МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»
Кафедра автоматизированных систем управления

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

ТОМСК – 2019

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА
Учебное пособие

Составитель А.А. Мицель
Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – 2019. – 93 с.

В пособии представлены следующие разделы финансовой математики: реальные инвестиции, количественный финансовый анализ ценных бумаг с фиксированным доходом, дюрация облигации, инвестиции в портфель облигаций, теория иммунизации портфеля, портфельный анализ в условиях неопределённости.
Пособие подготовлено для студентов, обучающихся по направлению 09.04.01 – «информатика и вычислительная техника (магистратура)».

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. Анализ реальных инвестиций

1.1. Введение

Задача анализа и оценки финансовой эффективности инвестиционных проектов с целью отбора наиболее эффективного проекта является одной из основных в управлении финансами.

В широком смысле термин "инвестировать" означает любое вложение денежных средств с целью получения доходов в будущем. Различают два вида инвестиций - реальные и финансовые.

Реальные инвестиции (real investments) означают инвестиции в какой-либо тип материальных активов, таких, как земля, оборудование, заводы.

Финансовые инвестиции (financial investments) - это контракты, зафиксированные на бумаге, такие, как обыкновенные акции и облигации.

В развитых экономиках большая часть инвестиций относится к финансовым инвестициям.

Основным объектом математического моделирования и анализа в данном случае является поток платежей, а именно, суммы распределённых во времени денежных расходов и поступлений, предполагаемых в результате реализации инвестиционного проекта. При этом важную роль играют два фактора, которые связаны с инвестиционным процессом, - время и риск. Например, при инвестировании в ценные бумаги с фиксированным доходом (облигации) важнейшим фактором будет время, при инвестировании в рискованные ценные бумаги (обыкновенные акции) существенными являются и время, и риск.

С финансовой точки зрения инвестиционный проект объединяет два противоположных процесса:

вложения денежных средств (с целью создания производственного объекта, накопления капитала и т. д.);

последовательное получение дохода.

Эти процессы могут протекать последовательно, с разрывом между ними или без, на некоторых отрезках времени параллельно (в этом случае отдача от инвестиций начинается до полного завершения вложений). Оба этих процесса могут иметь разное распределение во времени.

Анализ инвестиций заключается в основном в оценивании и сравнении эффективности альтернативных инвестиционных проектов. Оценка эффективности осуществляется с помощью расчёта системы показателей. Методы оценки эффективности проектов, которые рассматриваются в данной главе, основаны на фундаментальном в финансовом анализе принципе дисконтирования потоков платежей, а именно, на приведении инвестиционных расходов и доходов к одному моменту времени (обычно на начало реализации проекта). При этом наиболее важным моментом является выбор уровня ставки процентов, по которой производится дисконтирование. В анализе реальных инвестиций эту ставку называют ставкой сравнения.

Рассмотрим это понятие более подробно на примере [2].

Пусть фирма - производитель бытовой техники - задумывает приобрести роботизированный комплекс для окраски поверхности изделий стоимостью в $1000 000. Принимая во внимание заработную плату оператора, обслуживающего комплекс, заработную плату рабочих, которых он должен заменить, а также расходы на эксплуатацию комплекса, фирма оценивает экономию от внедрения в $120 000 в год.

Вопрос: стоит ли тратить S1000 000 сегодня, чтобы каждый год экономить $120000, но в будущем?

Ответ на этот вопрос зависит от альтернативной стоимости получения $1000000 этой фирмой. Если фирме для этого приобретения придётся брать ссуду, то альтернативная стоимость будет отражать норму процента, взимаемого кредитором.

Если планируется истратить собственные денежные средства, то альтернативная стоимость определяется доходом, который это предприятие могло бы получить, используя $1000000 на альтернативные (возможно, более прибыльные) цели. Например, если бы фирма приобрела облигации, то альтернативная стоимость вложения капитала в новый комплекс была бы равна рыночной норме процента прибыли на эти ценные бумаги.

Можно сказать, что независимо от характера средств, то есть заёмные они или собственные, их альтернативная стоимость соответствует преобладающей на рынке норме процента. В рыночной экономике не существует единой нормы процента, имеется целое семейство процентных ставок (например, ставки по краткосрочным и долгосрочным ссудам, ставки по облигациям разных видов и т. д.). Эту рыночную ставку нужно рассматривать как некоторую условную величину, отражающую характерную норму процента из всего её многообразия, существующего на финансовых рынках.

Предположим, что норма процента равна 10% годовых. Это означает, что каким-либо способом фирма может получить $ 100000 в год, вложив свои средства в размере $1000000, которые предназначались для покупки комплекса. Поскольку это меньше чем $120000, то данный инвестиционный проект заслуживает внимания.

Пусть, далее, фирма хочет купить автоматическую линию для упаковки изделий стоимостью $500000, а прибыль от ее эксплуатации -$40000 в год. При альтернативных вложениях мы получили бы $50000 в год. Вывод: в данной ситуации (при рыночной ставке 10%) вложения в упаковочную линию невыгодны. Если рыночная ставка равна 7% годовых, то в этом случае заём в $500000 будет стоить $35000 в год и данное вложение становится выгодным. С другой стороны, очевидно, что если ставка будет расти, то и первый проект (вложения в роботизированный комплекс) может стать невыгодным.

Из данного примера можно сделать следующий вывод: эффективность инвестиций и, следовательно, активность инвесторов зависят от преобладающей на рынке нормы процента. Чем ниже норма процента, тем выше уровень инвестиционных расходов, выгодных инвестору.

Выбор конкретной ставки должен осуществляться на основе экономического анализа, производимого инвестором. Чем выше ставка, тем в большей мере отражается фактор времени - более отдалённые платежи оказывают меньшее влияние на современную величину потока платежей. Размеры современных величин доходов от вложений являются условными характеристиками, поскольку в существенной мере зависят от принятой для будущего ставки сравнения - рыночной нормы процента.

Как было отмечено выше, важным фактором при анализе инвестиций является учёт риска. В инвестиционном процессе риск проявляется в виде возможного уменьшения реальной отдачи от вложений по сравнению с ожидаемой. Оценка эффективности проекта зависит от правильного выбора процентной ставки, по которой производится капитализация платежей. В качестве рекомендации по учёту риска предлагается вводить поправку к уровню процентной ставки, то есть добавлять некоторую рисковую премию.

В данной теме рассматриваются методы моделирования и анализа инвестиционных процессов, связанных с реальными инвестициями. В последующих темах описаны модели и методы анализа финансовых инвестиций.

В финансовом анализе реальных инвестиций применяют четыре основных показателя:

1) чистый приведённый доход;
2) внутренняя норма доходности;
3) срок окупаемости;
4) индекс рентабельности.

1.2. Чистый приведенный доход

Для данного показателя в финансовой литературе широко используется следующее сокращенное обозначение: NPV от английского термина Net Present Value.

NPV используется в практике крупных и средних предприятий. Допущения, принимаемые при определении NPV:

- потоки денежных средств на весь период реализации проекта известны;
- определена оценка процентной рыночной ставки для будущего (на весь период реализации проекта).

Чистый приведенный доход (NPV) - это разность дисконтированных по ставке сравнения на один момент времени (обычно на начало реализации проекта) потоков доходов и вложений.

Эта величина характеризует абсолютный результат инвестиционной деятельности. Рассмотрим последовательно модели различных наиболее характерных вариантов инвестиционных процессов, на основе которых рассчитывается NPV, начиная с простейших.

1. Пусть инвестиции осуществляются одним платежом в начальный момент времени. Отдача от инвестиций поступает один раз в год в конце года в течение n лет. Обозначим K - размер инвестиций, R - размер ежегодного дохода, W - чистый приведенный доход. Таким образом, очевидно, поток доходов можно рассматривать как годовую ренту. Тогда, в соответствии с определением, чистый приведенный доход

$$W = R\frac{1-(1+q)^{-n}}{q} - K$$

где q - ставка сравнения, первое слагаемое - современная величина потока доходов.

Правило принятия решения на основе NPV состоит в следующем: если W больше нуля, то проект принимается к рассмотрению. Если W равен нулю, то доходы только окупают вложения и прибыли не приносят. Если W меньше нуля, то проект убыточен. При анализе нескольких альтернативных проектов, при прочих равных условиях предпочтение отдается проекту с наибольшим NPV.

2. Пусть вложения и поступления - равномерные дискретные потоки платежей, поступающих один раз в конце года. Процесс отдачи начинается сразу после завершения вложений.

Обозначим n_1 – продолжительность периода вложений (в годах), n_2 - продолжительность периода отдачи от вложений, K - размер ежегодных вложений, R - размер ежегодных поступлений..

Потоки доходов и расходов дисконтируем на начальный момент времени. Расходы представляют собой годовую ренту со сроком n_1,. Следовательно, приведенная величина расходов равна $Ka_{n_1,q}$. Доходы – отложенная на n_1 год годовая рента, все платежи которой нужно привести на нулевой момент времени. Современная величина такой ренты определяется по формуле $Ra_{n_2,q}v^{n_1}$, где v - множитель дисконтирования по ставке q. Таким образом, уравнение для определения NPV в этом случае будет иметь вид

$$W = Ra_{n_2,q}v^{n_1} - Ka_{n_1,q}.$$

Замечание. Если процессы вложений и отдачи описываются p-срочными рентами (параметры p у них могут быть разными), то, очевидно, в данном уравнении необходимо использовать коэффициенты приведения соответствующих p-срочных рент.

3. Предположим, что инвестиционные затраты и доходы разделяются на два неравномерных потока платежей, причем процесс отдачи от инвестиций начинается сразу после окончания вложений и все платежи поступают в конце года. Пусть R_j– размеры доходов в году j $\left(j = 1,2,...,n_2\right)$, K_t - инвестиционные расходы в году t $(t = 1,2,...,n_1)$. Сумма дисконтированных вложений определяется по формуле для современной величины переменного потока платежей (см. п.2.12) и равна $\sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t$. Рассмотрим отдельный платеж E_j. Дисконтируем его на момент начала инвестиционного проекта. Очевидно, дисконтированная величина этого платежа равна $v^{n_1}R_j v^j$. Сумма дисконтированных платежей R_j даст современную величину потока доходов $v^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} R_j v^j$. Уравнение для NPV имеет вид

$$W = v^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} R_j v^j - \sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t.$$

Мы предполагали, что процесс отдачи начинается сразу после окончания вложений. Если отдача начинается спустя n лет после начала осуществления проекта и $n > n_1$, то в данной формуле вместо множителя v^{n_1} необходимо использовать множитель v^n.

4. Предположим, что процессы вложения и отдачи задаются в виде единого неравномерного потока платежей, поступающих один раз в конце года. Это означает, что процессы вложения и получения доходов могут протекать как последовательно, так и параллельно.

Обозначим R_t - размер отдельного платежа. Тогда чистый приведенный доход определится по формуле

$$W = \sum_t R_t v^t,\ t = 1,2,...,n_1 + n_2,$$

где $n_1 + n_2$ – полный срок осуществления проекта. В этой формуле платежи R_t, соответствующие вложениям, берутся со знаком «минус».

Чистый приведённый доход до сих пор мы определяли приведением всех платежей к началу инвестиционного процесса. На практике может потребоваться оценка этого показателя на некоторый другой момент времени t.

Обозначим W_0 - чистый приведённый доход на начальный момент времени. W_t - чистый приведённый доход на момент времени t. Тогда, очевидно,

$$W_t = W_0(1+q)^t.$$

Наиболее предпочтительный вариант проекта остаётся таковым при оценке NPV на любой момент времени t.

На практике для более надежных выводов рекомендуется величину чистого приведённого дохода определять не для единственного значения ставки сравнения q, а для некоторого диапазона значений этой ставки.

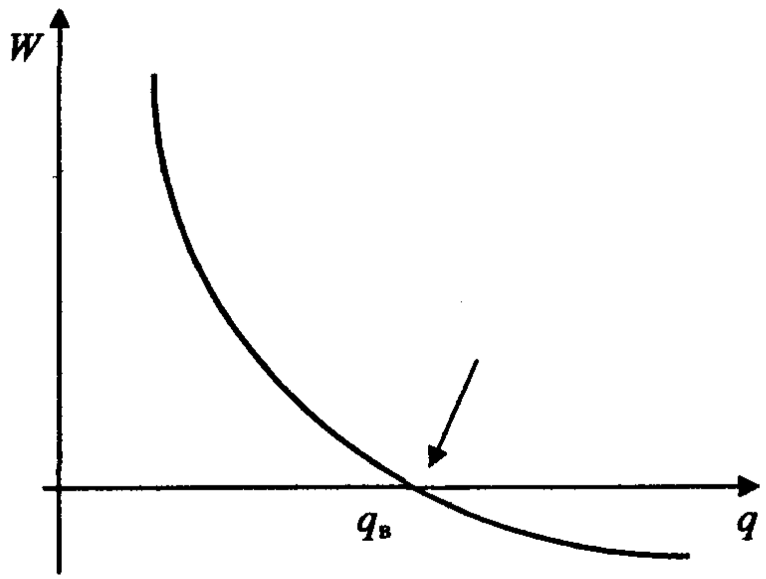

Рис 4.1

На рис.4.1 показана зависимость величины чистого приведенного дохода от ставки сравнения для случая, когда вложения осуществляются единым платежом, а поступления - равномерный поток платежей. При $q = q_в$ чистый приведенный доход $W = 0$.

1.3. Внутренняя норма доходности

Для данного показателя в финансовой литературе часто используют сокращенное обозначение IRR (от английского термина Internal Rate of Return).

Под IRR понимают расчётную ставку процентов, при которой капитализация получаемого дохода даёт сумму, равную приведённым инвестициям, и, следовательно, инвестиционные вложения являются окупаемой операцией.

Экономический смысл данного показателя заключается в том, что в случае, если вложения предшествуют потоку доходов, он дает предельное значение нормы дисконтирования, при которой проект еще остается выгодным.

Другими словами, если проект финансируется только за счёт привлечённых средств, то значение IRR показывает верхнюю границу допустимого уровня банковской процентной ставки, превышение которой делает проект убыточным. Обозначим $q_в$ - внутреннюю норму доходности. Если кредит получен по ставке i, то разность $(q_в - i)$ характеризует эффективность инвестиционной деятельности. Если $(q_в - i)$=0, то доход только окупает инвестиции, если $q_в < i$, то инвестиции убыточны. При сравнении различных проектов выбираем тот, у которого этот показатель выше. Рассмотрим метод расчета IRR.

Если инвестиции и отдача от них задаются в виде единого потока платежей, то тогда $q_в$ определяется как положительный корень уравнения:

$$\sum_{t=1}^{n} R_t v^t = 0 ,$$

где $v = \frac{1}{1+q_в}$ – множитель дисконтирования по искомой ставке $q_в$, n – общий срок реализации проекта. Выражение слева в данном уравнении есть многочлен степени n относительно переменной $(1+q_в)^{-1}$, коэффициенты которого - компоненты потока платежей. Таким образом, задача сводится к определению корней данного многочлена. В общем случае этот многочлен имеет n корней, среди которых могут быть положительные, отрицательные и комплексно-сопряжённые. Очевидно, экономический смысл имеют только положительные корни. По теореме Декарта, число положительных корней многочлена не превосходит числа перемен знака его коэффициентов. Следовательно, если вложения предшествуют процессу отдачи, уравнение имеет единственное положительное решение, и расчет показателя IRR имеет смысл. Если вложения чередуются с отдачей, в этом случае однозначного решения не существует, и применение данного показателя является некорректным.

