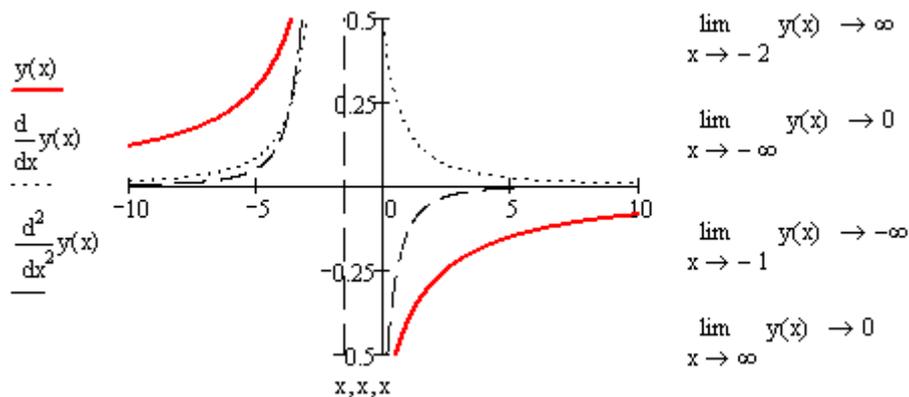


Рис. 12 – Исследование экстремумов и перегибов (2)

Листинг 9. Исследование экстремумов и перегибов

$y(x) := \frac{e^x}{x}$; область определения $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
 Рассмотрим поведение функции в особой точке:
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) \rightarrow \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) \rightarrow -\infty$. $y(x) \equiv 0$ – вертикальная асимптота.
 Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Вычислим первую производную:
 $y(x) = \frac{e^x}{x}$ $dy(x) := \frac{d}{dx} y(x) \text{ simplify} \rightarrow e^x \cdot \frac{x-1}{x^2}$ $dy(x) \rightarrow e^x \cdot \frac{x-1}{x^2}$
 Находим точки экстремума:
 Given $dy(t) = 0$ $x0 := \text{Find}(t)$ $x0 = 1$ $y(x0) \rightarrow e$ $y0 := y(x0)$ $y0 = 2.718$
 Первая производная пересекает ось OX в точке $(1, e)$ – экстремум. Определим знак производной на интервалах, на которые особые точки делят область определения функции:
 $y(x)$ убывает убывает возрастает
 $y'(x)$ - 0 - 1 + x
 Функция убывает на интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 1]$ и возрастает на интервале $[1; +\infty)$.
 Точка $(1, e)$ – точка минимума.
 Исследуем функцию на выпуклость и точки перегиба. Найдем вторую производную:
 $ddy(x) := \frac{d^2}{dx^2} y(x) \text{ simplify} \rightarrow e^x \cdot \frac{x^2 - 2 \cdot x + 2}{x^3}$ $ddy(x) \rightarrow e^x \cdot \frac{x^2 - 2 \cdot x + 2}{x^3}$
 Особая точка $x = 0$, действительных корней нет. Исследуем знак второй производной на интервалах, на которые особые точки делят область определения функции:
 $ddy(-3) = -0.031$ $ddy(3) = 3.72$
 $y(x)$ выпукла вверх выпукла вниз
 $y''(x)$ - 0 + x
 Функция выпукла вверх на интервале $(-\infty; 0)$ и выпукла вниз на $(0; +\infty)$. Перегибов нет.

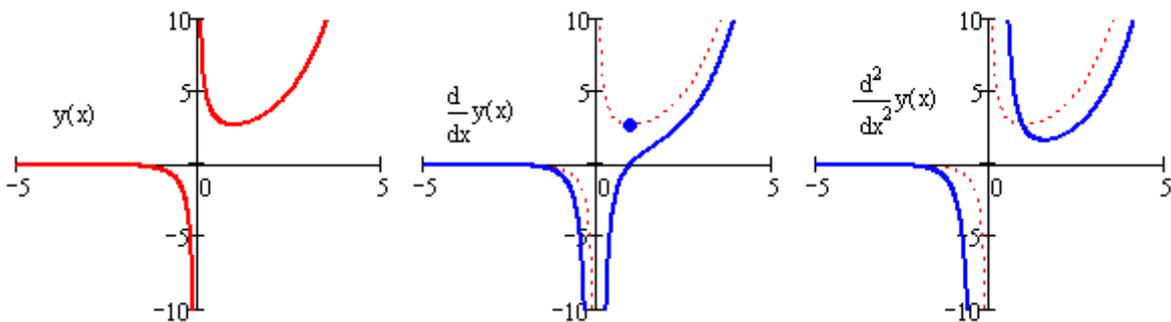


Рис. 13 – Исследование экстремумов и перегибов (3)

Листинг 10. Исследование экстремумов и перегибов

$y(x) := \frac{x^3}{x^2 - 1}$; область определения $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Рассмотрим поведение функции в особых точках:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y(x) \rightarrow -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} y(x) \rightarrow \infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) \rightarrow -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) \rightarrow \infty$$

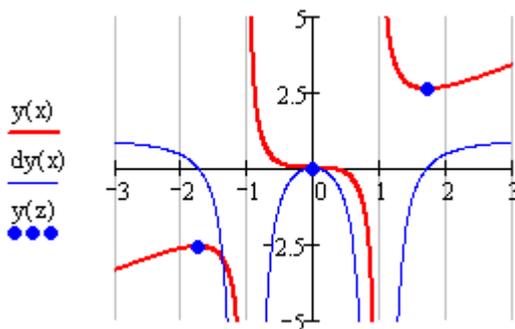
$y(x) \equiv -1$ и $y(x) \equiv 1$ – вертикальные асимптоты.

Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Вычислим первую производную:

$$y(x) := \frac{x^3}{x^2 - 1} \quad dy(x) := \frac{d}{dx} y(x) \text{ simplify} \rightarrow x^2 \cdot \frac{x^2 - 3}{(x^2 - 1)^2}$$

Находим точки экстремума:

$$t := 2 \quad \text{Given} \quad dy(t) = 0 \quad x0 := \text{Find}(t) \quad x0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3^{\frac{1}{2}} \\ -3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad z := \begin{pmatrix} x0 \\ 0 \\ -x0 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 1.732 \\ 0 \\ -1.732 \end{pmatrix}$$



Первая производная пересекает ось Ox в трех точках $(-\sqrt{3}, -1.5\sqrt{3})$, $(0, 0)$ и $(\sqrt{3}, 1.5\sqrt{3})$ – экстремумы. Определим знак производной на интервалах, на которые особые точки делят область определения функции. Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -\sqrt{3}]$ и $[\sqrt{3}; \infty)$ и убывает на

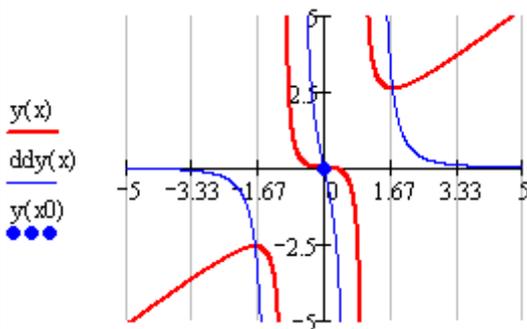
интервалах $[-\sqrt{3}; -1)$, $(-1, 0]$, $[0; 1)$ и $(1, \sqrt{3}]$.

Точка $(-\sqrt{3}, -1.5\sqrt{3})$ – максимум, а $(\sqrt{3}, 1.5\sqrt{3})$ – минимум.

Исследуем функцию на выпуклость и точки перегиба. Найдем вторую производную:

$$ddy(x) := \frac{d^2}{dx^2} y(x) \text{ simplify} \rightarrow 2 \cdot x \cdot \frac{x^2 + 3}{(x^2 - 1)^3}$$

$$tt := 0.5 \quad \text{Given} \quad ddy(tt) = 0 \quad x0 := \text{Find}(tt) \quad x0 = 0$$



Точка перегиба $x = 0$. Исследуем знак второй производной на интервалах, на которые особые точки делят область определения функции:

$y(x)$	вверх	вниз	вверх	вниз				
$y''(x)$	-	-1	+	0	-	1	+	x

Функция выпукла вверх на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0]$ и выпукла вниз на участках $[0; 1)$ и $(1; +\infty)$. Точка перегиба

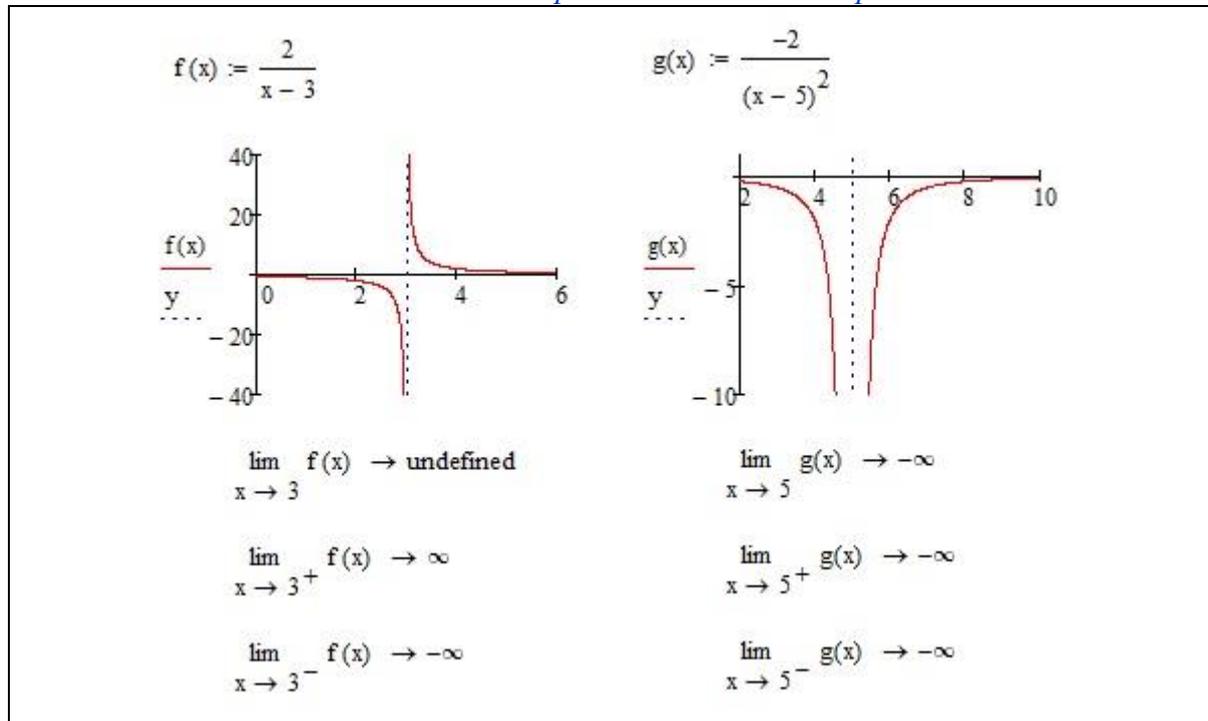
$x = 0$.

Построение асимптот

Асимптоты – это прямые линии, к которым приближается график функции $f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ или при $x \rightarrow x^* \pm 0$ – на бесконечности или на границах x^* области определения.

Вертикальные асимптоты – прямые, параллельные оси OY , задаваемые уравнением $x = x^*$, причем $\lim_{x \rightarrow x^*+0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim_{x \rightarrow x^*-0} f(x) = \pm\infty$. При приближении к точке $x \rightarrow x^* \pm 0$ справа или слева функция $f(x)$ стремится к бесконечности.

Листинг 11. Построение асимптот: вертикальные асимптоты



Горизонтальные или наклонные асимптоты ищутся в виде прямых $y = kx + b$, где $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ – тангенс угла наклона асимптоты, и $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$ – смещение по вертикальной оси.

Горизонтальные или наклонные асимптоты следует искать лишь тогда, когда функция определена на бесконечности.

Если $k=0$ и $b \neq \infty$, то наклонная асимптота станет горизонтальной.

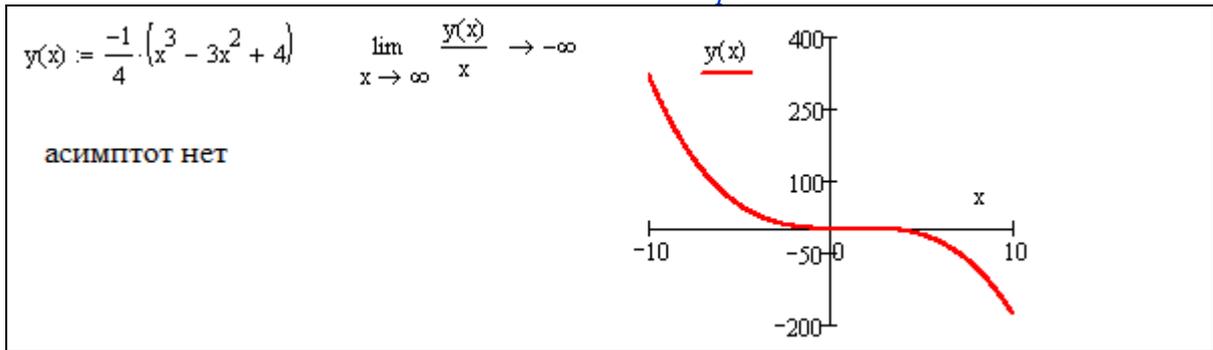
Если горизонтальных или наклонных асимптот нет, но функция определена на всей числовой оси, то следует вычислить предел функции на плюс бесконечности и (или) минус бесконечности, чтобы иметь представление о поведении графика функции в пределе.

Рассмотрим примеры:

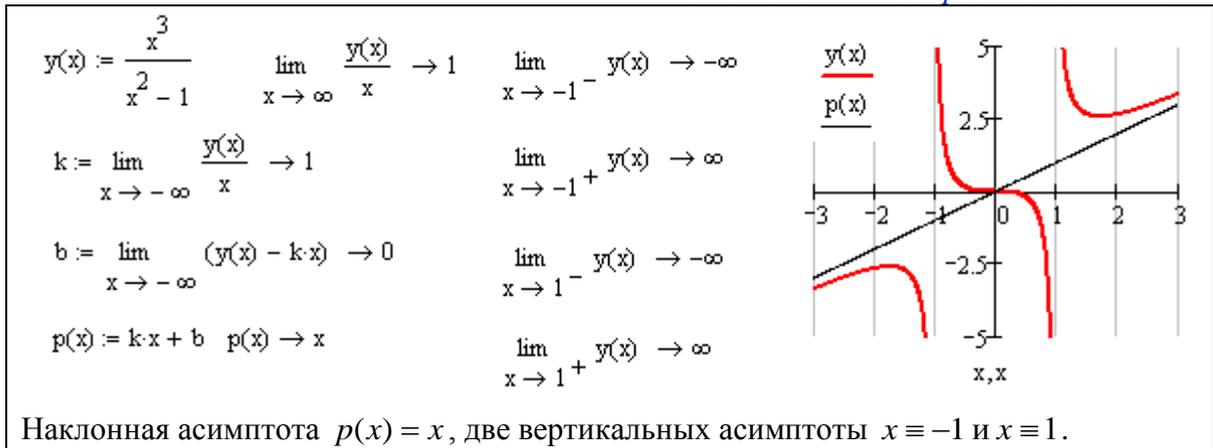
Листинг 12. Построение асимптот: наклонная асимптота



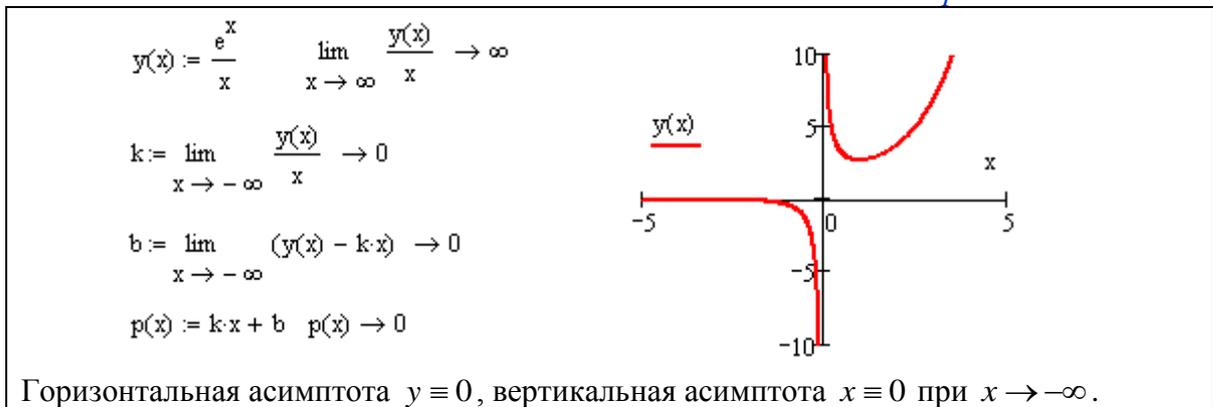
Листинг 13. Построение асимптот: асимптот нет



Листинг 14. Построение асимптот



Листинг 15. Построение асимптот



Данный параграф иллюстрирует, насколько облегчается задача исследования функции с использованием такого мощного инструмента как MathCAD. Выполняемая практическая работа служит для закрепления навыков исследования функций.

Интегралы

В электронике интегралы используются для решения дифференциальных уравнений, описывающих поведение токов и напряжений в электрических цепях, а также вычисления интегральных показателей, таких как работа и мощность. Система MathCAD позволяет производить значительное количество расчетов с таким математическим объектом, как интеграл. Это, в частности, вычисление неопределенного интеграла (первообразной функции):

Листинг 16. Вычисление первообразной функции с проверкой

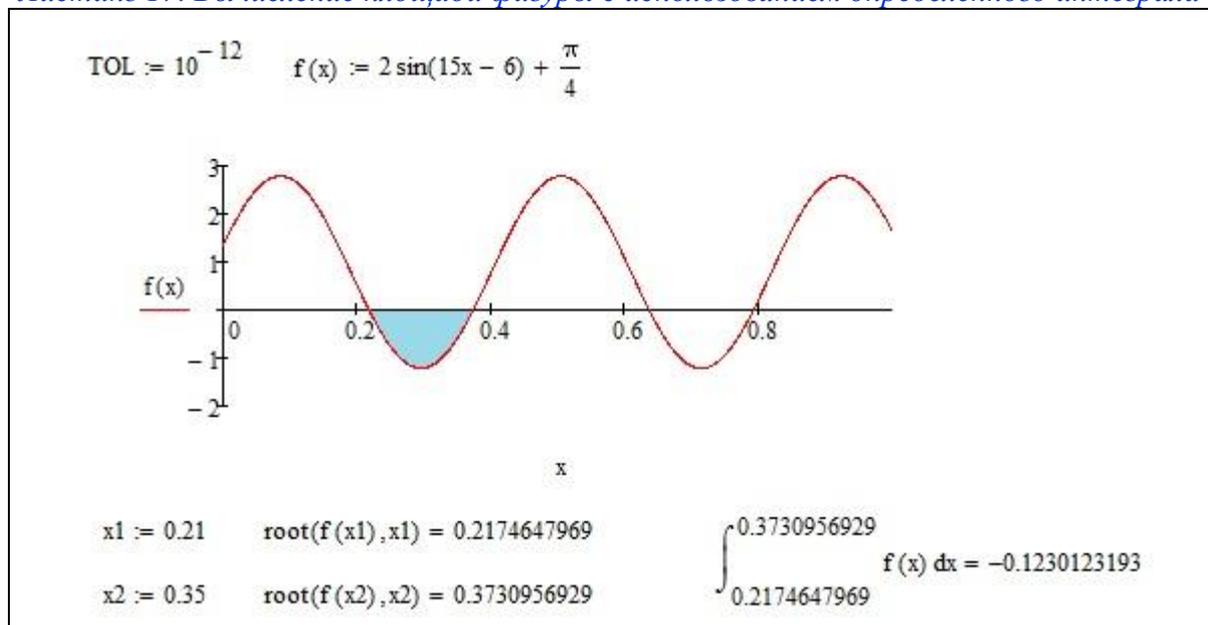
$$f(x) := \frac{2}{x-3} \quad \int f(x) dx \rightarrow 2 \cdot \ln(x-3) \quad \frac{d}{dx}(2 \cdot \ln(x-3)) \rightarrow \frac{2}{x-3}$$

$$g(x) := \frac{-2}{(x-5)^2} \quad \int g(x) dx \rightarrow \frac{2}{x-5} \quad \frac{d}{dx} \frac{2}{x-5} \rightarrow -\frac{2}{(x-5)^2}$$

Имеется возможность находить определенный интеграл с заданием пределов интегрирования и даже несобственные интегралы. В примере ниже требуется вычислить площадь криволинейной фигуры (отмеченной голубым цветом), ограниченной графиком заданной функции - для этого используется определенный интеграл.

Сначала (см.) необходимо вычислить пределы интегрирования а это, очевидно, корни функции, близкие к $x_1=0.21$ и $x_2=0.35$.

Листинг 17. Вычисление площади фигуры с использованием определенного интеграла



Вычислив корни функции $f(x)$ при помощи функции **root()**, используем шаблон определенный интеграл, в который необходимо вписать интегрируемую функцию, пределы интегрирования и переменную интегрирования.

Следует отметить, что в зависимости от расположения кривой и оси OX , интеграл может получаться положительным и отрицательным, но площадь фигуры отрицательной быть не может.

1.6. Практическая работа №1. Вычисления на MathCAD

Продолжительность – 2 часа.

Цель работы

1. Демонстрация возможностей *MathCAD*. Получение навыков отладки программы, выполнения вычислений и вывода результатов. Нарботка умения задавать переменные, константы и строить графики на рабочем поле при помощи шаблонов.

2. Приобретение компетенций в части применения средств *MathCAD* для исследования функции и построения ее графика. Закрепление школьных знаний по исследованию функций одной переменной на более серьезном академическом уровне.

Задание на практическую работу

1. Создать программу в среде *MathCAD*. Вычислить значение математической функции $f(x)$ в заданной точке x_0 . Вывести полученный результат с требуемой точностью ε (заданное количество знаков после запятой). Индивидуальные варианты содержит (Таблица 2). Вывести результат до десятого знака после запятой.

2. Построить график заданной функции при помощи шаблона «*график*» в *MathCAD*. Выяснить область определения (область допустимых значений) заданной функции. Построение графика функции может помочь увидеть ОДЗ.

3. Найти x_1 – корень функции (корень уравнения $f(x)=0$, точку пересечения графика функции с осью абсцисс OX) из заданного диапазона, с заданной точностью ε , используя для этого функцию **root(f(x),x)**.

4. Найти предел функции в заданной точке x_2 (а также пределы справа и слева), используя для этого шаблон **lim** из панели инструментов «*мат. анализ*».

5. Вспомнить связь производной функции и её экстремумов. Отыскать и построить на графике локальный экстремум функции $f(x)$, обозначенный на рисунке синей пунктирной линией.

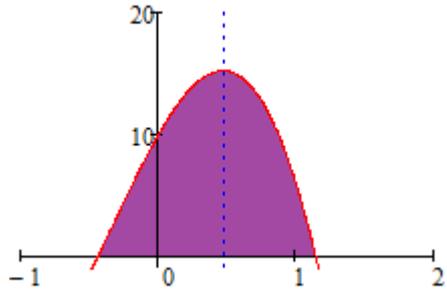
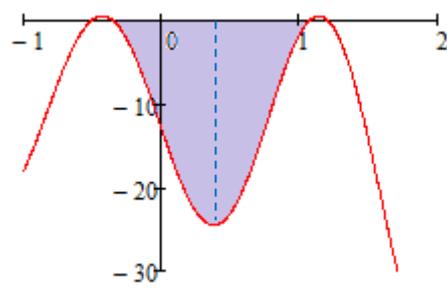
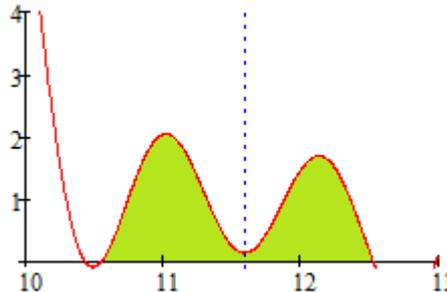
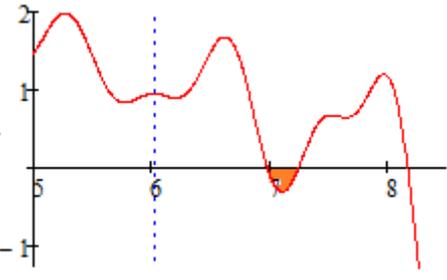
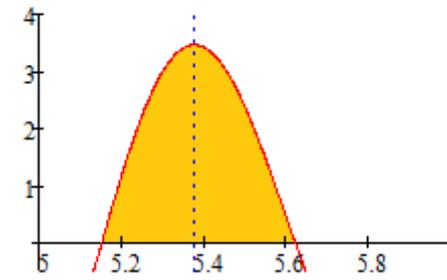
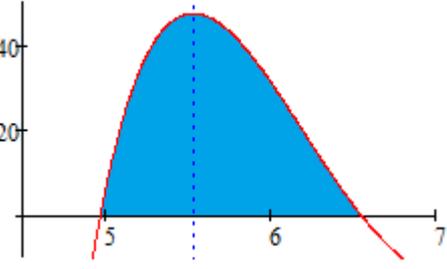
6. Вычислить площадь закрашенной цветом криволинейной фигуры, ограниченной графиком заданной функции $f(x)$, использовать для вычисления определенный интеграл.

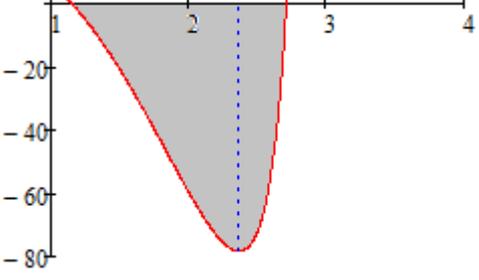
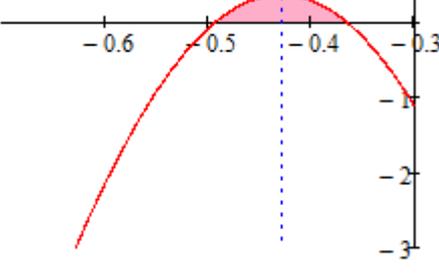
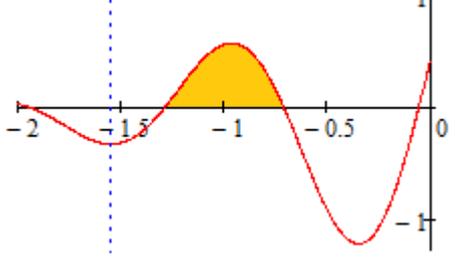
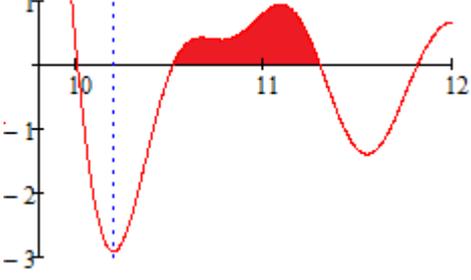
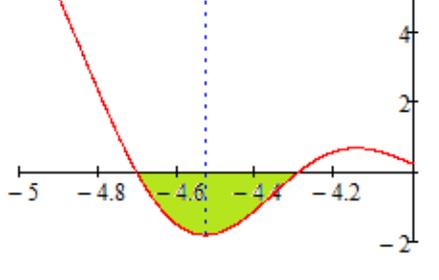
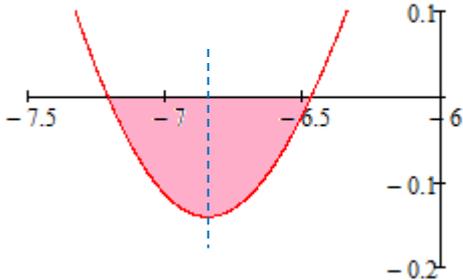
7. Подготовить отчет, в котором отразить листинг программы с комментариями и привести скриншоты с результатами работы программы и графики анализируемых функций. (если задание выполняется в виде теста в электронном курсе, то составлять отчет не требуется).

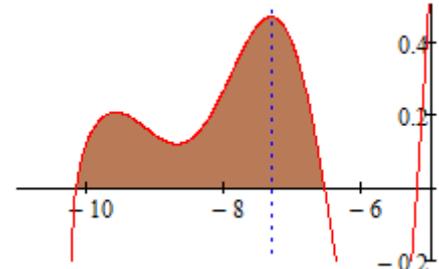
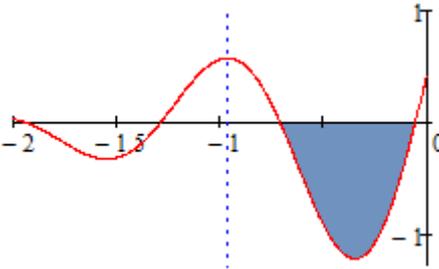
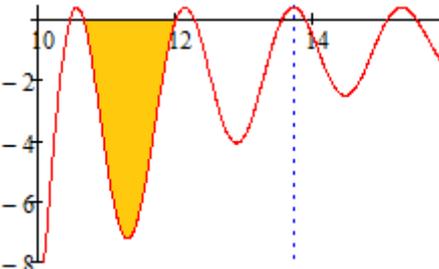
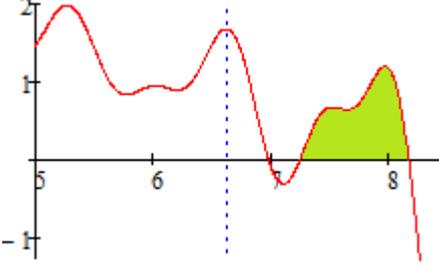
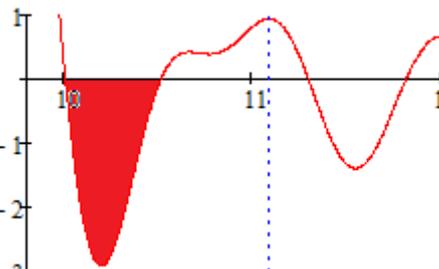
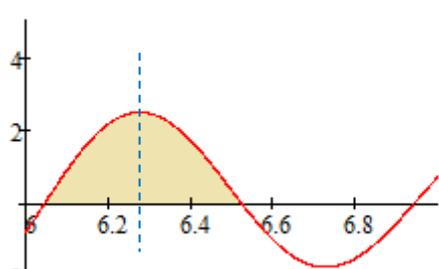
Таблица 2

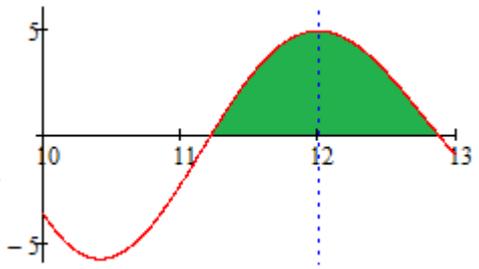
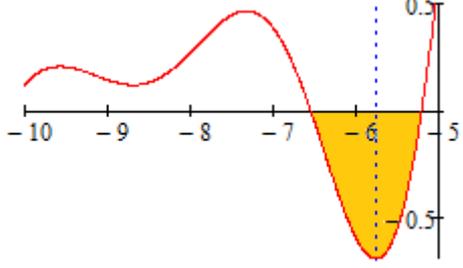
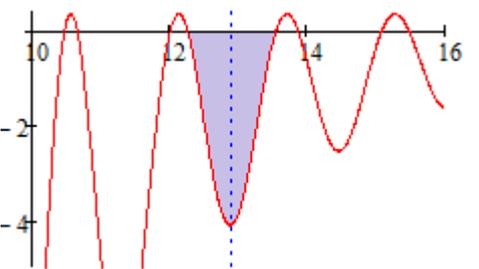
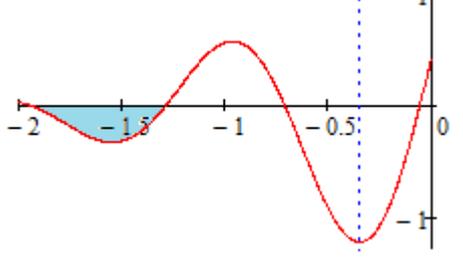
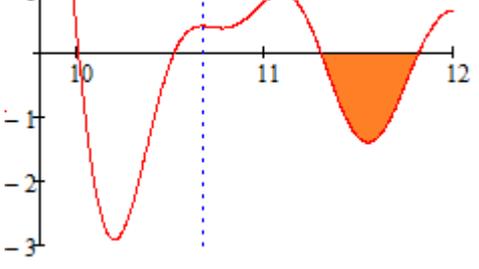
Варианты индивидуальных заданий

№	$f(x), \varepsilon, x_0, x_1, x_2$	$S, \text{extremum}$
1.	$f(x) := \frac{\pi^3 \cdot \cos(7x) \cdot \ln(x+5)}{(3+x)(x-e)} + \frac{\pi}{15}$ $x_0 := -4 \quad \text{eps} := 10^{-7}$ $x_1 := (-4..-3) \quad x_2 := -3$	
2.	$f(x) := \frac{e^3 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot (x+4)}{(x-4)(x-\pi)} + \frac{\pi}{3e}$ $x_0 := -6.8 \quad \text{eps} := 10^{-10}$ $x_1 := (-6..-2) \quad x_2 := -4$	

3.	$f(x) := \frac{e}{5\pi} - \frac{e^5 \cdot \ln\left(x + \frac{13\pi}{4}\right) \cdot \sin(2x + 4)}{(x + e)(x - \pi)^2}$ $x0 := 0.5 \quad \text{eps} := 10^{-7}$ $x1 := (-1..0) \quad x2 := \pi$	
4.	$f(x) := \frac{2e}{5\pi} - \frac{\left(e^3 \cdot \ln\left(x + \frac{13\pi}{4}\right)\right)^2 \cdot \sin(2x + 4)^2}{(x + \pi)(x - 2e)^2}$ $x0 := 1 \quad \text{eps} := 10^{-10}$ $x1 := (-1..1) \quad x2 := 2e$	
5.	$\frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)^2 \cdot \ln(3x + 7)}{x - 3\pi} + \frac{\ln(3x + 8)^2 \cdot \cos(5x + 3e)}{x - e}$ $x0 := 11 \quad \text{eps} := 10^{-10}$ $x1 := (10..11) \quad x2 := 3\pi$	
6.	$\frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)^2 \cdot \ln(3x + 7) \cdot \cos(5x + 3e)}{x - 3 \cdot \pi} + \frac{\pi}{x - e}$ $x0 := 7 \quad \text{eps} := 10^{-8}$ $x1 := (7..8) \quad x2 := e$	
7.	$f(x) := \frac{\pi^3 \cdot \cos(7x) \cdot \ln(x + 5)}{(3 + x)(x - e)} + \frac{\pi}{15}$ $x0 := 5 \quad \text{eps} := 10^{-8}$ $x1 := (5..6) \quad x2 := -3$	
8.	$f(x) := \frac{e^3 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot (x + 4)}{(x - 4)(x - \pi)} + \frac{\pi}{3e}$ $x0 := 6 \quad \text{eps} := 10^{-8}$ $x1 := (6..7) \quad x2 := \infty$	

<p>9.</p>	$f(x) := \frac{e}{5\pi} - \frac{e^5 \cdot \ln\left(x + \frac{13\pi}{4}\right) \cdot \sin(2x + 4)}{(x + e)(x - \pi)^2}$ <p> $x0 := 2.5$ $eps := 10^{-10}$ $x1 := (2..3)$ $x2 := -e$ </p>	
<p>10.</p>	$f(x) := \frac{2e}{5\pi} - \frac{\left(e^3 \cdot \ln\left(x + \frac{13\pi}{4}\right)\right)^2 \cdot \sin(2x + 4)^2}{(x + \pi)(x - 2e)^2}$ <p> $x0 := 1$ $eps := 10^{-10}$ $x1 := (-1..1)$ $x2 := 2e$ </p>	
<p>11.</p>	$\frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)^2 \cdot \ln(3x + 7)}{x - 3\pi} + \frac{\ln(3x + 8)^2 \cdot \cos(5x + 3e)}{x - e}$ <p> $x0 := -2$ $eps := 10^{-9}$ $x1 := (-1.5..-1)$ $x2 := e$ </p>	
<p>12.</p>	$\frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)^2 \cdot \ln(3x + 7) \cdot \cos(5x + 3e)}{x - 3\pi} + \frac{\pi}{x - e}$ <p> $x0 := 10$ $eps := 10^{-9}$ $x1 := (11..12)$ $x2 := e$ </p>	
<p>13.</p>	$f(x) := \frac{\pi^3 \cdot \cos(7x) \cdot \ln(x + 5)}{(3 + x)(x - e)} + \frac{\pi}{15}$ <p> $x0 := -4.5$ $eps := 10^{-9}$ $x1 := (-5..-4)$ $x2 := \infty$ </p>	
<p>14.</p>	$f(x) := \frac{e^3 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot (x + 4)}{(x - 4)(x - \pi)} + \frac{\pi}{3e}$ <p> $x0 := -7.5$ $eps := 10^{-8}$ $x1 := (-7..-6)$ $x2 := \pi$ </p>	

<p>15.</p>	$f(x) := \frac{e}{5\pi} - \frac{e^5 \cdot \ln\left(x + \frac{13\pi}{4}\right) \cdot \sin(2x + 4)}{(x + e)(x - \pi)^2}$ <p> $x0 := 7$ $eps := 10^{-9}$ $x1 := (-10..-6)$ $x2 := \infty$ </p>	
<p>16.</p>	$\frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)^2 \cdot \ln(3x + 7)}{x - 3\pi} + \frac{\ln(3x + 8)^2 \cdot \cos(5x + 3e)}{x - e}$ <p> $x0 := -1$ $eps := 10^{-8}$ $x1 := (-1..-0.5)$ $x2 := 3\pi$ </p>	
<p>17.</p>	$f(x) := \frac{2e}{5\pi} - \frac{\left(e^3 \cdot \ln\left(x + \frac{13\pi}{4}\right)\right)^2 \cdot \sin(2x + 4)^2}{(x + \pi)(x - 2e)^2}$ <p> $x0 := 12$ $eps := 10^{-8}$ $x1 := (13..14)$ $x2 := -\pi$ </p>	
<p>18.</p>	$\frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)^2 \cdot \ln(3x + 7) \cdot \cos(5x + 3e)}{x - 3\pi} + \frac{\pi}{x - e}$ <p> $x0 := 6$ $eps := 10^{-7}$ $x1 := (6..7)$ $x2 := 3\pi$ </p>	
<p>19.</p>	$\frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)^2 \cdot \ln(3x + 7) \cdot \cos(5x + 3e)}{x - 3\pi} + \frac{\pi}{x - e}$ <p> $x0 := 12$ $eps := 10^{-10}$ $x1 := (11.5..12)$ $x2 := 3\pi$ </p>	
<p>20.</p>	$f(x) := \frac{\pi^3 \cdot \cos(7x) \cdot \ln(x + 5)}{(3 + x)(x - e)} + \frac{\pi}{15}$ <p> $x0 := 6.8$ $eps := 10^{-10}$ $x1 := (6..7)$ $x2 := \infty$ </p>	

<p>21.</p>	$f(x) := \frac{e^3 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot (x + 4)}{(x - 4)(x - \pi)} + \frac{\pi}{3e}$ <p> $x0 := 11$ $eps := 10^{-9}$ $x1 := (10..12)$ $x2 := \pi$ </p>	
<p>22.</p>	$f(x) := \frac{e}{5\pi} - \frac{e^5 \cdot \ln\left(x + \frac{13\pi}{4}\right) \cdot \sin(2x + 4)}{(x + e)(x - \pi)^2}$ <p> $x0 := 7$ $eps := 10^{-10}$ $x1 := (-6..-4)$ $x2 := \pi$ </p>	
<p>23.</p>	$f(x) := \frac{2e}{5\pi} - \frac{\left(e^3 \cdot \ln\left(x + \frac{13\pi}{4}\right)\right)^2 \cdot \sin(2x + 4)^2}{(x + \pi)(x - 2e)^2}$ <p> $x0 := 15$ $eps := 10^{-9}$ $x1 := (12..14)$ $x2 := -\pi$ </p>	
<p>24.</p>	$\frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)^2 \cdot \ln(3x + 7)}{x - 3\pi} + \frac{\ln(3x + 8)^2 \cdot \cos(5x + 3e)}{x - e}$ <p> $x0 := -2$ $eps := 10^{-7}$ $x1 := (-2..-1.5)$ $x2 := \infty$ </p>	
<p>25.</p>	$\frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)^2 \cdot \ln(3x + 7) \cdot \cos(5x + 3e)}{x - 3\pi} + \frac{\pi}{x - e}$ <p> $x0 := 1$ $eps := 10^{-7}$ $x1 := (9.5..10)$ $x2 := \infty$ </p>	

Контрольные вопросы:

1. Что представляет из себя проект (программа) на MathCAD?
2. Какие виды оператора определения (присваивания, назначения) вам известны?
3. Как связаны нули функции и экстремумы производной?
4. Какие пакеты профессиональных математических вычислений вам известны?
5. Опишите окно интерфейса MathCAD. Рабочий лист и регионы.
6. Как установить при выводе на экран количество знаков после запятой?
7. Как задается точность численных расчетов в MathCAD?