Решить это уравнение можно только численно.

Рассмотренные в предыдущем разделе модели инвестиционных процессов также можно использовать для определения внутренней нормы доходности, если в соответствующих уравнениях положить $W = 0$ и дисконтирование проводить по искомой ставке $q_в$.

1.4. Срок окупаемости

Под сроком окупаемости понимают продолжительность периода, в течение которого сумма доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, становится равной сумме инвестиций, приведённых к тому же моменту времени. Дисконтирование осуществляется по ставке сравнения. Подчеркнем, что при определении срока окупаемости, в отличие от других показателей, все платежи приводятся на момент завершения инвестиций (или, что то же самое, на момент начала периода отдачи).

Рассмотрим способы определения этого показателя, начиная с наиболее простой модели инвестиций, соответствующей первому варианту из раздела 4.2. В этом случае срок окупаемости можно определить из уравнения

$$R\frac{1-(1+q)^{-n_{o\hat{e}}}}{q} = K .$$

Решая это уравнение относительно переменной $n_{ок}$, получим

$$n_{o\hat{e}} = -\frac{\ln(1-\frac{K}{R}q)}{\ln(1+q)}$$

Из этой формулы видно, что не всякий уровень дохода приводит к окупаемости инвестиций. Срок окупаемости будет конечной величиной, если $R > qK$ (формально это следует из свойств логарифмической функции).

Рассмотрим, как определяется срок окупаемости $n_{ок}$ в общем случае.

Пусть K - приведённая к началу периода отдачи величина инвестиций, то есть K - наращенная сумма всех платежей, которые составляют вложения $K = \sum\limits_{j=1}^{n_1} K_j (1+q)^j$.

Пусть доходы - произвольный поток поступлений. Тогда срок окупаемости $n_{ок}$ определяется суммированием доходов, дисконтированных по ставке q до тех пор, пока не получим сумму, равную объёму инвестиций, т.е. $K = \sum\limits_{t=1}^{n_{îê}} R_t \dfrac{1}{(1+q)^t}$.

Основной недостаток показателя $n_{ок}$ как меры эффективности инвестиций заключается в том, что он не учитывает весь период осуществления проекта и на него не влияет отдача, которая лежит за пределами этого срока. Поэтому рекомендуется этот показатель использовать только как ограничение при принятии решения. Инвестор определяет для себя некоторое критическое значение срока окупаемости $n_{кр}$, которое еще удовлетворяет его, и если срок окупаемости анализируемого проекта $n_{ок} > n_{кр}$, то проект заведомо не принимается. Только после этого сравнение проектов осуществляется по остальным показателям.

1.5. Индекс рентабельности

Индекс рентабельности показывает, сколько денежных единиц современной стоимости будущего денежного потока доходов приходится на одну денежную единицу приведенных инвестиций.

Предположим, что инвестиционные расходы и доходы - переменные потоки платежей, поступающих один раз в конце года. Тогда индекс рентабельности определяется по формуле

$$U = \frac{v^{n_1} \sum\limits_{j=1}^{n_2} R_j v^j}{\sum\limits_{t=1}^{n_1} K_t v^t}.$$

Здесь в числителе - современная величина потока доходов на момент начала инвестиционного проекта, в знаменателе - инвестиционные расходы, дисконтированные на этот же момент времени.

Если $U > 1$, то проект принимается к рассмотрению; если $U = 1$, то проект не приносит прибыли, а только окупается; при $U < 1$ проект нерентабелен. Из нескольких проектов выбирается тот, у которого индекс рентабельности наибольший. Очевидно, применение этого показателя корректно, если инвестиции и доходы идут последовательно.

Недостаток всех показателей. Все рассмотренные показатели предполагают известными используемые при их расчете параметры будущих расходов и доходов, их размеры и время выплат или поступлений. В реальной ситуации эти величины можно определить и спрогнозировать только приблизительно. Кроме того, результат расчета этих показателей эффективности, за исключением внутренней нормы доходности, существенно зависит от выбора ставки сравнения. Ставка оценивается субъективно финансовым аналитиком и, следовательно, все расчеты с использованием этой ставки также носят условный характер.

1.6. Модель инвестиций в человеческий капитал

Рассмотрим модель инвестиций в человеческий капитал. Модель будем строить при следующих предположениях.

1. Труд образованного и профессионально подготовленного человека производительнее, чем необученного. Следовательно, вложения в образование создают так называемый человеческий капитал, который в дальнейшем должен окупаться и приносить прибыль.
2. Люди как потребители заинтересованы в максимизации доходов в течении в всей жизни в целом, а не отдельного периода.
3. Существует прямая зависимость между образовательным уровнем работника и его потенциальными заработками.
4. Люди принимают решение о вложении в свое образование на основе сопоставления связанных с этим затрат и выгод.

Выгоды образования состоят в ожидаемых будущих более высоких доходах.

Затраты имеют две формы: а) явные затраты на курс обучения; б) скрытые затраты, а именно, упущенные в течение обучения заработки.

Выгоды и затраты относятся к разным периодам времени, и поэтому каждый человек, принимая решение об образовании, должен сравнить сегодняшнюю ценность ожидаемых выгод с сегодняшней ценностью ожидаемых затрат. Рассмотрим индивида, который хочет максимизировать чистый приведенный доход всех своих будущих поступлений. Предположим, что он решает вопрос: получать ли ему дополнительное образование еще в течение одного года. Обозначим C - затраты на образование в течение дополнительного года (плата за обучение плюс упущенные заработки). Эту величину необходимо сравнить с ожидаемыми выгодами более высоких заработков, предоставляемых рынком труда. Пусть B_t - ожидаемый дополнительный годовой заработок в году t, g - рыночная норма процента, N - продолжительность предстоящей трудовой жизни данного индивида. Тогда приведенная величина выгод определяется как $P=\sum_{t=1}^{N}\frac{B_t}{(1+g)^t}$. Разность $(P-C)$ — чистый приведенный доход от образования. Если $(P-C)$ > 0, то с финансовой точки зрения имеет смысл поучиться еще год. Очевидно, чем меньше C *и* g, *а* также чем выше доходы и больше N, тем выгоднее вкладывать деньги в образование.

Пусть зарплата индивидуума 48000 в год. Если он проучится еще один год, заплатив за курс обучения 20000, то его зарплата возрастет. Определим, на какую величину должна возрасти его зарплата, чтобы было выгодно вкладывать деньги в образование. Примем значение рыночной ставки g = 15%. Затраты на обучение

$$C = 48000 + 20000 = 68000.$$

После обучения зарплата увеличится на Bденежных единиц в год (предполагаем, что это постоянная величина на протяжении всей оставшейся жизни). Определим величину B. Используя формулу для современной величины годовой ренты, получим уравнение $C=B\left[\frac{1-(1+0,15)^{-N}}{0,15}\right]$, из которого легко определить значение B. Пусть $N=40$, тогда $B=10200$. Это означает, что обучение будет выгодным с финансовой точки зрения, если будущие доходы индивидуума возрастут не меньше, чем на 10200. Если взять $N=5$, тогда расчеты дадут следующий результат: $B=20300$.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое реальные и финансовые инвестиции?
2. Какие наиболее важные факторы связаны с инвестиционным процессом?
3. В чем заключается анализ инвестиций?
4. Назовите четыре основных показателя, применяемых в финансовом анализе реальных инвестиций.
5. Что такое чистый приведенный доход? Запишите модель чистого приведенного дохода для случая, когда вложения осуществляются один раз, а доходы поступают ежегодно в конце года.
6. Запишите модель чистого приведенного дохода для случая, когда вложения и поступления — равномерные дискретные потоки платежей, поступающих один раз в конце года. Процесс отдачи начинается сразу после завершения вложений.
7. Запишите модель чистого приведенного дохода для случая, когда инвестиционные затраты и доходы разделяются на два неравномерных потока платежей, причем процесс отдачи от инвестиций начинается сразу после окончания вложений и все платежи поступают в конце года.
8. Запишите модель чистого приведенного дохода для случая, когда процессы вложения и отдачи задаются в виде единого неравномерного потока платежей, поступающих один раз в конце года.
9. Что такое внутренняя норма доходности и как она определяется?
10. Что такое срок окупаемости и как он определяется?
11. Что такое индекс рентабельности?
12. Рассчитайте эффективность получения образования

Тема 2. Количественный финансовый анализ ценных бумаг с фиксированным доходом

2.1. Введение

В данном разделе рассматриваются методы количественного финансового анализа финансовых обязательств с фиксированным доходом. К такому виду финансовых обязательств относятся ценные бумаги, приносящие фиксированный доход в виде процентов - облигации, различные сертификаты, привилегированные акции и другие ценные бумаги, по которым выплачивается заранее обусловленный доход. Вложения в ценные бумаги относятся к финансовым инвестициям. Основным видом ценных бумаг с фиксированным доходом являются облигации.

Под облигацией понимается ценная бумага, свидетельствующая о том, что ее держатель предоставил заем эмитенту этой бумаги. Облигация, как правило, обеспечивает ее владельцу регулярное получение фиксированного дохода в виде процентов от номинала и в конце срока - некоторой выкупной цены, обычно равной номиналу.

Облигация называется купонной, если по этой облигации производятся регулярные выплаты фиксированного процента от номинала, называемые купонными, и выплата номинала при погашении облигации. Последний купонный платеж производится в день погашения облигации.

Основные параметры облигации:

1. Номинальная цена или выкупная цена, если она отличается от номинала.
2. Дата погашения.
3. Норма доходности или купонная ставка. Это процентная ставка, по которой регулярно выплачивается доход владельцу облигации.
4. Сроки выплаты процентов.

Определенное значение имеет наличие или отсутствие оговорки о запрете досрочного выкупа облигаций. Наличие у эмитента права досрочного выкупа снижает качество облигации, поскольку повышается степень неопределенности для инвестора.

В зависимости от метода выплаты доходов и способов погашения займов облигации можно классифицировать следующим образом.

1. Облигации, по которым производится только выплата процентов, а капитал не возвращается. Эмитент указывает лишь на возможность их выкупа, не связывая себя конкретным сроком.
2. Облигации, по которым не выплачиваются проценты. Это так называемые облигации с нулевым купоном.
3. Облигации, по которым держателям проценты начисляются и выплачиваются вместе с номиналом в момент погашения.
4. Облигации, дающие право их владельцам на получение периодически

выплачиваемого дохода в виде процентов и выкупной суммы в будущем при погашении. Этот вид облигаций наиболее распространен.

Введем понятие курса облигаций. Под курсом понимают покупную цену одной облигации в расчете на 100 денежных единиц номинала.

Пусть P - рыночная цена, N - номинал, K - курс. Тогда, по определению

$$K = \frac{P}{N}100$$

Основные задачи анализа облигаций:
1) определение полной доходности облигации;
2) определение внутренней стоимости облигации и выявление неверно оцененных рынком ценных бумаг;
3) оценка риска, связанного с вложениями в облигации.

В данной теме рассматриваются методы решения перечисленных задач.

2.2. Определение полной доходности облигаций

Общий доход от облигаций складывается из трёх элементов:
1) периодически выплачиваемого купонного дохода;
2) изменения рыночной цены облигации за определённый период времени. Если облигация была куплена по цене ниже номинала, или, как говорят, с дисконтом, то этот элемент доходности - положительная величина. Если облигация была куплена по цене выше номинала или, как говорят, с премией, то этот элемент доходности будет отрицательной величиной. Если покупная цена равна номиналу, то этот элемент доходности отсутствует;
3) дохода от реинвестиции поступления от купонов.

Существует несколько способов и показателей измерения доходности облигаций. Например, доходность облигации с периодической выплатой процентов можно измерить в виде купонной доходности, но в этом случае не учитывается второй элемент доходности. В данном разделе рассматриваются методы определения полной доходности, учитывающие первые два элемента доходности (очевидно, использование купонного дохода зависит от индивидуальных склонностей инвестора и в общем случае его учесть невозможно). Показатель полной доходности измеряет реальную финансовую эффективность облигации для инвесторов и обычно определяется в виде годовой ставки сложных процентов. Для этой ставки в финансовой литературе используют различные наименования - **доходность к погашению, внутренняя доходность** облигации.

Определение. Годовая внутренняя доходность облигации r – это годовая ставка сложных процентов, по которой современная стоимость потока платежей по облигации равна рыночной стоимости облигации в момент t = 0:

$$P = \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + ... + \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}} . \tag{2.1}$$

где $t_1, t_2, ..., t_n$ – моменты времени поступления платежей $C_1, C_2, ..., C_n$.

Здесь внутренняя доходность облигации определяется как годовая доходность

Методика расчета полной доходности облигации основана на определении современной стоимости потока платежей, получаемых владельцем облигации.

При этом дисконтирование платежей осуществляется по искомой ставке доходности к погашению.

Доходность облигации без выплаты процентов

Такая облигация имеет один источник дохода для инвестора - разность между выкупной ценой облигации (номинал) и ценой приобретения (рыночной ценой).

Пусть P - рыночная цена облигации (цена покупки), N - номинал, n - срок до погашения. В конце срока владелец такой облигации получит сумму, равную номиналу. Эту величину необходимо дисконтировать и приравнять ее современную стоимость к рыночной цене облигации. В результате получим уравнение

$$Nv^n = P,$$

где $v = \dfrac{1}{1+r}$, r – искомая ставка доходности.

Это уравнение можно переписать, используя понятие курса. Получим

$$v^n = \frac{K}{100},$$

откуда нетрудно определить искомую ставку:

$$r = \frac{1}{(K/100)^{1/n}} - 1.$$

Если курс $K < 100$ или, что то же самое, рыночная цена $P < N$, то ставка r – положительная величина, и данная облигация принесет доход.

Определение доходности облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов

Доход от этого вида облигаций получают только в виде периодически выплачиваемых процентов от номинала. Пусть проценты выплачиваются один раз в конце года, g ~ купонная ставка, тогда gN - ежегодно получаемый доход. Выплату потока процентных платежей можно рассматривать как вечную ренту. Необходимо приравнять современную величину этой ренты к покупной цене облигации.

Получим формулу для современной величины вечной ренты. Обозначим A_∞ - современную величину такой ренты. Имеем

$$A_\infty = \lim_{n\to\infty} A = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = \frac{R}{r}$$

Используем эту формулу для определения полной доходности облигации. Очевидно, современная величина платежей по облигации равна $\dfrac{gN}{r}$.

Приравняем эту величину покупной цене. Получим уравнение

$$\frac{gN}{r} = P = \frac{K}{100}N,$$

решая которое, определим

$$r = \frac{g}{K}100.$$

Если курс $K<100$, то доходность к погашению $r>g$; если $K=100$, то $r=g$; если $K>100$, то $r<g$.

Если процентные платежи выплачиваются p раз в год, то поток этих платежей можно рассматривать как вечную p - срочную ренту. Приравнивая современную величину этой ренты к цене приобретения, получим уравнение, решив которое, определим ставку полной доходности r:

$$r=\left(\frac{g}{p}\frac{100}{K}+1\right)^{p}-1.$$

Доходность облигации с выплатой процентов в конце срока

Для такого вида облигаций проценты начисляются и выплачиваются в конце срока в виде одной суммы вместе с номиналом. Эта облигация имеет два источника дохода:
1) проценты за весь период займа;
2) прирост капитала, т.е. разность номинала и покупной цены.

В конце срока владелец такой облигации получает сумму $N(1+g)^n$.
Дисконтируем эту величину и приравняем результат к цене приобретения. Получим уравнение

$$N(1+g)^n v^n = P = \frac{KN}{100}$$

из которого определим ставку

$$r=\frac{1+g}{(K/100)^{1/n}}-1$$

Если курс $K<100$, то $r>g$; если $K>100$, то $r<g$.

Определение доходности облигации с периодической выплатой процентов, погашаемой в конце срока

Суммарный доход от облигации данного вида складывается из двух элементов:

1) текущего дохода, реализуемого с помощью купонов;
2) дохода, получаемого в конце срока (равного номиналу или выкупной цене, если она не совпадает с номиналом).

Предположим, что купонные платежи выплачиваются один раз в год. Тогда поток этих платежей можно рассматривать как годовую ренту. Дисконтируя все платежи и приравнивая результат к покупной цене, получим уравнение

$$N(1+r)^{-n}+Nga_{n,r}=P$$

или, используя понятие курса,

$$((1+r)^{-n}+ga_{n,r})100=K.$$

Это уравнение необходимо решить относительно ставки r. Оно имеет единственное положительное решение, которое можно определить только численно.

Если купонные платежи выплачиваются p раз в год, то уравнение примет вид

$$((1+r)^{-n}+ga_{n,r}^{(p)})100=K.$$

И в этом случае искомая ставка определяется численно.

Определение доходности облигации в общем случае

Будем использовать следующие обозначения:

N - номинал облигации;

g - годовая купонная ставка;

p - число купонных платежей в году;

q - сумма отдельного купонного платежа;

t = 0 – момент покупки облигации или момент, когда предполагается инвестирование в облигацию;

T (в годах) - срок до погашения облигации от момента t = 0;

τ - время, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации (до момента t = 0).

Период времени $\frac{1}{p}$, измеряемый в годах, называется купонным периодом. В конце каждого купонного периода производится купонный платеж. Так как облигация может быть куплена в любой момент между купонными выплатами, то τ изменяется в пределах от 0 до $\frac{1}{p}$. Если облигация куплена сразу после купонной выплаты, то τ = 0. Если облигация куплена непосредственно перед купонным платежом, то $\tau = \frac{1}{p}$. Так как покупка облигации производится только после оплаты очередного купона, то τ не принимает значение $\frac{1}{p}$. Таким образом, $0 \le \tau < \frac{1}{p}$. Если облигация продается через время τ после купонной выплаты, а до погашения остается n купонных платежей, то срок до погашения облигации равен

$$T = \frac{n}{p} - \tau .$$

Рис. 2.1.

Тогда $0 \le \frac{n}{p} - T < \frac{1}{p}$. Отсюда $T \cdot p \le n < T \cdot p + 1$, где n – целое неотрицательное число. Следовательно,

если $T \cdot p$ – целое, то $n = T \cdot p$ и τ = 0;

если $T \cdot p$ – не целое, то $n = [T \cdot p] + 1$ и $\tau = \frac{n}{p} - T$.

Пример 2.1. По облигации производятся купонные выплаты каждые три месяца. Срок до погашения облигации а) 10,5 месяцев; б) 6 месяцев. Определить число купонных платежей, оставшихся до погашения облигации, а также время, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации.

а) Число купонных платежей в году p = 4. Срок до погашения облигации (в годах) равен $T = \frac{10,5}{12}$. Так как $T \cdot p$ = 3,5 – не является целым, то число купонных платежей, оставшихся до погашения облигации, n = [3,5] + 1 = 4. Время, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации, равно $\tau = \frac{n}{p} - T = \frac{4}{4} - \frac{10,5}{12}$ = 0,125 года. Значит, облигация куплена через 1,5 месяца после купонной выплаты.

б) Число купонных платежей в году p = 4. Срок до погашения облигации $T = \frac{6}{12}$ = 0,5 года. Так как $T \cdot p$ = 2 – является целым, то $n = T \cdot p$ = 2. Тогда τ = 0. Действительно, $\tau = \frac{n}{p} - T = \frac{2}{4} - 0,5$ = 0. Значит, облигация куплена сразу после купонной выплаты.

Пусть P – рыночная стоимость облигации в момент t = 0, купоны по которой выплачиваются p раз в год. Предположим, облигация продается через время τ после купонной выплаты, когда до погашения остается n купонных выплат. Формула (4.1) для купонной облигации имеет вид:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{(1+r)^{\frac{i}{p} - \tau}} + \frac{N}{(1+r)^{\frac{n}{p} - \tau}} \qquad (2.2)$$

или

$$P = \left(1+r\right)^{\tau} \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{\left(1+r\right)^{\frac{i}{p}}} + \frac{N}{\left(1+r\right)^{\frac{n}{p}}} .$$

Вычислим сумму n членов геометрической прогрессии, получим с учетом того, что $q = \dfrac{g \cdot N}{p}$ следующее выражение:

$$P = (1+r)^{\tau} \left(\frac{g \cdot N}{p} \cdot \frac{1-(1+r)^{-n/p}}{(1+r)^{1/p} - 1} + \frac{N}{(1+r)^{n/p}} \right). \qquad (2.3)$$

Первое слагаемое в круглых скобках представляет собой современную величину потока купонных платежей, второе – современную величину погашаемой суммы облигации, равной ее номиналу N. Множитель $(1+r)^{\tau}$ указывает на то, что начальный момент времени t_0 не равен 0, а равен τ, т.е. $t_0 = \tau$.

Годовая полная доходность r купонной облигации может быть определена из равенства (2.3).

Пример 2.2. По 9 % - й купонной облигации номиналом 1000 д.е. обещают производить каждые полгода купонные выплаты. Требуется определить внутреннюю доходность облигации, если ее стоимость равна 1050 д.е., а до погашения остается 3,8 года.

Здесь значения параметров облигации следующие: N = 1000 д.е., g = 0,09, p = 2, $q = \dfrac{1}{p} g \cdot N$ = 45 д.е., T = 3,8 года, P = 1050 д.е. Найдем число купонных платежей n, оставшихся до погашения облигации, а также время τ, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации.

Так как произведение $T \cdot p$ = 7,6 – не является целым, то n = [7,6] + 1 = 4. Тогда $\tau = \dfrac{n}{p} - T$ = $\dfrac{8}{2} - 3{,}8$ = 0,2 года.

Для расчета внутренней доходности облигации по формуле (2.2) необходимо решить уравнение

$$1050 = (1+r)^{0.2} \left(45 \cdot \frac{1-(1+r)^{-8/2}}{(1+r)^{1/2} - 1} + \frac{1000}{(1+r)^{8/2}} \right).$$

С помощью пакета Mathcad найдем $r = 8.2\%$

Доходность облигации с учетом налогов

Рассмотрим облигацию с периодической выплатой процентов и погашением в конце срока. Введём две налоговые ставки: m - ставка налога на прирост капитала, h - ставка налога на текущий доход. Сумма налога на прирост капитала равна $m(N-P)$. С учетом этого налога владелец получит в конце срока не номинал, а сумму $(N-m(N-P))$. Сумма налога на текущий доход равна hNg. С учетом этого налога владелец периодически будет получать сумму, равную $(1-h)Ng$.

Дисконтируем поток платежей с учетом налогов и приравняем результат к покупной цене облигации. Получим уравнение

$$(N-m(N-P))\nu^n+(1-h)Nga_{n,r}=P.$$

Если использовать понятие курса, то данное уравнение можно преобразовать к виду:

$$\frac{100}{1-m\nu^n}((1-m)\nu^n+(1-h)ga_{n,r})=K.$$

В данном случае ставку доходности к погашению можно определить тоже только численно. Если платежи поступают p раз в год, то в этом уравнении коэффициент приведения $a_{n,r}$ заменяется на коэффициент приведения p-срочной ренты $a_{n,r}^{(p)}$.

2.3. Доходность портфеля облигаций

Разумный инвестор вкладывает средства не в один вид ценных бумаг, а формирует портфель облигаций, который включает различные по видам и срокам облигации. В данном разделе рассматривается простейший анализ портфеля. Он заключается в оценке полной доходности портфеля. Доходность портфеля измеряется в виде годовой ставки сложных процентов. Эта ставка определяется из решения уравнения, в котором общая стоимость облигаций, входящих в портфель, приравнивается к сумме современных величин всех видов платежей по облигациям. Пусть S_t - элемент потока платежей в момент времени t, Q_j - количество облигаций вида j, входящих в портфель, P_j - цена приобретения одной облигации вида j. Уравнение для определения доходности имеет вид

$$\sum_t S_t\nu^t-\sum_j Q_jP_j=0$$

Здесь $\sum_j Q_jP_j$ – рыночная стоимость портфеля, $\sum_t S_t\nu^t$ – сумма современных величин всех платежей по всем облигациям, которые входят в портфель.

Ставка определяется численным методом.

2.4. Оценивание облигаций. Базовая модель оценивания облигаций

Метод капитализации дохода

Как было отмечено выше, одной из основных целей финансового анализа ценных бумаг является выявление бумаг, неверно оцененных рынком.

Предположим, что в некоторых случаях на основе общедоступной информации можно выявить облигации, неверно оцененные рынком. Для этого необходимо иметь некоторую аналитическую процедуру, основываясь на которой, инвестор мог бы выявить такие облигации и с учетом этого принимать обоснованные решения относительно продажи или покупки этих облигаций.

Возможны два подхода к решению данной задачи:

1. Ставка доходности к погашению облигаций, которые анализирует инвестор, сравнивается со значением ставки, которое является «справедливым», по мнению инвестора. Свое мнение инвестор формирует на основе анализа как характеристик облигации, так и текущей рыночной ситуации. Если доходность облигации выше справедливой, то говорят, что облигация недооценена и в этом случае она – кандидат на покупку. Если доходность к погашению меньше справедливой, то облигацию называют переоцененной, и тогда она – кандидат на продажу.
2. Инвестор оценивает истинную или внутреннюю стоимость облигации и сравнивает её с рыночной ценой. Если текущая рыночная цена меньше внутренней стоимости, то облигация недооценена рынком, и наоборот, если текущая рыночная стоимость больше внутренней стоимости, то облигация переоценена.

Обе процедуры анализа и оценки облигации основаны на методе капитализации дохода, т.е. на приведении всех платежей по облигации к настоящему моменту времени. Рассмотрим первый подход.

Доходность к погашению

Методы определения доходности к погашению (точнее – обещанной доходности к погашению) для различного вида облигаций были рассмотрены в предыдущем разделе. Рассмотрим общую модель для определения этого показателя. Пусть P – текущая рыночная цена облигации с остаточным сроком обращения n лет и предполагаемыми денежными выплатами инвестору $C_1, C_2, ..., C_n$. Тогда обещанная доходность к погашению - это процентная ставка, определяемая из уравнения

$$P = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + ... + \frac{C_n}{(1+r)^n}$$

или
$$P=\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+r)^t}.$$

Сравниваем полученную ставку r с некоторой справедливой, по мнению инвестора, ставкой r^*.

Если $r > r^*$, то данная облигация недооценена.

Если $r < r^*$, то облигация переоценена на рынке.

Если $r = r^*$, то облигация оценена рынком справедливо

Внутренняя стоимость (базовая модель оценивания облигаций)

Метод, основанный на определении внутренней стоимости, предполагает, что внутренняя стоимость любого актива, в том числе облигации, определяется дисконтированными величинами платежей, которые инвестор ожидает получить в будущем за счет владения этим активом.

Определим внутреннюю стоимость облигации следующим образом:
$$V=\frac{C_1}{1+r^*}+\frac{C_2}{(1+r^*)^2}+\ldots+\frac{C_n}{(1+r^*)^n}$$
или
$$V=\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+r^*)^t}.$$

Данную модель называют **базовой моделью оценивания облигации** (The Basic Bond Valuation Model).

Чистая приведенная стоимость (NPV) облигации:
$$NVP=V-P=\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+r^*)^t}-P.$$
Если NVP > 0, то облигация недооценена рынком; если NVP < 0, то переоценена. Любая облигация, у которой $r > r^*$, будет иметь NVP > 0 и наоборот.

Для оценивания облигации путем капитализации дохода должны быть рассчитаны значения C_t, P, r^*. Величины платежей C_t известны, значение рыночной цены P тоже известно. Ставка r^* зависит от субъективной оценки инвестором как характеристик облигации, так и текущих условий на рынке. Таким образом, основной составляющей анализа облигаций является определение справедливого, по мнению данного инвестора, значения ставки r^*.

2.5. Формулы для оценивания облигаций

Для оценки внутренней стоимости облигаций различного вида удобно пользоваться формулами, полученными с учетом особенностей поступления платежей по данному виду облигаций.

Облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов

Выплаты по такой облигации можно рассматривать как вечную ренту. Определение внутренней стоимости сводится к определению современной величины такой ренты. Соответствующая формула имеет вид

$$V = \frac{gN}{r^*}.$$

Если доход по облигации выплачивается p раз в год, то

$$V = \frac{gN}{p[1+p^*)^{1/p} - 1]}.$$

Облигации без периодической выплаты процентов

По такой облигации проценты выплачиваются в момент погашения займа. Владелец получает сумму $S = N(1+g)^n$. Формула для расчета внутренней стоимости:

$$V = N\left(\frac{1+g}{1+r^*}\right)^n.$$

Облигации с нулевым купоном

Владельцу выплачивается только номинал или выкупная цена, проценты не выплачиваются. Расчетная формула:

$$V = N\left(\frac{1}{1+r^*}\right)^n.$$

Облигации с погашением в один срок и периодической выплатой дохода

Пусть проценты выплачиваются регулярно один раз в год, в конце года, и погашение производится по номиналу. Дисконтируя платежи, получим

$$V = N\nu^n + gNa_{n,r^*},$$

где $\nu = \dfrac{1}{1+r^*}$.

Если доход выплачивается p раз в год, а g - годовая купонная ставка, то

$$V = N\nu^n + gNa_{n,r^*}^{(p)}.$$

2.6. Оценка риска, связанного с вложениями в облигации

Выше были рассмотрены методы анализа облигаций, связанные с определением полной доходности и внутренней стоимости данных ценных бумаг. Однако только этих характеристик недостаточно для обоснованного принятия решения о вложениях в тот или иной вид облигаций. Это связано с тем, что инвестиции в любые ценные бумаги сопряжены с определенным риском. Выделяют два основных вида рисков:

1) кредитный;
2) рыночный.

Кредитный риск связан с возможностью отказа эмитентом от своих обязательств, что может повлечь либо полное прекращение выплаты текущих платежей и выкупной цены, либо нарушение оговоренных сроков выплат.