8. Что такое участок возрастания и убывания функции? Как эти участки связаны с поведением производной?
9. Опишите инструментальные панели и шаблоны и методы работы с ними.
10. Как задается диапазон и шаг изменения переменной в MathCAD?
11. Опишите, как задать функцию и вычислить значение этой функции в точке?
12. Что такое корень уравнения?
13. Опишите способ вычисления корней при помощи стандартной процедуры $\text{root}(f(x), x)$, как можно задать точность вычислений?
14. Что такое нули функции и как их вычислять?
15. Как построить график функции одного параметра, задать диапазон изменения параметров, цвет и ширину линии? Как поставить точку на графике?
16. Что такое участок возрастания и убывания функции? Как они выглядят на графике, как их можно вычислить? Как эти участки связаны с поведением производной?
17. Как построить график прямой, параллельной оси Ox или оси Oy ?
18. Как определить экстремумы функции по поведению производных?
19. Что такое экстремум функции? Как его находить?
20. Как установить при выводе на экран количество знаков после запятой?
21. Как задается точность численных расчетов в MathCAD?
22. Опишите, как задать функцию и вычислить значение этой функции в точке?
23. Что такое корень уравнения?
24. Что такое непрерывная функция? Дайте строгое определение через пределы.
25. Что такое нули функции и как их вычислять?
26. Как построить в одном окне графики нескольких функции одного параметра? Как задать для них разные параметры?
27. Как найти горизонтальные и наклонные асимптоты функции?
28. Как построить график функции одного параметра? Как поставить точку на графике?
29. Как построить график прямой, параллельной оси Ox или оси Oy ?
30. Как может вести себя функция на бесконечности? Перечислить все случаи.
31. Что такое область определения функции? Что такое особые точки?
32. Описать поведение функции на границах области определения и на бесконечности.
33. Как установить, является ли функция чётной или нечётной. Дайте строгое определение.
34. Как определить, является ли функция периодической или нет. Определение.
35. Как найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
36. Как найти вертикальные асимптоты?
37. Опишите понятие предела функции в точке? На бесконечности?

2. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ MATHCAD

2.1. Панель программирования и шаблоны операторов

Система *MathCAD* обладает широкими возможностями для написания сложных алгоритмических конструкций. Алгоритмические команды (*операторы*) вызываются из окна *Programming* (*Программирование*) как на

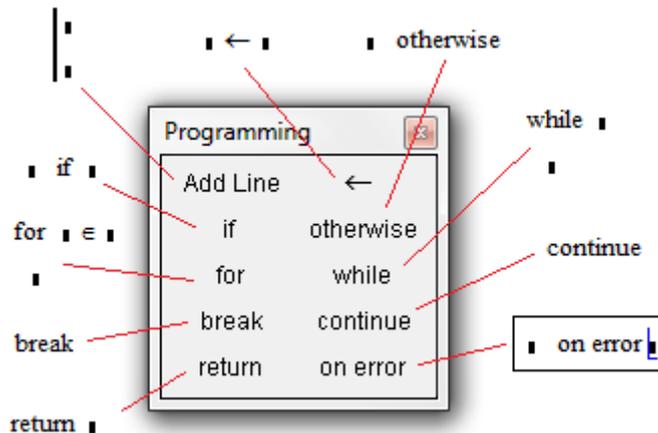


Рис. 14 – Окно вызова алгоритмических команд (операторов)

Операторный блок Add Line. Вертикальная линия (оператор **Add Line**) объединяет отдельные операторы в *операторный блок* с одним входом и одним выходом, который выполняется как единый оператор. Увеличить количество операторов внутри *операторного блока* можно многократным нажатием на кнопку «Add Line». Внутри операторного блока операторы выполняются последовательно сверху вниз.

Оператор локального присваивания. Кнопка «←» – это оператор присвоения значения локальной переменной. Область видимости такой переменной ограничена операторным блоком, задаваемым при помощи **Add Line**. Локальность переменной подразумевает ее невидимость вне операторного блока (программы), что не допускает путаницы переменных из разных программ.

Оператор выбора. Шаблон **if** (*если*) позволяет вводить в программу альтернативу с одной ветвью, иначе говоря, *оператор условного перехода*.

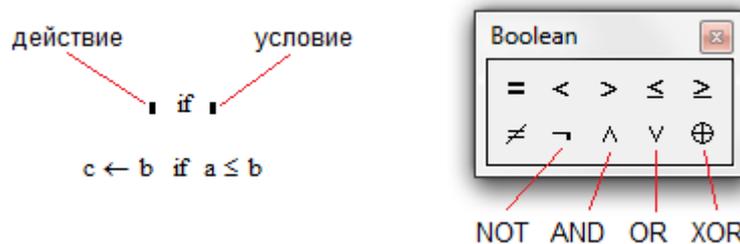


Рис. 15 – Структура оператора **if**. Блок ввода логических команд

Суть условного перехода в проверке *условия*, которое записывается в позиции справа от оператора **if**. Если *условие истинно*, то однократно выполняется *действие*, записанное в позиции слева от оператора **if**, после чего выполнение оператора заканчивается. Если *условие ложно*, то выполнение оператора **if** заканчивается немедленно, без выполнения *действия*.

Условие может состоять из довольно сложной *логической конструкции*, построенной при помощи команд сравнения ($=, \neq, <, \leq, >, \geq$) и логических команд (NOT, OR, AND, XOR) – как на *Рис. 15*.

Возможности оператора **if** можно существенно расширить при помощи оператора **otherwise** (*иначе, в противном случае*). Он позволяет реализовать конструкции с двумя исходами (см. *Листинг 18, а*): в случае *истинности условия* выполняется одно *действие*, а в случае его *ложности* – другое (расположенное перед оператором **otherwise**).

Листинг 18. Оператор **if-otherwise** и функция **if()**

<p>а) $\text{maximum}(a, b) := \begin{cases} a & \text{if } a \geq b \\ b & \text{otherwise} \end{cases}$</p> <p>$\text{maximum}(3, 2) = 3$ $\text{maximum}(3, 4) = 4$</p>	<p>б) $\text{max} \leftarrow \text{if}(A \geq B, A, B)$</p> <p>$\text{if}(A \geq B, \text{max} \leftarrow A, \text{max} \leftarrow B)$</p>
--	--

Можно также воспользоваться вместо оператора **if** функцией **if()** – как на *Листинг 18, б*. У встроенной функции **if()** первый аргумент – *условие*, второй – *действие* при истинном условии, а третий аргумент – *действие* при невыполнении условия (**otherwise**).

Операторы цикла. В *MathCAD* имеется два оператора циклического повторения – оператор **while** и оператор **for**.

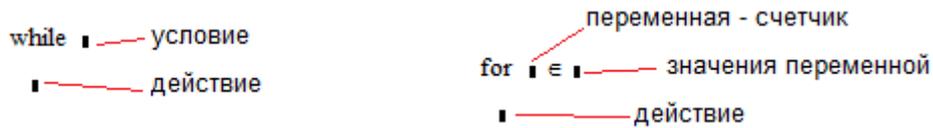


Рис. 16 – Структура операторов **while** и **for**

При выполнении оператора **while** (с предусловием) в первую очередь производится проверка *условия*, если оно *истинно*, то выполняется *действие*, после чего вновь проверяется *условие* и т.д. до тех пор, пока *условие* не станет *ложным*. Программист должен предусмотреть возможность выхода из цикла.

Оператор цикла **for** последовательно перебирает значения *переменной-счетчика* (слева от значка \in) из *множества допустимых значений* (справа от символа \in). Пока *переменная-счетчик* принадлежит *множеству допустимых значений*, *действие* повторяется, как только значение *переменной* выходит за границы *множества*, действие цикла заканчивается.

Программные блоки, описанные ниже (*Листинг 19*), вычисляют сумму N первых натуральных чисел. На примерах видно, что в операторе **for** изменение *переменной-счетчика* i происходит автоматически (неявно) в диапазоне $1..N$, в то время как для оператора **while** изменение *переменной* i приходится явно прописывать.

Листинг 19. Операторы цикла **while** и **for**

<p>$\text{SumA}(N) := \begin{cases} S \leftarrow 0 \\ i \leftarrow 1 \\ \text{while } i \leq N \\ \quad \begin{cases} S \leftarrow S + i \\ i \leftarrow i + 1 \end{cases} \\ S \end{cases}$</p>	<p>$\text{SumB}(N) := \begin{cases} S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..N \\ \quad S \leftarrow S + i \\ S \end{cases}$</p>
<p>$\text{SumA}(3) = 6$ $\text{SumA}(4) = 10$ $\text{SumA}(5) = 15$</p>	<p>$\text{SumB}(3) = 6$ $\text{SumB}(4) = 10$ $\text{SumB}(5) = 15$</p>

На примерах ниже (*Листинг 20*) иллюстрируются некоторые свойства оператора **for**. Оператор **for** автоматически определяет, в какую сторону необходимо изменять (уменьшать или увеличивать) *переменную-счетчик*.

Оператор **for** может перебирать значения *переменной-счетчика* из *множества допустимых значений* довольно разнородной структуры – числовой, символьной, матричной.

Листинг 20. Некоторые свойства оператора for

$\text{SumB}(N) := \left \begin{array}{l} S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..N \\ \quad S \leftarrow S + i \\ S \end{array} \right.$ <p>SumB(4) = 10</p>	$\text{SumC}(N) := \left \begin{array}{l} S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in N..1 \\ \quad S \leftarrow S + i \\ S \end{array} \right.$ <p>SumC(4) = 10</p>
$\text{SumX} := \left \begin{array}{l} S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1,3,4,7,21,13,101 \\ \quad S \leftarrow S + i \\ S \end{array} \right.$ <p>SumX = 150</p>	$V := \left \begin{array}{l} i \leftarrow 0 \\ \text{for } VX \in \begin{pmatrix} 12.3 & \text{"abcd"} \\ 2 + 3i & 1 \end{pmatrix} \\ \quad \left \begin{array}{l} V_i \leftarrow VX \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ V \end{array} \right.$ $V = \begin{pmatrix} 12.3 \\ 2 + 3i \\ \text{"abcd"} \\ 1 \end{pmatrix}$

Операторы прерывания. В системе *MathCAD* операторы прерывания представлены тремя командами: **break**, **continue** и **return**.

Операторы **break** и **continue** используются для прерывания работы циклов **for** и **while**, а оператор **return** – для прерывания всего блока операторов.

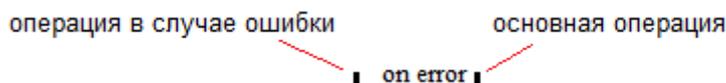
Если при выполнении цикла встречается оператор **continue** (*перезапуск цикла*), то вычисления в теле цикла останавливаются и цикл *запускается снова*. Если в цикле встречается оператор **break** (*прерывание цикла*), то выполнение тела цикла прекращается и происходит *выход из цикла*.

В примере, приведенном ниже (*Листинг 21*), создается функция *PositivSubvector*, выбирающая положительные координаты вектора *x*. Оператор **continue** перезапускает цикл каждый раз, когда встречается отрицательный компонент вектора *x*. В этом же примере строится функция *FirstPositiv*, выбирающая первую положительную координату вектора *x*. Важно, что если такая координата найдена, то оператор **return** останавливает выполнение функции (дальнейший перебор элементов вектора *x* не производится).

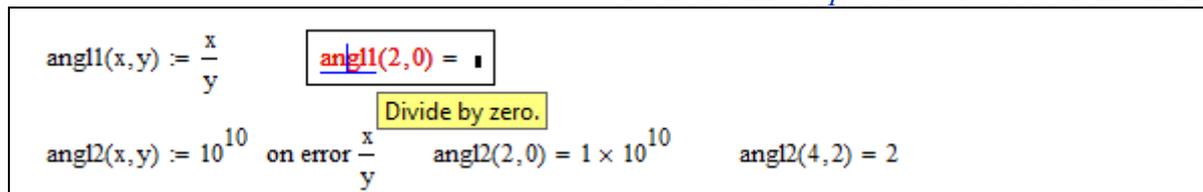
Листинг 21. Операторы continue и return

$x := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 12 \\ -8 \\ 7 \\ -0.8 \end{pmatrix}$	$\text{PositivSubvector}(v) := \left \begin{array}{l} j \leftarrow -1 \\ \text{for } i \in 0.. \text{last}(v) \\ \quad \left \begin{array}{l} \text{continue if } v_i \leq 0 \\ j \leftarrow j + 1 \\ w_j \leftarrow v_i \end{array} \right. \\ w \end{array} \right.$ $\text{PositivSubvector}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$
$\text{FirstPositiv}(v) := \text{for } i \in 0.. \text{last}(v) \\ \quad \text{return } v_i \text{ if } v_i > 0$	$\text{FirstPositiv}(x) = 2$

Оператор on error. Этот оператор является обработчиком тех или иных ошибок, возникающих при вычислении. Он записывается так:

Рис. 17 – Структура оператора **on error**

Оператор **on error** выполняется следующим образом. Если при выполнении *основной операции* (расположенной справа от оператора **on error**) происходит *ошибка*, то вычисление этой операции прекращается и выполняется «*операция в случае ошибки*» (расположенная слева от *on error*):

Листинг 22. Обработчик ошибок **on error**

2.2. Основные функции электротехники и их представление в MathCAD

Рассмотрим функции, наиболее часто встречающиеся в электротехнике, электронике и энергетике, моделирование которых мы научимся производить в среде *MathCAD*.

Гармоническая функция

Гармонические функции (см. Рис. 18) наиболее часто встречаются в электротехнике и других областях естественных наук в связи с тем, что они предназначены для описания периодических вращающихся движений (процессов).

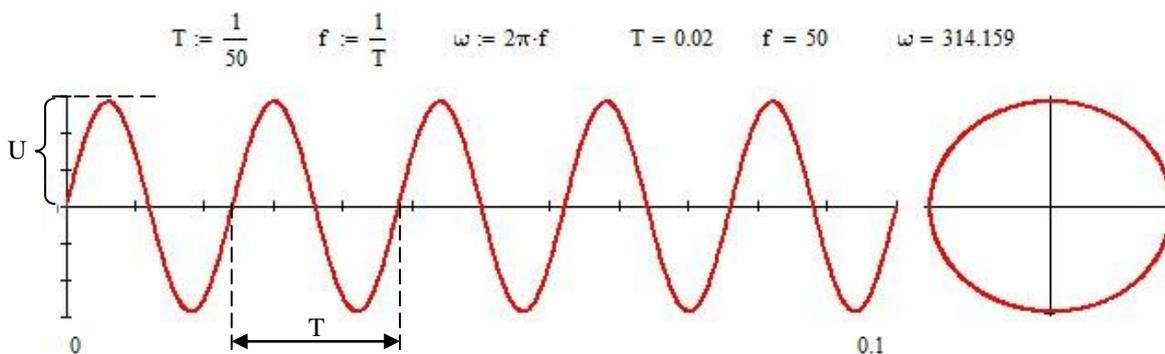


Рис. 18 – Основные параметры гармонической функции

Основными параметрами гармонических функций являются следующие:

- 1) *период колебаний* T – промежуток времени, за который система совершает одно полное колебание (то есть возвращается в то же состояние, в котором она находилась в первоначальный момент, выбранный произвольно). Измеряется в секундах [с].
- 2) обратное к нему понятие – *частота колебаний* f (*линейная частота*) определяется как число повторений события за единицу времени. Рассчитывается, как отношение количества возникновения событий к промежутку времени, за которое они совершены. Измеряется в герцах [Гц] = [с⁻¹].
- 3) *круговая частота* ω (*радиальная, циклическая, угловая частота*) равна модулю вектора угловой скорости (1), выражается в [радианах в секунду]. Круговая частота связана с линейной частотой f следующим образом: $\omega = 2\pi \cdot f$. При использовании в качестве единицы угловой частоты [градусов в секунду] связь с обычной частотой будет следующей: $\omega = 360^\circ \cdot f$.

- 4) амплитуда U (размах колебаний) – это максимальная величина размаха (отклонения) периодического движения (1), см. Рис. 18. Для амплитуды единица измерения соответствует тому, какой циклический процесс анализируется: в электронике это может быть амплитуда тока [А], напряжения [В], мощности [Вт] и т.п.

$$U \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (1)$$

←
←
←

амплитуда круговая частота начальная фаза

Гармоническое движение математически описывается, как правило, синусоидальной функцией, что и понятно: ведь при движении объекта (*рабочей точки, переменной состояния*) по окружности на оси OY вырисовывается *синусоидальная кривая*, а по оси OX – *косинусоидальная*. Если записать параметры гармонического сигнала как в формуле (1), то видно, что множитель перед $\sin()$ – это *амплитуда*, а множитель перед t (*время*) – это *круговая частота* (или *угловая скорость*).

К параметрам гармонического сигнала относятся так же:

- 5) *начальная фаза* φ – начальный угол (состояние) рабочей точки в момент начала движения по окружности (Рис. 19), или, говоря иначе, сдвиг графика $\sin()$ от начала координат по оси OX . Обычно выражается в [радианах] или [градусах], поскольку это по сути угол.
- 6) *полная фаза* $\omega \cdot t + \varphi$ – это текущее положение рабочей точки на окружности (или на синусоиде) в заданный момент времени t при заданной скорости вращения ω и заданной начальной фазе φ см. формулу (1).

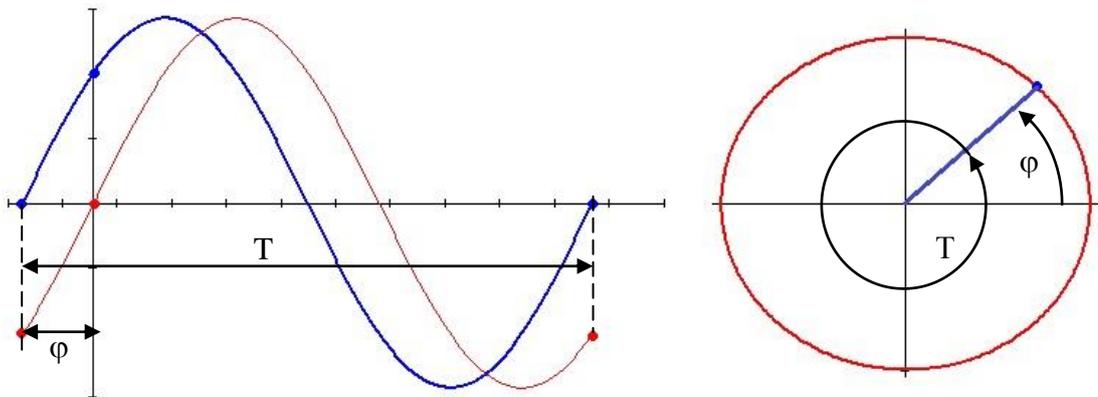


Рис. 19 – Основные параметры гармонической функции

Линейная функция

Линейная функция описывает *прямую линию*, основные её параметры – наклон k и смещение b , график прямой линии:

$$y = kx + b, \quad (2)$$

где k – тангенс угла наклона, а b – смещение по вертикальной оси. Если $k = 0$, то прямая параллельна оси OX (нет наклона). Если $b = 0$, то прямая проходит через начало координат (нет смещения).

Линейно-нарастающая и линейно-спадающая функция

На основе графика прямой линии строится *линейно-нарастающая (ЛНФ)* и *линейно-спадающая (ЛСФ) функции*, они представляют собой периодически повторяющиеся отрезки прямой (см. Рис. 20).

По аналогии с гармонической функцией у ЛНФ также определяют *амплитуду, период, частоту и начальную фазу*. Действительно, если рассмотреть графики на

Рис. 20, то совершенно четко видно, что амплитуда сигнала составляет 12 единиц, период $\tau = 0.001$ [с], а следовательно, частота $f = 1000$ [Гц]. Поскольку график функции «выходит из нуля», то начальная фаза $\varphi = 0$ [рад].

$$f := 1000 \quad \tau := \frac{1}{f} \quad \Theta 1(t) := \frac{t}{\tau} - \text{floor}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad F1(t) := 12 \cdot \Theta 1(t) \quad F2(t) := 12 \cdot (1 - \Theta 1(t))$$

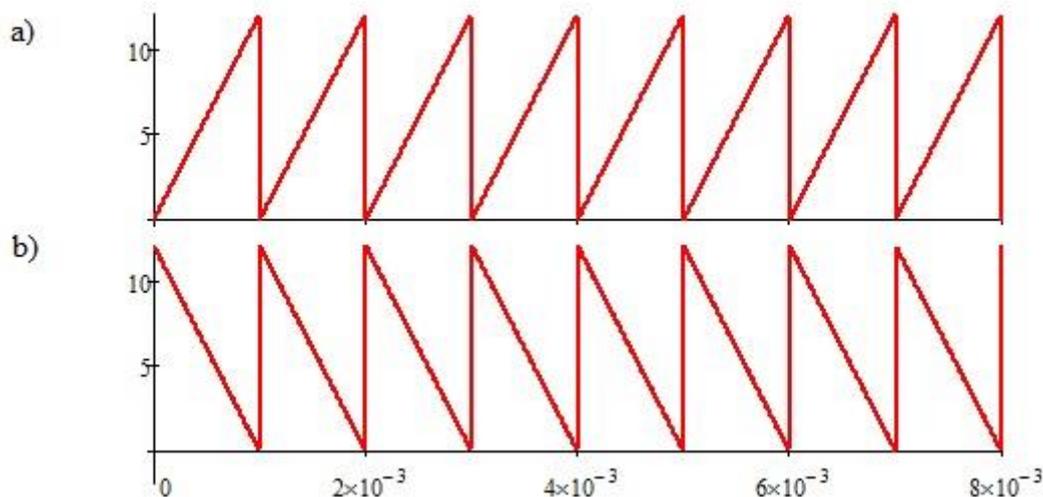


Рис. 20 – График (а) линейно-нарастающей и (б) линейно-спадающей периодических функций

Рассмотрим на примере процесс построения ЛНФ (и ЛСФ) в среде *MathCAD*. Сначала необходимо определиться с наклоном отрезка будущей функции, он, очевидно, зависит от частоты f . Зададимся частотой $f = 1000$ [Гц], следовательно период τ будет равен 0.001 [с]. Наклон k прямой линии (2) будет равен частоте, см Рис. 21.

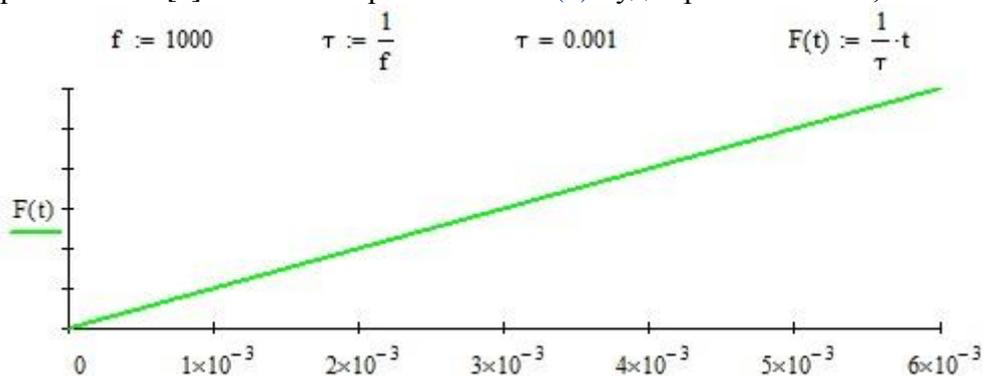


Рис. 21 – График линейной функции с наклоном $1/\tau$

Теперь воспользуемся встроенной функцией *MathCAD*, предназначенной для вычисления целой части действительного числа – **floor**(). Применив функцию целой части к построенной нами линейной функции, получим ступенчатую функцию $E1(t, \tau)$, как на Рис. 22, которая дробит ось Ox на интервалы длиной τ и ставит в соответствие любому моменту времени t из j -того интервала $[(j-1)\tau, j\tau]$ его номер j .

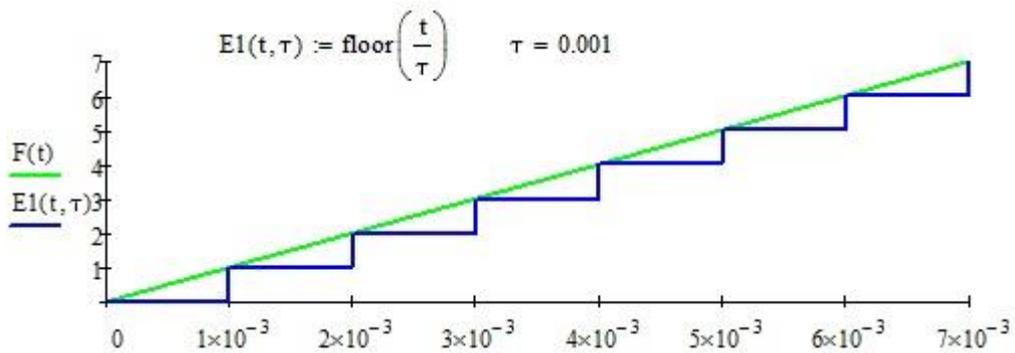


Рис. 22 – График ступенчатой функции с интервалами τ

Разность исходной линейной функции $F(t)$ и ступенчатой функцией «целая часть» $E1(t, \tau)$ и есть искомая ЛНФ «дробная часть», традиционно обозначаемая $\Theta(t, \tau)$. Линейно-спадающая функция строится как $1 - \Theta(t, \tau)$, см. Рис. 20.

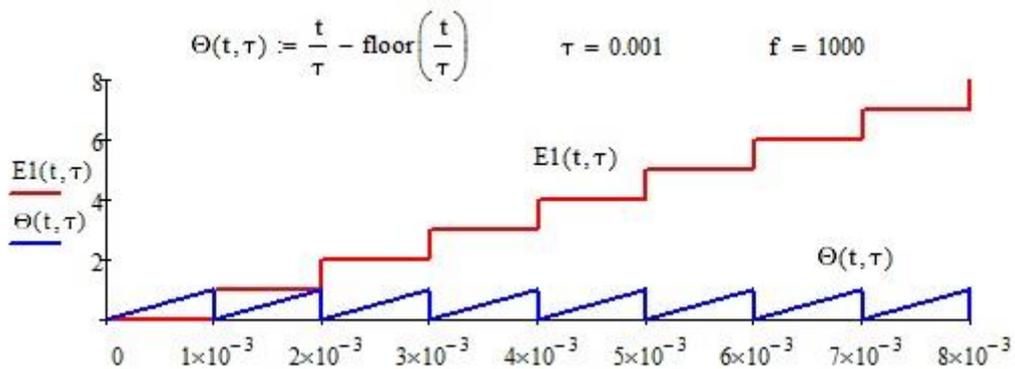


Рис. 23 – График линейно-нарастающей функции $\Theta(t, \tau)$

Таким образом, линейно-нарастающая и линейно-спадающая функции имеют вид (3) и (4) соответственно:

$$\frac{t}{\tau} - \text{floor}\left(\frac{t}{\tau}\right) \tag{3}$$

$$1 - \frac{t}{\tau} + \text{floor}\left(\frac{t}{\tau}\right) \tag{4}$$

Применение линейно-нарастающей $\Theta(t, \tau)$ и линейно-спадающей функции $1 - \Theta(t, \tau)$ в моделировании систем управления электронных систем весьма велико, они применяются также при математическом описании различных процессов модуляции.

Сигнум функция

Довольно часто в математическом описании переключающихся сигналов используется *сигнум функция* $\text{sign}()$ и её модификации, см. Рис. 24. Эта функция используется для определения знака числа – она равна 1 для любых положительных аргументов, -1 – для отрицательных и 0 – для нулевых.

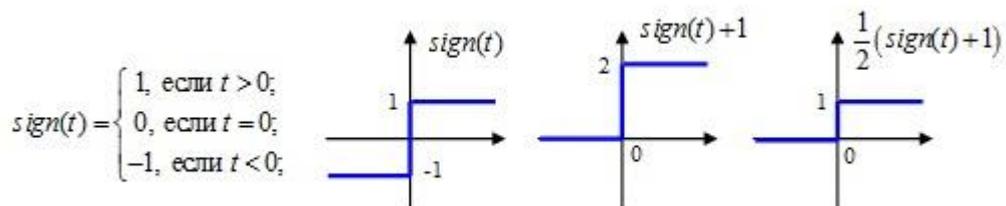


Рис. 24 – Сигнум функция и её модификации

Широтно-импульсная модуляция

Важным понятием в электротехнике, теории электропривода, теории автоматического управления и электронике является широтно-импульсная модуляция (ШИМ). Суть этого вида модуляции (кодирования) состоит в том, чтобы генерировать последовательность импульсов заданной амплитуды и частоты так, чтобы *ширина импульса* находилась в зависимости от уровня *задающего сигнала* (скважности) γ .

Как видно из *Рис. 25*, ширина импульса изменяется от 0 до τ . Когда скважность γ находится на середине амплитуды импульса (*Рис. 25,а*) ширина импульсов функции $F(t, \tau)$ равна 0.5. Если уровень γ повышается, то пропорционально растет и ширина импульса – на *Рис. 25,б* он равна 0.8, а если γ уменьшается, то импульсы сужаются, как на *Рис. 25,в.*, где ширина импульса равна 0.1.

При этом амплитуда, частота, период и фаза сигнала не меняются.