Рыночный риск связан с колебаниями рыночной процентной ставки, которые в значительной мере влияют на изменение внутренней стоимости облигации и, соответственно, рыночной цены облигации.

Рыночный и кредитный риски связаны со сроком облигации - чем больше срок, тем выше риск. Однако просто срок облигации, т. е. период времени от ее приобретения до погашения, не учитывает особенность распределения доходов во времени у разных видов облигаций - так называемый *профиль доходов*. Очевидно, при прочих равных условиях, риск вложений в облигации, по которым периодически выплачиваются проценты, меньше, чем риск вложений в облигации без выплаты процентов.

Рассмотрим два показатели (средний срок и среднюю продолжительность платежей), которые позволяют измерять риск с учетом профиля доходов.

2.7. Средний срок

Этот показатель учитывает сроки выплат всех видов облигаций в виде взвешенной среднеарифметической величины. В качестве весов берутся размеры платежей. Таким образом, чем больше сумма платежа, тем большее влияние на средний срок оказывает срок выплаты этого платежа.

Рассмотрим облигацию, у которой купонные платежи поступают один раз в год, в конце года. Пусть C_t – ожидаемый платеж по облигации, t - срок платежа, $t=1,...,n$. В поток платежей включаем и платеж по номиналу. При этих условиях средний срок определяется по формуле

$$T = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot C_t}{\sum_{t=1}^{n} C_t}.$$

Средний срок $T < n$, если купонная ставка $g > 0$.

Если моменты платежей произвольны, т.е. $t_1, t_2, ..., t_n$, то средний срок определяется по формуле:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot C_i}{\sum_{i=1}^{n} C_i}.$$

Для облигации без выплаты купонных платежей (напомним, что по такой облигации владелец получает только номинал в конце срока) $g = 0$ и $T = n$. Чем больше текущий доход от облигации относительно номинала, тем меньше средний срок T и, следовательно, меньше риск, связанный с инвестицией в данный вид облигации.

Для облигации с ежегодной выплатой процентов и погашением номинала в конце срока данная формула примет вид:

$$T = \frac{Ng\sum_{t=1}^{n} t + nN}{nNg + N},$$

поскольку в данном случае $C_t = gN$ при $t = 1, 2, ...n-1$; $C_n = gN + N$. Заметим, что $\sum_{t=1}^{n} t = \frac{n(n+1)}{2}$ – сумма членов арифметической прогрессии.

Учитывая это, формулу для среднего срока можно привести к виду

$$T = n\frac{g(n+1)/2+1}{gn+1}.$$

Аналогично можно получить формулу для случая, когда купонные платежи поступают несколько раз в год.

Вопросы для самопроверки

1. Назовите основные параметры, используемые для количественного анализа облигаций
2. Как классифицируются облигации по методу выплаты доходов и способов погашения займов.
3. Как определяется курс облигации?
4. Как определяется доходность облигации без выплаты процентов?
5. Как определяется доходность облигации без погашения с периодической выплатой процентов?
6. Как определяется доходность облигации с выплатой процентов в конце срока?
7. Как определяется доходность облигации с периодической выплатой процентов, погашаемой в конце срока?
8. Как определяется доходность портфеля облигаций?
9. Как определяется доходность облигации в общем случае?
10. Каким образом учитываются налоги при определении доходности облигации?
11. В чем состоит суть метода капитализации дохода при оценивании облигации?
12. Как оценить доходность к погашению облигации?
13. Запишите модель внутренней стоимости облигации
14. Запишите модель оценивания облигации с периодической выплатой процентов без погашения
15. Запишите модель оценивания облигации с выплатой процентов в момент по гашения
16. Запишите модель оценивания облигации с нулевым купоном
17. Запишите модель оценивания облигации с периодической выплатой процентов с погашением в один срок
18. Как оценить средний срок облигаций

19. Как оценить средний срок облигаций с периодическими выплатами купонных платежей?
20. Как оценить средний срок облигаций без периодических выплат купонных платежей?
21. Как оценить средний срок облигаций с периодическими выплатами купонных платежей и погашением номинала в конце срока?

Тема 3. Дюрация

3.1. Понятие дюрации

В общем виде дюрация определяется по формуле

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i C_i v^{t_i}}{\sum_{i=1}^{n} C_i v^{t_i}}, \tag{3.1}$$

где v - множитель дисконтирования по ставке доходности к погашению r, т.е. $v = \frac{1}{1+r}$; $C_1, C_2, ..., C_n$ – платежи по облигации через моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$. Срок гашения $T = t_n$. В отличие от среднего срока облигации при расчете показателя «дюрация» в качестве весов принимаются не платежи, а их дисконтированные величины. Следовательно, при определении дюрации учитывается фактор времени. Таким образом, дюрация – это средняя продолжительность платежей.

Поскольку в качестве ставки дисконтирования берется ставка доходности к погашению, то

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i v^{t_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}, \tag{3.2}$$

где P – текущая рыночная цена облигации.
С учетом этого соотношения будем иметь

$$D = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{C_i v^{t_i}}{P(r)} t_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{C_i(0)}{P(r)} t_i \right). \tag{3.3}$$

Здесь $C_{t_i}(0)$ – современная стоимость платежа, поступившего в момент времени t_i. Таким образом, весовыми коэффициентами в формуле (3.3) являются отношения современных стоимостей каждого платежа к рыночной цене $P(r)$, т.е. весовые коэффициенты $\frac{C_{t_i}(0)}{P(r)}$ выражают долю рыночной цены облигации, которая будет получена через t_i лет, $i = 1, 2, ..., n$. Сумма коэффициентов в формуле (3.3) равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i(0)}{P(r)} = \frac{1}{P(r)} \sum_{i=1}^{n} C_i(0) = \frac{1}{P(r)} \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} = 1. \tag{3.4}$$

Рассмотрим облигацию с периодической выплатой процентов один раз в конце года и погашаемую в конце срока. Для такой облигации дюрация определяется по формуле

$$D = \frac{Ng\sum_{i=1}^{n} t_i v^{t_i} + T \cdot N v^T}{P}. \qquad (3.5)$$

Рассмотренный показатель «дюрация» обладает следующим замечательным свойством. Как было отмечено в предыдущем разделе, стоимости облигаций с одинаковыми сроками погашения, но с различными купонными платежами, по–разному меняются при одном и том же изменении процентной ставки. Однако облигации, имеющие одинаковую дюрацию, реагируют на изменение ставки сходным образом. В связи с этим инвесторы при формировании портфеля облигаций стремятся включать в портфель облигации с одинаковой дюрацией. Этот метод называется ***иммунизацией*** портфеля и позволяет ограничить влияние будущих колебаний рыночной процентной ставки на ожидаемые доходы.

3.2. Связь дюрации с изменением цены облигации

Рассмотрим связь дюрации с относительным изменением цены облигации $\Delta P(r)/P(r)$ при изменении ставки доходности r.

Рыночная стоимость облигации определяется формулой (3.2).

Предположим, что ставка доходности изменилась на Δr Тогда стоимость облигации станет равной

$$P(r+\Delta r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r+\Delta r)^{t_i}}. \qquad (3.6)$$

$\Delta r > 0$ означает увеличение процентных ставок, $\Delta r < 0$ – уменьшение. Приращение стоимости $\Delta P(r) = P(r+\Delta r) - P(r)$ является положительной величиной при $\Delta r < 0$ и означает рост стоимости облигации при снижении процентных ставок на рынке. Отрицательное значение величины $\Delta P(r) = P(r+\Delta r) - P(r)$ означает падение цены облигации при увеличении процентных ставок на величину $\Delta r > 0$. Такой же смысл имеет знак относительного приращения стоимости облигации $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$. Относительное приращение стоимости облигации при изменении процентных ставок на величину Δr равно

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} = \frac{P(r+\Delta r) - P(r)}{P(r)}, \qquad (3.7)$$

где $P(r)$ и $P(r+\Delta r)$ рассчитываются по формулам (3.2) и (3.6). Рассмотрим, как можно оценить величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$, не используя точных вычислений по формуле (3.7).

Считая Δr достаточно малым по абсолютной величине, получим по формуле Тейлора

$$\Delta P(r) = P(r+\Delta r) - P(r) \approx P'(r)\cdot \Delta r$$

или с учетом членов разложения второго порядка

$$\Delta P(r) = P(r+\Delta r) - P(r) \approx P'(r)\cdot \Delta r + \frac{1}{2}P''(r)\cdot(\Delta r)^2 .$$

Члены более высокого порядка считаются незначительными при определении чувствительности цены облигации к изменению процентных ставок на рынке. Для относительных приращений цены облигации имеем

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx \frac{P'(r)}{P(r)}\Delta r \tag{3.8}$$

или

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx \frac{P'(r)}{P(r)}\Delta r + \frac{1}{2}\frac{P''(r)}{P(r)}(\Delta r)^2 . \tag{3.9}$$

Из (3.2) получим $P'(r) = -\dfrac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i \dfrac{C_i}{(1+r)^{t_i}} = -\dfrac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i C_i(0)$ и

$$P''(r) = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{C_i}{(1+r)^t} = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)C_i(0) ,$$

Введем число

$$C = \sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{C_i(0)}{P(r)} , \tag{3.10}$$

которое называется *показателем выпуклости облигации*.
Тогда с учетом формулы (3.3) и (3.10) получим

$$\frac{P'(r)}{P(r)} = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)} = -\frac{D}{1+r} ,$$

$$\frac{P''(r)}{P(r)} = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{C_i(0)}{P(r)} = \frac{C}{(1+r)^2} .$$

Подставим эти выражения в формулы (3.8) и (3.9) и для относительного изменения цены облигации получим выражения:

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D\frac{\Delta r}{1+r} \tag{3.11}$$

или

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D\frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2}C\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2 . \tag{3.12}$$

Проанализируем эти выражения. Так как чувствительность цены облигации к изменению процентных ставок характеризуется величиной $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$, то из (3.11) следует, что дюрация облигации оценивает чувствительность цены облигации к изменению временной структуры процентных ставок. Следовательно, дюрацию облигации можно рассматривать как меру процентного риска облигации – чем больше дюрация, тем больше процентный риск облигации.

Пусть $\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D\frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2}C\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2$ и показатель выпуклости C таков, что вторым слагаемым нельзя пренебречь по сравнению с первым. Следовательно, чем больше показатель выпуклости, тем хуже дюрация облигации оценивает величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$. И наоборот – чем меньше C, тем более верным является приближенное равенство (3.11). Следовательно, чем меньше C, тем лучше дюрация облигации оценивает чувствительность цены облигации к изменениям ставки доходности. Таким образом, показатель выпуклости облигации можно интерпретировать как показатель того, насколько точно дюрация облигации оценивает величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$.

Таким образом, в момент $t = 0$ дюрация облигации является мерой ее процентного риска.

Пример 3.1. Дана 6% - ная купонная облигация номиналом 1000 д.е., по которой обещают производить купонные выплаты каждые полгода в течение 3 лет. Безрисковая процентная ставка (ставка доходности) составлет 8% в год. Определить:

1. Дюрацию и показатель выпуклости облигации;

2. Относительное изменение цены облигации $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ при изменении процентных ставок на величину Δr = 0,01; 0,02; – 0,01 по формулам: (3.7) – точное значение, (3.11) – приближенное с учетом только дюрации облигации, (3.12) - приближенное с учетом дюрации и показателя выпуклости облигации.

Здесь значения параметров облигации следующие: N = 1000 д.е., g = 0,06, m = 2, T = 3 года, r = 0,04.

Результаты расчета дюрации и показателя выпуклости облигации приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1.

Номер платежа	Срок платежа t_i	Сумма платежа C_i	$C_i(0)$			

				$\frac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i \frac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i(t_i+1)\frac{C_i(0)}{P(r)}$
1	0,5	30	28,867513	0,030339	0,015170	0,022754
2	1	30	27,777778	0,029194	0,029194	0,058388
3	1,5	30	26,729179	0,028092	0,042138	0,105345
4	2	30	25,720165	0,027031	0,054063	0,162189
5	2,5	30	24,749240	0,026011	0,065028	0,227596
6	3	1030	817,647208	0,859332	2,577997	10,311990
		Сумма	951,491083	1,000000	2,783589	10,888262

Таким образом, цена облигации $P(0.08)$ = 951,491 д.е., ее дюрация D = 2,784 года, показатель выпуклости *C* = 10,888 лет^2.

2. Расчеты относительного изменения цены по формулам (3.7), (3.11), (3.12) для трех значений Δr приведены в таблице:

Δr		0,01	0,02	-0,01
$\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$	Формула (3.7)	-0,025314	-0,049736	0,026248
	Формула (3.11)	-0,025774	-0,051548	0,025774
	Формула (3.12)	-0,025307	-0,049681	0,026241

Отрицательные значения $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ соответствуют падению цены при увеличении процентных ставок, положительные – ее росту при снижении процентных ставок. Из расчетов видно, что чем меньше величина Δr по абсолютной величине, тем ближе значения, получаемые по формулам (3.11) и (3.12). Значит, тем меньше ошибка в оценке изменения цены только с помощью дюрации облигации.

3.3. Свойства дюрации и показателя выпуклости облигации

1. Дюрация облигации не превосходит срока до ее погашения T.

   Действительно,

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)} < \sum_{i=1}^{n} t_n \frac{C_i(0)}{P(r)} = t_n \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i(0)}{P(r)} = t_n = T \text{ ,}$$

   где $P(r)$ – рыночная стоимость облигации в момент t = 0, r – ее внутренняя доходность.
2. Дюрация облигации без выплаты процентов (чисто дисконтная облигация) равна сроку до ее погашения, т.е. $D = T$. Действительно, поскольку эта облигация имеет только один платеж $C_T = N$, то его современная величина

равна $C_T(0)=\dfrac{N}{(1+r)^T}$, где N – номинал облигации. Рыночная стоимость облигации равна $P(r)=\dfrac{N}{(1+r)^T}$. Тогда дюрация облигации равна

$$D=T\,\frac{\dfrac{N}{(1+r)^T}}{P(r)}=T\,.$$

3. Если облигация купонная, то чем больше внутренняя доходность облигации, тем меньше ее дюрация и показатель выпуклости.

Доказательство. Рассмотрим облигацию, по которой через $t_1,t_2,...,t_n$ лет от текущего момента времени $t=0$ $(0<t_1<t_2<...<t_n)$ обещают выплатить денежные суммы $C_1,C_2,...,C_n$ соответственно. Ставка доходности равна r. Покажем, что дюрация D и показатель выпуклости C облигации – это убывающие функции r. Согласно определению

$$D=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i \dfrac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}.$$

Рассмотрим производную

$$D'_r=\frac{1}{P(r)}\sum_{i=1}^{n}(-t_i^{\,2})\frac{C_i}{(1+r)^{t_i+1}}+\frac{1}{P^2(r)}\sum_{i=1}^{n}t_i\frac{C_i}{(1+r)^{t_i+1}}\sum_{i=1}^{n}t_i\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}=$$

$$=\frac{1}{(1+r)P(r)}\sum_{i=1}^{n}(-t_i^{\,2})\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}+\frac{1}{(1+r)P^2(r)}\sum_{i=1}^{n}t_i\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}\sum_{i=1}^{n}t_i\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}=$$

$$=-\frac{1}{(1+r)}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\,2}\frac{C_i(0)}{P(r)}+\frac{1}{(1+r)}\sum_{i=1}^{n}t_i\frac{C_i(0)}{P(r)}\sum_{i=1}^{n}t_i\frac{C_i(0)}{P(r)}=$$

$$=-\frac{1}{(1+r)}\left[\sum_{i=1}^{n}t_i^{\,2}\frac{C_i(0)}{P(r)}-\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\frac{C_i(0)}{P(r)}\right)^2\right]. \qquad (3.13)$$

Введем обозначение для весовых множителей $f_i = C_i(0)/P(r)$. Выше было показано, что $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$. Таким образом, каждое слагаемое в квадратных скобках (3.13) можно представить в форме $\left[\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,2} f_i - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i f_i\right)^2\right]$.

Докажем, что выражение в квадратных скобках положительно, а значит D'_r отрицательно. Введем обозначения: $\bar{t} = \sum_{i=1}^{n} t_i f_i$, $\overline{t^2} = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 f_i$ и рассмотрим следующее соотношение: $\sum_{i=1}^{n} f_i (t_i - \bar{t})^2 > 0$. Раскроем скобки, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i (t_i^2 - 2t_i \bar{t} + \bar{t}^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i t_i^2 - 2\bar{t} \sum_{i=1}^{n} f_i t_i + \bar{t}^2 \sum_{i=1}^{n} f_i = = \sum_{i=1}^{n} f_i t_i^2 - 2\bar{t}^2 + \bar{t}^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i t_i^2 - \bar{t}^2 > 0.$$

Таким образом, мы имеем следующий результат:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i (t_i - \bar{t})^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i t_i^2 - \bar{t}^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} f_i t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i t_i\right)^2\right] > 0.$$

Из этого следует, что производная $D'_r < 0$, следовательно, дюрация $D(r)$ является убывающей функцией аргумента r, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь показатель выпуклости облигации. Согласно определению, показатель выпуклости равен

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i (t_i + 1) \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}. \text{ Тогда } C = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,2} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}} = D + B,$$

где $D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}$ – дюрация облигации, $B = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,2} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}$. Следовательно, $C'_r = D'_r + B'_r$, где $D'_r < 0$. Покажем, что $B'_r < 0$.

$$B'_r = -\frac{1}{P(r)}\sum_{i=1}^{n} t_i^3 \frac{C_i}{(1+r)^{t_i+1}} + \frac{1}{P^2(r)}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \frac{C_i}{(1+r)^{t_i+1}}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i+1}}$$. Отсюда

$$B'_r = -\frac{1}{(1+r)}\left[\sum_{i=1}^{n} t_i^3 f_i - \sum_{i=1}^{n} t_i^2 f_i \sum_{i=1}^{n} t_i f_i\right]. \qquad (3.14)$$

Докажем методом индукции, что выражение в квадратных скобках положительно, а значит B'_r отрицательно.

Пусть n = 1. Тогда имеем: $t_1^3 f_1 - t_1^2 f_1 \cdot t_1 f_1 = t_1^3 f_1(1 - f_1) > 0$, так как $f_1 < 0$.

Пусть n = 2. Имеем:

$$(t_1^3 f_1 + t_2^3 f_2) - (t_1^2 f_1 + t_2^2 f_2)(t_1 f_1 + t_2 f_2) =$$
$$t_1^2 f_1 [t_1 - (t_1 f_1 + t_2 f_2)] + t_2^2 f_2 [t_2 - (t_1 f_1 + t_2 f_2)]$$

Учитывая, что $f_1 + f_2 = 1$, получим:

$-t_1^2 f_1 f_2 (t_2 - t_1) + t_2^2 f_2 f_1 (t_2 - t_1) = f_1 f_2 (t_2 - t_1)(t_2^2 - t_1^2) > 0$, так как $t_2 > t_1$.

Пусть $B'_r < 0$ для $n-1$ платежей, т.е. $\left[\sum_{i=1}^{n-1} t_i^3 f_i - \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 f_i \sum_{i=1}^{n-1} t_i f_i\right] > 0$. Покажем, что $B'_r < 0$ для n платежей.

Имеем следующее выражение в квадратных скобках:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} t_i^3 f_i - \sum_{i=1}^{n} t_i^2 f_i \sum_{i=1}^{n} t_i f_i\right] = \left[\sum_{i=1}^{n-1} t_i^3 f_i - \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 f_i \sum_{i=1}^{n-1} t_i f_i\right] + (t_n^3 f_n - t_n^2 f_n \cdot t_n f_n).$$

Выражение в круглых скобках равно: $(t_n^3 f_n - t_n^2 f_n \cdot t_n f_n) = t_n^3 f_n (1 - f_n) > 0$, так как $f_n < 0$. Следовательно, $\left[\sum_{i=1}^{n} t_i^3 f_i - \sum_{i=1}^{n} t_i^2 f_i \sum_{i=1}^{n} t_i f_i\right] > 0$, а значит $B'_r < 0$ что и т.д.

Таким образом, производная показателя выпуклости облигации $C'_r = D'_r + B'_r < 0$, т.е. $C(r)$ является убывающей функцией аргумента r, что и требовалось доказать.

4. Если все платежи по облигации отсрочить на t_0 лет, не изменяя ее внутренней доходности r, то дюрация облигации увеличится на t_0 лет, а показатель выпуклости – на $(t_0^2 + 2t_0 D + t_0)$ лет.

Доказательство. Дюрация исходной облигации $D=\sum_{i=1}^{n} t_i f_i$, где $f_i = \frac{1}{P(r)} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} = \frac{C_i(0)}{P(r)}$. Дюрация облигации с отсроченными платежами:

$$D_{t_0} = \sum_{i=1}^{n} (t_i + t_0) f_i = \sum_{i=1}^{n} t_i f_i + t_0 \sum_{i=1}^{n} f_i = D + t_0$$

Таким образом,

$$D_{t_0} = D + t_0 \tag{3.15}$$

Показатель выпуклости исходной облигации $C = \sum_{i=1}^{n} t_i (t_i + 1) f_i$.

Показатель выпуклости облигации с отсроченными платежами равен:

$$C = \sum_{i=1}^{n} (t_i + t_0)(t_i + t_0 + 1) f_i = \sum_{i=1}^{n} (t_i^2 + 2t_0 t_i + t_i + t_0 + t_0^0) f_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} t_i (t_i + 1) f_i + (t_0^2 + t_0) \sum_{i=1}^{n} f_i + 2t_0 \sum_{i=1}^{n} t_i f_i = C + t_0^2 + t_0 + 2t_0 D$$

Таким образом,

$$C_{t_0} = C + (t_0^2 + 2t_0 D + t_0) \tag{3.16}$$

Свойство доказано.

5. Если до погашения облигации остается больше одного купонного периода, то при заданном значении внутренней доходности r дюрация облигации и показатель выпуклости тем больше, чем меньше купонная ставка.

Доказательство. Покажем, что дюрация облигации и показатель выпуклости – убывающие функции купонной ставки g.

Цена купонной облигации, продающейся через время τ после купонной выплаты с доходностью к погашению r, когда до погашения остается n купонных выплат, равна (см. формулу (2.2)

$$P(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{gN/p}{(1+r)^{\frac{i}{p}-\tau}} + \frac{N}{(1+r)^{\frac{n}{p}-\tau}}.$$

Тогда формула (3.1) для дюрации имеет вид:

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{p}-\tau)\frac{gN/p}{(1+r)^{\frac{i}{p}-\tau}}+(\frac{n}{p}-\tau)\frac{N}{(1+r)^{\frac{n}{p}-\tau}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{gN/p}{(1+r)^{\frac{i}{p}-\tau}}+\frac{N}{(1+r)^{\frac{n}{p}-\tau}}} \; .$$

Сократим на множитель $(1+r)^{\tau}$, получим:

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{p}-\tau)\frac{gN/p}{(1+r)^{i/p}}+(\frac{n}{p}-\tau)\frac{N}{(1+r)^{n/p}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{gN/p}{(1+r)^{i/p}}+\frac{N}{(1+r)^{n/p}}} \qquad (3.17)$$

Используем обозначения

$$a_i=\frac{N/p}{(1+r)^{i/p}},\, b=\frac{N}{(1+r)^{n/p}}. \qquad (3.18)$$

Тогда

$$D=\frac{g\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{p}-\tau)a_i+(\frac{n}{p}-\tau)b}{g\sum_{i=1}^{n}a_i+b}.$$

Рассмотрим производную дюрации по купонной ставке g.

$$D'_g=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{p}-\tau)a_i\right)\left(g\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(g\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{p}-\tau)a_i+(\frac{n}{p}-\tau)b\right)}{\left(g\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)^2}=$$

$$= \frac{b\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{p}-\tau)a_i - b\sum_{i=1}^{n}a_i(\frac{n}{p}-\tau)}{\left(g\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)^2} = \frac{b\sum_{i=1}^{n}a_i(\frac{i}{p}-\frac{n}{p})}{\left(g\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)^2} < 0,$$

так как $i \le n$ и по условию $n > 1$. Таким образом, $D'_g < 0$.

Показатель выпуклости купонной облигации равен

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{p}-\tau)(\frac{i}{p}-\tau+1)\frac{gN/p}{(1+r)^{\frac{i}{p}-\tau}} + (\frac{n}{p}-\tau)(\frac{n}{p}-\tau+1)\frac{N}{(1+r)^{\frac{n}{p}-\tau}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{gN/p}{(1+r)^{\frac{i}{p}-\tau}} + \frac{N}{(1+r)^{\frac{n}{p}-\tau}}}.$$

Сократим на множитель $(1+r)^{\tau}$, получим:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{p}-\tau)(\frac{i}{p}-\tau+1)\frac{gN/p}{(1+r)^{i/p}} + (\frac{n}{p}-\tau)(\frac{n}{p}-\tau+1)\frac{N}{(1+r)^{n/p}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{gN/p}{(1+r)^{i/p}} + \frac{N}{(1+r)^{n/p}}} \tag{3.19}$$

Используем те же обозначения (3.18). Тогда

$$C = \frac{g\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{p}-\tau)(\frac{i}{p}-\tau+1)a_i + (\frac{n}{p}-\tau)(\frac{n}{p}-\tau+1)b}{g\sum_{i=1}^{n}a_i+b}.$$

Рассмотрим производную

$$C'_g = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{p}-\tau)(\frac{i}{p}-\tau+1)a_i\right)\left(g\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)}{\left(g\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)^2} -$$

$$-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(g\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{p}-\tau)(\frac{i}{p}-\tau+1)a_i+(\frac{n}{p}-\tau)(\frac{n}{p}-\tau+1)b\right)}{\left(g\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)^2}.$$

Отсюда

$$C_g'=\frac{b\sum_{i=1}^{n}a_i\left((\frac{i}{p}-\tau)(\frac{i}{p}-\tau+1)-(\frac{n}{p}-\tau)(\frac{n}{p}-\tau+1)\right)}{\left(g\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)^2}<0,$$ так как

$$(\frac{i}{p}-\tau)(\frac{i}{p}-\tau+1)-(\frac{n}{p}-\tau)(\frac{n}{p}-\tau+1)<0.$$

Таким образом, $C_g'<0$. Свойство доказано.

6. Зависимость дюрации облигации от срока до погашения при неизменных g и r, где g и r – купонная ставка и внутренняя доходность облигации соответственно, сформулируем в виде следующих утверждений. Пусть D_n – дюрация облигации, платежи по которой выплачиваются p раз в год и до погашения которой остается n купонных периодов. Тогда

   6а. Если $g \ge r$, то последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей.

   6б. Если $g<r$, то можно указать число n_0 такое, что для облигаций с числом периодов до погашения $n<n_0$ последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей.

   6в. $\lim_{n\to\infty} D_n \approx \dfrac{r+p}{rp}$.

   Доказательство провести самостоятельно.

3.4. Временная зависимость стоимости инвестиции в облигацию. Иммунизирующее свойство дюрации облигации

Проблема оценки облигации существует не только тогда, когда облигация покупается или продается на рынке, но и когда она находится у владельца. Для оценки стоимости облигации через t лет после покупки, где $t\in[0,T]$, T лет – срок до погашения облигации, используется понятие стоимости инвестиции в момент t.

Рассмотрим облигацию, по которой через $t_1, t_2, ..., t_n = T$ лет от текущего момента времени t = 0 обещают выплатить денежные суммы $C_1, C_2, ..., C_n$ соответственно.

Определение. Стоимость инвестиции в облигацию в момент $t \in [0, T]$ – это стоимость потока платежей $P(t)$ по облигации $C_1, C_2, ..., C_n$ в момент t.

Обозначим стоимость инвестиции в облигацию через t лет после покупки через $P(t)$. Как следует из определения, $P(t)$ – это сумма всех членов потока платежей по облигации, приведенных к моменту времени t. Пусть $t_1, t_2, ..., t_m, t_{m+1}, ..., t_n$ – моменты поступления платежей $C_1, C_2, ..., C_m, C_{m+1}, ..., C_n$ соответственно и $t_m \le t \le t_{m+1}$. Тогда

$$P(t) = \sum_{k=1}^{m} C_k (1+r)^{t-t_k} + \sum_{k=m+1}^{n} C_k \frac{1}{(1+r)^{t_k - t}}, \tag{3.20}$$

где $(1+r)^{t-t_k}$ - множитель наращения k – го платежа на временном отрезке $[t_k, t]$, $k = 1, 2, ..., m$; $\frac{1}{(1+r)^{t_k - t}}$ - дисконтный множитель k – го платежа на отрезке $[t, t_k]$, $k = m+1, ..., n$.

Таким образом, стоимость инвестиции в облигацию в момент t имеет две составляющие – результат реинвестирования поступивших до момента t платежей по облигации:

$$R_t = \sum_{k=1}^{m} C_k (1+r)^{t-t_k}$$

и рыночную цену облигации в момент t:

$$P_t = \sum_{k=m+1}^{n} C_k \frac{1}{(1+r)^{t_k - t}}.$$

Как следует из этих выражений, стоимость инвестиции в момент t = 0 - это рыночная цена покупки облигации, т.е. $P(0) = P$.

Таким образом, стоимость инвестиции в облигацию через t лет после покупки получают, исходя из следующих предположений:

1) все платежи, полученные от облигации до момента t, реинвестируются;

2) в момент t облигации данного выпуска имеются на рынке. Облигация, купленная t лет назад, может быть продана на рынке по существующей на этот момент времени рыночной цене P_t.