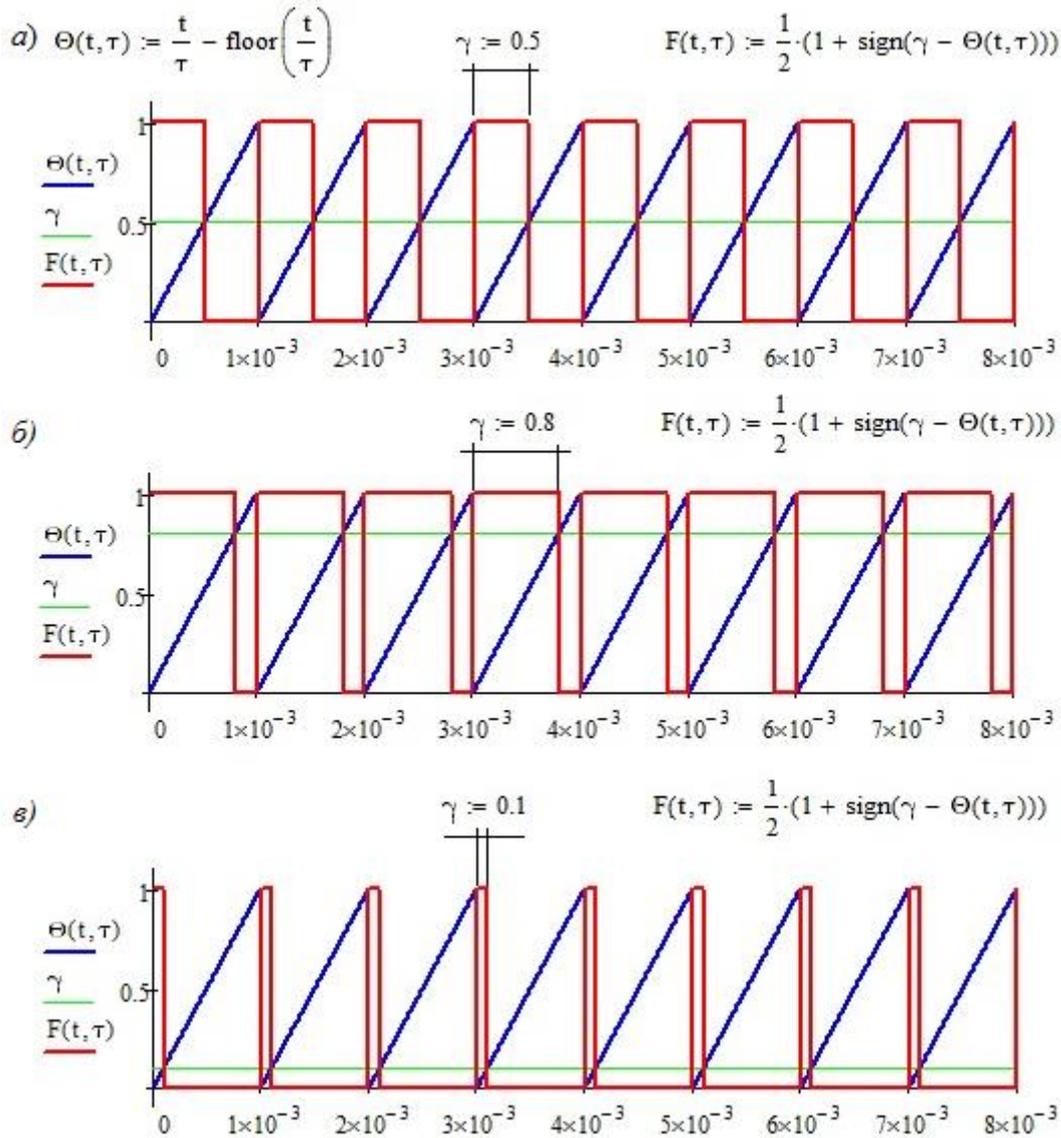


Рис. 25 – Широтно-импульсная модуляция

Как видно из *Рис. 25*, ширина импульса изменяется от 0 до τ . Когда скважность γ находится на середине амплитуды импульса (*Рис. 25,а*) ширина импульсов функции $F(t, \tau)$ равна 0.5. Если уровень γ повышается, то пропорционально растет и ширина импульса – на *Рис. 25,б* он равна 0.8, а если γ уменьшается, то импульсы сужаются, как на *Рис. 25,в.*, где ширина импульса γ равна 0.1. При этом амплитуда, частота, период и фаза сигнала не меняются.

Создаваемая таким образом функция $F(t, \tau)$ называется *ШИМ-сигнал* и используется для организации автоматического управления каким либо

переключаемым процессом (см. Рис. 26). Какой-либо *регулируемый параметр* системы (например, температура) измеряется датчиком-измерителем и, в качестве электрического сигнала, *скважность* γ передается по *обратной связи* в *систему автоматического управления* (САУ). Там по принципам, приведенным на Рис. 25, строится *ШИМ-сигнал*, подаваемый на переключающее устройство системы, регулируя таким образом работу нагревателя или охладителя. Поскольку ширина импульсов функции $F(t, \tau)$ зависит от скважности γ , то в зависимости от её уровня производится дозирование энергии, подаваемой на регулируемый параметр.



Рис. 26 – Система автоматического управления с ШИМ

Импульсная последовательность

При математическом описании двоичной последовательности символов в виде «потенциального кода» (ноль задается высоким потенциалом (напряжением) а единица – низким), используются *импульсные функции* различного вида.

$$S := (1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \quad D(t, \tau) := \begin{cases} n \leftarrow \text{floor}\left(\frac{t}{\tau}\right) \\ S_{0,n} \end{cases}$$

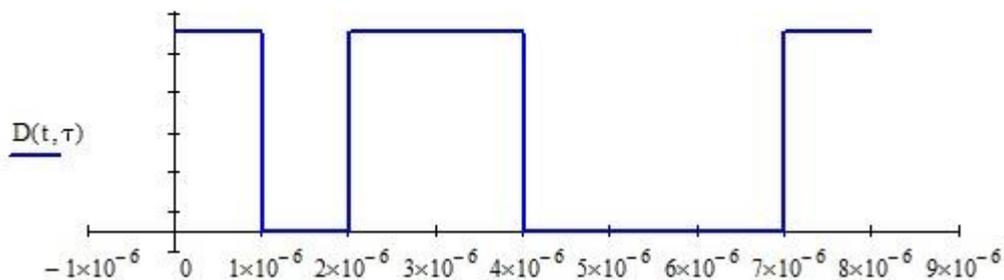
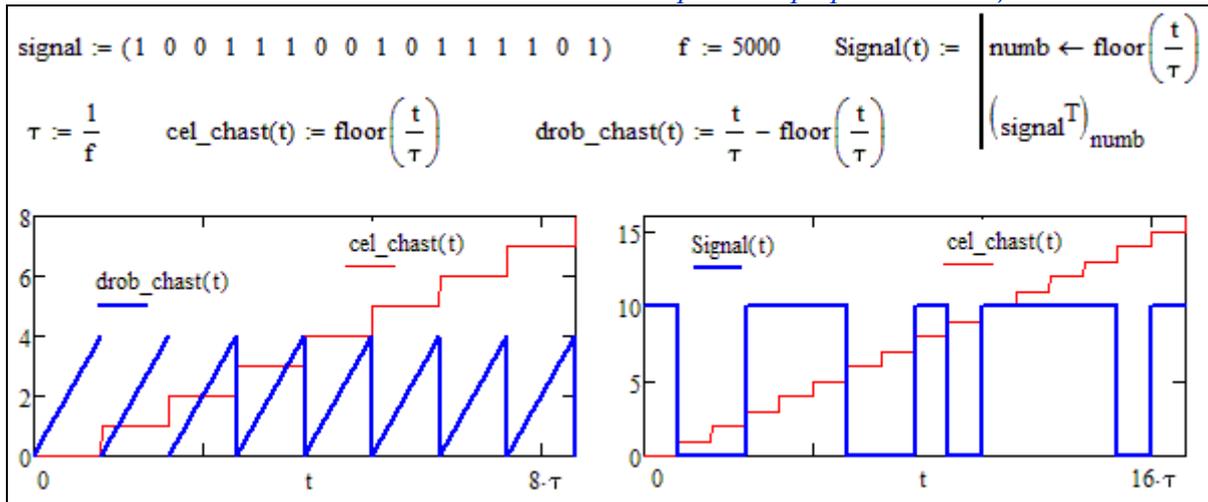


Рис. 27 – График двоичной последовательности S с тактовым периодом $\tau = 10^{-6}$ [с]

Например, на Рис. 27 изображен график двоичной последовательности S с тактовым периодом $\tau = 10^{-6}$ [с]. Здесь, как и в примере на Рис. 22, функция $\text{floor}(t/\tau)$ определяет номер такого интервала, в котором находится текущий момент времени t, и в соответствии с этим номером выбирается компонент $S_{0,n}$ последовательности S.

Листинг 23 содержит другой пример построения на графике функции потенциального кода – последовательности битов исходного сигнала $S(t)$, формируемого с тактовой частотой (частотой квантования) f_d , необходимо определять номер тактового интервала. Воспользуемся встроенной функцией $\text{floor}()$, вычисляющей целую часть числа. Рассмотрите, как построены функции целой части $\text{cel_chast}(t/\tau)$ и дробной части $\text{drob_chast}(t/\tau)$ числа t/τ . При формировании функции $\text{Signal}(t)$ в локальную переменную numb заносится номер тактового периода, строящийся аналогично функции $\text{cel_chast}(t/\tau)$.

Листинг 23. Построение графика потенциального кода



Аналоговая модуляция

Аналоговая модуляция является таким способом преобразования цифрового сигнала в аналоговый, при котором двоичная информация кодируется изменением амплитуды (U), частоты (ω) или фазы (φ) гармонического сигнала $F(t) = U \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

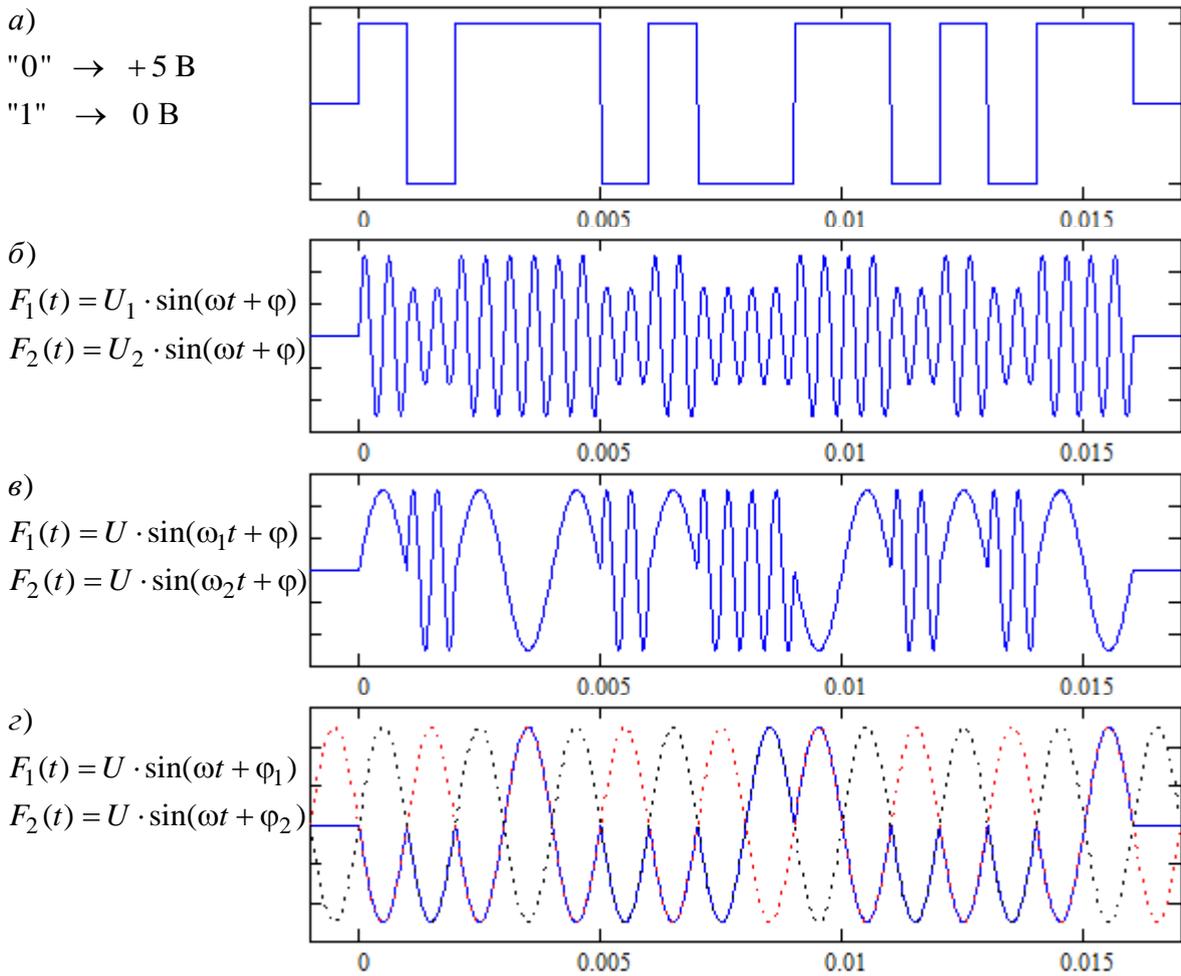


Рис. 28 – Виды аналоговой модуляции

Основные способы аналоговой модуляции – амплитудная (б), частотная (в) и фазовая (г) показаны на Рис. 28. На графике (Рис. 28, а) приведена последовательность битов исходного сигнала $S(t)$, представленная потенциальным кодом – логическому

нулю соответствует +5 В, логической единице – 0 В. Программа построения графика этой последовательности приведена ниже на *Рис. 29*.

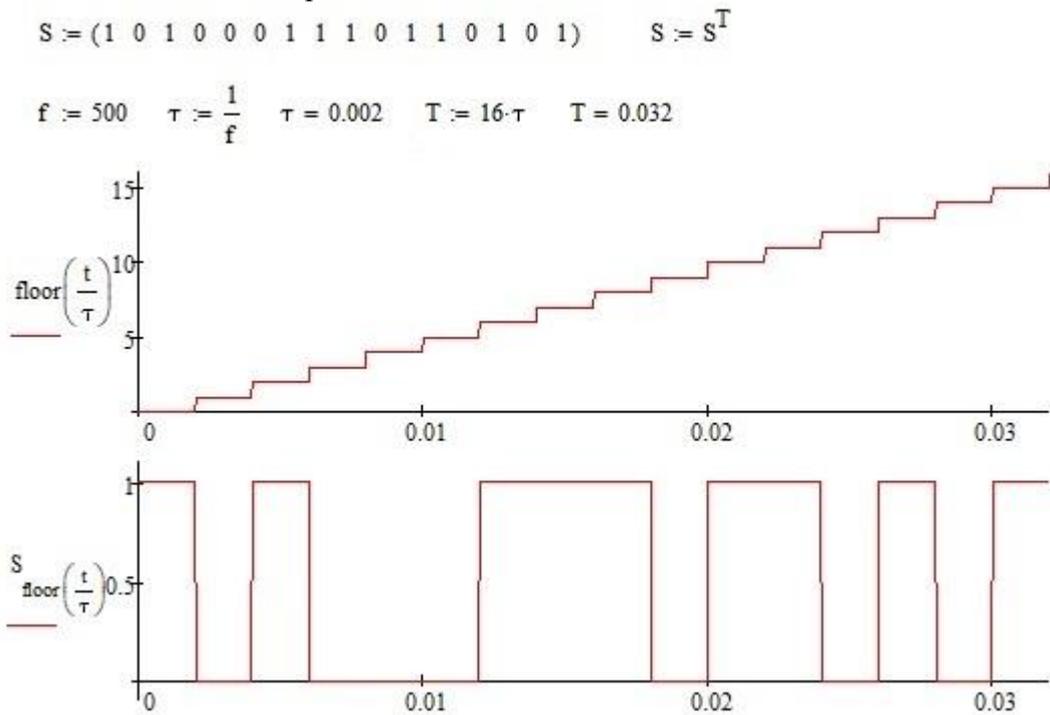


Рис. 29 – Импульсная последовательность

Амплитудная модуляция. Как следует из названия, изменяемым параметром гармонического сигнала является *амплитуда*. В примере, рассмотренном ниже (*Рис. 30*) задается два гармонических сигнала с одинаковыми частотой и фазой колебаний, но с различными амплитудами - 1 [В] и 3 [В] соответственно. Функция $M(t)$ строится следующим образом: для заданного момента времени t переменной q присваивается номер тактового интервала, в который попадает момент t . В зависимости от того, равняется 1 или 0 значение элемента S_q (элемент последовательности S с номером q), вычисляется гармоническая функция с соответствующей амплитудой.

$$U1 := 1 \quad U2 := 3 \quad \omega := 5000 \quad \phi := 0$$

$$M(t) := \begin{cases} q \leftarrow \text{floor}\left(\frac{t}{\tau}\right) \\ U1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) & \text{if } S_q = 1 \\ U2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) & \text{otherwise} \end{cases}$$

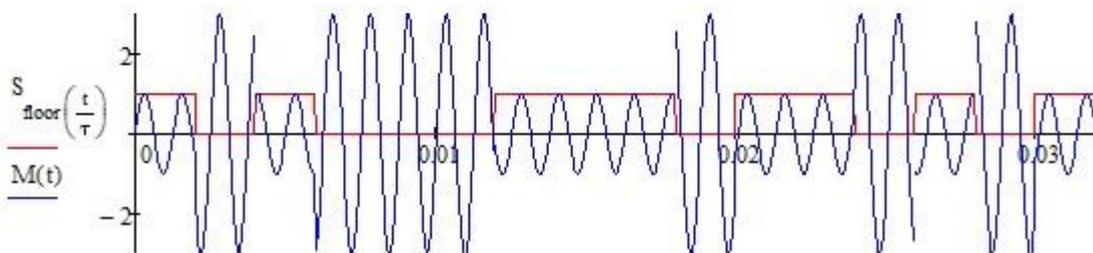


Рис. 30 – Амплитудная модуляция

Частотная модуляция. Здесь изменяемым параметром гармонического сигнала является *частота*. В примере, рассмотренном ниже (*Рис. 31*) задается два гармонических сигнала с одинаковыми амплитудой и фазой колебаний, но с различными частотами - 1000 [рад/с] и 5000 [рад/с] соответственно. Функция $M(t)$ строится аналогично: для заданного момента времени t переменной q присваивается

номер тактового интервала, в который попадает момент t . В зависимости от того, равняется **1** или **0** значение элемента S_q (элемент последовательности S с номером q), вычисляется гармоническая функция с соответствующей частотой.

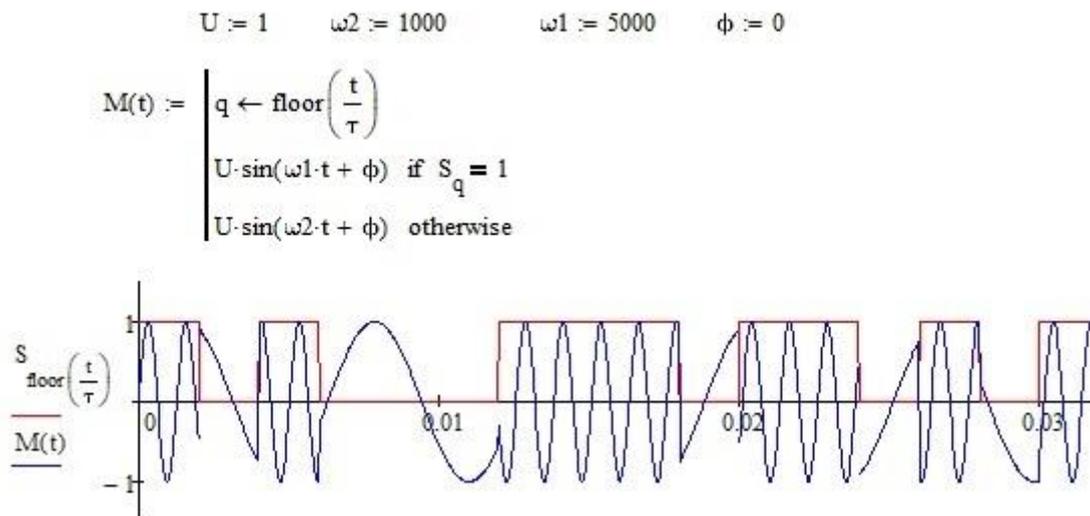


Рис. 31 – Частотная модуляция

Фазовая модуляция. Здесь изменяемым параметром гармонического сигнала является фаза. В примере, рассмотренном ниже (Рис. 32) задается два гармонических сигнала с одинаковыми амплитудой и частотой колебаний, но с различными фазами - 0 [рад] и $\pi/3$ [рад] соответственно. Функция $M(t)$ строится аналогично предыдущим, с той лишь разницей, что для заданного момента времени t , попадающего в определенный тактовый интервал, вычисляется значение гармонической функции с соответствующей фазой.

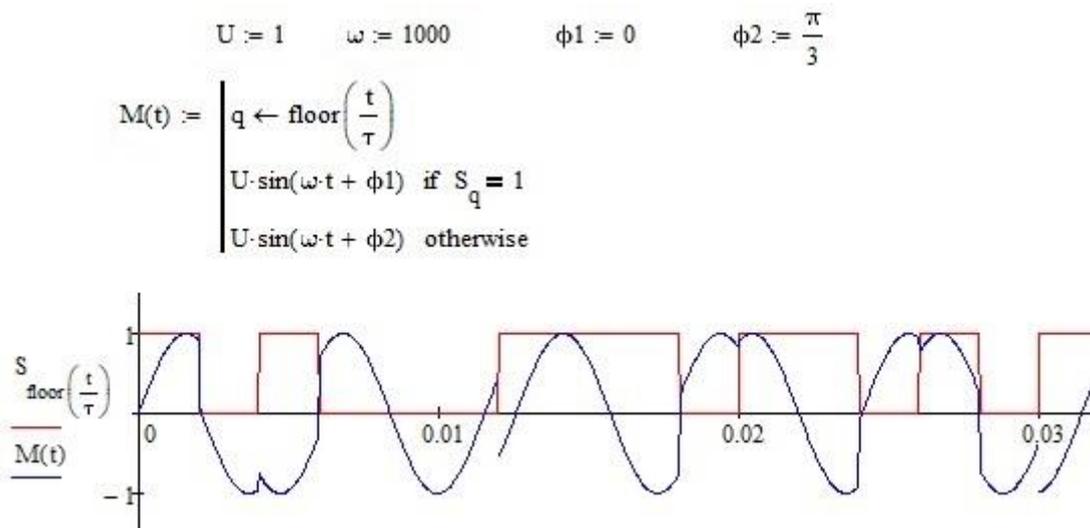


Рис. 32 – Фазовая модуляция

Таким образом единицы и нули импульсной последовательности заменяются фрагментами двух различных гармонических функций. Или иначе говоря, импульсная последовательность "склеивается" из фрагментов соответствующих синусоид, как показано на Рис. 33.

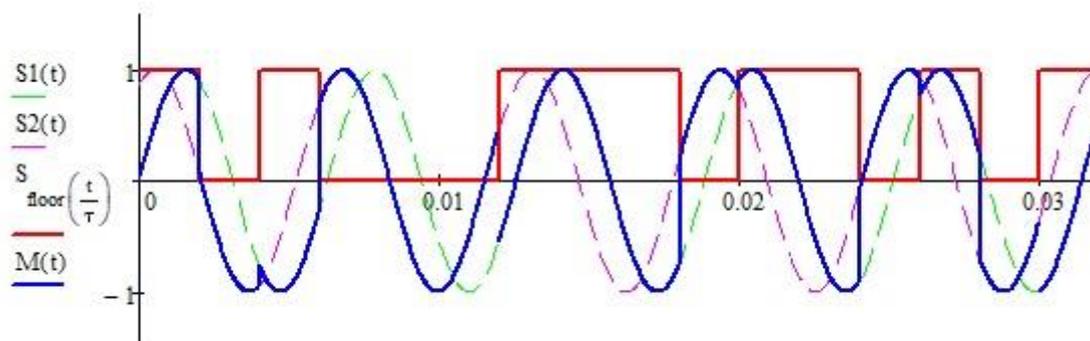


Рис. 33 – Фазовая модуляция

2.3. Практическая работа №2. Программирование в MathCAD

Продолжительность – 4 часа.

Цель работы

1. Изучить операторы *MathCAD*, научиться применять их при написании программ. Научиться отслеживать значения числовых и логических переменных и выражений в процессе отладки программы. Освоить умение переводить мнемонические выражения в последовательность операторов.

2. Восстановить знания из школьного курса математики и физики о гармонической зависимости, закрепить понятия амплитуда, фаза и частота. Визуализировать отличия и сходства между цифровым и аналоговым сигналом.

3. Познакомится с базовыми функциями электроники, научиться их моделировать в *MathCAD*, строить их графики, идентифицировать их параметры.

Задание на практическую работу

1. В индивидуальном задании (*Таблица 3*) приводятся графики какой-либо из базовых функций электроники. По приведенному графику определить/вычислить тип этой функции и основные её характеристики.

2. Для гармонической функции:

- амплитуду;
- частоту и период;
- круговую частоту;
- начальную фазу (в радианах и в градусах).

3. Для линейно-нарастающей и линейно-спадающей функции:

- тактовый период и тактовую частоту;
- ЛНФ или ЛСФ;
- амплитуду;
- начальный сдвиг (фазу) в радианах, считая $\tau = 2\pi$.

4. Для широтно-импульсной модуляции:

- амплитуду;
- тактовую частоту и тактовый период;
- скважность.

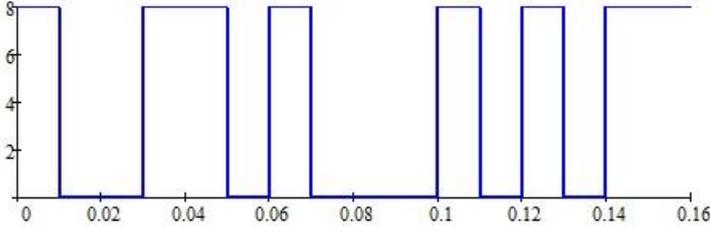
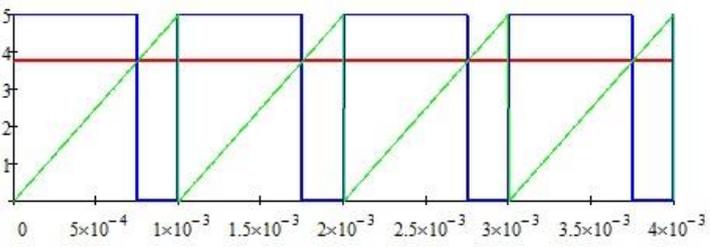
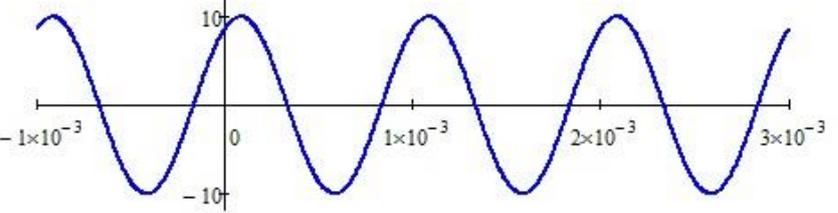
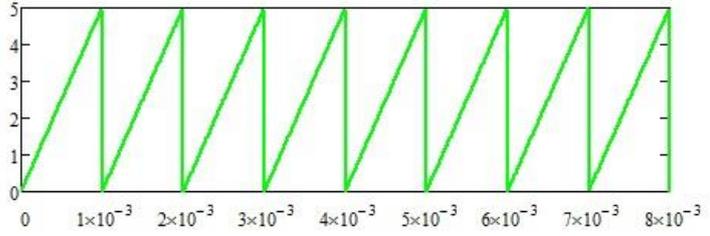
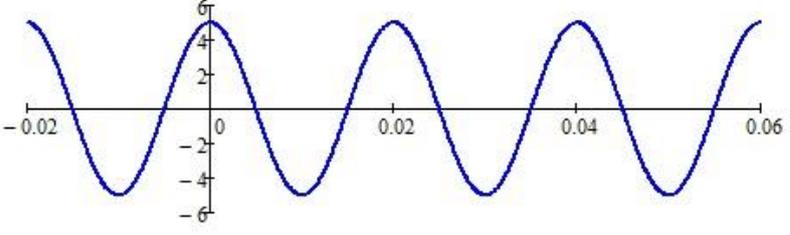
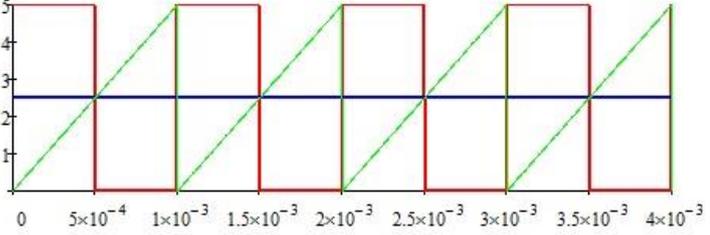
5. Для импульсной последовательности:

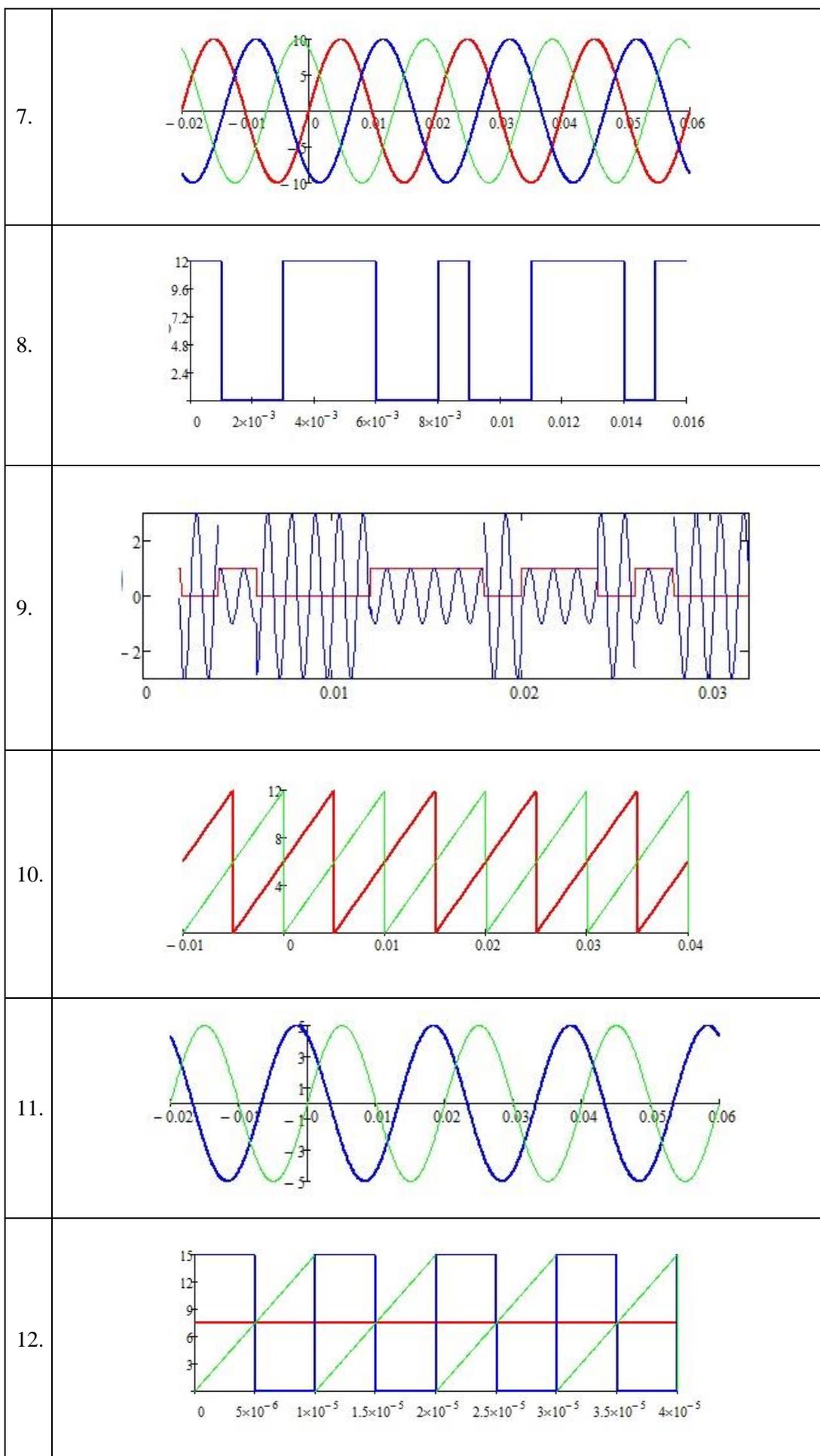
- тактовую частоту и тактовый период;
- импульсную последовательность в двоичном формате.

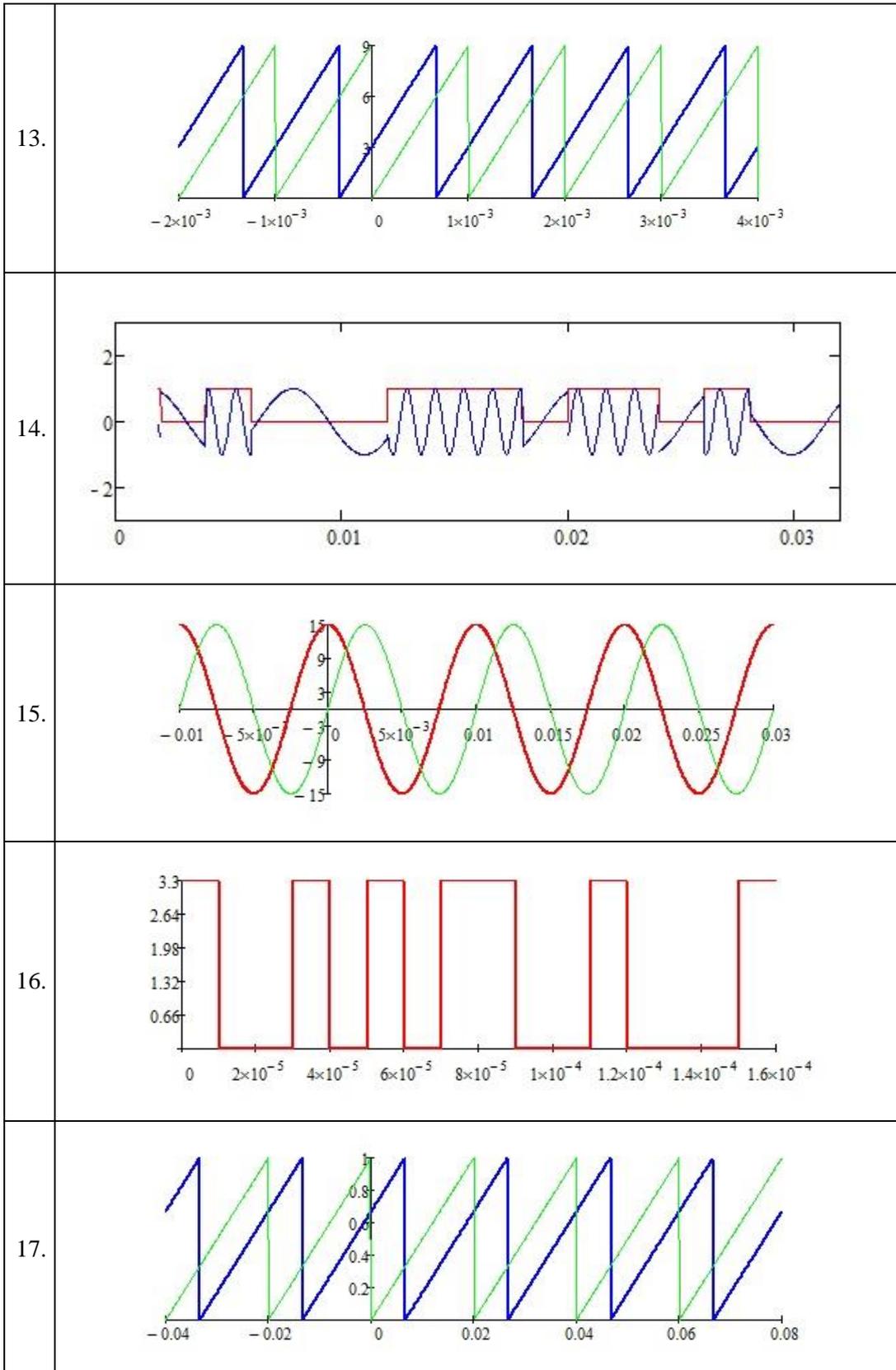
6. Для аналоговой модуляции:

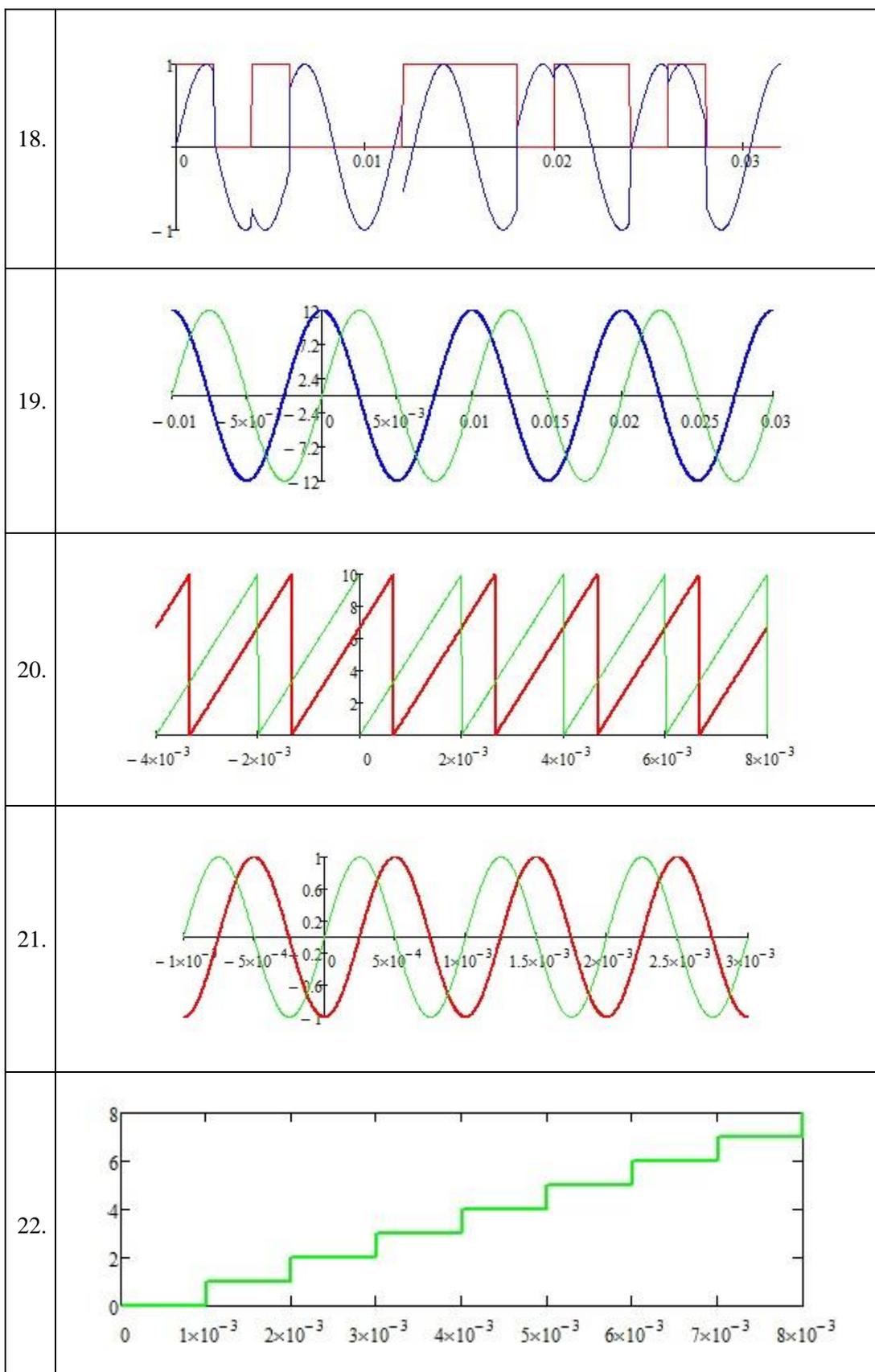
- вид модуляции;
- амплитуду, частоту и фазу модулирующих функций;
- восстановить импульсную последовательность в двоичном формате.

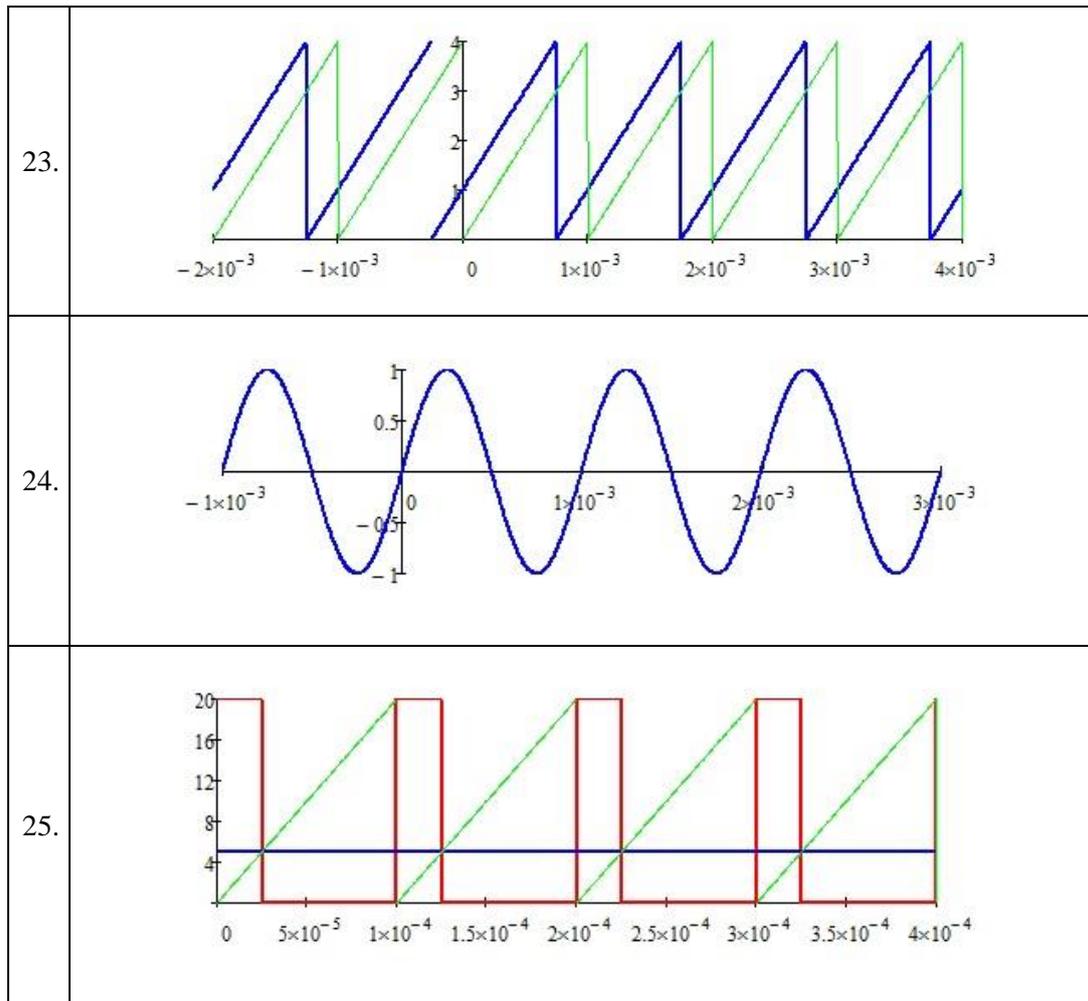
Таблица 3

№	Вид модуляции
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	









Контрольные вопросы

1. Какие виды аналоговой модуляции вы знаете?
2. Записать формулу гармонической функции, перечислить ее параметры.
3. Как построить цифровой сигнал на графике?
4. Существуют ли в природе чисто цифровые сигналы?
5. Для гармонической функции описать амплитуду, частоту и период, круговую частоту, начальную фазу (в радианах и в градусах).
6. Для линейно-нарастающей и линейно-спадающей функции дать определение понятиям тактовый период и тактовая частота, амплитуда, начальный сдвиг (фаза).
7. Для широтно-импульсной модуляции определить амплитуду, тактовую частоту и тактовый период, скважность.
8. Для импульсной последовательности описать тактовую частоту и тактовый период, импульсную последовательность в двоичном формате.
9. Для аналоговой модуляции дать определение понятиям: вид модуляции, амплитуда, частота и фаза модулирующих функций.
10. Что необходимо учитывать, чтобы по графику импульсной последовательности восстановить импульсную последовательность в двоичном формате.

3. ОПЕРАЦИИ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ В СРЕДЕ MATHCAD

В курсе линейной алгебры студенты знакомятся с такими понятиями как *матрица* и *вектор*, рассмотрим, какие инструменты для работы с матричными объектами предоставляет *MathCAD*. Под матрицей понимается прямоугольная таблица чисел размерности $n \times m$.

Вектор – это такая матрица у которой $n=1$ или $m=1$. В средней школе давалось определение вектора как направленного отрезка прямой, важно понимать, что эти определения эквивалентны.

Над векторами и матрицами определены операции *сложения и умножения на число* – эти операции выполняются *поэлементно* и обладают свойствами *линейности*. Дополнительно определены операции произведения матриц и умножения матрицы на вектор. Свойства этих операций рассмотрены ниже.

Кроме того, для матриц введено понятие *определителя* – числа, некоторым образом характеризующего матрицу и понятие *ранга* – размерности линейно-независимой системы векторов, составляющих матрицу. Строгое определение этих понятий дается в курсе высшей математики, здесь мы рассмотрим, как вычислять эти показатели и как ими пользоваться.

3.1. Матричные операции MathCAD

В среде *MathCAD* операции над матрицами производятся в соответствии с правилами математики. Комплекс *MathCAD* содержит достаточно представительную библиотеку встроенных функций, в том числе и функций, работающих с матрицами. Ниже рассмотрены некоторые функции, осуществляющие матричные операции, используемые при выполнении лабораторных и практических работ.

Ввод и редактирование формата матриц с помощью шаблона

Интерфейс процессора *MathCAD* позволяет вводить матрицы с помощью шаблона, задаваемого в диалоговом окне (Рис. 34,б). Диалоговое окно вызывается командой главного меню *Insert\Matrix*, либо комбинацией клавиш-акселераторов *Ctrl+M*, либо нажатием на пиктограмму  палитры матричных операций (Рис. 34,а).

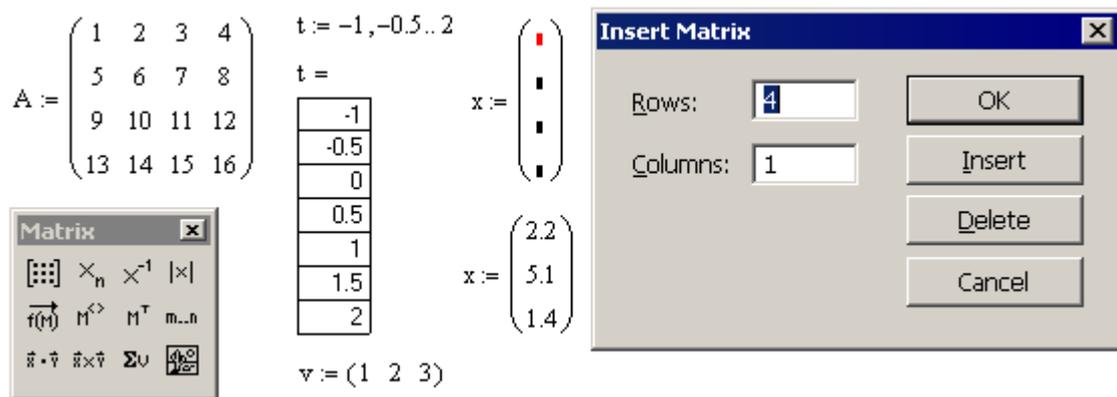


Рис. 34 – Матрицы и вектора в MathCAD. Диалоговое окно ввода матрицы

С помощью этого же диалога можно редактировать формат уже созданных матриц, добавляя/удаляя строки и столбцы. Эти действия вызываются кнопками *Insert* и *Delete*.

Нумерация строк и столбцов в *MathCAD* по умолчанию начинается с нуля (Рис. 35). Принцип нумерации элементов матриц можно переопределить с помощью команды **ORIGIN:=1** (после этого матрицы и вектора нумеруются не с 0, а с 1).

Интерпретирующая система блокирует некорректную матричную операцию. При этом некорректный, нереализуемый оператор выделяется измененным цветом шрифта и комментарием в виде всплывающей подсказки. Таким образом, программист может контролировать принципиальную осуществимость матричных операций, связанную, в частности, и с размерностью операндов.

$$A := \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{pmatrix} \quad A_{0,0} = 11 \quad A_{4,3} = 54 \quad A_{3,4} = \dots$$

This array index is invalid for this array.

Рис. 35 – Некорректное обращение к элементу матрицы блокируется

Функции компоновки и декомпозиции матриц и векторов

В составе библиотеки встроенных функций *MathCAD* имеются функции, позволяющие производить, формировать матрицу из блоков-подматриц и выделять из заданной матрицы подматрицы нужного размера. Компоновку матрицы из блоков осуществляют функции *augment*, *stack*:

Листинг 24. Функции объединения матриц по строкам и столбцам

$$\text{augment} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 15 & 16 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\text{stack} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 31 & 32 & 33 & 34 \\ 35 & 36 & 37 & 38 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 35 & 36 & 37 & 38 \end{pmatrix}$$

Выделение подматрицы выполняется функцией *submatrix* и оператором выделения столбца матрицы $\mathbf{M}^{<>}$. Функция выделения подматрицы *submatrix* имеет следующий синтаксис вызова:

$$\text{submatrix}(A, \text{row}_1, \text{row}_2, \text{col}_1, \text{col}_2),$$

где **A** – исходная матрица, из которой извлекается фрагмент; *row*₁ и *row*₂– номера начальной и конечной выбираемых строк в матрице; *col*₁ и *col*₂– номера начального и конечного столбца в матрице A, включаемого в выделяемую подматрицу.

Листинг 25. Функции извлечения подматрицы

$$\text{submatrix} \left[\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}, 1, 3, 1, 2 \right] \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}^{(0)} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \\ a_{40} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}^{(2)} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{02} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix}$$

Для частного случая выделения подматрицы – выделения столбца с заданным номером – в *MathCAD* имеется специальный оператор $\mathbf{M}^{<}$. Строку матрицы \mathbf{A} можно выделить как при помощи функции *submatrix*, так и при помощи оператора $\mathbf{M}^{<}$ (*Листинг 26*).

Приведенный ниже пример (*Листинг 26*) иллюстрирует применение оператора \mathbf{M}^T – транспонирования матрицы или вектора. Оператор транспонирования делает строки матрицы столбцами, а столбцы – строками, визуально эта операция соответствует зеркальному отражению относительно диагонали.

Листинг 26. Выделение столбца и строки матрицы

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{v1} := \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{pmatrix}^{(1)} \quad \mathbf{v1} = \begin{pmatrix} 12 \\ 22 \\ 32 \\ 42 \\ 52 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{v2} := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}^T \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ \boxed{31 \quad 32 \quad 33 \quad 34} \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \mathbf{v2} = \begin{pmatrix} 31 \\ 32 \\ 33 \\ 34 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{v2} := \mathbf{v2}^T \quad \mathbf{v2} = (31 \quad 32 \quad 33 \quad 34)
 \end{array}$$

Матричные и векторные арифметические операции

В среде *MathCAD* операции над матрицами производятся в соответствии с правилами математики.

При умножении матрицы (или вектора) на константу K , все элементы матрицы (вектора) умножаются на K .

При сложении (вычитании) матриц (или векторов) суммирование производится по координатам. Складывать и вычитать можно только матрицы (вектора) совпадающей размерности.

Произведение матриц производится по правилу «строка на столбец» – каждый элемент матрицы-произведения есть скалярное произведение вектора-строки первой матрицы на вектор-столбец второй:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} : \quad c_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i,k} \cdot b_{k,j}, \tag{5}$$

где $\mathbf{A}[m \times n]$, $\mathbf{B}[n \times p]$, $\mathbf{C}[m \times p]$. Напомним, что элементы матриц в *MathCAD* нумеруются с нуля, поэтому индексы изменяются так: $i = 0 \dots m - 1$, $j = 0 \dots p - 1$.

Естественно в формуле (5) требовать, чтобы количество столбцов матрицы \mathbf{A} совпадало с количеством строк матрицы \mathbf{B} – такие матрицы называются *согласованными* или *сцепленными*.

Листинг 27. Арифметические операции с матрицами

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 & 56 & 59 \\ 117 & 124 & 131 \\ 181 & 192 & 203 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 53 & 56 & 59 \\ 117 & 124 & 131 \\ 181 & 192 & 203 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = 0 \quad \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 31 & 41 \\ 51 & 61 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 17 \\ 25 & 33 \\ 41 & 49 \end{pmatrix} \quad 2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Нельзя забывать, что в отличие от произведения чисел, матричное произведение некоммутативно, т.е., в общем случае $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$, подтверждение этому легко построить (см., например *Листинг 28*):

Листинг 28. Матричное произведение некоммутативно

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$$

Для создания единичной и диагональной матриц заданного размера $n \times n$ в *MathCAD* можно использовать функции **identity**(n). и **diag**(x) соответственно (Листинг 29), здесь вектор x – вектор диагональных элементов создаваемой матрицы.

Единичная матрица **E** выполняет роль единицы при матричном умножении, а нулевая матрица **0** – роль нуля. Обучаемому предлагается проверить свойства этих матриц: $A \times E = A$, $E \times A = A$ и $A \times 0 = 0$, $0 \times A = 0$.

Листинг 29. Создание единичной и диагональной матриц

$$\text{identity}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{identity}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D := \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad |D| = 6$$

Функции определения размеров матриц

Возможны ситуации, когда для вычислительного процесса необходимы сведения о размерах матриц, которые становятся известны только после их формирования в ходе вычислений. Для получения такой информации используются функции определения количества строк и столбцов в матрицах **rows** и **cols**.

Листинг 30. Использование функций rows и cols

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C := \text{augment}(A \cdot B, \text{identity}(\text{rows}(A \cdot B)))$$

$$\text{rows}(C) = 3 \quad \text{cols}(C) = 6 \quad C = \begin{pmatrix} 53 & 56 & 59 & 1 & 0 & 0 \\ 117 & 124 & 131 & 0 & 1 & 0 \\ 181 & 192 & 203 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \quad C := \text{stack}(C, \text{identity}(\text{cols}(C))^{(0)T})$$

$$\text{rows}(C) = 4 \quad \text{cols}(C) = 6 \quad C = \begin{pmatrix} 53 & 56 & 59 & 1 & 0 & 0 \\ 117 & 124 & 131 & 0 & 1 & 0 \\ 181 & 192 & 203 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На Листинг 30 приведен пример довольно сложного формирования матрицы **C** из матриц **A** и **B** с использованием функций **rows** и **cols** для определения размеров промежуточных матриц.

Применение функций **rows** и **cols** повышает универсальность выражений, использующих матричные операции, они становятся менее зависимыми от конкретных размеров исходных матриц.

При программировании нестандартных пользовательских операций с элементами матриц особенно важно знать их размерность для организации циклов.

Оператор |x|

Листинг 31. Вычисление определителя квадратной матрицы

$$D := \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad |D| = 6 \quad \left| \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \right| = 0$$

Расчет определителя квадратной матрицы в *MathCAD* производится оператором **|A|**. Попытка применить этот оператор к неквадратной матрице с количеством столбцов более одного вызывает ошибку.

Формирование матрицы или вектора на основе заданной функции

В ряде случаев значения элемента матрицы $a_{i,j}$ можно связать со значениями его индексов некоторой функцией от двух целочисленных аргументов: $a_{i,j} = F(i, j)$. В этом случае матрицу произвольного размера можно сформировать при помощи встроенной функции $matrix(m, n, F)$, где m и n – число строк и столбцов в создаваемой матрице, F – имя функции.

Листинг 32. Формирование матриц функцией matrix

```

F(x,y) := 2x+y
F(3,4) = 128
matrix(4,5,F) =  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ 8 & 16 & 32 & 64 & 128 \end{pmatrix}$ 
A := matrix(3,3,F)  A =  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$ 
    
```

Матрицу произвольного размера можно сформировать, задавая значение каждому элементу с помощью оператора назначения (Листинг 33). Перебор множества индексов может быть произведен с помощью *ранжированных переменных* (создание матрицы **A**), либо с использованием *операторов цикла в программном блоке* (создание матрицы **B**). Как видно из приведенного примера, результат одинаков.

Листинг 33. Поэлементное формирование матриц

```

i:=0..2
j:=0..5  Ai,j := i+j  A =  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ 
B :=  $\begin{cases} \text{for } i \in 0..2 \\ \text{for } j \in 0..5 \\ d_{i,j} \leftarrow i+j \\ d \end{cases}$   B =  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ 
    
```

Сохранение матриц и векторов в файле

Для сохранения матриц в *текстовых файлах* и чтения их в системе MathCAD имеется семейство встроенных функций:

- **READPRN**("путь_к_файлу") – чтение данных в матрицу из текстового файла;
- **WRITEPRN**("путь_к_файлу") – запись данных из матрицы в новый текстовый файл;
- **APPENDPRN**("путь_к_файлу") – дозапись данных из матрицы в уже существующий текстовый файл.

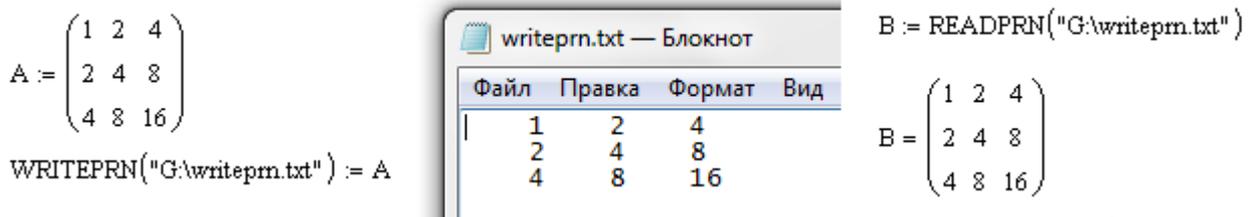


Рис. 36 – Работа с файлами в MathCAD

Функции WRITEPRN и APPENDPRN отличаются тем, что при записи матрицы в файл первой функцией прежнее содержимое файла (если оно есть) будет стерто, а функция APPENDPRN допишет матрицу в конец адресуемого текстового файла.

Текстовая строка "путь_к_файлу" может содержать как полный путь к файлу, так и сокращенный – только имя файла, который должен в этом случае размещаться в рабочем каталоге.

3.2. Векторная геометрия

Математическое представление о векторе как о координатном наборе из n чисел, позволяет использовать его для описания физических явлений природы, обладающих *направленностью и величиной*. Таких как перемещение, скорость и ускорение, характеристики гравитационных, магнитных и электрических полей, ток и напряжение электрических схем и др.

Базис и координаты. Тройка $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ линейно независимых векторов в пространстве \square^3 называется *базисом*. Любой вектор \bar{x} может быть единственным образом разложен по базисным векторам, то есть, представлен в виде

$$\bar{x} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + x_3 \cdot \bar{e}_3. \quad (6)$$

Числа (x_1, x_2, x_3) в разложении (6) называются *координатами вектора \bar{x}* в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Ортонормированный базис. Если векторы $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ попарно перпендикулярны и длина каждого из них равна единице, то базис называется *ортонормированным*, а координаты (x_1, x_2, x_3) – *прямоугольными*. Базисные векторы ортонормированного базиса будем обозначать $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

В векторной геометрии определены три вида произведений векторов – это скалярное произведение, векторное и смешанное:

Скалярное произведение – это операция над двумя векторами, результатом которой является число (скаляр), не зависящее от системы координат и характеризующее длины векторов-сомножителей и угол между ними. Данной операции соответствует умножение длины вектора \bar{x} на проекцию вектора \bar{y} на вектор \bar{x} . Скалярное произведение может быть вычислено по следующим формулам:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot \cos(\angle \bar{x}\bar{y}) \quad (7)$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 \quad (8)$$

Соотнесение формул (7) и (8) позволяет легко вычислить угол $\angle \bar{x}\bar{y}$ между векторами.

Через скалярное произведение определяется **длина вектора**, под которой обычно понимается его *модуль* или *абсолютное значение*:

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (9)$$

Векторным произведением вектора \bar{x} на вектор \bar{y} называется вектор $\bar{x} \times \bar{y}$, удовлетворяющий следующим требованиям:

- длина вектора $|\bar{x} \times \bar{y}|$ равна произведению длин векторов $|\bar{x}|$ и $|\bar{y}|$ на синус угла между ними:

$$|\bar{x} \times \bar{y}| = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot \sin(\angle \bar{x}\bar{y}); \quad (10)$$

- вектор $\bar{x} \times \bar{y}$ ортогонален каждому из векторов \bar{x} и \bar{y} ;
- вектор $\bar{x} \times \bar{y}$ направлен так, что тройка векторов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{x} \times \bar{y}$ является правой (Рис. 37).

Векторное произведение рассчитывается так (как определитель записанной ниже матрицы, составленной из базисных ортонормированных векторов $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ и координат векторов \bar{x} и \bar{y}):

$$\bar{x} \times \bar{y} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (11)$$

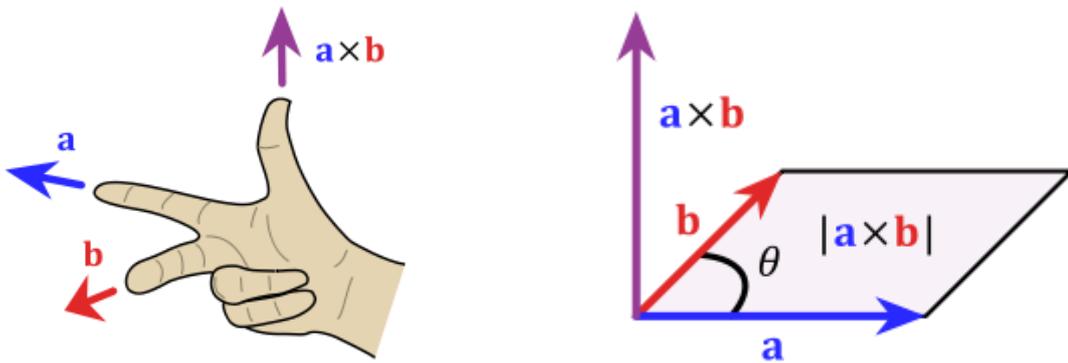


Рис. 37 – Результат векторного произведения направлен так, чтобы образовывать правую тройку векторов

Смешанным произведением трех векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор \vec{c} : $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$.

Иначе произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ может быть задано так:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Смешанное произведение помимо линейности обладает следующими свойствами:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}).$$

Три вектора называются *компланарными* (или иначе говоря – *линейно зависимыми*) тогда и только тогда, когда $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Следует из (12).

Тройка векторов является *правой* (Рис. 37) тогда и только тогда, когда $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$.

Если же $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} образуют *левую* тройку векторов.

Смешанное произведение имеет простое геометрическое толкование – это число, по модулю равное объему параллелепипеда, построенного на трех данных векторах.

3.3. Линейная зависимость (независимость) векторов

Важную роль в математике играет понятие линейной зависимости векторов. *Линейная зависимость* – это возможность выразить один вектор через другие вектора. Говорят, что вектор \vec{z} является линейной комбинацией других векторов, например \vec{x} и \vec{y} , если существуют такие числа a и b , что $\vec{z} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y}$. Вектор \vec{z} может быть выражен через \vec{x} и \vec{y} .

Если теперь из линейно зависимых векторов \vec{z} , \vec{x} и \vec{y} составить матрицу A , то *определитель* этой матрицы будет равен нулю, а ее *ранг* – будет равен двум.

Здесь важно, что ранг – это количество линейно независимых векторов матрицы, а вектор \vec{z} – зависимый.

Рассматривая матрицу как набор из трех векторов-строк или трех векторов-столбцов, можно сделать вывод, что если в такой матрице только два столбца линейно независимые, то и строк линейно независимых не больше двух.

Листинг 34. Определитель и ранг матрицы, состоящей из ЛЗС векторов

$$\begin{array}{l} \vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \quad A := \text{augment}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{rref}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ |A| = 0 \quad \text{rank}(A) = 2 \end{array}$$

В примере (Листинг 35) матрица A составляется из линейно-зависимых векторов $v1$, $v2$ и $v3$, что определяет величину 2 ранга матрицы. И равенство нулю ее определителя.

Функция $rref()$ в данном примере служит для приведения матрицы к треугольной форме. Поскольку система линейно-зависима, в полученной треугольной матрице $rref(A)$ третья строка нулевая.

В листинге ниже доказываем, что вектор-столбец $v3$ является линейной комбинацией векторов $v1$ и $v2$. Здесь подобраны коэффициенты ($a = -1$, $b = 2$) линейного разложения вектора $v3$ через векторы $v1$ и $v2$.

Листинг 35. Построение линейной комбинации векторов-столбцов матрицы A

$$a \cdot v1 + b \cdot v2 = v3$$

$$aa := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad bb := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad rref(augment(aa, bb)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad -1 \cdot v1 + 2 \cdot v2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Поскольку система линейно-зависима, в полученной треугольной матрице $rref(A)$ третья строка нулевая (см. Листинг 34). Это значит, что и среди строк $s1$, $s2$ и $s3$ имеется одна – являющаяся линейной комбинацией двух других.

Листинг 36. Построение линейной комбинации векторов-строк матрицы A

$$s1 := submatrix(A, 0, 0, 0, 2) \quad s1 = (1 \ 4 \ 7) \quad s2 := submatrix(A, 1, 1, 0, 2) \quad s2 = (2 \ 5 \ 8)$$

$$a \cdot s1 + b \cdot s3 = s2 \quad s3 := submatrix(A, 2, 2, 0, 2) \quad s3 = (3 \ 6 \ 9)$$

$$aa := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad bb := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad rref(augment(aa, bb)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix} \quad 0.5 \cdot s1 + 0.5 \cdot s3 = (2 \ 5 \ 8)$$

В этом листинге рассчитаны коэффициенты ($a = 0.5$ и $b = 0.5$) линейного разложения вектора-строки $s2$ через векторы-строки $s1$ и $s3$.

3.4. Практическая работа № 3 Матричные операции

Продолжительность – 2 часа.

Цель работы

Освоение умений, навыков и компетенций работы с матрицами и векторами в *MathCAD*. Закрепление знаний, полученных в курсе «Математика» в разделах «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия» и «Векторный анализ».

Задание на практическую работу

1. Создать программу в среде *MathCAD* и произвести перечисленные ниже исследования в соответствии со своим вариантом индивидуального задания (Таблица 4, Таблица 5). Продемонстрировать преподавателю выполнение программы.
2. Запрограммировать вычисление определителя матрицы A $[4 \times 4]$ путем разложения матрицы по соответствующему столбцу (или строке) в соответствии с индивидуальным заданием (Таблица 4). Сравнить результаты с вычислением определителя при помощи встроенного оператора $|A|$.
3. Вычислить ранг матрицы A , после чего:
 - если $rank(A) = cols(A) = rows(A)$, построить обратную матрицу A^{-1} и доказать, что она построена правильно;
 - если $rank(A) < cols(A)$, то доказать что какой-то из столбцов (или какая-то из строк) матрицы A является линейно-зависимой от других – построить его (её) линейную комбинацию (Листинг 35, Листинг 36).
4. Сформировать матрицу B заданной размерности $[m \times n]$ одним из изученных способов (Листинг 32, Листинг 33) в соответствии с индивидуальным заданием (Таблица 5).

5. Задать вектор \bar{x} и матрицу C требуемой размерности и произвести с ними описанные в индивидуальном задании вычисления. Результаты продемонстрировать преподавателю.
6. Выполнить над заданной матрицей B действия, заданные в шестом столбце таблицы индивидуального задания (*Таблица 5*), сводящиеся к объединению матриц и выделению подматриц, строк и столбцов.
7. Произвести над элементами матрицы D расчеты, заданные в седьмом столбце таблицы индивидуального задания (*Таблица 5*).
8. При выполнении операций матричной алгебры размерности векторов и матриц задавать таким образом, чтобы была возможность требуемые операции производить. Организовать проверку корректности размерностей матриц при помощи функций *rows* и *cols*: при произведении – проверять *согласованность* матриц, при сложении – совпадение размерностей.
9. Матрицы-результаты сохранить в текстовых файлах (*Рис. 36*).
10. Составить отчет, в котором отразить листинг программного кода с комментариями и привести скриншоты с результатами работы программ.

Таблица 4

1. разложить по 1 строке $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$	2. разложить по 3 строке $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	3. разложить по 2 строке $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & -3 \\ -1 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
4. разложить по 3 столбцу $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	5. разложить по 2 столбцу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$	6. разложить по 1 столбцу $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
7. разложить по 4 строке $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	8. разложить по 1 строке $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$	9. разложить по 2 строке $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
10. разложить по 2 столбцу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$	11. разложить по 3 столбцу $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	12. разложить по 4 столбцу $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 11 & 1 \end{pmatrix}$
13. разложить по 3 строке $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	14. разложить по 4 строке $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$	15. разложить по 1 строке $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
16. разложить по 3 столбцу	17. разложить по 4 столбцу	18. разложить по 1 столбцу

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
19. разложить по 2 строке $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -8 & 1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$	20. разложить по 3 строке $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$	21. разложить по 4 строке $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
22. разложить по 1 строке $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 11 & 1 \end{pmatrix}$	23. разложить по 2 строке $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	24. разложить по 3 строке $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
25. разложить по 2 столбцу $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$	26. разложить по 1 столбцу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$	27. разложить по 4 столбцу $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Как вы понимаете понятие матрица? Вектор? Что такое вектор-строка и вектор-столбец матрицы?
2. Что такое транспонирование матрицы?
3. Является ли матричное произведение коммутативным? А для квадратных матриц? Как вычислить определитель матрицы?
4. Что такое линейные операции с матрицами, векторами?
5. Как вычислить определитель матрицы разложением по строке (столбцу)?
6. Что такое обратная матрица? Когда она существует? Что такое линейная комбинация векторов?
7. Как с помощью средств MathCAD выделить нужную строку матрицы?
8. Что такое обратная матрица? Как это понятие связано с обратным числом?
9. Как выделить требуемый фрагмент (подматрицу) заданной матрицы в MathCAD?
10. Как понятие вектор n-мерного пространства связано со школьным понятием вектора (направленного отрезка)?
11. Какие операции над строками (столбцами) матрицы называются «эквивалентные преобразования»? Почему?
12. Дайте определение скалярного произведения векторов. Опишите его свойства.
13. Какие векторы называются линейно зависимыми? Дайте строгое определение.
14. Как с помощью средств MathCAD выделить нужный столбец матрицы?
15. Дайте определение векторного произведения векторов. Опишите его свойства.
16. Как определить число линейно независимых векторов в системе?
17. Что такое смешанное произведение векторов?
18. Как задать матрицу (вектор) в MathCAD? Различаются ли эти понятия?
19. Какие векторы называются собственными векторами матрицы? Что такое собственные числа матрицы?