Тогда

$$P(t) = R_t + P_t . \tag{3.21}$$

Если в каждом периоде действует своя безрисковая ставка r_i, то

$$R_t = \sum_{k=1}^{m} C_k (1+r_k)^{t-t_k}, \; P_t = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{C_k}{(1+r_k)^{t_k-t}}.$$

Пример 3.2. Дана облигация со следующим потоком платежей на момент покупки (t = 0):

Срок, годы	1	2	3	4	5	6
Платеж, д.е.	20	20	20	15	15	135

Определить стоимость инвестиции в эту облигацию через 3,5 года после покупки для безрисковых процентных ставок, приведенных в таблице:

Ставка, %	17	16	15	15	15,5	16
Срок инвестирования, годы	2,5	1,5	0,5	0,5	1,5	2,5
Момент инвестирования	1	2	3	4	5	6

Результат реинвестирования поступивших до момента t = 3,5 платежей по облигации составляет

R_t = 20(1 + 0,17)^{2,5} + 20(1 + 0,16)^{1,5} + 20(1 + 0,15)^{0,5} = 76,0486 (д.е.)

Рыночная стоимость облигации через 3,5 года после ее покупки будет

$$P_t = \frac{15}{(1+0{,}15)^{0{,}5}} + \frac{15}{(1+0{,}155)^{1{,}5}} + \frac{135}{(1+0{,}16)^{2{,}5}} = 119{,}2231 \text{(д.е.)}$$

Таким образом, стоимость инвестиции в облигацию через 3,5 года после ее покупки составит 76,0486 + 119,2231 = 195,2717 (д.е.).

Теперь предположим, что в момент покупки облигации t = 0 временная структура процентных ставок такова, что безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Рассмотрим стоимость инвестиции в облигацию через t лет после покупки для двух случаев:

1) временная структура процентных ставок остается неизменной до погашения облигации;

2) сразу после покупки облигации безрисковые процентные ставки для всех сроков мгновенно изменились на одну и ту же величину и стали равными $\tilde{r}$, а затем уже не менялись.

Стоимость инвестиции в облигацию в момент t в первом случае называют **планируемой** и обозначают через $P(r,t)$, во втором случае – **фактической** и обозначают через $P(\bar{r},t)$.

3.5. Свойства планируемой и фактической стоимостей инвестиции

1. $P(r,t)$ и $P(\bar{r},t)$ – непрерывные возрастающие функции времени:

$$P(r,t) = P(r)(1+r)^t, \tag{3.22}$$

$$P(\bar{r},t) = P(\bar{r})(1+\bar{r})^t. \tag{3.23}$$

где

$$P(r) = \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + ... + \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}} \tag{3.24}$$

– рыночная цена покупки облигации в момент t = 0, соответствующая существующей на этот момент времени временной структуре процентных ставок

Действительно, согласно (3.21),

$$P(r,t) = R_t + P_t = \sum_{k=1}^{m} C_k (1+r)^{t-t_k} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^{t_k - t}} =$$

$$= (1+r)^t \sum_{k=1}^{m} C_k (1+r)^{-t_k} + (1+r)^t \sum_{k=m+1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^{t_k}} =$$

$$= (1+r)^t \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^{t_k}} = P(r)(1+r)^t \text{ что и т.д.}$$

Аналогично доказывается равенство (3.23).

Формулы (3.22) и (3.23) – это показательные функции времени, основания которых больше единицы. Из элементарной математики известно, что такая функция является непрерывной и возрастающей.

2. Существует и притом единственный момент времени $t*$, когда фактическая стоимость инвестиции равна планируемой.

Доказательство. Пусть $\bar{r} > r$. Рассмотрим момент t = 0. Тогда $P(\bar{r}) < P(r)$ (см. формулу (3.24) и рис. 3.1.), или

$$P(\bar{r},0) < P(r,0). \tag{3.25}$$

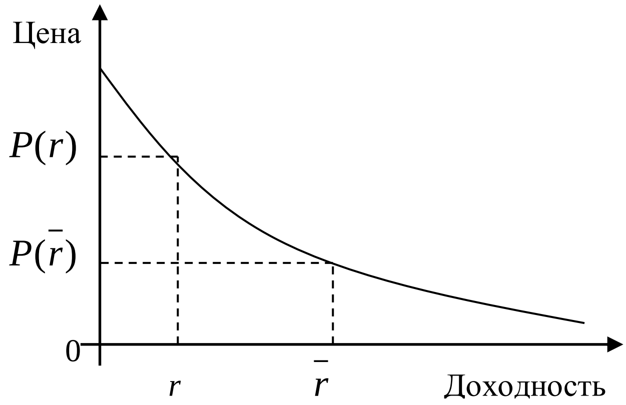

Рис. 3.1.

Рассмотрим теперь момент погашения облигации $t = t_n$. Тогда

$$P(r, t_n) = \sum_{i=1}^{n} C_i (1+r)^{t_n - t_i},$$

$$P(\bar{r}, t_n) = \sum_{i=1}^{n} C_i (1+\bar{r})^{t_n - t_i}.$$

Так как $\bar{r} > r$, то

$$P(\bar{r}, t_n) > P(r, t_n). \tag{3.26}$$

Из неравенств (3.25) и (3.26) следует, что существует такой момент времени t^*, когда $P(\bar{r}, t_n^*) = P(r, t_n^*)$. Можно показать, что момент t^* является единственным (см. рис.3.2.). Значение t^* найдем из равенства $P(\bar{r})(1+\bar{r})^{t^*} = P(r)(1+r)^{t^*}$.

Отсюда

$$t^* = \frac{\ln\left(\dfrac{P(r)}{P(\bar{r})}\right)}{\ln\left(\dfrac{1+\bar{r}}{1+r}\right)}. \tag{3.27}$$

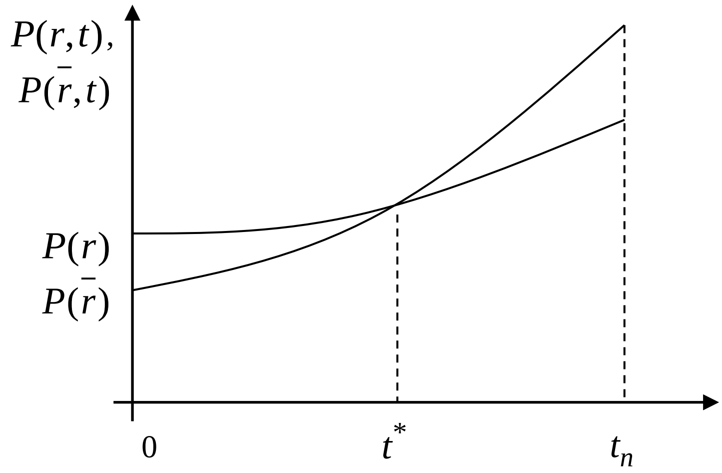

Рис. 3.2.

Случай, когда $\bar{r} < r$, доказывается аналогично

3. Теорема (об иммунизирующем свойстве дюрации облигации).

Пусть $D = D(r)$ – дюрация облигации в момент t = 0, когда безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Тогда в момент времени, равный дюрации облигации, $t = D$, фактическая стоимость инвестиции в облигацию не меньше планируемой, т.е.

$$P(\bar{r}, D) \geq P(r, D) \qquad (3.28)$$

для любых значений $\bar{r}$.

Доказательство. Если после покупки облигации временная структура процентных ставок не изменилась, то $\bar{r} = r$ и $P(\bar{r}, D) = P(r, D)$.

Если сразу после покупки облигации безрисковые процентные ставки изменились и стали равными $\bar{r}$, то в момент $t = D$ фактическая стоимость инвестиции в облигацию $P(\bar{r}, D)$ согласно (3.23) равна:

$$P(\bar{r}, D) = P(\bar{r})(1+\bar{r})^D .$$

Продифференцируем это выражение по $\bar{r}$:

$$\left(P(\bar{r}, D)\right)'_{\bar{r}} = P'(\bar{r})(1+\bar{r})^D + D \cdot P(\bar{r})(1+\bar{r})^{D-1} .$$

Так как $\dfrac{P'(\bar{r})}{P(\bar{r})} = -D(\bar{r})\dfrac{1}{1+\bar{r}}$ (см. параграф п. 3.2), то

$$\left(P(\bar{r},D)\right)'_{\bar{r}} = P(\bar{r})(1+\bar{r})^{D-1}\left(D-D(\bar{r})\right).$$

Пусть $\bar{r} > r$. Тогда по свойству 3 дюрации облигации $D(\bar{r}) < D(r) = D$.

Отсюда $\left(P(\bar{r},D)\right)'_{\bar{r}} > 0$. Значит, $P(\bar{r},D)$ – возрастающая функция $\bar{r}$ при $\bar{r} > r$. Если $\bar{r} < r$, то $D(\bar{r}) > D(r) = D$. Тогда $\left(P(\bar{r},D)\right)'_{\bar{r}} < 0$. Значит, $P(\bar{r},D)$ – убывающая функция $\bar{r}$ при $\bar{r} < r$. Таким образом, в т. $\bar{r} = r$ функция $P(\bar{r},D)$ достигает минимума. Следовательно,

$$P(\bar{r},D) > P(r,D). \tag{3.29}$$

Таким образом, при любых значениях $\bar{r}$ выполняется неравенство (3.28). Заметим, что при $\bar{r} \neq r$ неравенство является строгим, т.е. имеет вид (3.29). Теорема доказана.

На основании доказанной теоремы можно сформулировать **иммунизирующее свойство дюрации** облигации. Пусть в момент инвестирования t = 0 безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы. Тогда в момент времени, равный дюрации облигации, инвестиция в облигацию иммунизирована (защищена) против изменений безрисковых процентных ставок сразу после t = 0 на одну и ту же величину (или до момента t_1 – первого платежа по облигации, в чем несложно убедиться).

Следствие. Пусть $D = D(r)$ – дюрация облигации в момент t = 0, когда безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r, а r_1 и r_2 – безрисковые процентные ставки сразу после t = 0. Тогда если $r_1 < r < r_2$, то

$$t^*(r_2) < D < t^*(r_1). \tag{3.30}$$

Доказательство. Рассмотрим $r_1 < r$. Согласно теореме

$$P(r_1,D) > P(r,D).$$

Так как $P(r_1,D) = P(r_1)(1+r_1)^D$ и $P(r,D) = P(r)(1+r)^D$, то

$$P(r_1)(1+r_1)^D > P(r)(1+r)^D.$$

Отсюда

$$\left(\frac{1+r_1}{1+r}\right)^D > \frac{P(r)}{P(r_1)},$$

$$D \cdot \ln\left(\frac{1+r_1}{1+r}\right) > \ln\left(\frac{P(r)}{P(r_1)}\right).$$

Так как $r_1 < r$, то $P(r_1) > P(r)$, $(1+r) > (1+r_1)$ и получим,

что $\ln\left(\frac{1+r_1}{1+r}\right) < 0$, $\ln\left(\frac{P(r)}{P(r_1)}\right) < 0$.

Тогда

$$D < \frac{\ln\left(P(r)/P(r_1)\right)}{\ln\left((1+r_1)/(1+r)\right)} = t^*(r_1).$$

Аналогично доказывается вторая часть неравенства (3.30).

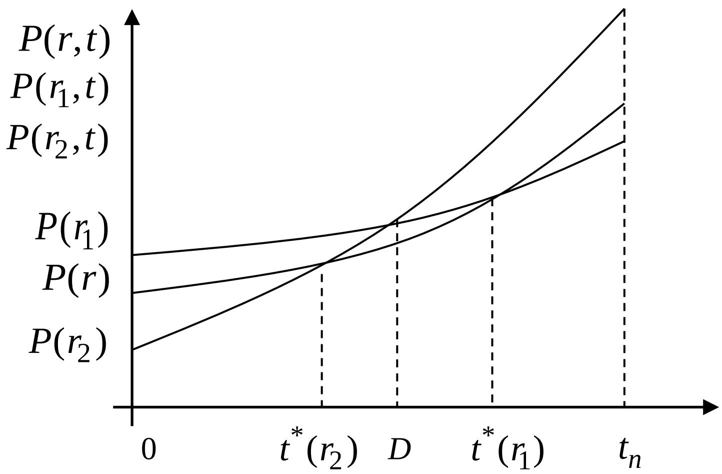

Рис. 3.3

Пример 3.3. Дана 10% - ная купонная облигация номиналом 100 д.е., по которой ежегодно обещают производить купонные выплаты в течение трех лет. Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 10% годовых. Сразу после покупки облигации процентные ставки а) снизились до 9% годовых; б) увеличились до 11 % годовых. Найти:

1) планируемую и фактическую стоимость инвестиции в облигацию в момент времени, равный дюрации облигации;

2) моменты времени, когда планируемая и фактическая стоимости инвестиции совпадают.

В таблице приведены расчеты цены $P(r)$ и дюрации облигации $D = D(r)$ на момент покупки облигации, а также величин $P(r_1)$ и $P(r_2)$, где r = 10% годовых, r_1 = 9%, r_2 = 11% годовых.

Номер платежа	Срок платежа t_i	Сумма платежа C_i	$C_i(0)$			$\frac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i \frac{C_i(0)}{P(r)}$
			r = 0,1	r_1 = 0,09	r_2 = 0,11		
1	1	10	9,090	9,174	9,009	0,0909	0,0901
2	2	10	8,264	8,416	8,116	0,0826	0,16529
3	3	110	82,644	84,940	80,431	0,826	2,47934
		Сумма	100,000	102,531	97,556	1,000	2,73554

Таким образом, дюрация облигации в момент ее покупки D = 2,735 лет. Цена покупки $P(0.1)$ = 100,00 д.е. Величины $P(0.09)$ = 102,531 д.е. и $P(0.11)$ = 97,556 д.е. – оценки облигации на момент t = 0, соответствующие новой временной структуре процентных ставок после t = 0. Тогда планируемая стоимость инвестиции в облигацию на момент времени $t = D$ равна:

$$P(0.1, D) = P(0.1)(1 + 0.1)^D = 129{,}787.$$

Фактические стоимости

$$P(0.09, D) = P(0.09)(1 + 0.09)^D = 129{,}789.$$

$$P(0.11, D) = P(0.11)(1 + 0.11)^D = 129{,}789.$$

В обоих случаях фактическая стоимость инвестиции в момент $t = D$ больше планируемой. В первом случае в момент $t = D$ снижение ставки реинвестирования компенсировано ростом рыночной цены облигации в момент $t = 0$ по сравнению с планируемой. Во втором случае снижение рыночной цены в момент $t = 0$ вследствие роста процентных ставок компенсировано возросшей ставкой реинвестирования по сравнению с планируемой.

2) Моменты времени, когда планируемая и фактическая стоимости инвестиции совпадают, равны соответственно

$$t^*(0.09) = \frac{\ln\left(\dfrac{P(0,1)}{P(0,09)}\right)}{\ln\left(\dfrac{1,09}{1,1}\right)} = 2,737$$

$$t^*(0.11) = \frac{\ln\left(\dfrac{P(0,1)}{P(0,11)}\right)}{\ln\left(\dfrac{1,11}{1,1}\right)} = 2,733.$$

Таким образом, $t^*(0.11) < D < t^*(0.09)$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение дюрации облигации и запишите формулу ее вычисления.
2. Как связана дюрация с изменением цены облигации? Получите формулу.
3. Что такое показатель выпуклости облигации и как он влияет на изменение цены облигации?
4. Первое свойство дюрации облигации
5. Второе свойство дюрации облигации
6. Зависимость дюрации и показателя выпуклости от внутренней доходности облигации.
7. Свойство дюрации и показателя выпуклости облигации с отсроченными платежами.
8. Зависимость дюрации и показателя выпуклости облигации от купонной ставки.
9. Зависимость дюрации облигации от срока до погашения.
10. Дайте понятие стоимости инвестиции в облигацию. Каким образом она определяется?
11. Как определяется планируемая и фактическая стоимость инвестиции в облигацию?
12. Первое свойство планируемой и фактической стоимости инвестиции в облигацию.
13. Второе свойство планируемой и фактической стоимости инвестиции в облигацию.
14. Сформулируйте и докажите теорему об иммунизирующем свойстве дюрации облигации.
15. Следствие теоремы об иммунизирующем свойстве дюрации облигации.