Таблица 5

№	B [$m \times n$]	Способ задания матрицы	Операции с вектором \bar{x}	Операции с матрицей C	Действия с матрицей B	Вычисления с матрицей D
1.	4×7	функция <i>matrix</i>	$2\mathbf{B} \times \bar{x}$	$2\mathbf{B} + 3\mathbf{C}$	выписать подматрицу – строки 1-3, столбцы 2-6; приписать матрице B столбец в начало	найти максимальный элемент последней строки D
2.	8×5	ранжирование	$3\bar{x} \times \mathbf{B}$	$2\mathbf{C} + 3\mathbf{B}$	выписать первую строку матрицы B ; заменить в матрице B третью строку новой	найти сумму элементов первой строки D
3.	9×6	оператор цикла	$2\pi \cdot \mathbf{B} \times 7\bar{x}$	$2\mathbf{B} \times 3\mathbf{C}$	выписать второй столбец B ; вставить в матрицу B новый столбец после третьего	найти минимальный элемент второго столбца D
4.	10×4	чтение из файла	$0.3\bar{x} \times 4\mathbf{B}$	$2\mathbf{C} \times 3\mathbf{B}$	выписать подматрицу – строки 2-4 матрицы; вставить в B новую строку после второй	найти сумму элементов последнего столбца D
5.	11×5	функция <i>matrix</i>	$-\mathbf{B} \times 8.1\bar{x}$	$-11\mathbf{B} - 0.3\mathbf{C}$	выписать подматрицу – строки все, столбцы 1-5; заменить в B второй столбец новым	найти минимальный элемент третьей строки D
6.	9×4	ранжирование	$3\pi \cdot \bar{x} \times 2\mathbf{B}$	$-7\mathbf{C} + 3.1\mathbf{B}$	выписать 1 и 3 строки матрицы B ; вставить в матрицу B новый столбец перед последним	найти произведение элементов последней строки D
7.	5×10	оператор цикла	$2.1\mathbf{B} \times 1.2\bar{x}$	$2\pi \cdot \mathbf{B} \times 0.1\mathbf{C}$	выписать подматрицу – столбцы 1-2; заменить в B четвертый столбец новым	найти максимальный элемент главной диагонали D
8.	8×6	чтение из файла	$1.3\bar{x} \times 3.1\mathbf{B}$	$-0.7\mathbf{C} \times 3.1\mathbf{B}$	выписать 2 и 4 столбцы матрицы B ; заменить в матрице B пятую строку новой	найти сумму элементов второго столбца D
9.	11×9	функция <i>matrix</i>	$27\mathbf{B} \times 0.27\bar{x}$	$0.2\mathbf{B} - 0.3\mathbf{C}$	выписать вторую строку и второй столбец; приписать матрице B столбец в конец	найти максимальный элемент второго столбца D
10.	6×7	ранжирование	$0.01\bar{x} \times 0.3\mathbf{B}$	$-21\mathbf{C} + 13\mathbf{B}$	выписать подматрицу – строки 1-3, столбцы 2-6; приписать матрице B строку в конец	найти минимальный элемент предпоследней строки D
11.	5×8	оператор цикла	$12\mathbf{B} \times 0.01\bar{x}$	$-0.2\mathbf{B} \times 1.1\mathbf{C}$	выписать подматрицу – строка 3, столбцы 0-3; вставить в B новый столбец после первого	найти произведение элементов первого столбца D
12.	7×9	чтение из файла	$3.7\bar{x} \times 7.3\mathbf{B}$	$0.1\mathbf{C} \times 10\mathbf{B}$	выписать подматрицу – строки 2-4, столбец 2; вставить в B новую строку после третьей	найти максимальный элемент предпоследнего столбца D
13.	4×12	ранжирование	$-0.2\mathbf{B} \times 9\bar{x}$	$0.2\mathbf{C} + 0.2\mathbf{B}$	выписать 2 строку и последний столбец B ; вставить в B новую строку перед последней	найти сумму элементов третьей строки D
14.	6×8	оператор цикла	$9\bar{x} \times 9\mathbf{B}$	$-2\mathbf{B} \times 3.6\mathbf{C}$	выписать подматрицу – строки 2-3, столбцы 2-3; приписать матрице B строку в начало	найти максимальный элемент первой строки D
15.	3×11	чтение из файла	$1.2\mathbf{B} \times 1.2\bar{x}$	$-0.2\mathbf{C} \times 5\mathbf{B}$	выписать первую строку и первый столбец B ; вставить в B новую строку перед первой	найти произведение элементов главной диагонали D

Таблица 5 (продолжение)

№	B [$m \times n$]	Способ задания матрицы	Операции с вектором \bar{x}	Операции с матрицей C	Действия с матрицей B	Вычисления с матрицей D
16.	5×10	функция <i>matrix</i>	$1.3\bar{x} \times 3.1\mathbf{B}$	$-21\mathbf{C} + 13\mathbf{B}$	выписать подматрицу – столбцы 1-2; заменить в B четвертый столбец новым	найти максимальный элемент последней строки D
17.	8×6	ранжирование	$27\mathbf{B} \times 0.27\bar{x}$	$-0.2\mathbf{B} \times 1.1\mathbf{C}$	выписать 2 и 4 столбцы матрицы B ; заменить в матрице B пятую строку новой	найти сумму элементов первой строки D
18.	11×9	оператор цикла	$3\bar{x} \times \mathbf{B}$	$2\mathbf{B} \times 3\mathbf{C}$	выписать второй столбец B ; вставить в матрицу B новый столбец после третьего	найти максимальный элемент второго столбца D
19.	6×7	чтение из файла	$2\pi \cdot \mathbf{B} \times 7\bar{x}$	$2\mathbf{C} \times 3\mathbf{B}$	выписать подматрицу – строки 2-4 матрицы; вставить в B новую строку после второй	найти минимальный элемент предпоследней строки D
20.	11×5	функция <i>matrix</i>	$0.3\bar{x} \times 4\mathbf{B}$	$-11\mathbf{B} - 0.3\mathbf{C}$	выписать подматрицу – строка 3, столбцы 0-3; вставить в B новый столбец после первого	найти произведение элементов первого столбца D
21.	9×4	ранжирование	$1.3\bar{x} \times 3.1\mathbf{B}$	$-7\mathbf{C} + 3.1\mathbf{B}$	выписать подматрицу – строки 2-4, столбец 2; вставить в B новую строку после третьей	найти сумму элементов третьей строки D
22.	4×7	оператор цикла	$27\mathbf{B} \times 0.27\bar{x}$	$0.1\mathbf{C} \times 10\mathbf{B}$	выписать 2 строку и последний столбец B ; вставить в B новую строку перед последней	найти максимальный элемент первой строки D
23.	8×5	чтение из файла	$0.01\bar{x} \times 0.3\mathbf{B}$	$0.2\mathbf{C} + 0.2\mathbf{B}$	выписать подматрицу – строки 2-3, столбцы 2-3; приписать матрице B строку в начало	найти произведение элементов главной диагонали D
24.	9×6	функция <i>matrix</i>	$3.7\bar{x} \times 7.3\mathbf{B}$	$0.2\mathbf{B} - 0.3\mathbf{C}$	выписать первую строку и первый столбец B ; вставить в B новую строку перед первой	найти максимальный элемент второго столбца D
25.	10×4	ранжирование	$-0.2\mathbf{B} \times 9\bar{x}$	$-21\mathbf{C} + 13\mathbf{B}$	выписать подматрицу – строки 1-3, столбцы 2-6; приписать матрице B строку в конец	найти максимальный элемент последней строки D
26.	11×5	оператор цикла	$9\bar{x} \times 9\mathbf{B}$	$-0.2\mathbf{B} \times 1.1\mathbf{C}$	выписать подматрицу – строка 3, столбцы 0-3; вставить в B новый столбец после первого	найти сумму элементов первой строки D
27.	4×7	чтение из файла	$1.2\mathbf{B} \times 1.2\bar{x}$	$0.1\mathbf{C} \times 10\mathbf{B}$	выписать подматрицу – строки 2-4, столбец 2; вставить в B новую строку после третьей	найти максимальный элемент предпоследнего столбца D

4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и матрицы весьма тесно связаны. Матричная алгебра возникла в связи развитием методов решения линейных уравнений (алгебраических, дифференциальных) и отражает основные законы преобразования систем таких уравнений. Система линейных алгебраических уравнений в матричной форме выглядит так:

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + a_{1,3} \cdot x_3 = b_1; \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + a_{2,3} \cdot x_3 = b_2; \\ a_{3,1} \cdot x_1 + a_{3,2} \cdot x_2 + a_{3,3} \cdot x_3 = b_3; \end{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (13)$$

где \mathbf{A} – матрица с m строками и n столбцами с известными элементами; \mathbf{x} – вектор искомых решений размера n ; \mathbf{b} – вектор правых частей с известными элементами размера m :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

При решении СЛАУ матрицу системы \mathbf{A} нельзя, разумеется, рассматривать отдельно от вектора правых частей \mathbf{b} , поэтому в решении СЛАУ главную роль играет **расширенная матрица** системы \mathbf{Ab} , составляемая из элементов \mathbf{A} и \mathbf{b} :

$$\mathbf{Ab} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

4.1. Существование решений СЛАУ

В разделе матричной алгебры курса «Высшая математика» рассматривается вопрос о том, когда система вида (13)-(14) имеет решение. Здесь мы не будем разбирать его подробно, отметим лишь самое главное:

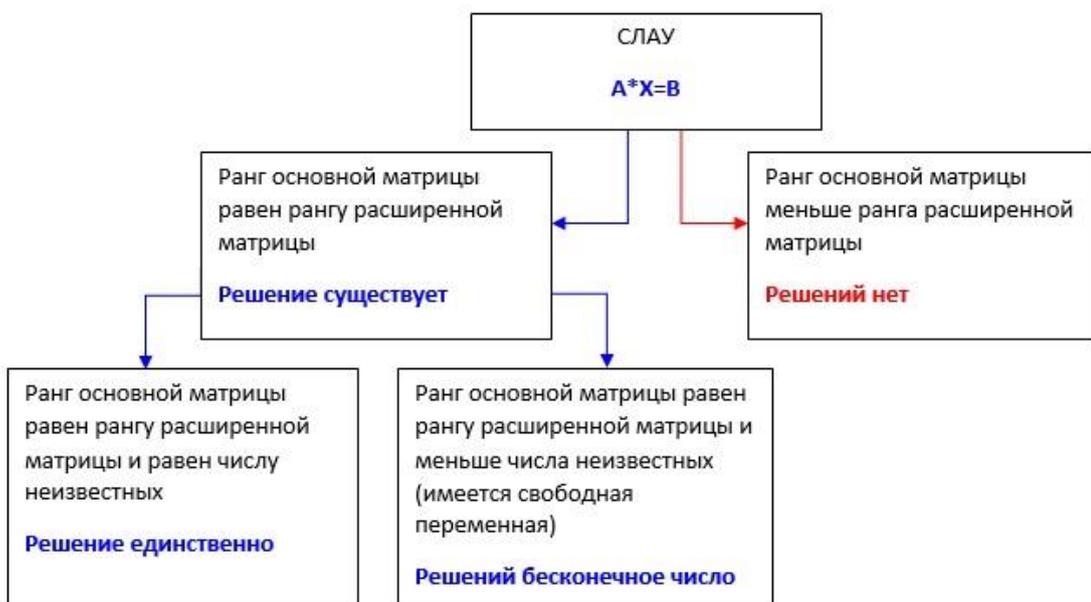


Рис. 38 – Существование и единственность решений СЛАУ

1. Если матрица \mathbf{A} квадратная ($n=m$) и невырожденная, т.е. её определитель не равен нулю $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, а следовательно ранг этой матрицы равен её размерности $\text{rank}(\mathbf{A})=n=m$, а значит и равен рангу расширенной матрицы. Для такой матрицы (см. Рис. 38) решение существует и единственно.
2. Если определитель квадратной матрицы \mathbf{A} системы $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ равен нулю $\det(\mathbf{A}) = 0$, то это означает, что линейно независимых строк в матрице системы меньше, чем ее размерность. Т.е. существует хотя бы одна линейно зависимая строка (а сколько их точно - определяется по рангу матрицы \mathbf{A}).
 - a. Теперь следует рассмотреть расширенную матрицу системы $\text{augment}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ если в ней столько же линейно независимых строк, сколько и в матрице \mathbf{A} (их ранги совпадают), то в системе решения существуют и их бесконечно много.
 - b. Если же число линейно независимых строк матрицы \mathbf{A} и расширенной матрицы не совпадают (их ранги не равны), то решения в такой системе уравнений нет.

4.2. Поиск решений СЛАУ через обратную матрицу

Если матрица \mathbf{A} квадратная ($n=m$) и невырожденная, т.е. её определитель не равен нулю $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, а следовательно ранг этой матрицы равен её размерности $\text{rank}(\mathbf{A})=n=m$, а значит и равен рангу расширенной матрицы $\text{rank}(\mathbf{A})=\text{rank}(\text{augment}(\mathbf{A}, \mathbf{b}))$. Для такой матрицы (см. Рис. 38) решение существует и единственно. Построим это решение. Для чего домножим обе части системы уравнений $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ слева на обратную матрицу \mathbf{A}^{-1} . Здесь важно понимать, что обратная матрица существует только для невырожденной матрицы \mathbf{A} , кроме того, умножать обе части уравнений необходимо с одной стороны (слева), так как мы помним, что матричное произведение не является коммутативным.

Получим $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$. Но мы знаем из свойств обратной матрицы, что $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$. Тогда наше уравнение примет вид $\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$. Из свойств единичной матрицы \mathbf{E} следует, что $\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Отсюда получается, что $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$, т.е. вектор-решение \mathbf{x} удалось записать в явном виде.

Искомое единственное решение системы уравнений $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ можно построить по формуле $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ – найти его непосредственно при помощи умножения слева на обратную матрицу.

Кроме того, его можно отыскать при помощи встроенной функции $\text{lsolve}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$:

Листинг 37. СЛАУ непосредственный поиск решения. Функция lsolve

Матрица системы:	Матрица правой части:		
$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\mathbf{b} := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$	Вычисление определителя	
		$ \mathbf{A} = 5$	
Вычисление решения системы	Решение системы с помощью функции lsolve	Проверка правильности решения	
$\mathbf{x} := \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$	$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\mathbf{x} := \text{lsolve}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$	$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
		$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	

4.3. Метод Гаусса

Системы линейных алгебраических уравнений (13)-(14) встречались обучаемому еще в курсе средней школы. Там для решения подобных систем использовался метод

последовательного выражения неизвестных $x_i, i=1..n$ и подстановки полученного равенства в оставшиеся уравнения.

Этот метод в математике называется методом Гаусса, и в матричном виде сводится к эквивалентному домножению на константу и суммированию строк (но не столбцов) расширенной матрицы $\mathbf{Ab} = \text{augment}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с целью приведения ее к ступенчатому виду – как матрица \mathbf{Ag} на листинге (Листинг 38). Крайний правый столбец матрицы \mathbf{Ag} – решение.

Листинг 38. Метод Гаусса. Функция **rref**

ORIGIN := 1		
Матрица системы:	Матрица правой части:	Формирование расширенной матрицы системы:
$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\mathbf{b} := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$	$\mathbf{Ab} := \text{augment}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad \mathbf{Ab} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{pmatrix}$
Приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду (прямой и обратный ходы метода Гаусса):		
$\mathbf{Ag} := \text{rref}(\mathbf{Ab}) \quad \mathbf{Ag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	Формирование столбца решения системы:	Проверка решения:
	$\mathbf{x} := \text{submatrix}(\mathbf{Ag}, 1, 3, 4, 4) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Команда **ORIGIN:=1** переопределяет принцип нумерации элементов матриц – теперь они нумеруются не с 0, а с 1.

Метод Гаусса можно реализовать вручную преобразуя строки матрицы, а можно использовать встроенную функцию **rref()**, как показано на примере. Можно доказать, что полученная матрица \mathbf{Ag} эквивалентна матрице \mathbf{Ab} и описывает одну и ту же исходную систему линейных алгебраических уравнений.

4.4. Правило Крамера

Еще один широко известный способ построения решения системы (13) – правило Крамера (Листинг 39).

Листинг 39. правило Крамера

ORIGIN := 1 нумерация элементов матриц не с 0, а с 1		
$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = 2$	$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$
Заменить соответствующий столбец вектором В правых частей		
$\mathbf{A1} := \text{augment}(\mathbf{B}, \mathbf{A}^{(2)}, \mathbf{A}^{(3)}) \quad \mathbf{A1} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ 11 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A1} = 2$	$\mathbf{A2} := \text{augment}(\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{B}, \mathbf{A}^{(3)}) \quad \mathbf{A2} = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & 11 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A2} = 8$	$\mathbf{A3} := \text{augment}(\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \mathbf{B}) \quad \mathbf{A3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 11 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A3} = 4$
Вектор X - решение СЛАУ		Проверка:
$\mathbf{X} := \left(\frac{ \mathbf{A1} }{ \mathbf{A} } \quad \frac{ \mathbf{A2} }{ \mathbf{A} } \quad \frac{ \mathbf{A3} }{ \mathbf{A} } \right)^T \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$		$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$

Этот метод состоит в последовательном построении вспомогательных матриц A_1, A_2, \dots, A_n путем замены i -того столбца матрицы вектором правых частей \mathbf{b} и вычисления неизвестных переменных $x_i, i = 1..n$ как отношение определителей матриц A_i и A .

Разумеется, корни системы уравнений (13) можно отыскать известными нам из предыдущих занятий операторами *Given-Find* и *Given-Minerr*.

4.5. СЛАУ вырожденный случай

Главным критерием существования решения СЛАУ является *ранг* матрицы. В примерах, рассмотренных выше *Листинг 37 - Листинг 39*, ранг основной матрицы равнялся рангу расширенной матрицы – самый простой тип СЛАУ, для которого *существует единственное решение*. Это объясняется тем, что количество линейно-независимых уравнений системы (13) равняется количеству неизвестных.

Если в СЛАУ количество уравнений больше числа неизвестных, ясно, что такая система избыточна. И может быть противоречивой, в этом случае решения у системы может и не быть. Вопрос о существовании решения в этом случае сводится к поиску непротиворечивого подмножества всех уравнений – такого, для которого ранг основной матрицы равен рангу расширенной и равен числу неизвестных.

В этом случае множество решений строится следующим образом. Поскольку количество уравнений m меньше числа неизвестных n ($n > m$), нам необходимо выбрать m *зависимых переменных* (обозначим их вектором \mathbf{x}_1) и выразить их через оставшиеся $(n-m)$ переменных – *свободные переменные* (обозначим их вектором \mathbf{x}_2). Это возможно, если матрица A имеет m независимых строк, иными словами ни одно из уравнений не является линейной комбинацией других. Систему уравнений можно преобразовать к виду:

$$A_1 \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{b} - A_2 \cdot \mathbf{x}_2. \quad (16)$$

где A_1 — квадратная матрица $m \times m$, состоящая из коэффициентов при компонентах вектора \mathbf{x}_1 , а A_2 — матрица, содержащая m строк и $(n-m)$ столбцов, образованная коэффициентами при компонентах вектора \mathbf{x}_2 .

Задав свободные переменные \mathbf{x}_2 какими-либо значениями мы получим новый вектор правых частей $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b} - A_2 \cdot \mathbf{x}_2$, и можем записать систему уравнений для зависимых переменных \mathbf{x}_1 :

$$A_1 \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \quad \text{где } \mathbf{b}_1 = \mathbf{b} - A_2 \cdot \mathbf{x}_2. \quad (17)$$

У этой системы матрица A_1 невырожденная и решение существует и единственное (при заданных ранее свободных переменных \mathbf{x}_2).

Ясно, что решение такой системы будет представлять собой некоторую матричную функцию от свободных переменных $\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_2)$, которую можно записать таким образом: $A_1 \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$. Реализация таких вычислений сводится к компоновке матриц A_1 и A_2 из столбцов исходной матрицы A и взятию обратной матрицы A_1^{-1} , выполнение этих действий в среде *MathCAD* не составляет проблем.

Пример ниже (*Листинг 40*) иллюстрирует неоднозначность решений СЛАУ вида (16) в зависимости от того, как задана свободная переменная. Можно видеть, что разные методы решения – *lsolve*, *Given-Find* и *rref* выдают различные результаты. В связи с этим, к поиску решения СЛАУ нельзя подходить «бездумно», *MathCAD* – это всего лишь инструмент, он помогает в изучении математики, но не заменяет её.

Листинг 40. Бесконечное множество решений СЛАУ

```

A := (1 2 3)
     (4 5 6)
     (7 8 9)
B := (1)
     (2)
     (3)
A^-1 = ... |A| = 0 rank(A) = 2
This matrix is singular. Cannot compute its inverse.
AB := augment(A,B)
rank(AB) = 2
AB = (1 2 3 1)
     (4 5 6 2)
     (7 8 9 3)
lsolve(A,B) -> (-1/3 + subscript(subscript(t,1),1))
                2/3 - 2*subscript(subscript(t,1),1)
                subscript(subscript(t,1),1)
X := (-0.233333)
     (0.466666)
     (0.1)
A*X = (1)
     (2)
     (3)
Given A*X = B X := Find(X) X = (0)
                                (0)
                                (0.333)
A*X = (1)
     (2)
     (3)
rref(AB) -> (1 0 -1 -1/3)
             (0 1 2 2/3)
             (0 0 0 0)
    
```

В приведенном выше примере функция *lsolve* возвращает символьные зависимости, показывающие, что решение может быть выражено через параметр t_1 . А функция *rref* возвращает матрицу, эквивалентную A , последняя строка которой состоит из нулей. Запишем, какой системе уравнений соответствует матрица *rref*(AB):

$$\begin{cases} x - z = -\frac{1}{3}, \\ y + 2z = \frac{2}{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + z, \\ y = \frac{2}{3} - 2z. \end{cases}$$

Теперь понятно, почему переменная z называется *свободной переменной*, а x и y – *зависимыми*. Здесь переменные x и y – могут быть выражены через z , и в зависимости от неё будут принимать различные значения:

Листинг 41. Бесконечное множество решений СЛАУ

общее решение СЛАУ	частные решения, построенные для различных значений свободной переменной
$X(z) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + z \\ \frac{2}{3} - 2z \\ z \end{pmatrix}$	$X(0.1) = \begin{pmatrix} -0.233 \\ 0.467 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad A \cdot X(0.1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.333 \end{pmatrix} \quad A \cdot X\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Свободным переменным присваиваются произвольно различные значения. Далее по закону, называемому **общим решением СЛАУ** (или её **фундаментальным решением**), строится частный случай этого закона - **частное решение** исходной СЛАУ. Каждое из них удовлетворяет СЛАУ, а значит является решением. Отсюда и бесконечное число таких частных решений.

Если же число линейно независимых строк матрицы A и расширенной матрицы $\text{augment}(A,b)$ не совпадают (их ранги не равны), то решения в такой системе уравнений не существует.

4.6. Однородная СЛАУ

Рассмотрим частный случай СЛАУ, когда все компоненты вектора \mathbf{b} равны нулю. Такая система уравнений называется однородной:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (18)$$

Как строятся её решения? Совершенно ясно, что однородная система *всегда имеет решение*. Например, это так называемое *тривиальное решение* $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$. Существуют ли другие, нетривиальные решения?

Теорема: однородная система линейных уравнений имеет *единственное только тривиальное решение*, если ранг матрицы системы равен количеству переменных.



Рис. 39 – Существование и единственность решений *однородной СЛАУ*

Однако на практике гораздо более распространен случай, когда строки матрицы системы *линейно зависимы*. И тогда неизбежно появление общего решения, зависящего от свободных переменных, аналогично тому, как строилось такое решение в предыдущем параграфе.

Листинг 42. Однородная нетривиальная СЛАУ - общее решение по методу Гаусса

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |A| = 0 \quad \text{rank}(A) = 3$$

$$\text{ref}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}(z) := \begin{pmatrix} \frac{13-z}{8} \\ \frac{9-z}{8} \\ -\frac{z}{8} \\ z \end{pmatrix}$$

Листинг 43. Однородная нетривиальная СЛАУ - частные решения с проверкой

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{R}(1) = \begin{pmatrix} 1.625 \\ -1.125 \\ -0.125 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{R}(2) = \begin{pmatrix} 3.25 \\ -2.25 \\ -0.25 \\ 2 \end{pmatrix} & \mathbf{R}(3) = \begin{pmatrix} 4.875 \\ -3.375 \\ -0.375 \\ 3 \end{pmatrix} & \mathbf{R}(80) = \begin{pmatrix} 130 \\ -90 \\ -10 \\ 80 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}(80) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

В примере выше (Листинг 43) общее решение $\mathbf{R}(\mathbf{z})$ однородной нетривиальной СЛАУ строилось вручную. Ниже рассмотрен алгоритм, разбивающий переменные на зависимые и независимые (независимая одна - обозначим ее \mathbf{z}). Тогда вектор правых частей для зависимой (и уже неоднородной) СЛАУ будет $\mathbf{b1}(\mathbf{z})$, а матрица этой системы $\mathbf{A1}$. Разрешим неоднородную СЛАУ для зависимых переменных при помощи обратной матрицы и припишем к ним независимые - получим общее решение $\mathbf{R}(\mathbf{z})$:

Листинг 44. Однородная нетривиальная СЛАУ - алгоритм построения общего решения

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{A1} := \text{submatrix}(\mathbf{A}, 1, 3, 1, 3) \\
 \mathbf{b1}(\mathbf{z}) := -\mathbf{z} \cdot \text{submatrix}(\mathbf{A}, 1, 3, 4, 4) \\
 \mathbf{R}(\mathbf{z}) := \text{stack}(\mathbf{A1}^{-1} \cdot \mathbf{b1}(\mathbf{z}), \mathbf{z})
 \end{array}
 \quad \mathbf{R}(\mathbf{z}) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{13 \cdot \mathbf{z}}{8} \\ \frac{9 \cdot \mathbf{z}}{8} \\ \frac{\mathbf{z}}{8} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$$

4.7. Практическая работа №4. Системы линейных алгебраических уравнений

Продолжительность – 4 часа.

Цель работы

Закрепление умений, навыков и компетенций работы с матрицами и векторами в *MathCAD*. Закрепление знаний, полученных в курсе «Высшая математика» в разделах «Линейная алгебра», посвященных поиску решений СЛАУ. Развитие творческого, осознанного подхода к решению систем уравнений. Получение навыков рассуждения и анализа полученных результатов.

Задание на практическую работу

1. В соответствии с индивидуальным заданием (Таблица 6) определить существование и единственность решения заданной системы. Создать программу в среде *MathCAD* и найти решение заданной СЛАУ четырьмя способами:

- 1.1. по методу Гаусса при помощи встроенной функции *rref()*;
- 1.2. по правилу Крамера;
- 1.3. непосредственно умножением на обратную матрицу;
- 1.4. при помощи встроенных функций *MathCAD*.

Сравнить решения, найденные разными способами.

2. Для индивидуальных заданий (Таблица 7) найти определитель, ранг основной и расширенной матриц и их размерности и объяснить условия существования решения. В случае, если решение существует, обосновать разделение вектора неизвестных на *зависимые* и *свободные переменные*. Выписать общее решение вида (16) и построить не менее трех частных решений, при фиксированных свободных переменных.

3. Для индивидуальных заданий по однородной СЛАУ (Таблица 8) найти определитель и ранг основной матрицы и объяснить условия существования и единственности решения. В случае, если решение не единственно, выписать общее решение вида (16) и построить не менее трех частных решений, при фиксированных свободных переменных.

Составить отчет, в котором отразить листинг программного кода с комментариями.

Таблица 6

1. $\begin{cases} 3z - 3y = -12 \\ x + 4y + 5z = 15 \\ x + 4z = -1 \end{cases}$	2. $\begin{cases} 2 \cdot x - 3y - z = -8 \\ x + 4y = 13 \\ 3x + 3z = 6 \end{cases}$	3. $\begin{cases} z - 2x = 1 \\ 3x - 2y = 6 \\ 2x - 2y - 2z = -6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 4y - 2x - 2z = 18 \\ 4x - 2y + 3z = -13 \\ 2y - x + 3z = 13 \end{cases}$	5. $\begin{cases} x + y + 4z = 2 \\ 2x + 4y - 2z = 18 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$	6. $\begin{cases} 4y - 3x - z = 2 \\ x - 2 \cdot y + 3z = 4 \\ x + 2z = 4 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ -2x - 3z = -4 \\ 5y - 3x + 4z = 11 \end{cases}$	8. $\begin{cases} y + 4z = 12 \\ 2x + y - 2z = -4 \\ x - y + 2z = 7 \end{cases}$	9. $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -2y + 3z = 0 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases}$
10. $\begin{cases} -2x - z = 4 \\ 4y - 2x + 2z = 2 \\ 4z - x - 3y = -10 \end{cases}$	11. $\begin{cases} -3x - 2y + z = -6 \\ 4y - 2z = 24 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases}$	12. $\begin{cases} y - 3x + 2z = -14 \\ -2x - 3z = -10 \\ 3 \cdot x + y + 4z = 16 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19 \\ 2x - y + 4z = 13 \\ 2y - 3z = -10 \end{cases}$	14. $\begin{cases} 2y - 2z = 12 \\ -2x + 2y = 12 \\ 5x - 2y + 4z = -26 \end{cases}$	15. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 19 \\ x + 5z = 21 \end{cases}$
16. $\begin{cases} 5y + 3z = 22 \\ 4y - 2x + z = 4 \\ y + z - 3x = -6 \end{cases}$	17. $\begin{cases} -2x - z = 4 \\ 4y - 2x + 2z = 2 \\ 4z - x - 3y = -10 \end{cases}$	18. $\begin{cases} 3x + y = -8 \\ 2x + z = -4 \\ 2x + y + 2z = -6 \end{cases}$
19. $\begin{cases} 5z - 3x - 3y = -13 \\ 4x - y = 14 \\ 2x + z = 9 \end{cases}$	20. $\begin{cases} y - 2x - z = 0 \\ 2x + y = 7 \\ 3x + 2y + 4z = 25 \end{cases}$	21. $\begin{cases} y - 3x + 2z = -14 \\ -2x - 3z = -10 \\ 3x + y + 4z = 16 \end{cases}$
22. $\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19 \\ 2x - y + 4z = 13 \\ 2x - 3z = -10 \end{cases}$	23. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 19 \\ x + 5z = 21 \end{cases}$	24. $\begin{cases} 5y + 3z = 22 \\ 4y - 2x + z = 4 \\ y - 3x + z = -6 \end{cases}$

Таблица 7

1. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 19 \\ x + 5z = 21 \\ 7x - 4y + 13z = 59 \end{cases}$	2. $\begin{cases} 5y + 3z = 8 \\ -2x + 4y + z = 11 \\ -2x + 14y + 7z = 27 \end{cases}$	3. $\begin{cases} -2x + 5y - 2z = 10 \\ -3x + y + 2z = 0 \\ -7x + 11y - 2z = 20 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x + y + 4z = 35 \\ 5x + y = 23 \\ 11x + 3y + 8z = 93 \end{cases}$	5. $\begin{cases} 2x - y + 4z = 13 \\ 2y - 3z = -10 \\ 4x + 5z = 16 \end{cases}$	6. $\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2y - 2z = 4 \\ 2x + 8y - 6z = 12 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x - 3y + 4z = -6 \\ -x + y - 2z = -2 \\ -3x - 5y + 6z = -14 \end{cases}$	8. $\begin{cases} 2x + z = -4 \\ 2x + y + 2z = -6 \\ 6x + y + 4z = -14 \end{cases}$	9. $\begin{cases} -3x - 3y + 5z = -1 \\ 4x - y = 8 \\ -2x - 7y + 10z = 6 \end{cases}$
10. $\begin{cases} -3x - 2y + 4z = -19 \\ 3x + z = 13 \\ -3x - 4y + 9z = -25 \end{cases}$	11. $\begin{cases} 5x - 3y - 3z = -21 \\ -2x + 4y + 3z = 15 \\ 8x - 2y - 3z = -27 \end{cases}$	12. $\begin{cases} 4x + 4y + 2z = -10 \\ x - 2y + 3z = -16 \\ 9x + 6y + 7z = -36 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 5x - y + 5z = 15 \\ -x - z = -4 \\ 9x - 2y + 9z = 26 \end{cases}$	14. $\begin{cases} -3x - 2y + 3z = 0 \\ -x - 3y - 2z = 13 \\ -7x - 7y + 4z = 13 \end{cases}$	15. $\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 9 \\ 6x - 3y + 12z = 9 \end{cases}$
16. $\begin{cases} -3x + 4y = -5 \\ 2x + 4y + z = 11 \\ -4x + 12y + z = 1 \end{cases}$	17. $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 4y + 3z = 25 \\ 7x - 2y + 3z = 35 \end{cases}$	18. $\begin{cases} -3x + 3y - 3z = 0 \\ 2x - 2y - 3z = -25 \\ -4x + 4y - 9z = -25 \end{cases}$
19. $\begin{cases} 2x + 5y - 2z = 7 \\ 3x + 3y + 2z = 11 \\ 7x + 13y - 2z = 25 \end{cases}$	20. $\begin{cases} -3y - 3z = -24 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \\ 3x - 8y - 4z = -44 \end{cases}$	21. $\begin{cases} -x + 4y - 2z = 14 \\ -2x + 4z = -12 \\ -4x + 8y = 16 \end{cases}$
22. $\begin{cases} -x + 4y + 4z = 4 \\ -3x - 2y = -14 \\ -5x + 6y + 8z = -6 \end{cases}$	23. $\begin{cases} x + 5z = 15 \\ 5x + y = 4 \\ 7x + y + 10z = 34 \end{cases}$	24. $\begin{cases} x - y + 4z = -5 \\ 4y - 2z = -6 \\ 2x + 2y + 6z = -16 \end{cases}$

Таблица 8

1. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$	2. $\begin{cases} x + 7y + 4z = 0 \\ 2x + 8y + 5z = 0 \\ 3x + 9y + 6z = 0 \end{cases}$	3. $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x - 3z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$	5. $\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 5x + 3y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$	6. $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ y - x + 2z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x + y = -2z \\ 4x + 3y + 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$	8. $\begin{cases} x = -2y \\ x = y \\ 2y - 2x - 3z = 0 \end{cases}$	9. $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y = 2z \\ y = -z \end{cases}$
10. $\begin{cases} y = z \\ 2x - 3y = 0 \\ 4x - 11y + 5z = 0 \end{cases}$	11. $\begin{cases} x = -y \\ x + 2y + 7z = 0 \\ y - 3x - 2z = 0 \end{cases}$	12. $\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 2y = 2z \\ x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$	14. $\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ -3x - y - 11z = 0 \\ x + 5z = 0 \end{cases}$	15. $\begin{cases} z = -2y \\ -2x = 3y \\ -8x - 16y + 2z = 0 \end{cases}$
16. $\begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ y - 2x + z = 0 \\ 7y - 4x + 5z = 0 \end{cases}$	17. $\begin{cases} -2x = 8z \\ -3x - 2y - 16z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$	18. $\begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2y - 2x + 3z = 0 \end{cases}$
19. $\begin{cases} y - 2x - 10z = 0 \\ 2y = 4z \\ x - y + 6z = 0 \end{cases}$	20. $\begin{cases} y - 2x - 4z = 0 \\ x - 3y + 7z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$	21. $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$
22. $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y + 4z = 0 \\ x - 3y + 6z = 0 \end{cases}$	23. $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ z = 2x \\ 4y + 6z - 10x = 0 \end{cases}$	24. $\begin{cases} x + 3z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

Контрольные вопросы

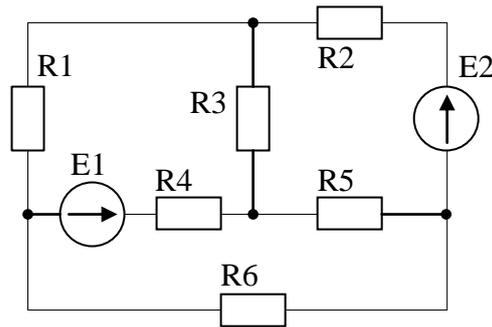
1. Как определить, разрешима ли однородная система алгебраических уравнений?
2. Если система имеет решения, то как определить, сколько их?
3. Как отделить зависимые переменные от свободных? Сколько их?
4. Что такое расширенная матрица системы?
5. В каких случаях решение неоднородной СЛАУ единственно?
6. Что такое ранг СЛАУ? Чем он отличается от ранга матрицы СЛАУ?
7. В чем смысл метода Гаусса решения СЛАУ?
8. В каких случаях не существует решения неоднородной СЛАУ?
9. Как решить СЛАУ по методу Крамера? Можно ли решить вырожденную систему?
10. Какие методы поиска решений СЛАУ вам известны?
11. Как решить СЛАУ, если определитель матрицы равен 0?
12. Как определить, разрешима ли неоднородная система алгебраических уравнений?
13. В каких случаях не существует решения однородной СЛАУ?
14. В каких случаях решение однородной СЛАУ единственно?

5. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Умение находить решение систем линейных алгебраических уравнений востребовано в различных разделах естественных и технических наук. Рассмотрим, как применяются данное умение в электротехнике. Одна из задач состоит в расчете направлений протекания и величин токов в электрических цепях постоянного тока (и напряжения).

5.1. Электрические цепи постоянного тока. Закон Ома. Законы Кирхгофа

Рассмотрим, в качестве примера, простейшую задачу из теории цепей постоянного тока.



$$\begin{aligned} E1 &= 250 \text{ [В]} \\ E2 &= 100 \text{ [В]} \\ R1 &= 35 \text{ [Ом]} \\ R2 &= 80 \text{ [Ом]} \\ R3 &= 20 \text{ [Ом]} \\ R4 &= 100 \text{ [Ом]} \\ R5 &= 150 \text{ [Ом]} \\ R6 &= 40 \text{ [Ом]} \end{aligned}$$

Рис. 40 – Задача на баланс мощностей в цепи постоянного тока

На рисунке изображена электрическая цепь, включающая идеальные источники ЭДС E_1 , E_2 и резисторы R_1 - R_6 . В правой части рисунка приведены номиналы этих элементов. Ставится задача при помощи закона Ома и законов Кирхгофа определить токи, протекающие по всем элементам цепи и вычислить генерируемую и потребляемую схемой мощность. Вспомним эти законы:

Первый закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов в каждом узле любой цепи равна нулю, при этом втекающий в узел ток принято считать положительным, а вытекающий – отрицательным.