Тема 4. Инвестиции в портфель облигаций

4.1. Дюрация и показатель выпуклости портфеля

Рассмотрим портфель из облигаций, не имеющих кредитного риска. Риск неплатежа от портфеля отсутствует. Однако в условиях рынка остается процентный риск. Изменение процентных ставок на рынке вызывает изменение рыночных цен облигаций, входящих в портфель, а следовательно, изменение стоимости всего портфеля.

Предположим, на рынке имеются облигации без кредитного риска m видов, цены которых в момент $t = 0$ равны соответственно $P_1, P_2, ..., P_m$. Предположим также, что на рынке можно купить любое количество облигаций. Пусть V_j – сумма, затраченная инвестором на приобретение облигаций j – го вида, $j = 1, 2,…, m$. Тогда в момент $t = 0$ сформирован портфель облигаций $\Pi(V_1, V_2, ..., V_m)$, стоимость которого равна $V = \sum_{j=1}^{m} V_j$. Величины $k_j = \frac{V_j}{P_j}$ и $x_j = \frac{V_j}{V}$ – соответственно количество и доля облигаций j – го вида в портфеле, $j = 1, ..., m$. Следовательно, $\sum_{j=1}^{m} x_j = 1$. Пусть через $t_1, t_2, ..., t_n$ лет от момента $t = 0$ производится платеж хотя бы по одному виду облигаций, входящих в портфель. Обозначим через C_i^j платеж по облигации j – го вида в момент t_i, где $i = 1, 2, …, n$. Тогда $R_1, R_2, ..., R_n$ в моменты $t_1, t_2, ..., t_n$ – ожидаемый поток платежей от портфеля, где

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{V_j}{P_j} C_i^j, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (4.1)$$

Таким образом, портфель $\Pi(V_1, V_2, ..., V_m)$ в момент $t = 0$ можно рассматривать как одну облигацию без кредитного риска стоимостью V с потоком платежей $R_1, R_2, ..., R_n$ в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$. По своим инвестиционным качествам портфель эквивалентен такой облигации.

Пример 4.1**.** Сформирован портфель Π(2000, 3000, 2000) из облигаций трех видов, потоки платежей по которым указаны в таблице. Определить поток платежей от этого портфеля.

Облигация	Платеж, д.е.				
	Срок, годы				
	0	0,5	1	1,5	2
B_1	- 850				1035
B_2	- 290	10	10	330	

B3	- 990		90		1100

Согласно условию, P_1 = 850, P_2 = 290, P_3 = 990; V_1 = 2000, V_2 = 3000, V_3 = 2000. Члены потока платежей от портфеля рассчитаем по (3.1):

$R_1 = \frac{3000}{290} \cdot 10$ = 103,448 в момент t_1 = 0,5.

$R_2 = \frac{3000}{290} \cdot 10 + \frac{2000}{990} \cdot 90$ = 285,266 в момент t_2 = 1.

$R_3 = \frac{3000}{290} \cdot 330$ = 3413,793 в момент t_3 = 1,5.

$R_4 = \frac{2000}{850} \cdot 1035 + \frac{2000}{990} \cdot 1100$ = 4657,516 в момент t_4 = 2.

Таким образом, поток платежей от портфеля Π(2000, 3000, 2000) имеет вид, показанный в таблице:

Срок, годы	0	0,5	1	1,5	2
Платеж, д.е.	- 7000	103,448	285,266	3413,793	4657,516

Определение. Дюрацией D_p и показателем выпуклости C_p портфеля облигаций $\Pi(V_1, V_2, ..., V_m)$ называется дюрация и показатель выпуклости облигации, эквивалентной портфелю.

Тогда

$$D_P = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}}, \tag{4.4}$$

$$C_P = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i (t_i + 1) \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}}, \tag{4.5}$$

где r – безрисковая (совпадает с внутренней нормой доходности) процентная ставка в момент t = 0.

4.2. Меры доходности портфеля

Для вычисления доходности портфеля $\Pi(V_1, V_2, ..., V_m)$ приняты две характеристики:

1) средневзвешенная доходность портфеля r_{cp};

2) внутренняя ставка доходности r_p.

Средневзвешенная доходность портфеля определяется путем усреднения доходностей по всем облигациям в портфеле:

$$r_{cp} = \sum_{j=1}^{m} x_j r_j . \tag{4.2}$$

Здесь $x_j = \dfrac{V_j}{V}$ – доля облигаций j – го вида в портфеле, r_j – их внутренняя доходность. Недостатком этой характеристики является то, что она несет мало информации о потенциальной доходности портфеля.

Внутренняя ставка доходности r_p – это процентная ставка, по которой приведенная стоимость потока платежей по портфелю $R_1, R_2, ..., R_n$ в моменты $t_1, t_2, ..., t_n$ равна его рыночной цене V в момент t = 0:

$$V = \frac{R_1}{(1+r_P)^{t_1}} + ... + \frac{R_n}{(1+r_P)^{t_n}} . \quad (4.3)$$

Внутренняя ставка доходности портфеля, хотя и лучше, чем средневзвешенная доходность портфеля, но имеет те же недостатки, что и внутренняя доходность облигации. Она предполагает, что платежи по портфелю реинвестируются по ставке, равной r_p, а сам портфель держится до погашения. Например, если одна из облигаций в портфеле погашается через 30 лет, то предполагается, что портфель держится 30 лет и все промежуточные платежи (купонные выплаты и погашаемые номиналы) реинвестируются.

Пример 4.2. Для портфеля облигаций Π(2000, 3000, 2000) из примера 3.1 рассчитать r_{cp}. и r_p, если внутренние доходности облигаций B$_1$, B$_2$, B$_3$ равны соответственно: r_1 = 0,10347; r_2 = 0,13798; r_3 = 0,10053.

Решение. Согласно (3.2):

$$r_{cp} = \frac{2000}{7000} r_1 + \frac{3000}{7000} r_2 + \frac{2000}{7000} r_3 = 0.1174 .$$

Внутреннюю ставку доходности r_p найдем из уравнения:

$$7000 = \frac{103,448}{(1+r_P)^{0,5}} + \frac{285,266}{(1+r_P)} + \frac{3413,793}{(1+r_P)^{1,5}} + \frac{4657,516}{(1+r_P)^2} .$$

С помощью пакета Mathcad получим r_p = 0,115.

4.3. Свойства дюрации и показателя выпуклости портфеля облигаций

1. Для дюрации и показателя выпуклости портфеля облигаций $\Pi(V_1, V_2, ..., V_m)$ справедливы равенства:

$$D_P = \sum_{j=1}^{m} x_j D_j , \quad (4.6)$$

$$C_P = \sum_{j=1}^{m} x_j C_j , \quad (4.7)$$

где $x_j = \dfrac{V_j}{V}$ – доля облигаций j – го вида в портфеле, D_j и C_j – дюрация и показатель выпуклости облигаций j – го вида.

Доказательство. Согласно определению,

$$D_P = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{(1+r)^{t_i}} \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{V_j}{P_j} C_i^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{V_j}{V} \left(\frac{1}{P_j} \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i^j}{(1+r)^{t_i}} \right) = \sum_{j=1}^{m} x_j D_j \ ,$$

где использовано выражение (4.1) для членов потока платежей от портфеля. Аналогично для показателя выпуклости:

$$C_P = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i (t_i + 1) \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i (t_i + 1)}{(1+r)^{t_i}} \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{V_j}{P_j} C_i^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{V_j}{V} \left(\frac{1}{P_j} \sum_{i=1}^{n} t_i (t_i + 1) \frac{C_i^j}{(1+r)^{t_i}} \right) = \sum_{j=1}^{m} x_j C_j \ .$$

2. Если D_p и C_p – дюрация и показатель выпуклости портфеля $\Pi(V_1, V_2, ..., V_m)$, то

$$\min_j \{D_j\} \le D_P \le \max_j \{D_j\},$$

$$\min_j \{C_j\} \le C_P \le \max_j \{C_j\}.$$

3. Если число D таково, что $\min_j \{D_j\} \le D \le \max_j \{D_j\}$, то всегда можно сформировать портфель, дюрация которого равна D (портфель с заранее заданным значением дюрации).

Доказательство. Составим систему:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j D_j = D \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1 \end{cases} \qquad (4.8)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Покажем, что эта система разрешима. Если $D = D_k$, где $k \in \{1, 2, ..., m\}$, то решением системы является следующий набор значений:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, ..., x_k = 1,\ x_{k+1} = 0, ..., x_m = 0.$$

Если же $D_k < D < D_{k+1}$, где $k \in \{1, 2, ..., m\}$, то решением системы является набор значений:

$$x_1 = 0, \dots, x_k = \frac{D_{k+1} - D}{D_{k+1} - D_k},\ x_{k+1} = \frac{D - D_k}{D_{k+1} - D_k},\ ...,\ x_m = 0.$$

4. Пусть в момент формирования портфеля t = 0 безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Если сразу после формирования портфеля процентные ставки для всех сроков мгновенно изменились на одну и ту

же величину Δr, то относительное изменение цены портфеля приблизительно равно:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -D_P \frac{\Delta r}{1+r} \tag{4.9}$$

или

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -D_P \frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2} C_P \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right)^2 . \tag{4.10}$$

Возможность оценить изменение цены портфеля по формулам (4.9) и (4.10) следует из того, что портфель можно рассматривать как одну облигацию, дюрация которой равна D_p, а показатель выпуклости C_p (см. формулы (3.11), (3.12) для облигации).

Из равенств (4.9) и (4.10) следует, что дюрацию портфеля облигаций D_p можно рассматривать как меру процентного риска портфеля, а показатель выпуклости C_p показывает, насколько точно дюрация оценивает этот риск. Чем меньше C_p, тем лучше D_p оценивает чувствительность цены портфеля к изменению рыночных процентных ставок. В связи с этим можно сформулировать следующую задачу: сформировать портфель облигаций с заданным значением дюрации D и наименьшим показателем выпуклости. Эта задача сводится к следующей задаче линейного программирования:

$$f = \sum_{j=1}^{m} x_j C_j \to \min_{x_j}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} x_j D_j = D \\ \sum\limits_{j=1}^{m} x_j = 1 \end{cases} \tag{4.11}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,...,m.$$

5. Если заданное значение дюрации портфеля D удовлетворяет условию $\min\limits_j \left\{ D_j \right\} \le D \le \max\limits_j \left\{ D_j \right\}$, то задача линейного программирования (4.11) разрешима.

Действительно, для разрешимости задачи линейного программирования необходимо и достаточно, чтобы множество допустимых решений задачи было не пусто, а целевая функция ограничена снизу на множестве допустимых решений задачи. Согласно свойству 3, если число D удовлетворяет указанному двойному неравенству, то множество допустимых решений задачи (4.11) не пусто. Так как $f = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j C_j \ge 0$, то целевая функция ограничена снизу на множестве допустимых решений задачи. Свойство доказано.

Пусть T лет – срок, на который сформирован портфель облигаций (инвестиционный горизонт). Для оценки портфеля через t лет после покупки, где $t \in [0,T]$, используем понятие стоимости инвестиции в портфель в момент *t.*

Если в момент формирования портфеля t = 0 безрисковая процентная ставка равна r и после покупки портфеля остается неизменной до окончания срока T, то $V(r,t)$ – планируемая стоимость инвестиции в портфель в момент $t \in [0,T]$. Если сразу после формирования портфеля процентная ставка изменилась и осталась на новом уровне $\bar{r}$ в течение всего инвестиционного периода, то $V(\bar{r},t)$ – фактическая стоимость инвестиции в портфель в момент $t \in [0,T]$. Стоимости $V(r,t)$ и $V(\bar{r},t)$ рассчитываются, исходя из тех же принципов, что и в случае облигации. Тогда

$$V(r,t) = \sum_{i;t_i \le t} R_i(1+r)^{t-t_i} + \sum_{i;t_i > t} \frac{R_i}{(1+r)^{t_i - t}}, \qquad (4.12)$$

$$V(\bar{r},t) = \sum_{i;t_i \le t} R_i(1+\bar{r})^{t-t_i} + \sum_{i;t_i > t} \frac{R_i}{(1+\bar{r})^{t_i - t}}, \qquad (4.13)$$

где $R_1, R_2, ..., R_n$ в моменты $t_1, t_2, ..., t_n$ – ожидаемый поток платежей от портфеля. Таким образом,

$$V(r,t) = R_t(r) + P_t(r),$$

$$V(\bar{r},t) = R_t(\bar{r}) + P_t(\bar{r}),$$

где $R_t(r)$ и $R_t(\bar{r})$ – результат реинвестирования к моменту t доходов от портфеля под ставку r или $\tilde{r}$ соответственно; $P_t(r)$ и $P_t(\bar{r})$ – планируемая и фактическая рыночная стоимость портфеля в момент t.

$V(r,t)$ и $V(\bar{r},t)$ обладают теми же свойствами, что и планируемая и фактическая стоимости инвестиции в облигацию. Тогда

$$V(r,t) = V(r)(1+r)^t, \qquad (4.14)$$

$$V(\bar{r},t) = V(\bar{r})(1+\bar{r})^t. \qquad (4.15)$$

где $V(r) = V$ – цена покупки портфеля, $V(\tilde{r})$ – оценка портфеля на момент $t=0$, соответствующая новой процентной ставке сразу после $t=0$.

4.4. Иммунизирующее свойство дюрации портфеля

Пусть $D_p = D_p(r)$ – дюрация портфеля облигаций в момент $t=0$, когда безрисковая процентная ставка для всех сроков одинакова и равна r. Тогда в момент времени, равный дюрации портфеля, $t = D_p$, фактическая стоимость инвестиции в портфель не меньше планируемой, т.е.

$$V(\bar{r}, D_p) \ge V(r, D_p) \qquad (4.16)$$

для любых значений $\bar{r}$.

Действительно, если портфель $\Pi(V_1, V_2, ..., V_m)$ эквивалентен одной облигации без кредитного риска, то иммунизирующее свойство дюрации облигации (см. п. 7.5., теорема об иммунизирующем свойстве облигации) переходит в иммунизирующее свойство дюрации портфеля.