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad (19)$$

Иными словами, сколько тока втекает в узел, столько из него и вытекает. Это правило следует из фундаментального закона сохранения заряда.

Второй закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма падений напряжений во всех замкнутых контурах цепи, равна алгебраической сумме ЭДС этого контура. Если в контуре нет источников ЭДС, то суммарное падение напряжений в контуре равно нулю.

$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^m U_k \quad (20)$$

Иными словами, при полном обходе контура потенциал, изменяясь, возвращается к исходному значению. Это правило вытекает из 3-го уравнения Максвелла для стационарного магнитного поля.

Частным случаем второго закона Кирхгофа для цепи, состоящей из одного контура, является закон Ома для этой цепи.

Закон Ома

Сила тока в участке цепи прямо пропорциональна напряжению и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению данного участка цепи.

$$I = \frac{U}{R} \quad (21)$$

Рассмотрим применение законов (19)-(21) на примере расчета токов в цепи (Рис. 40).

При построении уравнений и проведении расчетов необходимо учитывать тот факт, что схема содержит *идеальные источники* напряжения E_1 и E_2 , т.е. вводится допущение, что внутреннее сопротивление этих источников равно нулю.

Алгоритмом расчета цепи постоянного тока

- 1) Произвольно выбрать положительные направления токов и обозначить их на схеме.
- 2) Составить уравнения по первому закону Кирхгофа (19), причем на одно уравнение меньше числа узлов (т.к. для последнего узла уравнение будет линейно зависимым от предыдущих уравнений).
- 3) Выбрать независимые (главные) контуры и направление их обхода. Удобно для всех контуров выбрать одинаковое направление обхода.
- 4) Записать уравнения по второму закону Кирхгофа (20) для выбранных контуров.
- 5) Решить полученную систему уравнений – определяют искомые токи.

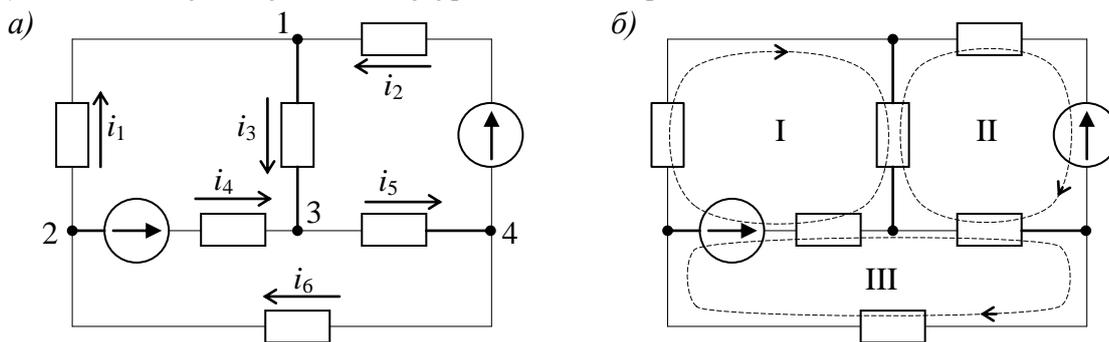


Рис. 41 – а) условные направления токов в ветвях схемы;
б) направления обхода контуров

Решение:

1) В цепи имеется 4 узла, обозначенных на Рис. 41, а цифрами 1-4, значит, потребуется составить 3 уравнения по первому закону Кирхгофа. Стрелками обозначены произвольно выбранные направления протекания токов $i_1 - i_6$.

2) Составим 3 уравнения токов в узлах по первому закону Кирхгофа (19):

узел 1: $i_1 + i_2 - i_3 = 0$ (токи i_1 и i_2 втекают в узел 1, а i_3 вытекает из узла 1);

узел 2: $-i_1 - i_4 + i_6 = 0$ (ток i_6 втекает в узел 2, а i_1 и i_4 вытекает из узла 2);

узел 3: $i_3 + i_4 - i_5 = 0$ (токи i_4 и i_3 втекают в узел 3, а i_5 вытекает из узла 3).

3) На Рис. 41, б предложены выбранные произвольно независимые контуры I – III и направление их обхода.

4) Для выбранных контуров запишем уравнения по второму закону Кирхгофа (20):

контур I: $u_1 + u_3 + u_4 = -E_1$ (включен навстречу направлению обхода контура I);

контур II: $u_2 + u_3 + u_5 = -E_2$ (включен навстречу направлению обхода контура II);

контур III: $u_4 + u_5 + u_6 = E_1$ (включен по направлению обхода контура III).

5) В полученных уравнениях перейдем от напряжений к токам, пользуясь законом Ома (21) и учитывая направления токов (если ток направлен против обхода контура, он отрицательный)

контур I: $i_1 \cdot R_1 + i_3 \cdot R_3 - i_4 \cdot R_4 = -E_1$ (ток i_4 направлен против обхода контура I);

контур II: $-i_2 \cdot R_2 - i_3 \cdot R_3 - i_5 \cdot R_5 = -E_2$ (токи i_2 , i_3 и i_5 – против обхода контура II);

контур III: $i_4 \cdot R_4 + i_5 \cdot R_5 + i_6 \cdot R_6 = E_1$ (все токи по направлению обхода контура III).

б) Из первых трех и последних трех уравнений составим матрицы СЛАУ и разрешим её любым известным способом относительно токов $i_1 - i_6$ и получим вектор $X = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)^T$.

В программе (Листинг 45) Получены следующие значения токов: $i_1 = -1.672$ А, $i_2 = 0.525$ А, $i_3 = -1.146$ А, $i_4 = 1.686$ А, $i_5 = 0.539$ А, $i_6 = 0.014$ А. Выбирая случайным образом направления протекания токов в цепях схемы, мы угадали направление токов i_2, i_4, i_5 и i_6 , а токи i_1 и i_3 имеют отрицательное значение, следовательно в реальной схеме они направлены в противоположную сторону.

Листинг 45. Решение полученной системы уравнений

```

ORIGIN := 1  R := (35 80 20 100 150 40)^T  E := (250 100)^T
A :=  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & -R_3 & 0 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & R_6 \end{pmatrix}$   B :=  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -E_1 \\ -E_2 \\ E_1 \end{pmatrix}$   |A| = 4.534 × 106  rank(A) = 6
X := rref(augment(A,B)) <7>  X =  $\begin{pmatrix} -1.67181 \\ 0.52547 \\ -1.14634 \\ 1.6856 \\ 0.53926 \\ 0.01378 \end{pmatrix}$ 
    
```

7) Проверить полученные правильность вычисления результатов можно подставив значения найденных токов в уравнения, построенные по 1 закону Кирхгофа.

8) Зная сопротивления элементов цепи [R] и токи [A], через них протекающие легко построить значения падений напряжений [B] на каждом из резисторов по закону Ома. После этого можно произвести проверку по уравнениям, построенным по 2 закону Кирхгофа.

Листинг 46. Расчет падения напряжений в цепи постоянного тока

```

k := 1..6  U_k := X_k · R_k  U^T = (-58.51345 42.03794 -22.92678 168.55977 80.88884 0.55139) [В]
    
```

9) Проверить полученные результаты можно опираясь на закон сохранения энергии. То есть, вся суммарная мощность, выработана источниками ЭДС нашей схемы, должна быть потреблена нагрузкой.

Из школьного курса физики известно, что мощность источника ЭДС может быть вычислена как произведение напряжения на ток: $P_{ист} = E \cdot i$ [Вт]. Таким образом, все источники схемы вырабатывают суммарную мощность, равную

$$P_{\Sigma ист} = \sum_{k=1}^n E_k \cdot i_k \text{ [Вт].} \quad (22)$$

С другой стороны, мощность, потребляемая нагрузкой может быть подсчитана $P_{потр} = R \cdot i^2$ [Вт], отсюда можно вычислить суммарную мощность, рассеянную на сопротивлениях R1-R6:

$$P_{\Sigma потр} = \sum_{k=1}^m R_k \cdot i_k^2 \text{ [Вт].} \quad (23)$$

Пользуясь формулами (22) и (23), вычислим сгенерированную и потребленную мощность в исследуемой схеме.

Листинг 47. Баланс мощностей в цепи постоянного тока

$$P_{ист} := E_1 \cdot X_4 + E_2 \cdot X_2 \quad P_{ист} = 473.94685 \text{ [Вт]} \quad P_{potr} := \sum_{k=1}^6 [R_k \cdot (X_k)^2] \quad P_{potr} = 473.94685 \text{ [Вт]}$$

Можем обоснованно предполагать, что токи рассчитаны верно, поскольку баланс мощностей в исследуемой цепи постоянного тока сошелся – потребленная элементами цепи мощность равняется мощности произведенной источниками.

5.2. Практическая работа №5. Расчет цепи постоянного тока

Продолжительность – 4 часа.

Цель работы

1. Закрепление умений и навыков по поиску решений СЛАУ. Актуализация математических компетенций в предметной области направления *11.03.04 и 09.03.01* Развитие творческого, осознанного подхода к решению систем уравнений. Получение навыков рассуждения и анализа полученных результатов.

2. Восстановление знаний школьного курса физики, разделы «Электричество и магнетизм», «Электростатика». Практическое осознание закона сохранения энергии. Выработка стратегического, аналитического взгляда на прикладные задачи и практического подхода к теоретическим знаниям.

Задание на лабораторную работу

1. Рассчитать токи заданной в индивидуальном задании цепи.
2. Топологический вариант схемы выдается преподавателем в соответствии с индивидуальным заданием (*Таблица 10*), номиналы элементов схемы – из таблицы (*Таблица 9*), лишние параметры не учитывать.
3. Отобразить в отчете следующую последовательность действий:
 - 3.1. Выбрать положительные направления протекания токов, обозначить их на схеме. Пронумеровать узлы схемы и составить $n-1$ уравнение по первому закону Кирхгофа.
 - 3.2. Выбрать контуры, задать направление обхода контуров и составить уравнения по второму закону Кирхгофа. Перейти от напряжений к токам по закону Ома.
 - 3.3. Составить систему линейных алгебраических уравнений относительно токов рассматриваемой схемы и решить ее в MathCAD.
 - 3.4. Определить токи в цепях схемы. Рассчитать падение напряжения на каждом из резисторов.
 - 3.5. Рассчитать баланс мощностей рассматриваемой схемы.
4. Составить отчет, в котором отразить последовательность построения СЛАУ относительно токов рассматриваемой схемы, программу с комментариями и привести скриншоты с результатами работы программ.
5. Все физические единицы в отчете обязательно(!) должны указываться с единицами измерения.

Таблица 9. Параметры элементов схемы

№	Номиналы элементов
1.	$E_1=120 \text{ В}, E_2=60 \text{ В}, E_3=40 \text{ В}, E_4=100 \text{ В}; R_1=60 \text{ Ом}, R_2=30 \text{ Ом}, R_3=20 \text{ Ом}, R_4=15 \text{ Ом}, R_5=25 \text{ Ом}, R_6=10 \text{ Ом}, R_7=20 \text{ Ом}.$
2.	$E_1=12 \text{ В}, E_2=14 \text{ В}, E_3=5 \text{ В}, E_4=10 \text{ В}; R_1=0.6 \text{ Ом}, R_2=3 \text{ Ом}, R_3=0.5 \text{ Ом}, R_4=1.5 \text{ Ом}, R_5=2.5 \text{ Ом}, R_6=10 \text{ Ом}, R_7=2 \text{ Ом}.$
3.	$E_1=12 \text{ В}, E_2=6 \text{ В}, E_3=10 \text{ В}, E_4=10 \text{ В}; R_1=6 \text{ Ом}, R_2=3 \text{ Ом}, R_3=2 \text{ Ом},$

№	Номиналы элементов
	$R_4= 15 \text{ Ом}, R_5= 25 \text{ Ом}, R_6= 5 \text{ Ом}, R_7= 1 \text{ Ом}.$
4.	$E_1= 140 \text{ В}, E_2= 70 \text{ В}, E_3= 35 \text{ В}, E_4= 210 \text{ В}; R_1= 70 \text{ Ом}, R_2= 35 \text{ Ом}, R_3= 70 \text{ Ом}, R_4= 35 \text{ Ом}, R_5= 25 \text{ Ом}, R_6= 10 \text{ Ом}, R_7= 35 \text{ Ом}.$
5.	$E_1= 160 \text{ В}, E_2= 80 \text{ В}, E_3= 240 \text{ В}, E_4= 10 \text{ В}; R_1= 600 \text{ Ом}, R_2= 3 \text{ кОм}, R_3= 2 \text{ кОм}, R_4= 150 \text{ Ом}, R_5= 25 \text{ Ом}, R_6= 1 \text{ кОм}, R_7= 400 \text{ Ом}.$
6.	$E_1= 14 \text{ В}, E_2= 7 \text{ В}, E_3= 70 \text{ В}, E_4= 70 \text{ В}; R_1= 6 \text{ Ом}, R_2= 3.5 \text{ Ом}, R_3= 2 \text{ Ом}, R_4= 2.5 \text{ Ом}, R_5= 2.5 \text{ Ом}, R_6= 10 \text{ Ом}, R_7= 2.5 \text{ Ом}.$
7.	$E_1= 12.5 \text{ В}, E_2= 6.3 \text{ В}, E_3= 4.0 \text{ В}, E_4= 10.5 \text{ В}; R_1= 6.0 \text{ Ом}, R_2= 3.3 \text{ Ом}, R_3= 20.5 \text{ Ом}, R_4= 1.5 \text{ кОм}, R_5= 2 \text{ кОм}, R_6= 1 \text{ Ом}, R_7= 5 \text{ Ом}.$
8.	$E_1= 110 \text{ В}, E_2= 50 \text{ В}, E_3= 60 \text{ В}, E_4= 100 \text{ В}; R_1= 5 \text{ Ом}, R_2= 300 \text{ Ом}, R_3= 20 \text{ Ом}, R_4= 150 \text{ Ом}, R_5= 2.5 \text{ Ом}, R_6= 200 \text{ Ом}, R_7= 2 \text{ Ом}.$
9.	$E_1= 12.5 \text{ В}, E_2= 6.5 \text{ В}, E_3= 42 \text{ В}, E_4= 110 \text{ В}; R_1= 60 \text{ Ом}, R_2= 3 \text{ Ом}, R_3= 2 \text{ кОм}, R_4= 1.5 \text{ Ом}, R_5= 205 \text{ Ом}, R_6= 100 \text{ Ом}, R_7= 30 \text{ Ом}.$
10.	$E_1= 10 \text{ В}, E_2= 6 \text{ В}, E_3= 5 \text{ В}, E_4= 10 \text{ В}; R_1= 5 \text{ Ом}, R_2= 1.3 \text{ Ом}, R_3= 1.2 \text{ Ом}, R_4= 1.5 \text{ Ом}, R_5= 2.5 \text{ Ом}, R_6= 10 \text{ Ом}, R_7= 2.5 \text{ Ом}.$
11.	$E_1= 50 \text{ В}, E_2= 60 \text{ В}, E_3= 40 \text{ В}, E_4= 30 \text{ В}; R_1= 7.3 \text{ Ом}, R_2= 3.5 \text{ Ом}, R_3= 2.4 \text{ Ом}, R_4= 1.5 \text{ Ом}, R_5= 2.25 \text{ Ом}, R_6= 2 \text{ Ом}, R_7= 2 \text{ Ом}.$
12.	$E_1= 10 \text{ В}, E_2= 0.6 \text{ В}, E_3= 5 \text{ В}, E_4= 3.3 \text{ В}; R_1= 7 \text{ Ом}, R_2= 70 \text{ Ом}, R_3= 20 \text{ Ом}, R_4= 1.5 \text{ Ом}, R_5= 12 \text{ Ом}, R_6= 17 \text{ Ом}, R_7= 10 \text{ Ом}.$

Таблица 10. Варианты схем для Лабораторной работы №8.

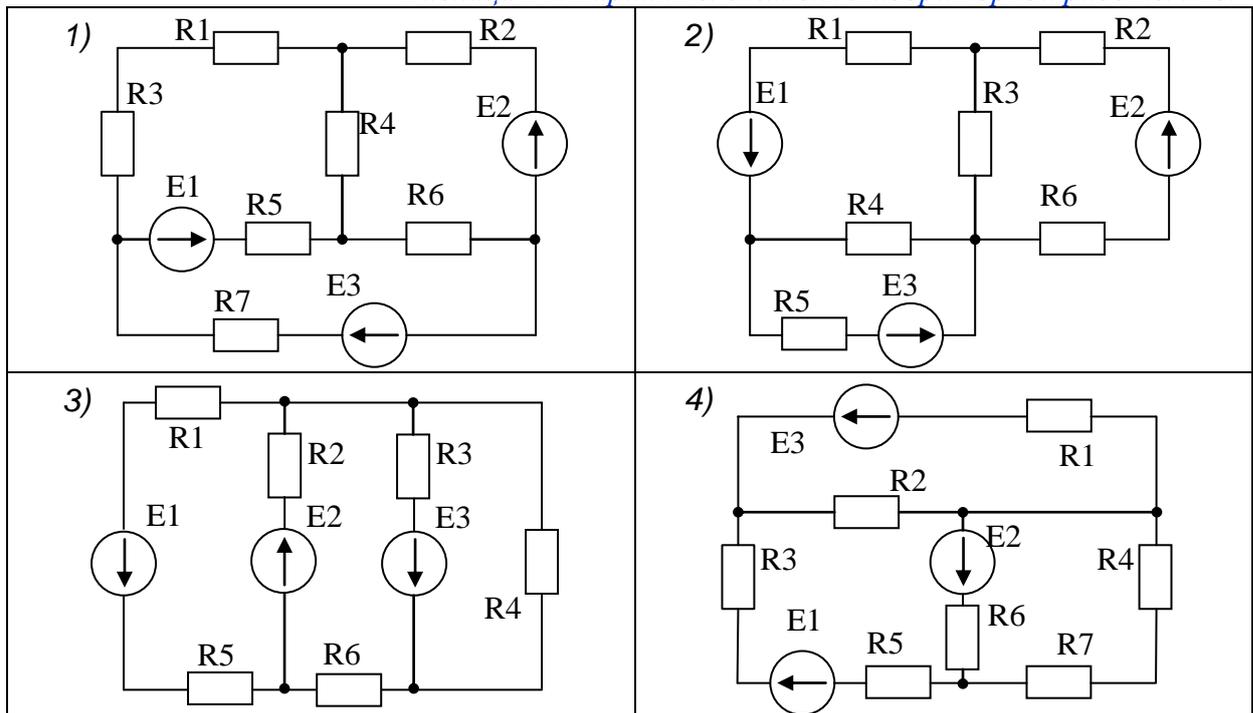


Таблица 10. Варианты схем для Лабораторной работы №8.

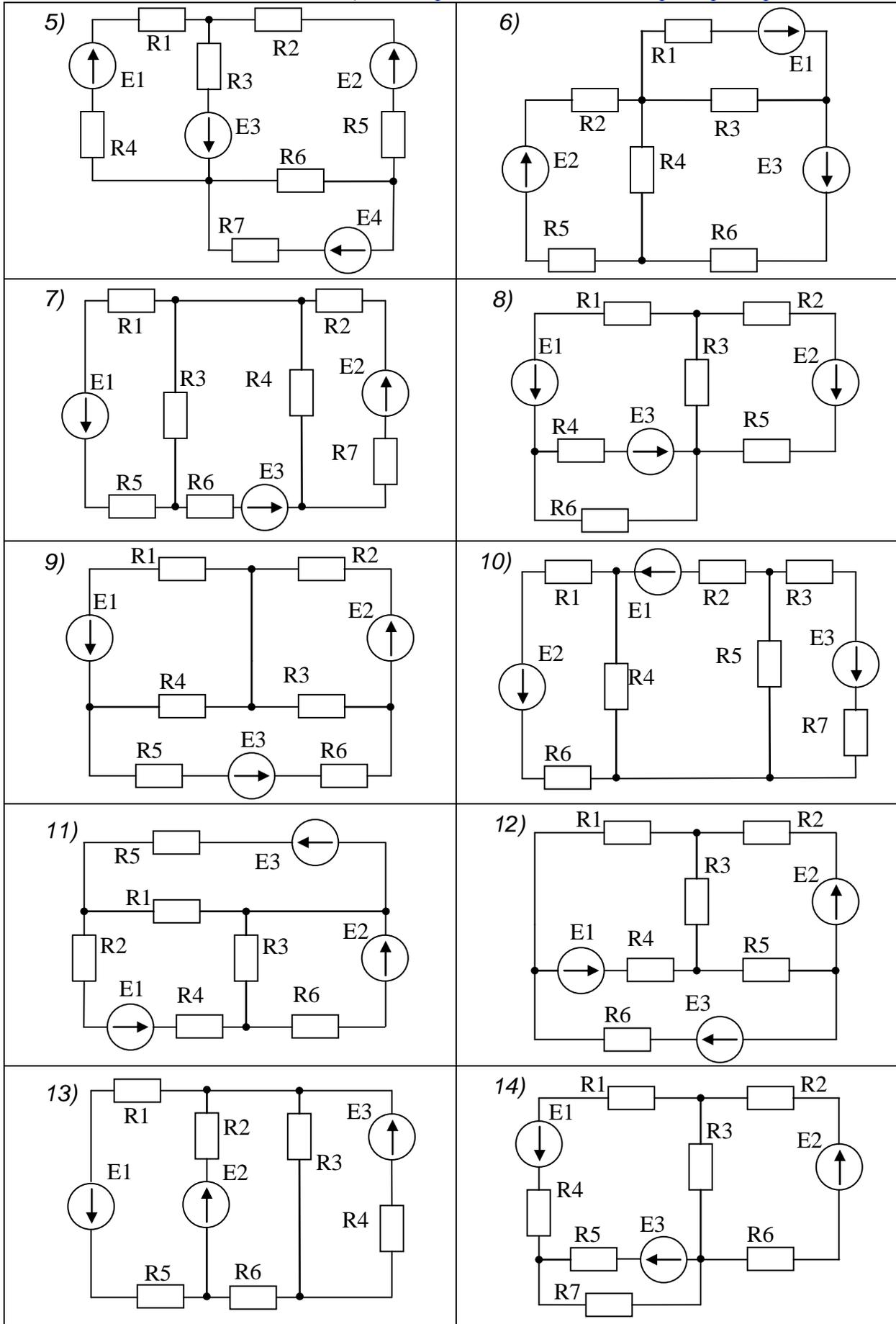
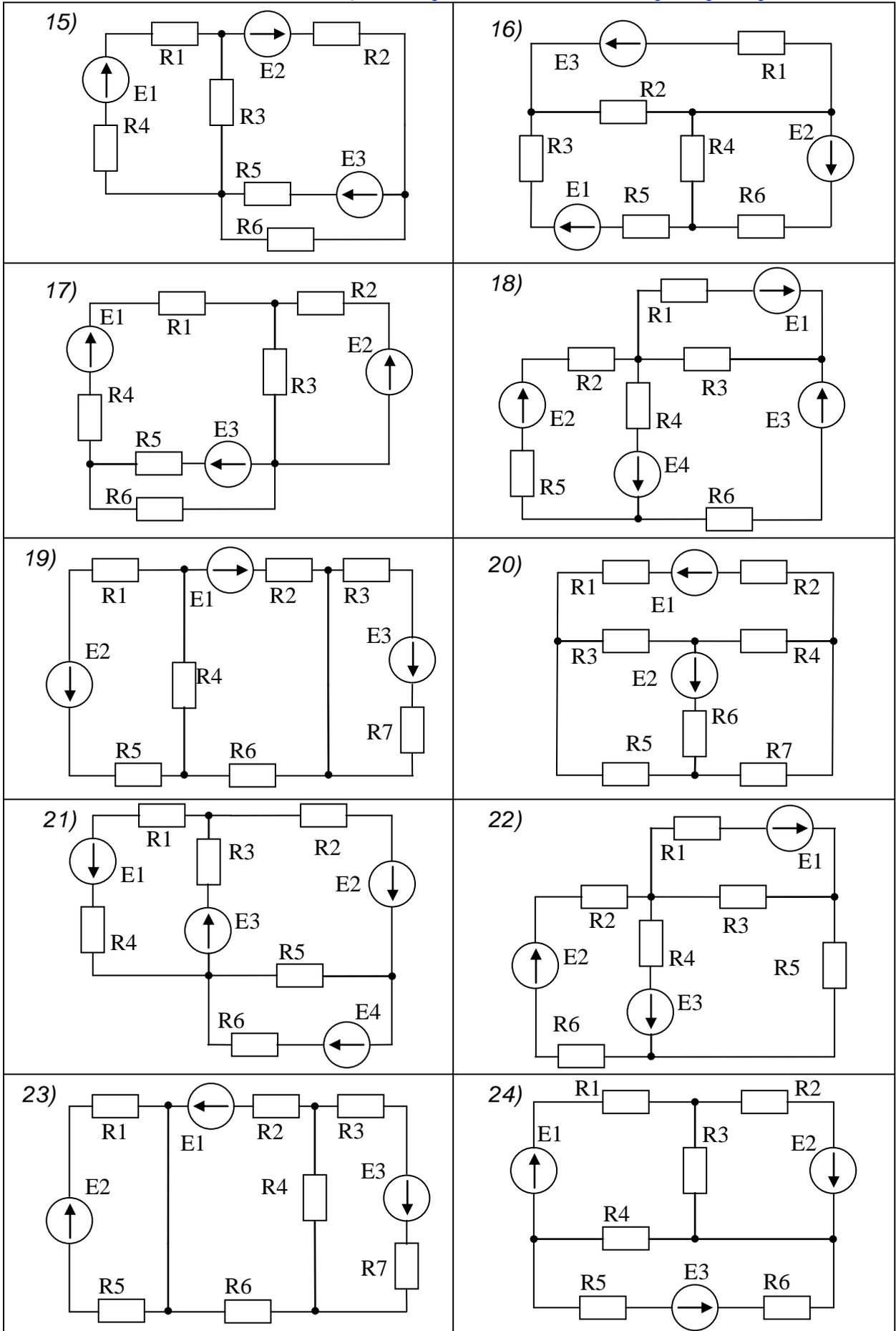


Таблица 10. Варианты схем для Лабораторной работы №8.



Контрольные вопросы

1. Сформулируйте первый закон Кирхгофа.
2. Как связано напряжение, сопротивление и ток в резисторе?
3. Сформулируйте закон сохранения энергии в приложении к балансу мощностей.
4. Мощность. По каким двум формулам можно вычислить мощность?
5. Сформулируйте закон Ома.
6. Могут ли токи иметь отрицательное значение? Почему?
7. Назовите единицы измерения тока, напряжения, сопротивления и мощности.
8. Сформулируйте второй закон Кирхгофа.

6. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

6.1. Комплексные числа

Комплексным числом называется число вида $z = x + i \cdot y$, где $x = \text{Re}(z)$ и $y = \text{Im}(z)$ – вещественные числа, а i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$ или $i = \sqrt{-1}$. Геометрическая интерпретация комплексного числа очевидна – каждому комплексному числу z соответствует точка на *комплексной плоскости* с координатами (x, y) . Ось абсцисс называется *действительной осью*, ось ординат – *мнимой*.

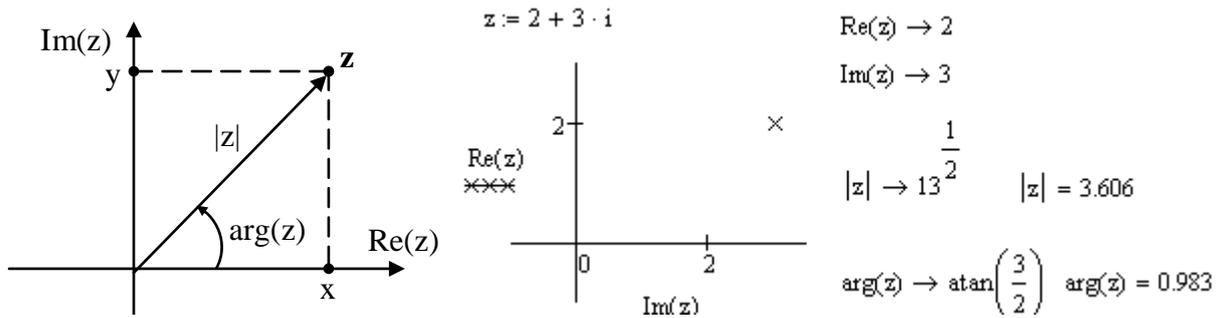


Рис. 42 – Представление комплексного числа в MathCAD

При вводе комплексных чисел в программе на *MathCAD* для ввода комплексной единицы необходимо всегда набирать **1i** или **1j**, в противном случае *MathCAD* истолкует i или j как переменную. Когда курсор покидает выражение, содержащее **1i** или **1j**, *MathCAD* скрывает невидимую 1 и оставляет только **i**.

Понятно, что любую точку на плоскости можно записать в *декартовых* (x, y) координатах или в *полярных* (ρ, φ) . Расстояние ρ от точки z до начала координат называется *модулем числа* z и обозначается $|z|$. Угол φ между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором точки z называется *аргументом числа* z и обозначается $\text{arg}(z)$. По определению,

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tg}(\varphi) = y/x \quad (24)$$

Если радиус-вектор числа z совершит полное число оборотов вокруг начала координат, то он совпадает с первоначальным положением, а угол φ увеличится на число кратное 2π . Совокупность всех этих углов называется *полным значением аргумента* и обозначается

$$\text{Arg}(z) = \varphi + 2k\pi, \quad k - \text{целое}. \quad (25)$$

Из множества значений аргумента особо выделяется *главное значение аргумента* $\text{arg}(z)$, удовлетворяющее неравенству $-\pi < \text{arg}(z) \leq \pi$, при этом:

$$\text{arg}(z) = \begin{cases} \text{arctg}(y/x), & x > 0; \\ \text{arctg}(y/x) + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \text{arctg}(y/x) - \pi, & x < 0, y < 0. \end{cases} \quad (26)$$

6.2. Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

Кроме алгебраической формы $z = x + iy$ часто используют *тригонометрическую форму* записи того же самого комплексного числа (здесь $\varphi = \text{arg}(z)$):

$$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)). \quad (27)$$

Пользуясь формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, можно получить *показательную форму* любого комплексного числа, кроме $z = 0 + i \cdot 0$:

$$z = |z|e^{i\varphi}. \quad (28)$$

Нужно отдавать себе отчет, что классическое *декартовое представление* комплексного числа $z = x + i \cdot y$, *тригонометрическая форма* (27) и *показательная форма* (28) определяют **одно и то же комплексное число!**

Рис. 43 иллюстрирует возможность перехода между этими тремя формами записи одного и того же числа.



Рис. 43 – Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

6.3. Операции над комплексными числами

Сложение и вычитание комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ осуществляются по формулам $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$. Умножение, деление и возведение в степень удобнее производить в показательной форме. Пусть $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$, тогда произведение и частное:

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad z_1 / z_2 = |z_1| / |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (29)$$

$$(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i \cdot (y_2 x_1 + y_1 x_2)$$

$$\frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

С помощью формулы Муавра $(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$ можно получить формулу для степени числа:

$$z^n = \left(|z|e^{i\varphi}\right)^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)). \quad (30)$$

Корень n -ной степени из комплексного числа имеет n различных значений ($k = 0, 1, \dots, n-1$):

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (31)$$

Геометрически эти n значений корня изображаются вершинами правильного n -угольника с полярными координатами $\left(\sqrt[n]{|z|}, \frac{\arg(z) + 2k\pi}{n} \right)$, (см. *Рис. 46*).

$$\begin{array}{lll} z_1 := 2 + 3 \cdot i & z_2 := 3 + 2 \cdot i & \\ z_1 + z_2 \rightarrow 5 + 5 \cdot i & \arg(z_1 + z_2) = 0.785 & |z_1 + z_2| = 7.071 \\ z_1 - z_2 \rightarrow -1 + i & \arg(z_1 - z_2) = 2.356 & |z_1 - z_2| = 1.414 \\ z_1 \cdot z_2 \rightarrow 13 \cdot i & \arg(z_1 \cdot z_2) = 1.571 & |z_1 \cdot z_2| = 13 \\ \frac{z_1}{z_2} \rightarrow \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot i & \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0.395 & \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1 \end{array}$$

Рис. 44 – Операции над комплексными числами

6.4. Понятие комплексных функций

С точки зрения *MathCAD* нет разницы между вычислением вещественнозначной или комплексной функции. Трудности состоят в том, что обычный человек не может визуально представить себе функцию размерности больше 3, а комплексные функции отображают точку из двумерной комплексной плоскости в двумерную комплексную плоскость, т.е. четырехмерное изображение. Поэтому при работе с комплексными функциями пользуются аналитическими или табличными представлениями функций, но не графиками.

На рисунке (*Рис. 45*) схематично изображено множество B , называемое *образом множества A при воздействии на все его точки функцией $\psi(z) \rightarrow w, z \in A, B = \psi(A)$* . Множество A называется *прообразом* множества B . От функции $\psi(z)$.

По виду результирующего множества $\psi(A) = B$, (*образа множества A*) можно догадываться о поведении функции ψ и о ее свойствах.

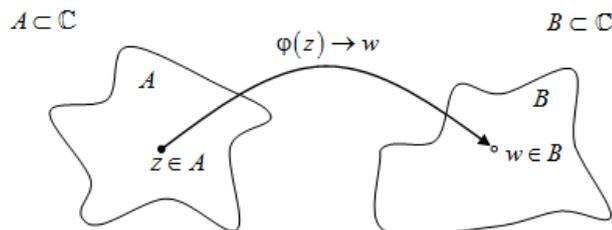


Рис. 45 – Представление комплексных функций

Комплексная величина $w = \psi(z) = u(z) + i \cdot v(z)$ называется *функцией комплексной переменной $z = x + i \cdot y$* , если каждому значению z из комплексной плоскости соответствует одно или несколько значений w . Здесь $u(z) = u(x, y)$ – *вещественная* и $v(z) = v(x, y)$ – *мнимая* части функции $w = \psi(z)$.

Мнозначные функции

При использовании в комплексной области многие функции, о которых мы привыкли думать как о возвращающих одно значение, становятся *мнозначными*, как, например на *Рис. 46* для функции «корень n -ной степени из комплексного числа».

Общее правило состоит в том, что для многозначной функции *MathCAD* всегда возвращает значение, составляющее на комплексной плоскости самый маленький положительный угол с положительным направлением действительной оси. Оно называется *главным значением аргумента*.

Например, если требуется вычислить $\sqrt[3]{-1}$, *MathCAD* вернёт -1 , хотя кубическим корнем из -1 , кроме того, являются числа $0.5+0.866i$ и $0.5-0.866i$.

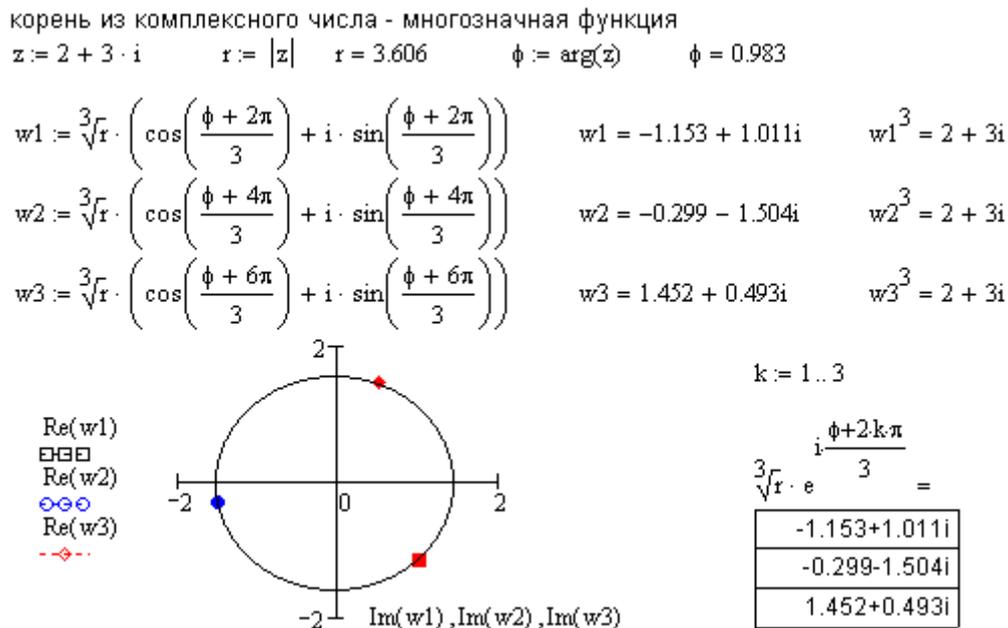


Рис. 46 – Пример многозначной функции $\sqrt[3]{2+3i}$

Контрольные вопросы

1. Как вычислить корень из отрицательного числа?
 2. Как вы понимаете комплексное число? Как его представить / изобразить?
 3. Как представляется комплексное число в декартовой и полярной системе координат?
 4. Умеете ли вы строить модуль и аргумент комплексного числа?
 5. Как извлечь корень из комплексного числа?
 6. Сколько значений имеет корень пятой степени из 1? Нарисуйте их.
 7. Как изучать комплексные функции?
 8. Умеете ли вы записывать комплексное число $4 + 3i$ в тригонометрической форме?
 9. Как вычислить вещественную и мнимую части комплексного числа аналитически и численно? Возможно ли это без *MathCAD*?
 10. Как записать комплексное число $4 + 3i$ в показательной форме?
 11. Какие арифметические операции с элементами комплексного пространства можно производить?
 12. Что такое многозначная функция? Приведите пример.
 13. Как выглядит пространство комплексных чисел?
- Как удобнее всего возвести комплексное число в степень?

7. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

7.1. Представление гармонической функции комплексным числом

Более детально данный материал будет изучаться в курсе теоретических основ электротехники. В электротехнических системах, как правило, ток имеет синусоидальную (гармоническую) форму:

$$i(t) = I \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \text{ [A]}, \quad (32)$$

где I – амплитуда [A], $\omega = 2\pi/T$ – угловая частота [рад/с], φ – начальная фаза [рад], T – период колебаний [с]. График функции $i(t)$ приведен на *Рис. 47*.

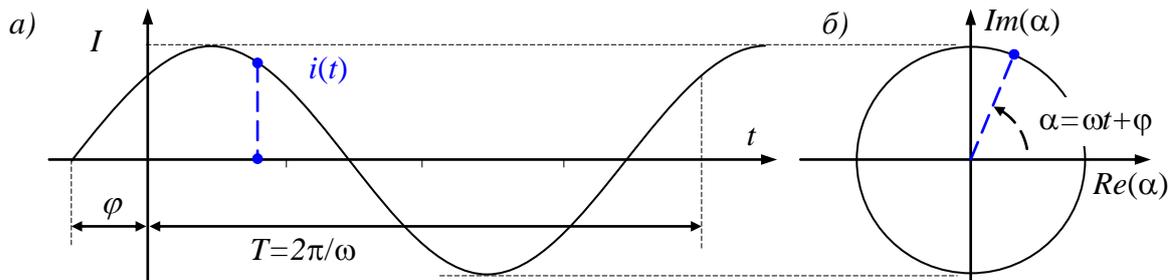


Рис. 47 – Представление (а) гармонического сигнала в виде (б) комплексной величины

Любая гармоническая функция полностью определяется тремя величинами: амплитудой, частотой и фазой.

Рассмотрим комплексную функцию $I \cdot e^{i\alpha(t)}$, где $\alpha(t)$ – угол α (*Рис. 47,б*), линейно зависящий от времени t и начальной фазы φ : $\alpha(t) = \omega \cdot t + \varphi$. Выражение $\alpha(t) = \omega \cdot t + \varphi$ часто называется *мгновенной (полной) фазой* гармонического сигнала.

По формуле Эйлера это выражение может быть представлено в виде:

$$I \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} = I \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + i \cdot I \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \quad (33)$$

Мнимая часть выражения (33) представляет собой выражение (32), так что можно записать его в виде

$$i(t) = \text{Im}\left(I \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}\right) = I \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \text{ [A]}, \quad (34)$$

здесь функция $\text{Im}(z)$ – взятие мнимой части комплексного числа. Выражение (34) фактически представляет собой проекцию вращающегося вектора $I \cdot e^{i\alpha(t)}$ на мнимую ось (ординат), таким образом можно представить любой гармонический сигнал.

7.2. Элементы цепи переменного тока

Рассмотрим следующие элементы цепи переменного тока – катушка индуктивности, конденсатор и резистор. На данном этапе обучения будем рассматривать их в виде идеальных (абстрактных) моделей.

С точки зрения оказываемого переменному току *сопротивления*, элементы цепи разделяются на *активные* (резистор) и *реактивные* элементы (катушка индуктивности и конденсатор). Соответственно, сопротивление резистора называется *активным сопротивлением* – энергия на нем выделяется только в виде теплоты, а в реактивных элементах энергия в виде тепла не выделяется, но периодически запасается в электрическом или магнитном полях, сопротивление реактивных элементов называется *реактивным сопротивлением*.

Резистор (активное сопротивление)

При протекании по резистору R синусоидального тока вида (32), напряжение на резисторе (по закону Ома) равно

$$u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \text{ [В]}. \quad (35)$$

Ток $i(t)$ и напряжение $u(t)$ имеют одну и ту же начальную фазу, при этом говорят что они *совпадают по фазе* (Рис. 48). При протекании тока через активное сопротивление происходит потребление энергии из источника и выделение ее в виде тепла.

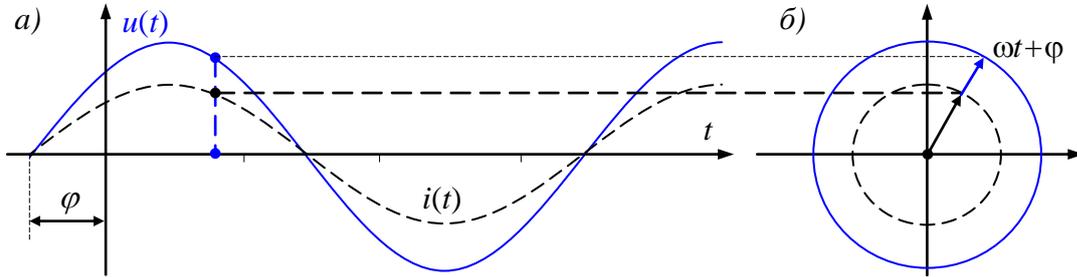


Рис. 48 – Ток и напряжение на резисторе

Катушка индуктивности

Для идеальной катушки индуктивности предполагается, что её активное сопротивление равно нулю и катушка обладает только индуктивностью L . При протекании по катушке индуктивности переменного тока вида (32), в ней наводится э.д.с. самоиндукции, равная

$$e_L(t) = -L \frac{di_L}{dt} = -\omega \cdot L \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = X_L \cdot I \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \text{ [В]}.$$

Здесь вводится величина X_L [Ом] называемая реактивным сопротивлением катушки индуктивности, или кратко – *индуктивным сопротивлением*.

$$X_L = \omega \cdot L \text{ [Ом]} \quad (36)$$

Для того, чтобы через катушку индуктивности протекал переменный ток необходимо, чтобы на ее выводах было напряжение, равное по величине и противоположное по знаку наведенной э.д.с.:

$$u_L(t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi - 90^\circ) \text{ [В]}, \quad U = X_L \cdot I \text{ [В]}. \quad (37)$$

Напряжение на индуктивности опережает ток по фазе на 90° , что иллюстрирует векторная диаграмма (Рис. 49,б).

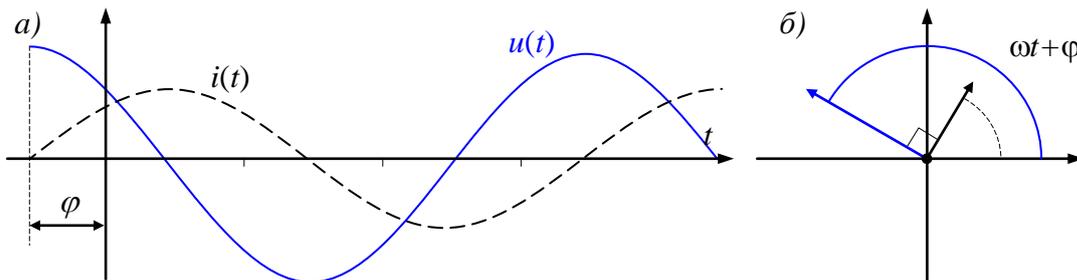


Рис. 49 – Ток и напряжение в катушке индуктивности

Конденсатор

Если к конденсатору C приложено напряжение $u_C(t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$, то конденсатор будет периодически перезаряжаться, что вызовет протекание тока через конденсатор:

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = \omega \cdot C \cdot U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = \frac{U}{X_C} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ [А]}. \quad (38)$$

Здесь вводится величина X_C [Ом] называемая реактивным сопротивлением конденсатора, или кратко – *емкостным сопротивлением*.

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \text{ [Ом]} \quad (39)$$

Обозначив $I = U/X_C$ [А], получим:

$$i_C(t) = I \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi + 90^\circ) \text{ [А]}.$$

Ток, протекающий через конденсатор, опережает напряжение по фазе на 90° , что иллюстрирует векторная диаграмма (Рис. 50,б).

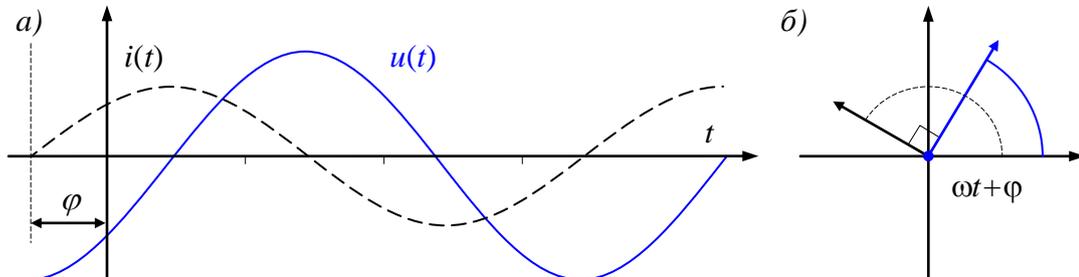


Рис. 50 – Ток и напряжение на конденсаторе

За первую четверть периода конденсатор потребляет от источника энергию, которая идет на создание электрического поля в нем. Во вторую четверть периода напряжение на конденсаторе уменьшается от максимума до нуля – запасенная в электрическом поле энергия отдается источнику, затем процесс повторяется.

7.3. Полное комплексное сопротивление участка цепи

Комплексное сопротивление Z для участка цепи переменного тока (с частотой ω), обладающего активным сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C в общем случае может быть записано в виде:

$$Z = Z_m \cdot e^{i\varphi} = R + i \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) = R + i \cdot (X_L - X_C) \text{ [Ом]}. \quad (40)$$

Ясно, что для участков цепей, в которых отсутствует резистор, конденсатор или катушка индуктивности, в формуле (40) будет отсутствовать соответствующее слагаемое – активное, емкостное или индуктивное сопротивление.

7.4. Мощность цепи переменного тока

Закон сохранения энергии определяет баланс мощностей в цепи переменного тока. Полная мощность S источников ЭДС (допустим, что их m штук) вычисляется как сумма произведений напряжения источников E_k на протекающие через них токи i_k . Естественно, полная мощность S измеряется в вольт-амперах [ВА].

$$S = \sum_{k=1}^m E_k \cdot i_k \text{ [ВА]}. \quad (41)$$

Поскольку токи представляются комплексными величинами, то и мощность будет комплексной, а значит, ее можно представить как сумму действительной и мнимой частей (42):

$$S = P + Q \cdot i \text{ [ВА]}. \quad (42)$$

Действительная часть $P = \text{Re}(S)$ [Вт] называется активной мощностью и измеряется в ваттах [Вт], а мнимая часть полной мощности $Q = \text{Im}(S)$ [ВАр] называется реактивной мощностью и измеряется в варах [ВАр] – «вольт-амперах реактивной мощности».

Активной потребляемой мощностью, рассеиваемой элементами схемы называется мощность, потраченная на активных элементах – резисторах. Вычисляется она, естественно, так же как и для цепей постоянного тока (23):

$$P_{\text{номр}} = \sum_{k=1}^n R_k \cdot |i_k|^2 \quad [\text{Вт}]. \quad (43)$$

Реактивной потребляемой мощностью называется мощность, потраченная на реактивных элементах – конденсаторах и катушках индуктивности. Она не связана с выполнением полезной работы, а расходуется на создание электромагнитных полей в электродвигателях, трансформаторах, индукционных печах, сварочных трансформаторах, дросселях и пр. Вычисляется она, аналогично активной мощности (43), но вместо активных сопротивлений учитываются, разумеется, реактивные:

$$Q_{\text{номр}} = \sum_{j=1}^{n1} X_{Lj} \cdot |i_j|^2 - \sum_{k=1}^{n2} X_{Ck} \cdot |i_k|^2 \quad [\text{ВАр}]. \quad (44)$$

Полная потребляемая мощность рассчитывается по формуле (42).

Баланс мощностей состоит в том, что произведенная активная мощность должна равняться сумме мощностей, потребляемых активными элементами цепи, а генерируемая реактивная мощность должна равняться сумме мощностей, расходуемых в реактивных элементах схемы.

7.5. Расчет электрической цепи синусоидального переменного тока

Расчет электрической цепи синусоидального переменного тока может быть сделан аналогично расчету токов цепи постоянного тока, однако, в качестве сопротивлений реактивных элементов нужно брать, разумеется, их комплексные сопротивления, а токи и напряжения представлять в комплексной форме, по аналогии с (34).

Значения установившихся токов и напряжений цепи переменного тока можно рассчитать аналогично (п. 5.2 Практическая работа №5. Расчет цепи постоянного тока) через законы Кирхгофа и закон Ома, справедливых для комплексных сопротивлений (40).

Рассмотрим этот метод на примере.

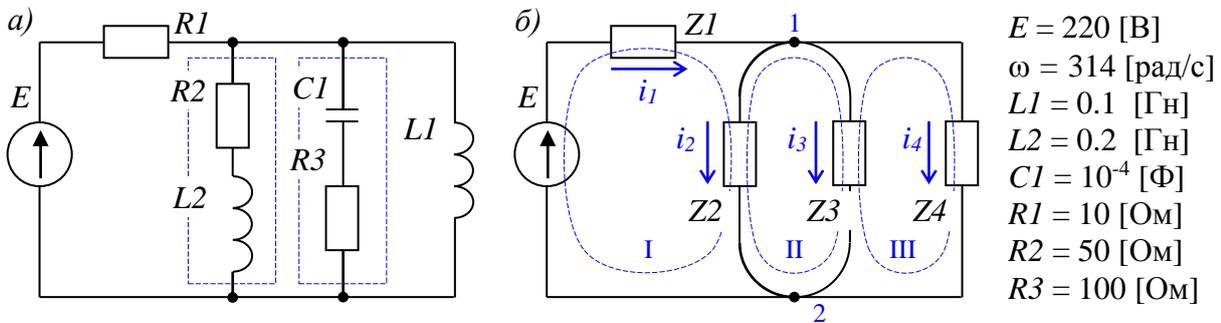


Рис. 51 – Расчет цепи переменного тока

1) Построим комплексные сопротивления Z участков цепи по определению (40). На Рис. 51,а пунктирными прямоугольниками отмечены участки электрической цепи на которых комплексное сопротивление имеет и активную (R) и реактивную (X) составляющие. $Z1 = R1$; $Z2 = R2 + i \cdot X_{L2}$; $Z3 = R3 - i \cdot X_{C1}$; $Z4 = i \cdot X_{L1}$. Зададим параметры схемы и вычислим реактивные сопротивления X_{L1} , X_{L2} и X_{C1} по формулам (36), (39):

$$\begin{aligned} \text{ORIGIN} &:= 1 & E1 &:= 220 \text{ [В]} & \omega &:= 314 \text{ [рад/с]} & R1 &:= 10 \text{ [Ом]} & R2 &:= 100 \text{ [Ом]} \\ & & L1 &:= 0.1 \text{ [Гн]} & L2 &:= 0.2 \text{ [Гн]} & C1 &:= 10^{-4} \text{ [Ф]} & R3 &:= 50 \text{ [Ом]} \end{aligned}$$

реактивные сопротивления элементов

$$XL1 := \omega \cdot L1 \quad XL1 = 31.4 \quad [\text{Ом}]$$

$$XL2 := \omega \cdot L2 \quad XL2 = 62.8 \quad [\text{Ом}]$$

$$XC1 := \frac{1}{\omega \cdot C1} \quad XC1 = 31.847 \quad [\text{Ом}]$$

комплексные сопротивления

$$Z1 := R1 \quad Z1 = 10 \quad [\text{Ом}]$$

$$Z2 := R2 + i \cdot XL2 \quad Z2 = 100 + 62.8i \quad [\text{Ом}]$$

$$Z3 := R3 - i \cdot XC1 \quad Z3 = 50 - 31.847i \quad [\text{Ом}]$$

$$Z4 := i \cdot XL1 \quad Z4 = 31.4i \quad [\text{Ом}]$$

2) Построим уравнения (и матрицы) для нахождения токов по законам Кирхгофа:

(1): $i_1 - i_2 - i_3 - i_4 = 0$; (I): $U_{Z1} + U_{Z2} = E$; (II): $U_{Z3} - U_{Z2} = 0$; (III): $U_{Z4} - U_{Z3} = 0$.

3) Выпишем матрицы и вычислим токи на участках рассматриваемой цепи переменного тока:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ Z1 & Z2 & 0 & 0 \\ 0 & -Z2 & Z3 & 0 \\ 0 & 0 & -Z3 & Z4 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ E1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad I := A^{-1} \cdot B \quad I = \begin{pmatrix} 4.75 - 3.878i \\ 1.412 - 0.499i \\ 2.103 + 2.115i \\ 1.235 - 5.494i \end{pmatrix} \text{ [A]}$$

Рассчитаем модули и аргументы токов в комплексном представлении

$$k := 1..4 \quad |I_k| = \begin{pmatrix} 6.131 \\ 1.497 \\ 2.983 \\ 5.631 \end{pmatrix} \quad \arg(I_k) = \begin{pmatrix} -0.685 \\ -0.34 \\ 0.788 \\ -1.35 \end{pmatrix}$$

На графике справа красными точками обозначены 4 комплексных числа – искомые токи в комплексной интерпретации. Амплитуда переменных токов определяется как в формуле (34) их модулями $|I_k|$, а начальная фаза – аргументами $\arg(I_k)$.

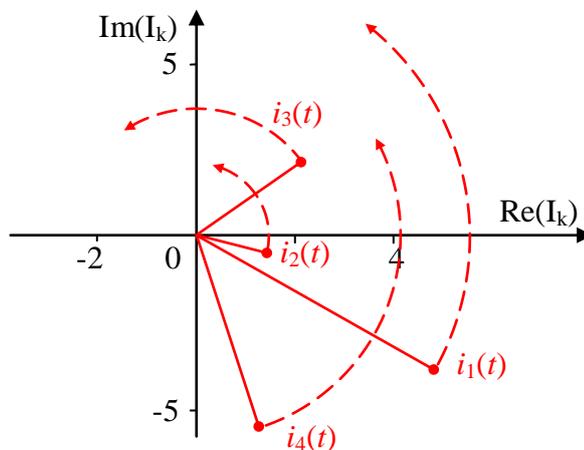


Рис. 52 – Токи в цепи переменного тока представленные в виде вращающихся комплексных векторов

Обратите внимание, что выражение (34) описывает *переменные токи*, поэтому представляет собой проекции *вращающихся векторов* $|I_k| \cdot e^{i(\omega t + \arg(I_k))}$ как функции от времени. Красные точки задают *начальную фазу* движения (в начальный момент времени $t_0 = 0$), в дальнейшем, при изменении времени t фаза вектора будет изменяться по закону $\omega \cdot t + \arg(I_k)$ с частотой ω , как показано на *Рис. 52*.

Таким образом можно представить любой гармонический сигнал. Отобразим переменные токи как функции от времени (*Рис. 53*):

$$k := 1..4 \quad I_k(t, k) := |I_k| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_k))$$

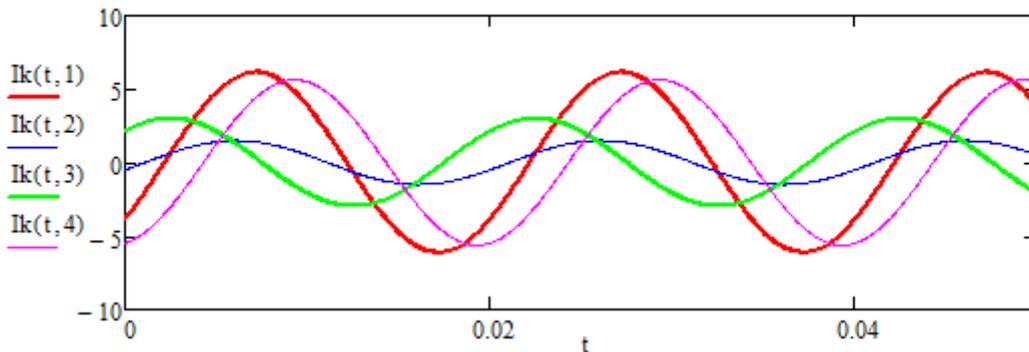


Рис. 53 – Токи в цепи переменного тока

4) Рассчитаем и представим на графике напряжения на всех активных и реактивных элементах исследуемой цепи в виде векторной диаграммы комплексных величин (*Рис. 54,а*) и в виде функций от времени (*Рис. 54,б*).

$$U := \begin{pmatrix} E1 \\ R1 \cdot I_1 \\ R2 \cdot I_2 \\ i \cdot XL2 \cdot I_2 \\ -i \cdot XC1 \cdot I_3 \\ R3 \cdot I_3 \\ i \cdot XL1 \cdot I_4 \end{pmatrix} [B] \quad U = \begin{pmatrix} 220 \\ 47.496 - 38.776i \\ 141.177 - 49.883i \\ 31.327 + 88.659i \\ 67.356 - 66.973i \\ 105.148 + 105.749i \\ 172.504 + 38.776i \end{pmatrix} \quad k := 1..7$$

$$U_k(t, k) := |U_k| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_k)) [B]$$

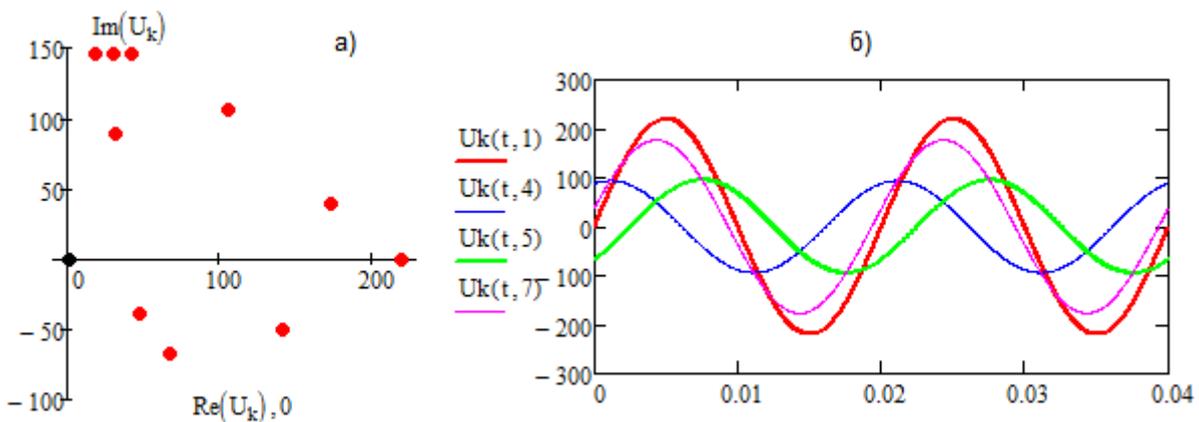


Рис. 54 – Напряжения в цепи переменного тока

5) Проверим правильность произведенных вычислений двумя способами. Во-первых, можно проверить выполнимость законов Кирхгофа для любого момента времени – сумма токов в узле должна равняться нулю, а сумма напряжений в любом контуре – сумме источников ЭДС. Для примера рассчитаем и построим на графике следующую функцию:

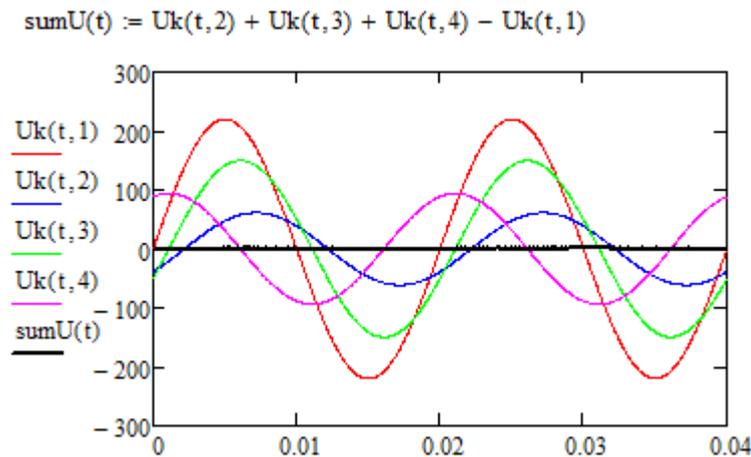


Рис. 55 – Сумма падений напряжения в 1 контуре в любой момент времени

Как видно из графика (Рис. 55), функция $\text{sum}U(t)$, представляющая собой сумму четырех различных по амплитуде и фазе синусоид, в любой момент времени имеет нулевое значение.

Проверка законов Кирхгофа для исследуемой схемы (а) в комплексном представлении (б) и в мгновенных значениях (в) – в любой заданный момент времени t :

(а)	(б)	(в)
$U_{R2} + U_{L2} - U_{C1} - U_{R3} = 0$	$U_3 + U_4 - U_5 - U_6 = 0$	$t := 0.02$
$U_{C1} + U_{R3} - U_{L1} = 0$	$U_5 + U_6 - U_7 = 0$	$I_k(t,1) - I_k(t,2) - I_k(t,3) - I_k(t,4) = 0$
$U_{R1} + U_{R2} + U_{L2} = E$	$U_2 + U_3 + U_4 = 220$	$U_k(t,5) + U_k(t,6) - U_k(t,7) = -0$
$i_1 - i_2 - i_3 - i_4 = 0;$	$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0$	$U_k(t,2) + U_k(t,3) + U_k(t,4) - U_k(t,1) = 0$

При проверке уравнений, составленных по законам Кирхгофа для исследуемой схемы в мгновенных значениях (в) случайным образом задан момент $t = 0.02$ [с], однако, можно произвести проверку в любой другой момент времени.

б) Во-вторых, рассчитаем баланс мощностей в схеме по формулам (41)-(44), построив полную мощность источников энергии $S_{\text{ист}}$ [ВА] и полную суммарную мощность всех потребителей $S_{\text{потр}}$ [ВА].

$S_{\text{ист}} := U_1 \cdot I_1$	$S_{\text{ист}} = 1044.918 - 853.072i$ [ВА]
$P_{\text{ист}} := \text{Re}(S_{\text{ист}})$	$P_{\text{ист}} = 1044.918$ [Вт]
$Q_{\text{ист}} := \text{Im}(S_{\text{ист}})$	$Q_{\text{ист}} = -853.072$ [ВАр]
$P_{\text{потр}} := R1 \cdot (I_1)^2 + R2 \cdot (I_2)^2 + R3 \cdot (I_3)^2$	$P_{\text{потр}} = 1044.918$ [Вт]
$Q_{\text{потр}} := XL2 \cdot (I_2)^2 - XC1 \cdot (I_3)^2 + XL1 \cdot (I_4)^2$	$Q_{\text{потр}} = 853.072$ [ВАр]
$S_{\text{потр}} := P_{\text{потр}} + i \cdot Q_{\text{потр}}$	$S_{\text{потр}} = 1044.918 + 853.072i$ [ВА]

Можно видеть, что активная мощность источника равняется сумме мощностей, потребляемых активными элементами цепи, а реактивная мощность источника равняется по модулю сумме мощностей, потребляемых реактивными элементами схемы.

7.6. Практическая работа № 6. Расчет цепи переменного тока

Продолжительность – 4 часа.

Цель работы

Закрепление умений и навыков по работе с комплексными числами. Актуализация математических компетенций в предметной области направлений электроника, наноэлектроника, электротехника, физика. Развитие творческого, осознанного подхода к решению систем уравнений с комплекснозначными величинами. Получение навыков рассуждения и анализа полученных результатов.

Представление понятий школьного курса физики, раздел «Электричество и магнетизм» в комплексной форме. Практическое осознание закона сохранения энергии. Выработка стратегического, аналитического взгляда на прикладные задачи и практического подхода к теоретическим знаниям.

Задание на практическую работу

1. Рассчитать токи и напряжения для заданной в индивидуальном задании цепи (Таблица 12). Номиналы элементов цепи выбрать в соответствии с вариантом (Таблица 11).

2. Отобразить рассчитанные значения в виде векторной диаграммы в пространстве комплексных чисел и в виде функций от времени.

3. Произвести проверку для всех уравнений, составленных по законам Кирхгофа в комплексной форме и в мгновенных значениях. Построить суммарные токи в узлах и сумму падений напряжений в контурах на графиках.

4. Рассчитать баланс мощностей рассматриваемой схемы.

5. Составить отчет, в котором отразить последовательность расчетов токов и напряжений рассматриваемой схемы, провести проверку, привести скриншоты с результатами работы программы.

6. Демонстрационный пример расчета цепи переменного тока приведен в приложении 1.

Таблица 11. Параметры элементов схемы

№	Номиналы элементов
1.	$E_1 = 20 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$, $R_4 = 0.9 \text{ Ом}$, $R_5 = 0.1 \text{ Ом}$, $L_1 = 0.025 \text{ Гн}$, $C_1 = 0.1 \text{ Ф}$, $C_2 = 0.002 \text{ Ф}$, $\omega = 628 \text{ рад/с}$
2.	$E_1 = 10 \text{ В}$, $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 0.3 \text{ Ом}$, $R_3 = 0.2 \text{ Ом}$, $R_4 = 90 \text{ Ом}$, $R_5 = 1 \text{ Ом}$, $L_1 = 0.0125 \text{ Гн}$, $C_1 = 0.01 \text{ Ф}$, $C_2 = 0.02 \text{ Ф}$, $\omega = 3.14 \text{ рад/с}$
3.	$E_1 = 5 \text{ В}$, $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 40 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $R_4 = 900 \text{ Ом}$, $R_5 = 10 \text{ Ом}$, $L_1 = 0.002 \text{ Гн}$, $L_2 = 0.01 \text{ Гн}$, $C_1 = 0.2 \text{ Ф}$, $\omega = 6.28 \text{ рад/с}$
4.	$E_1 = 15 \text{ В}$, $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 200 \text{ Ом}$, $R_4 = 9 \text{ Ом}$, $R_5 = 100 \text{ Ом}$, $L_1 = 0.2 \text{ Гн}$, $L_2 = 0.001 \text{ Гн}$, $C_1 = 0.1 \text{ Ф}$, $\omega = 618 \text{ рад/с}$
5.	$E_1 = 12 \text{ В}$, $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 0.4 \text{ Ом}$, $R_3 = 100 \text{ Ом}$, $R_4 = 0.8 \text{ Ом}$, $R_5 = 20 \text{ Ом}$, $L_1 = 0.02 \text{ Гн}$, $C_1 = 0.001 \text{ Ф}$, $C_2 = 0.002 \text{ Ф}$, $\omega = 3142 \text{ рад/с}$
6.	$E_1 = 110 \text{ В}$, $R_1 = 200 \text{ Ом}$, $R_2 = 50 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 800 \text{ Ом}$, $R_5 = 200 \text{ Ом}$, $L_1 = 0.035 \text{ Гн}$, $C_1 = 0.001 \text{ Ф}$, $C_2 = 0.002 \text{ Ф}$, $\omega = 6280 \text{ рад/с}$
7.	$E_1 = 36 \text{ В}$, $R_1 = 30 \text{ Ом}$, $R_2 = 0.5 \text{ Ом}$, $R_3 = 0.1 \text{ Ом}$, $R_4 = 80 \text{ Ом}$, $R_5 = 30 \text{ Ом}$, $L_1 = 0.2 \text{ Гн}$, $C_1 = 0.1 \text{ Ф}$, $C_2 = 0.2 \text{ Ф}$, $\omega = 31.4 \text{ рад/с}$
8.	$E_1 = 220 \text{ В}$, $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 100 \text{ Ом}$, $R_4 = 8 \text{ Ом}$, $R_5 = 300 \text{ Ом}$, $L_1 = 0.2 \text{ Гн}$, $L_2 = 0.01 \text{ Гн}$, $C_1 = 0.01 \text{ Ф}$, $\omega = 62.8 \text{ рад/с}$
9.	$E_1 = 120 \text{ В}$, $R_1 = 300 \text{ Ом}$, $R_2 = 0.6 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $R_4 = 0.7 \text{ Ом}$, $R_5 = 50 \text{ Ом}$, $L_1 = 0.09 \text{ Гн}$, $L_2 = 0.018 \text{ Гн}$, $C_1 = 0.05 \text{ Ф}$, $\omega = 6180 \text{ рад/с}$
10.	$E_1 = 100 \text{ В}$, $R_1 = 40 \text{ Ом}$, $R_2 = 0.7 \text{ Ом}$, $R_3 = 200 \text{ Ом}$, $R_4 = 7 \text{ Ом}$, $R_5 = 500 \text{ Ом}$, $L_1 = 0.006 \text{ Гн}$, $L_2 = 0.016 \text{ Гн}$, $C_1 = 0.015 \text{ Ф}$, $\omega = 3140 \text{ рад/с}$

№	Номиналы элементов
11.	$E1 = 24 \text{ В}, R1 = 4 \text{ Ом}, R2 = 0.8 \text{ Ом}, R3 = 20 \text{ Ом}, R4 = 70 \text{ Ом}, R5 = 0.5 \text{ Ом}, L1 = 0.05 \text{ Гн}, C1 = 0.001 \text{ Ф}, C2 = 0.02 \text{ Ф}, \omega = 31.4 \text{ рад/с}$
12.	$E1 = 12 \text{ В}, R1 = 400 \text{ Ом}, R2 = 0.9 \text{ Ом}, R3 = 0.2 \text{ Ом}, R4 = 700 \text{ Ом}, R5 = 60 \text{ Ом}, L1 = 0.4 \text{ Гн}, C1 = 0.01 \text{ Ф}, C2 = 0.02 \text{ Ф}, \omega = 314 \text{ рад/с}$
13.	$E1 = 15 \text{ В}, R1 = 50 \text{ Ом}, R2 = 900 \text{ Ом}, R3 = 3 \text{ Ом}, R4 = 0.6 \text{ Ом}, R5 = 600 \text{ Ом}, L1 = 0.003 \text{ Гн}, L2 = 0.03 \text{ Гн}, C1 = 0.07 \text{ Ф}, \omega = 628 \text{ рад/с}$
14.	$E1 = 6 \text{ В}, R1 = 5 \text{ Ом}, R2 = 90 \text{ Ом}, R3 = 300 \text{ Ом}, R4 = 6 \text{ Ом}, R5 = 0.15 \text{ Ом}, L1 = 0.002 \text{ Гн}, C1 = 0.001 \text{ Ф}, C2 = 0.003 \text{ Ф}, \omega = 31.4 \text{ рад/с}$
15.	$E1 = 9 \text{ В}, R1 = 500 \text{ Ом}, R2 = 9 \text{ Ом}, R3 = 30 \text{ Ом}, R4 = 60 \text{ Ом}, R5 = 25 \text{ Ом}, L1 = 0.12 \text{ Гн}, C1 = 0.05 \text{ Ф}, C2 = 0.025 \text{ Ф}, \omega = 3140 \text{ рад/с}$
16.	$E1 = 220 \text{ В}, R1 = 60 \text{ Ом}, R2 = 800 \text{ Ом}, R3 = 0.3 \text{ Ом}, R4 = 600 \text{ Ом}, R5 = 0.25 \text{ Ом}, L1 = 0.5 \text{ Гн}, C1 = 0.001 \text{ Ф}, C2 = 0.002 \text{ Ф}, \omega = 314 \text{ рад/с}$
17.	$E1 = 110 \text{ В}, R1 = 6 \text{ Ом}, R2 = 80 \text{ Ом}, R3 = 400 \text{ Ом}, R4 = 0.5 \text{ Ом}, R5 = 2.5 \text{ Ом}, L1 = 0.25 \text{ Гн}, L2 = 0.125 \text{ Гн}, C1 = 0.004 \text{ Ф}, \omega = 6280 \text{ рад/с}$
18.	$E1 = 20 \text{ В}, R1 = 600 \text{ Ом}, R2 = 8 \text{ Ом}, R3 = 40 \text{ Ом}, R4 = 5 \text{ Ом}, R5 = 0.5 \text{ Ом}, L1 = 0.0125 \text{ Гн}, L2 = 0.001 \text{ Гн}, C1 = 0.0016 \text{ Ф}, \omega = 62.8 \text{ рад/с}$
19.	$E1 = 100 \text{ В}, R1 = 70 \text{ Ом}, R2 = 700 \text{ Ом}, R3 = 4 \text{ Ом}, R4 = 500 \text{ Ом}, R5 = 0.55 \text{ Ом}, L1 = 0.02 \text{ Гн}, C1 = 0.005 \text{ Ф}, C2 = 0.002 \text{ Ф}, \omega = 314 \text{ рад/с}$
20.	$E1 = 60 \text{ В}, R1 = 7 \text{ Ом}, R2 = 1 \text{ Ом}, R3 = 0.4 \text{ Ом}, R4 = 50 \text{ Ом}, L1 = 0.2 \text{ Гн}, C1 = 0.001 \text{ Ф}, C2 = 0.003 \text{ Ф}, \omega = 628 \text{ рад/с}$
21.	$E1 = 140 \text{ В}, R1 = 150 \text{ Ом}, R2 = 900 \text{ Ом}, R3 = 300 \text{ Ом}, R4 = 0.6 \text{ Ом}, R5 = 60 \text{ Ом}, L1 = 0.003 \text{ Гн}, L2 = 0.03 \text{ Гн}, C1 = 0.0007 \text{ Ф}, \omega = 6280 \text{ рад/с}$

Таблица 12. Варианты схем для Лабораторной работы №10.

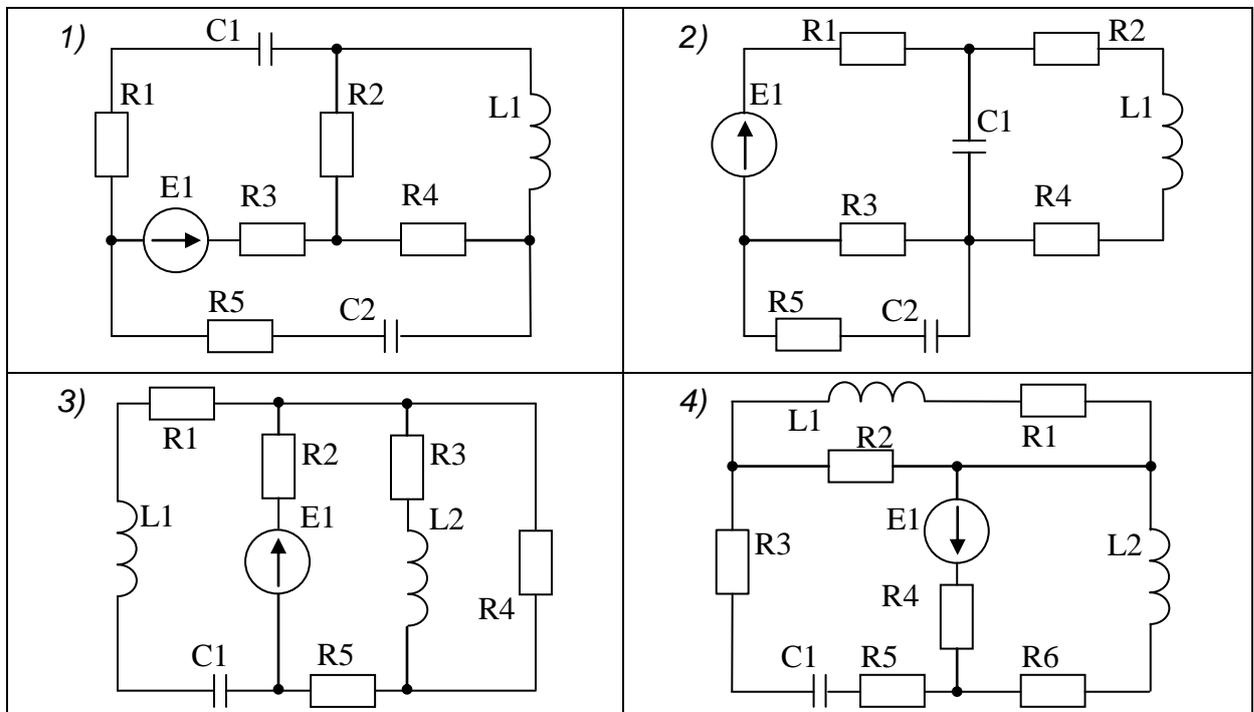


Таблица 12. Варианты схем для Лабораторной работы №10.

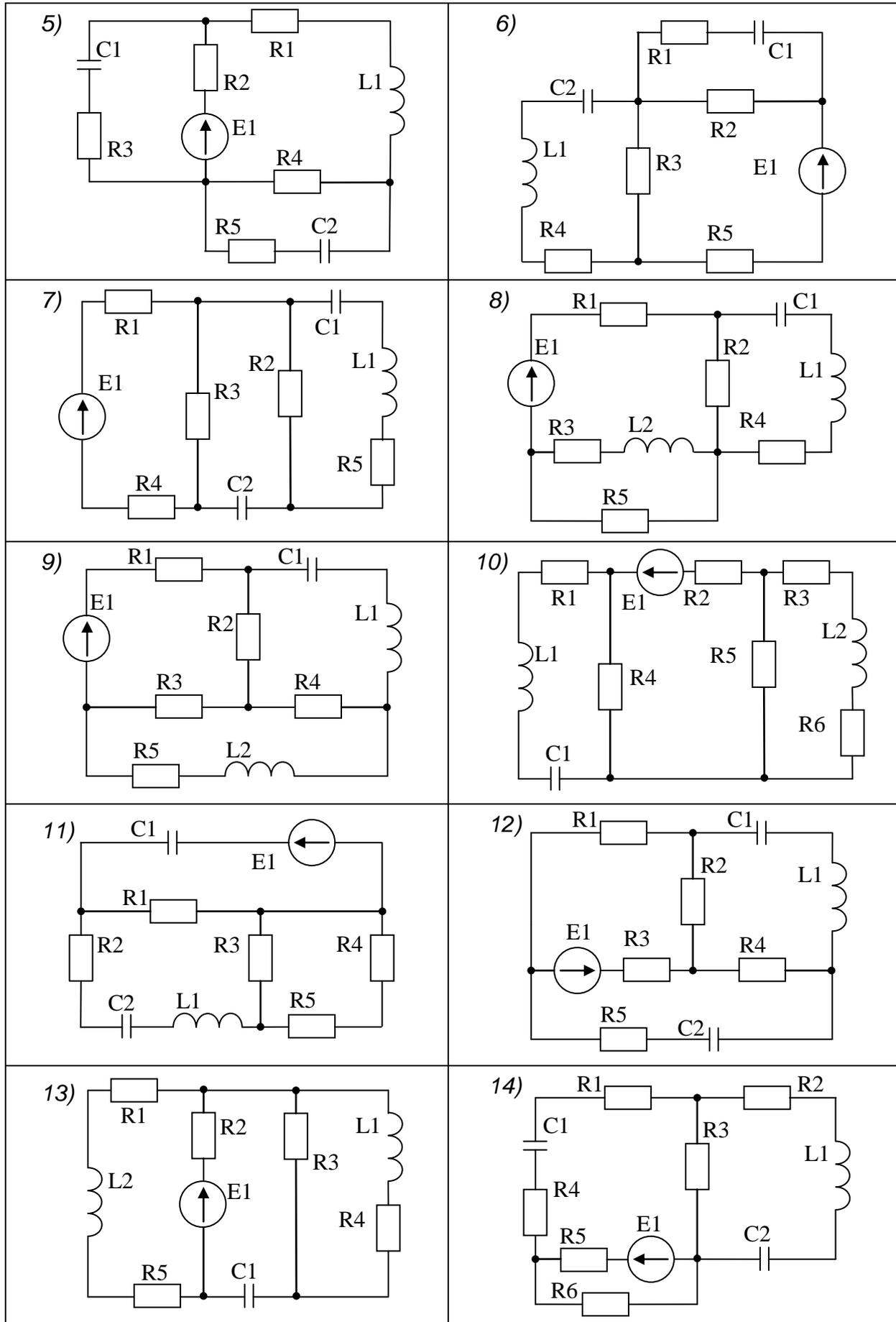
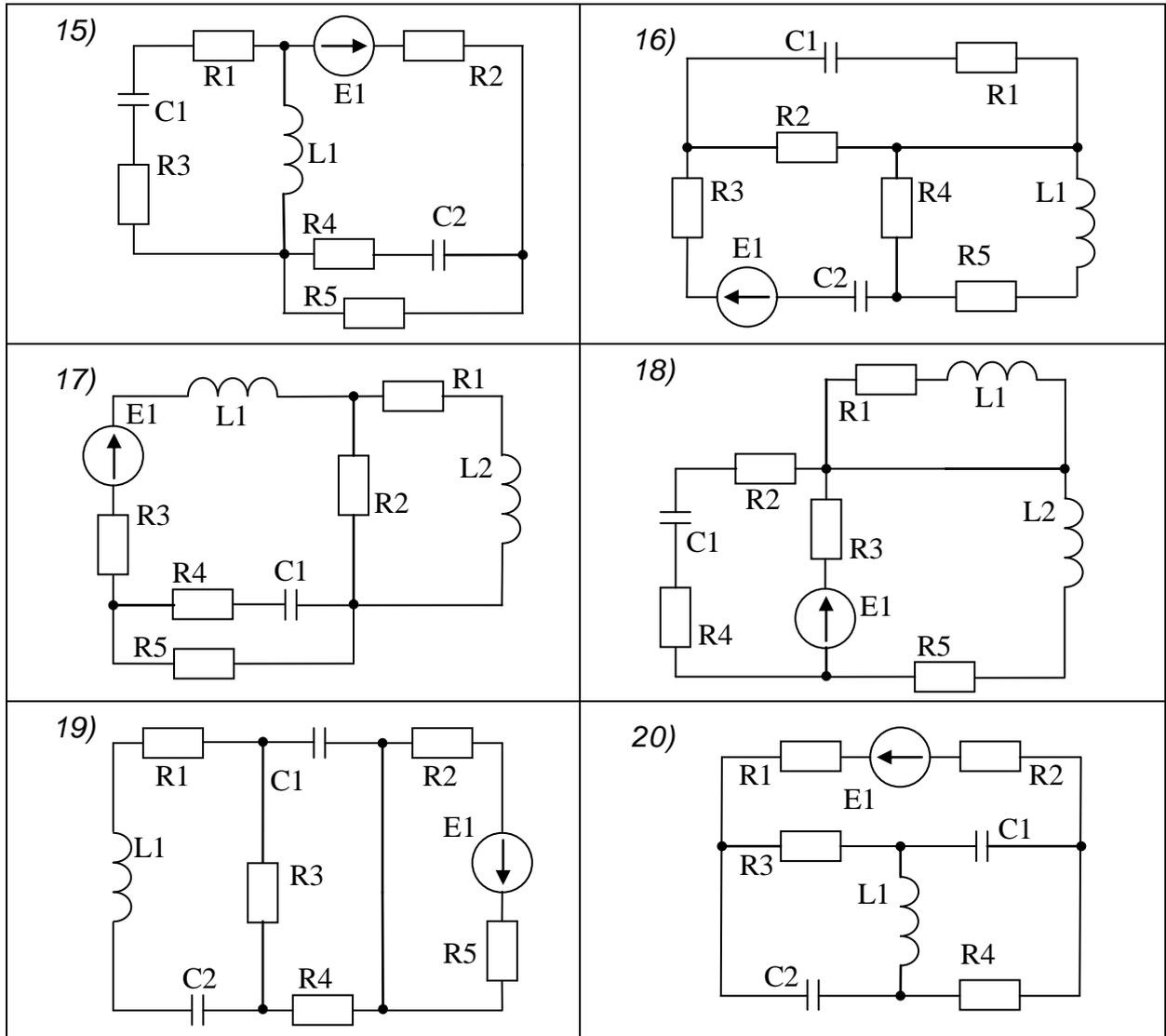


Таблица 12. Варианты схем для Лабораторной работы №10.



Контрольные вопросы

1. Сформулируйте первый закон Кирхгофа для цепи переменного тока.
2. Как связано напряжение, сопротивление и ток в резисторе?
3. Что такое активное сопротивление, как оно связано с полным сопротивлением участка цепи переменного тока?
4. Сформулируйте закон сохранения энергии в приложении к балансу мощностей цепи переменного тока.
5. Что такое полное сопротивление участка цепи? Запишите формулу.
6. Как связано векторное (комплексное) представление напряжения и форма его гармонического сигнала?
7. Назовите единицы измерения полной, активной и реактивной мощностей. Как они связаны?
8. Как вычисляется активная мощность источника?
9. Сформулируйте баланс мощностей в цепи переменного тока.
10. Полная мощность. По каким формулам можно вычислить мощность?
11. Сформулируйте закон Ома для цепи переменного тока.
12. Могут ли токи иметь отрицательное значение в цепи переменного тока?
13. На что расходуется энергия активного сопротивления участка цепи? Как вычисляется величина потраченной мощности?

14. Как изменяется вектор комплексного представления тока при изменении времени?
15. Назовите единицы измерения тока, напряжения, сопротивления и мощности.
16. Сформулируйте второй закон Кирхгофа для цепи переменного тока.
17. Как связано напряжение, сопротивление и ток в конденсаторе?
18. Что такое реактивное сопротивление, какое оно бывает? Как оно связано с полным сопротивлением участка цепи переменного тока?
19. В чем состоит идея представления гармонического сигнала комплексной переменной? Как изменяется угол?
20. Как связано векторное (комплексное) представление тока и форма его гармонического сигнала?
21. Как связано напряжение, сопротивление и ток в катушке индуктивности?
22. На что расходуется энергия реактивного элемента цепи? Как вычисляется величина потраченной мощности?
23. Чем отличается мгновенная (полная) фаза сигнала от начальной его фазы? Запишите формулу.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРОВЕРОЧНЫХ РАБОТ

Для студентов направления *11.03.04 Электроника и наноэлектроника (профиль - Промышленная электроника)* и *09.03.01 Информатика и вычислительная техника (профиль - Микропроцессорные системы обработки информации и управления)* с Томского университета систем управления и радиоэлектроники данный курс входит в образовательную программу и содержит следующие дидактические единицы:

- лекционную составляющую (*аудиторно*);
- практические занятия (*аудиторно*);
- самостоятельная работа студентов (*электронный курс*).

Учебно-методический комплект дидактических материалов по настоящей дисциплине (УМКД) включает:

- учебное пособие «*Введение в профессию: Учебное пособие / С. Г. Михальченко; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники – Томск: ТУСУР, 2019*» [5].

- настоящее пособие «*Введение в профессию: Учебно-методическое пособие для проведения практических занятий / С. Г. Михальченко; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники – Томск: ТУСУР, 2019*».

- «*Введение в профессию: Учебно-методическое пособие для организации самостоятельной работы студентов / С. Г. Михальченко; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники – Томск: ТУСУР, 2019*» [6].

- электронный курс (в среде *moodle*), размещенный на сайте ТУСУР.

Лекции №№ 1-7 проводятся по учебному пособию [5] и завершаются выполнением **практических работ** №№ 1-6, содержание которых, а также описание с примерами решения задач и индивидуальные задания для студентов содержит настоящее учебно-методическое пособие. Материал, излагаемый в лекциях №№ 8-10 не подразумевает выполнения практических работ в данном учебном курсе, однако, может использоваться в качестве дополнительной литературы при проведении занятий по дисциплинам «Математика», «Теоретические основы электротехники» и «Теория автоматического управления».

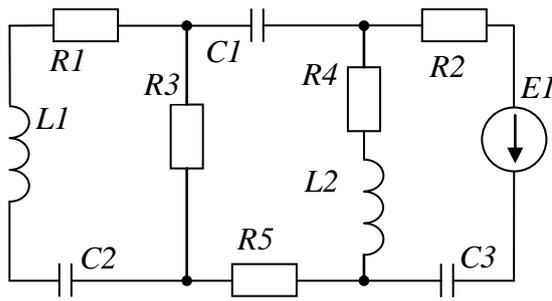
Организация и контроль за проведением **самостоятельной работы студентов** по настоящей дисциплине обеспечивает **электронный курс**, выполненный в среде *moodle*), размещенный на сайте ТУСУР. Доступ к материалам электронного курса студенты получают автоматически в своем личном кабинете.

Также организации проведения самостоятельной работы студентов сопутствует учебно-методическое пособие по СРС [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Mathematica. Система компьютерной алгебры компании Wolfram Research. Официальный сайт компании Wolfram Research <http://www.wolfram.com>. Способ доступа: <http://www.wolfram.com/mathematica/>.
2. Maple. Программный пакет компьютерной алгебры компании Waterloo Maple Inc. Официальный сайт: <http://www.maplesoft.com/>. Способ доступа: <http://www.maplesoft.com/products/Maple/index.aspx>.
3. MatLab. Пакет математических и инженерных вычислений. Официальный сайт компании-разработчика MathWorks <http://www.mathworks.com/>. Способ доступа: <http://www.mathworks.com/products/matlab/>.
4. MathCAD. Система компьютерных вычислений. Официальный сайт компании-разработчика Mathsoft <http://www.mathsoft.com/>, в составе PTC Community <http://communities.ptc.com>. Способ доступа: <http://www.mathcad.com/>, <http://communities.ptc.com/community/mathcad>
5. Михальченко, Сергей Геннадьевич. Введение в профессию: Учебное пособие / С.Г. Михальченко; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники – Томск: ТУСУР, 2019. – 117 с. : ил., табл., прил. – Библиогр.: с. 110.
6. Михальченко, Сергей Геннадьевич. Введение в профессию: Учебно-методическое пособие по проведению практических работ / С.Г. Михальченко; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники – Томск: ТУСУР, 2019. – 87 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 86.

РАСЧЕТ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА. ПРИМЕР



- $E1 = 360 [В]$ $\omega = 314 [рад/с]$
- $R1 = 30 [Ом]$ $L1 = 0,005 [Гн]$
- $R2 = 50 [Ом]$ $L2 = 0,055 [Гн]$
- $R3 = 10 [Ом]$ $C1 = 0,5 [Ф]$
- $R4 = 80 [Ом]$ $C2 = 0,025 [Ф]$
- $R5 = 30 [Ом]$ $C3 = 0,01 [Ф]$

Сопротивления реактивных элементов цепи равны:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}, \quad X_L = \omega \cdot L \quad [Ом] \quad (36) \quad (39)$$

Зададим параметры схемы

- $E1 = 360 [В]$ $\omega = 3.14 [рад/сек]$
- $R1 = 30 [Ом]$ $R2 = 50 [Ом]$ $R3 = 10 [Ом]$ $R4 = 80 [Ом]$ $R5 = 30 [Ом]$
- $L1 = 0.005 [Гн]$ $L2 = 0.055 [Гн]$
- $C1 = 0.5 [Ф]$ $C2 = 0.025 [Ф]$ $C3 = 0.01 [Ф]$

Вычислим сопротивления реактивных элементов

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega \cdot C1} \quad X_{C1} = 0.637 [Ом] \quad X_{L1} = \omega \cdot L1 \quad X_{L1} = 0.016 [Ом]$$

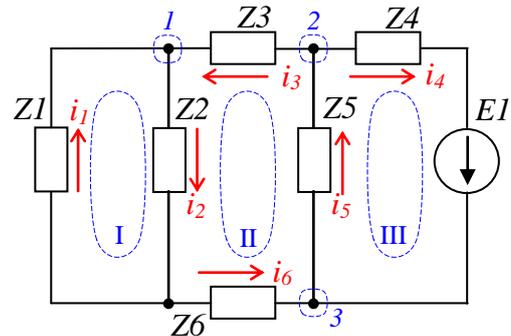
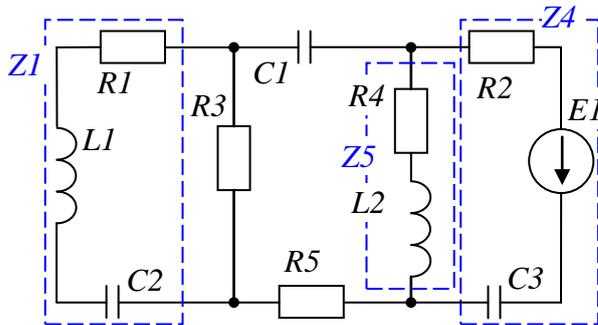
$$X_{C2} = \frac{1}{\omega \cdot C2} \quad X_{C2} = 12.739 [Ом] \quad X_{L2} = \omega \cdot L2 \quad X_{L2} = 0.173 [Ом]$$

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega \cdot C3} \quad X_{C3} = 31.847 [Ом]$$

Комплексное сопротивление Z для участка цепи переменного тока (с частотой ω), обладающего активным сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C в общем случае может быть записано в виде:

$$Z = Z_m \cdot e^{i\omega} = R + i \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) = R + i \cdot (X_L - X_C) [Ом]. \quad (40)$$

Вычислим комплексные сопротивления $Z1..Z6$ для всех участков цепи:



$$Z1 = R1 + i \cdot \omega \cdot L1 - \frac{i}{\omega \cdot C2}; \quad Z2 = R3; \quad Z3 = -\frac{i}{\omega \cdot C2};$$

$$Z4 = R2 - \frac{i}{\omega \cdot C3}; \quad Z5 = R4 + i \cdot \omega \cdot L2; \quad Z6 = R5$$

Произвольно выберем направления протекания токов $i_1..i_6$ в сегментах схемы (на рисунке выше обозначены красными стрелками) и направления обхода контуров. По законам Кирхгофа в выбранных контурах и узлах цепи выпишем уравнения для поиска токов $i_1..i_6$:

$$\begin{cases} (I): i_1 \cdot Z1 + i_2 \cdot Z2 = 0 \\ (II): i_2 \cdot Z2 + i_3 \cdot Z3 + i_5 \cdot Z5 + i_6 \cdot Z6 = 0 \\ (III): i_5 \cdot Z5 + i_4 \cdot Z4 = E1 \end{cases} \quad \begin{cases} (1): i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ (2): -i_3 - i_4 + i_5 = 0 \\ (3): i_4 - i_5 + i_6 = 0 \end{cases}$$

Запишем матрицу комплексных сопротивлений системы Z и вектор внешних воздействий E :

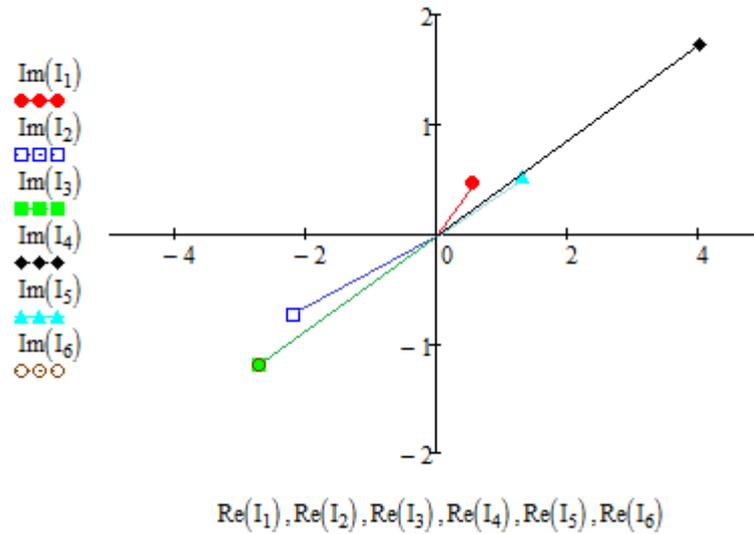
$$Z := \begin{pmatrix} R1 + i \cdot \omega \cdot L1 + \frac{-i}{\omega \cdot C2} & R3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R3 & \frac{-i}{\omega \cdot C1} & 0 & R4 + i \cdot \omega \cdot L2 & R5 \\ 0 & 0 & 0 & R2 + \frac{-i}{\omega \cdot C3} & R4 + i \cdot \omega \cdot L2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем решение системы уравнений – значения токов $i_1..i_6$, протекающих в сегментах схемы в виде комплексных значений $[A]$:

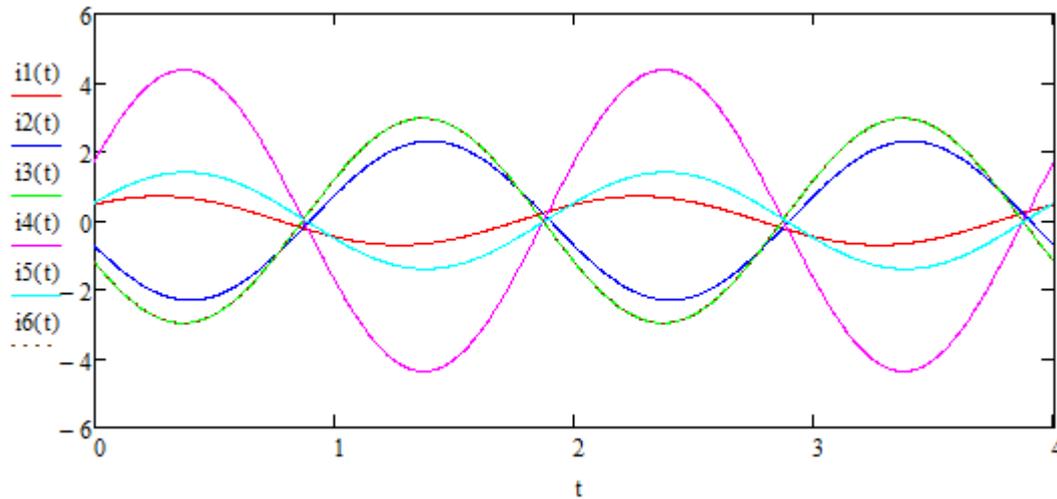
$$I := Z^{-1} \cdot E \quad I = \begin{pmatrix} 0.5296826 + 0.4697468i \\ -2.1867138 - 0.7353172i \\ -2.7163964 - 1.2050641i \\ 4.0191 + 1.7244382i \\ 1.3027035 + 0.5193741i \\ -2.7163964 - 1.2050641i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} i1(t) &:= |I_1| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_1)) & i4(t) &:= |I_4| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_4)) \\ i2(t) &:= |I_2| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_2)) & i5(t) &:= |I_5| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_5)) \\ i3(t) &:= |I_3| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_3)) & i6(t) &:= |I_6| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_6)) \end{aligned}$$

На рисунке ниже изображена векторная диаграмма токов:



Изобразим токи в виде функции от времени и выведем их на график [A]:



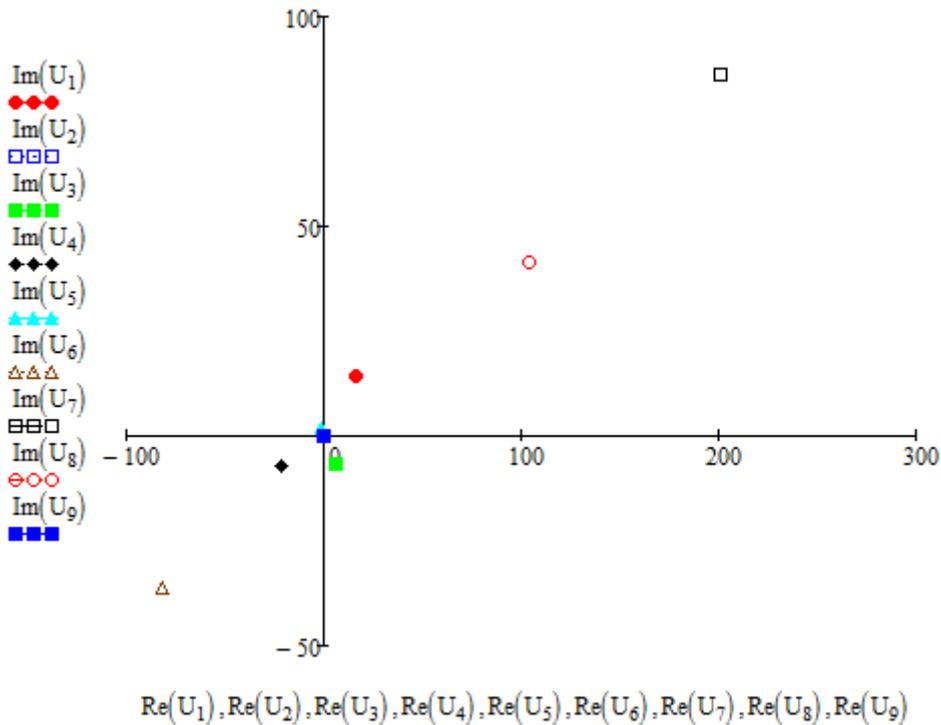
Проверим правильность нахождения токов по первому закону Кирхгофа:

$I_1 - I_2 + I_3 = 0$	$tt := 1.7$
$-I_3 - I_4 + I_5 = 0$	$i1(tt) - i2(tt) + i3(tt) = 0$
$-I_1 + I_2 - I_6 = 0$	$-i3(tt) - i4(tt) + i5(tt) = 0$
$I_4 - I_5 + I_6 = 0$	$-i1(tt) + i2(tt) - i6(tt) = 0$
	$i4(tt) - i5(tt) + i6(tt) = 0$

Можно видеть, что сумма токов в узлах цепи равна нулю для любого момента времени (здесь произвольно выбрано $tt=1.7$ с).

Вычислим напряжения на активных и реактивных элементах цепи переменного тока [В]:

$$U := \begin{pmatrix} R1 \cdot I_1 \\ i \cdot \omega \cdot L1 \cdot I_1 \\ \frac{-i}{\omega \cdot C2} \cdot I_1 \\ R3 \cdot I_2 \\ \frac{-i}{\omega \cdot C1} \cdot I_3 \\ R5 \cdot I_6 \\ R2 \cdot I_4 \\ R4 \cdot I_5 \\ i \cdot \omega \cdot L2 \cdot I_5 \\ \frac{-i}{\omega \cdot C3} \cdot I_4 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 15.8904773654 + 14.0924050865i \\ -0.0073750253 + 0.0083160165i \\ 5.9840361302 - 6.7475487751i \\ -21.8671384702 - 7.3531723279i \\ -0.7675567319 + 1.7301888063i \\ -81.4918927759 - 36.1519220702i \\ 200.9549987222 + 86.2219088809i \\ 104.2162838865 + 41.549928689i \\ -0.0896959086 + 0.2249769028i \\ 54.9184132999 - 127.9968144727i \end{pmatrix}$$



Изобразим напряжения в виде функции от времени и выведем их на график [B]:

$$uE1(t) := E1 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$uR1(t) := |U_1| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_1))$$

$$uR5(t) := |U_6| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_6))$$

$$uL1(t) := |U_2| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_2))$$

$$uR2(t) := |U_7| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_7))$$

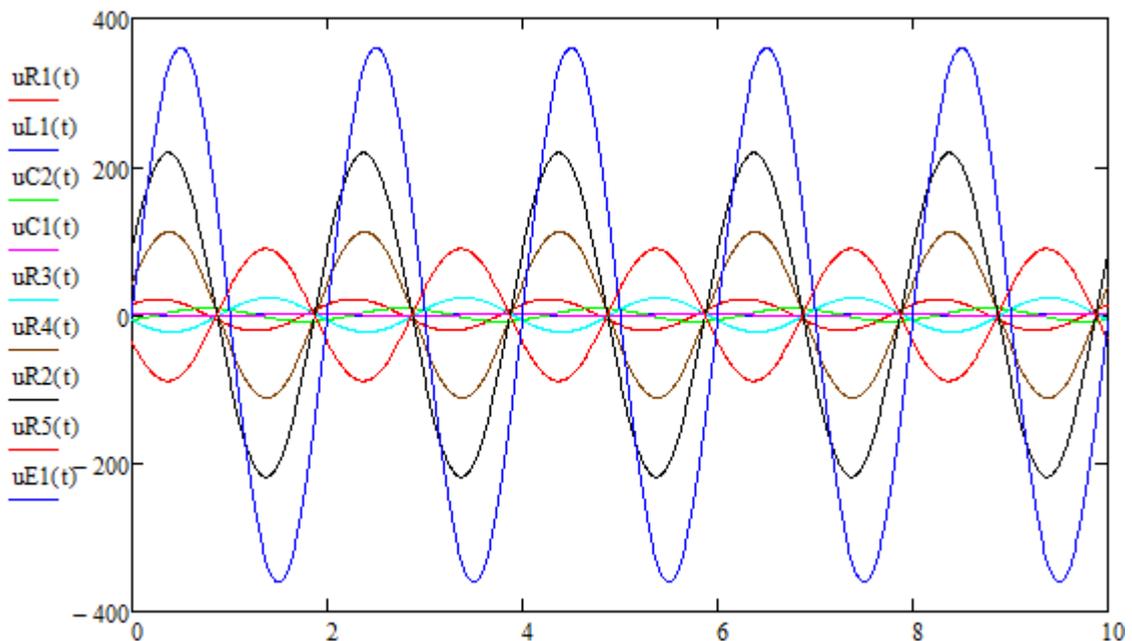
$$uC2(t) := |U_3| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_3))$$

$$uR4(t) := |U_8| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_8))$$

$$uR3(t) := |U_4| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_4))$$

$$uL2(t) := |U_9| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_9))$$

$$u_{C1}(t) := |U_5| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_5)) \quad u_{C3}(t) := |U_{10}| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_{10}))$$



Проверим правильность нахождения напряжений по второму закону Кирхгофа:

$$u_{R1}(tt) + u_{L1}(tt) + u_{R3}(tt) + u_{C2}(tt) = 0$$

$$u_{C1}(tt) + u_{R3}(tt) + u_{R5}(tt) + u_{L2}(tt) + u_{R4}(tt) = 0$$

$$u_{R4}(tt) + u_{L2}(tt) + u_{R2}(tt) + u_{C3}(tt) - u_{E1}(tt) = 0$$

Можно видеть, что сумма напряжений в контурах цепи равна сумме ЭДС источника для произвольного момента времени.

Рассчитаем баланс мощностей:

$$S_{gen} := E1 \cdot I_4 \quad S_{gen} = 1446.875991 + 620.797744i$$

$$P_{potr} := (|I_1|)^2 \cdot R1 + (|I_4|)^2 \cdot R2 + (|I_2|)^2 \cdot R3 + (|I_5|)^2 \cdot R4 + (|I_6|)^2 \cdot R5 = 1446.875991$$

$$Q_{potr} := (|I_1|)^2 \cdot \omega \cdot L1 + (|I_1|)^2 \cdot \frac{-1}{\omega \cdot C2} + (|I_3|)^2 \cdot \frac{-1}{\omega \cdot C1} + (|I_5|)^2 \cdot \omega \cdot L2 + (|I_4|)^2 \cdot \frac{-1}{\omega \cdot C3} = -620.797744$$

Можно видеть, что полная мощность источника S_{gen} [ВА] в комплексном виде имеет две составляющие – активную (вещественная часть) и реактивную (мнимая часть).

Активная мощность потребителей равна P_{potr} [Вт], а реактивная мощность потребителей – Q_{potr} [ВАр].

Результаты расчетов демонстрируют полное совпадение потребленной и сгенерированной активной и реактивной мощностей. Это подтверждает правильность расчетов и неизменность закона сохранения энергии в природе.

Михальченко Сергей Геннадьевич

Введение в профессию: Учебно-методическое пособие по проведению практических работ / С. Г. Михальченко; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники – Томск: ТУСУР, 2019. – 102 с. : ил., табл., прил. – Библиогр.: с. 96.

© Михальченко С.Г., 2019

© Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР), 2019