На этом свойстве дюрации портфеля облигаций основан принцип формирования иммунизированного портфеля. В 1952 году Ф. Реддингтон, один из основателей стратегии иммунизации, впервые ввел понятие иммунизации портфеля облигаций и сформулировал условие иммунизации: для защиты стоимости портфеля от изменений рыночной процентной ставки необходимо, чтобы дюрация портфеля совпадала с его инвестиционным горизонтом. Таким образом, чтобы сформировать иммунизированный портфель с инвестиционным горизонтом T лет, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j D_j = T \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1 \end{cases} \qquad (4.17)$$

$$x_j \ge 0, \;\; j = 1, 2, ..., m.$$

Если срок портфеля T удовлетворяет неравенству $\min_j \{D_j\} \le T \le \max_j \{D_j\}$, то по свойству 3 дюрации портфеля система (4.17) разрешима. Тогда дюрация портфеля, сформированного в соответствии с решением системы (4.17), совпадает с его инвестиционным горизонтом, $D_p = T$, и по свойству 6

$$V(\bar{r}, T) \ge V(r, T). \qquad (4.18)$$

Пример 4.3. Портфель формируется из купонных облигаций двух видов, характеристики которых на момент покупки портфеля (t = 0) приведены в таблице:

Облигация	N, д.е. (номинал)	g купонная ставка	p Кол-во купон. выплат в год	T, годы
A_1	100	5%	2	2
A_2	100	8%	1	2

В облигации первого вида инвестировано 4000 д.е., в облигации второго вида – 6000 д.е. В момент покупки портфеля безрисковые процентные ставки для инвестиций на все сроки одинаковы и равны 9% годовых. Сразу после формирования портфеля процентные ставки снизились до 8% годовых, и затем уже не изменялись. Определить:

1) поток платежей от портфеля, его дюрацию и показатель выпуклости;

2) относительное изменение цены портфеля при изменении процентных ставок на рынке с 9 до 8% годовых;

3) планируемую и фактическую стоимости инвестиции в портфель в момент времени $t=2$ года (момент погашения всех облигаций из портфеля);

4) планируемую и фактическую стоимости инвестиции в портфель в момент времени, равный дюрации портфеля ($t=D_p$).

Решение.

1) Рассчитаем характеристики облигаций, из которых формируется портфель. В момент формирования портфеля процентные ставки для всех сроков *r* = 0,09 годовых.

Расчет цен облигаций, их дюраций и показателей выпуклости в момент $t=0$ приведен в таблицах:

Облигация A_1.

Номер платежа	Срок платежа t_i	Сумма платежа C_i	$C_i(0)$	$\dfrac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i\dfrac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i(t_i+1)\dfrac{C_i(0)}{P(r)}$
1	0,5	2,5	2,3946	0,02570	0,01285	0,01928
2	1	2,5	2,2936	0,02462	0,02462	0,04924
3	1,5	2,5	2,1968	0,02358	0,03537	0,08843
4	2	102,5	86,2722	0,92609	1,85219	5,55656
		Сумма	93,15719	1,00000	1,925032	5,71351

Облигация A_2.

Номер платежа	Срок платежа t_i	Сумма платежа C_i	$C_i(0)$	$\dfrac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i\dfrac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i(t_i+1)\dfrac{C_i(0)}{P(r)}$
1	1	8	7,339	0,075	0,075	0,149
2	2	108	90,901	0,925	1,850	5,551
		Сумма	98,240	1,000	1,925	5,700

Таким образом, в момент $t = 0$ цены облигаций A_1 и A_2 равны соответственно P_1 = 93,157 д.е. и P_2 = 98,241 д.е., их дюрации D_1 = 1,925 лет и D_2 = 1,925291 лет, показатели выпуклости C_1 = 5,713 лет^2 и C_2 = 5,701 лет^2.

Из облигаций вида A_1 и A_2 сформирован портфель Π(4000, 6000), стоимость которого равна V = 10000 д.е. Инвестиции в облигации каждого вида V_1 = 4000 д.е., V_2 = 6000 д.е.

Члены потока платежей от портфеля Π(4000, 6000) рассчитываются по формуле (4.1). Поток платежей от портфеля показан в таблице:

t_i , годы	0,5	1	1,5	2
Платежи, д.е.	107,345	595,940	107,345	10997,195

В следующей таблице показан расчет дюрации и показателя выпуклости этого портфеля по определению (см. формулы (4.4), (4.5)):

Номер платежа	Срок платежа t_i	Сумма платежа R_i	$R_i(0)$	$\frac{R_i(0)}{V(r)}$	$t_i \frac{R_i(0)}{V(r)}$	$t_i(t_i+1)\frac{R_i(0)}{V(r)}$
1	0,5	107,345	102,82	0,01028	0,00514	0,00771
2	1	595,940	546,73	0,05467	0,05467	0,10935
3	1,5	107,345	94,33	0,00943	0,01415	0,03537
4	2	10997,195	9256,12	0,92561	1,85122	5,55367
Сумма			10000,00	1,00000	1,925187	5,70610

Таким образом, дюрация портфеля в момент его покупки D_p = 1,925187 лет, показатель выпуклости C_p = 5,70610 лет^2.

Рассчитаем дюрацию и показатель выпуклости портфеля П(4000, 6000) по формулам (4.6) и (4.7). Определим доли облигаций в портфеле: $x_j = \frac{V_j}{V}$, j = 1, 2. Согласно условию задачи, V_1 = 4000 д.е., V_2 = 6000 д.е., V = 10000 д.е. Тогда

$$D_P = \sum_{j=1}^{m} x_j D_j = 0{,}4 \cdot D_1 + 0{,}6 \cdot D_2 = 0{,}4 \cdot 1{,}925032 + 0{,}6 \cdot 1{,}925291 = 1{,}925187,$$

$$C_P = \sum_{j=1}^{m} x_j C_j = 0{,}4 \cdot C_1 + 0{,}6 \cdot C_2 = 0{,}4 \cdot 5{,}71351 + 0{,}6 \cdot 5{,}70117 = 5{,}70610.$$

2) Рассчитаем относительное изменение цены портфеля при изменении процентных ставок на рынке сразу после формирования портфеля с 9 до 8% годовых. Так как r = 9%, Δr = – 0,01, D_p = 1,925187, C_p = 5,70610, то согласно (7.10)

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -1{,}925187 \frac{(-0{,}01)}{1+0{,}09} + \frac{1}{2} 5{,}70610 \left(\frac{-0{,}01}{1+0{,}09} \right)^2 = 0{,}017902,$$

где $\Delta V = V(0.08) - V(0.09)$, $V = V(0.09)$ = 10000 (д.е.).

В результате снижения процентной ставки цена портфеля увеличилась и приблизительно стала равной

$$V(0{,}08) = V(0{,}09) + V(0{,}09) \cdot 0{,}017902 = 10179{,}02.$$

3) Рассчитаем планируемую и фактическую стоимости инвестиции в портфель Π(4000, 6000) в момент времени t = 2 (момент погашения всех облигаций из портфеля). В момент формирования портфеля безрисковые процентные ставки для всех сроков составляли r = 9% годовых. Сразу после формирования портфеля процентные ставки снизились до $\bar{r}$ = 8% годовых.

Цена покупки портфеля согласно условию задачи V = V (0,09) = 10000 д.е. Планируемая стоимость инвестиции в портфель на момент $t = 2$ согласно (4.14) составляет

$$V(0.09, 2) = V(0{,}09)(1+0{,}09)^2 = 11881{,}00 .$$

Фактическую стоимость V(0,08;2) рассчитаем по формуле (4.13), используя поток платежей от портфеля Π(4000, 6000):

$$V(0{,}08;2) = 107{,}345(1+0{,}08)^{1{,}5} + 595{,}940(1+0{,}08) +$$

$$+ 107{,}345(1+0{,}08)^{0{,}5} + 10997{,}195 = 11872{,}85.$$

Расчеты показывают, что V(0,08;2) < V(0,09;2), т.е. на момент погашения всех облигаций из портфеля в момент t = 2 фактическая стоимость инвестиции в портфель меньше планируемой. Следовательно, на момент t = 2 портфель не иммунизирован против изменения процентных ставок на рынке.

4) Рассчитаем планируемую $V(0.09, D_p)$ и фактическую $V(0.08, D_p)$ стоимости инвестиции в портфель в момент времени, равный дюрации портфеля, $t = D_p$ = 1,925. По формулам (4.14) и (4.13) находим

$$V(0.09, D_p) = V(0.09)(1+0,09)^{1,925187} = 11804{,}647,$$

$$V(0.08, D_p) = 107,345(1+0,08)^{1,925187-0,5} + 595,940(1+0,08)^{1,925187-1} +$$

$$+107,345(1+0,08)^{1,925187-1,5} + \frac{10997,195}{(1+0,08)^{2-1,925187}} = 11804{,}683.$$

Так как $V(0.08, D_p) > V(0.09, D_p)$, то в момент времени, равный дюрации портфеля, $t = D_p$, портфель иммунизирован против изменения процентных ставок на рынке.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается эквивалентность портфеля и облигации?
2. Какие используются меры доходности портфеля?
3. Как определяется дюрация и показатель выпуклости портфеля?
4. Первое свойство дюрации и показателя выпуклости портфеля
5. Второе свойство дюрации и показателя выпуклости портфеля
6. Третье свойство дюрации портфеля
7. Четвертое свойство дюрации и показателя выпуклости портфеля
8. Пятое свойство дюрации и показателя выпуклости портфеля
9. Что такое планируемая и фактическая стоимости инвестиции в портфель облигаций?
10. Сформулируйте и докажите иммунизирующее свойство дюрации и показателя выпуклости портфеля

Тема 5. Управление портфелем облигаций в стратегии иммунизации

Предположим, рынок облигаций удовлетворяет следующим условиям.

1. Можно купить и продать любое количество облигаций, в том числе нецелое.
2. Трансакционные расходы при покупке и продаже облигаций отсутствуют.
3. В начальный момент времени t = 0 безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r.
4. Процентные ставки могут измениться мгновенно на одну и ту же величину для всех сроков.

5.1. Иммунизация портфеля облигаций без трансакционных расходов

Пусть V – сумма, которую в момент t = 0 инвестор вкладывает в покупку облигаций без кредитного риска для формирования портфеля. Срок инвестиции (инвестиционный горизонт) – T лет. От этой инвестиции он рассчитывает получить сумму, не меньшую $V(1+r)^T$. Очевидно, что после формирования портфеля процентные ставки на рынке могут измениться. Цель инвестора состоит в том, чтобы при любых изменениях на рынке обеспечить на заданный момент времени T стоимость своей инвестиции, не меньшую $V(1+r)^T$. Стратегия иммунизации – способ управления портфелем облигаций, обеспечивающий защиту стоимости портфеля от изменений процентных ставок на рынке. В основе этой стратегии – принцип иммунизации Ф. Реддингтона. Схема управления портфелем облигаций в стратегии иммунизации выглядит следующим образом.

Момент времени t **= 0. Формирование иммунизированного портфеля облигаций.**

Портфель формируется из m видов облигаций без кредитного риска. P_j^0 и D_j^0 **–** цены и дюрации облигаций в момент t = 0 ($j=1,2,...,m$).

Чтобы портфель был иммунизирован от изменений процентной ставки сразу после t = 0 необходимо, чтобы дюрация портфеля совпадала с его инвестиционным горизонтом T лет (принцип Реддингтона). Следовательно, в момент t = 0 портфель должен быть сформирован в соответствии с решением системы:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j D_j^0 = T, \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1, \\ x_j \geq 0, \;\; j=1,2,...,m. \end{cases} \tag{5.1}$$

Если срок портфеля T лет удовлетворяет неравенству $\min_j \left\{D_j^0\right\} \leq T \leq \max_j \left\{D_j^0\right\}$, то система (5.1) разрешима. Пусть $x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0$ – решение этой системы. Тогда в момент t = 0 сформирован портфель облигаций

$$\Pi_0 = \Pi(V_1^0, V_2^0, ..., V_m^0)),$$

стоимость которого равна V. Сумма инвестиций в облигации j – го вида $V_j^0 = x_j^0 V$, где $j = 1, 2, ..., m$. Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_0 на момент T равна (см. (4.14)):

$$V^0(r,T) = V(1+r)^T. \tag{5.2}$$

Дюрация портфеля Π_0 равна его сроку T лет.

Ожидаемый поток платежей от этого портфеля $R_1^0, R_2^0, ..., R_n^0$ в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$.

Если сразу после формирования портфеля (или до момента t_1, первого платежа от портфеля) процентные ставки изменились до значений r_1 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут, то фактическая стоимость инвестиции в Π_0 в момент $t = T$ равна (формула 4.13):

$$V^0(r_1, T) = \sum_{i; t_i \le T} R_i^0 (1 + r_1)^{T - t_i} + \sum_{i; t_i > T} \frac{R_i^0}{(1 + r_1)^{t_i - T}}. \tag{5.3}$$

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$V^0(r_1, T) \ge V^0(r, T). \tag{5.4}$$

Таким образом, портфель Π_0 иммунизирован против изменения процентных ставок на рынке до момента t_1.

Заметим, что

$$V^0(r_1, T) = V^0(r_1)(1 + r_1)^T, \tag{5.5}$$

где $V^0(r_1)$ – оценка портфеля Π_0 на момент t = 0 согласно новой временной структуре процентных ставок после t = 0 (см. формулу (4.15)).

***Момент времени t* = *t*₁. Переформирование портфеля облигаций.**

В момент $t = t_1$ от портфеля Π_0 поступает первый платеж R_1^0. Стоимость инвестиции в портфель Π_0 в момент t_1 равна

$$V^0(r_1, t_1) = R_1^0 + \sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1 + r_1)^{t_i - t_1}}. \tag{5.6}$$

Таким образом, в момент времени t_1 инвестор располагает денежной суммой R_1^0 и портфелем облигаций стоимостью $\sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1 + r_1)^{t_i - t_1}}$. Инвестиционный горизонт портфеля составляет $(T - t_1)$ лет. Чтобы портфель был иммунизирован от изменений процентных ставок после t_1, необходимо, чтобы дюрация портфеля в момент t_1 совпадала с его инвестиционным горизонтом $(T - t_1)$ лет. Однако дюрация портфеля Π_0 в момент t_1 скорее всего отличается от этого значения. Действительно, дюрация облигаций зависит от времени, оставшегося до погашения, и нового уровня доходности, и не существует причин, по которым изменения этих двух факторов обязательно снизят дюрацию портфеля ровно на

t_1 лет. Поэтому в момент t_1 портфель должен быть сбалансирован заново так, чтобы обеспечить равенство его дюрации $(T - t_1)$ годам.

Опишем условия, в которых происходит переформирование портфеля Π_0 в момент t_1:

- трансакционные расходы на переформирование портфеля отсутствуют;
- рыночный уровень доходности r_1;
- цены и дюрации облигаций, из которых сформирован портфель, изменились до значений P_j^1 и D_j^1 соответственно, $j = 1, 2, ..., m$.

Чтобы сформировать портфель, дюрация которого равна $(T - t_1)$ годам, необходимо решить систему

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j D_j^1 = T - t_1, \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1, \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{5.7}$$

Пусть $x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1$ – решение этой системы. Тогда в момент $t = t_1$ сформирован портфель

$$\Pi_1 = \Pi(V_1^1, V_2^1, ..., V_m^1)).$$

Для переформирования портфеля часть облигаций придется купить, часть – продать. При этом поступивший платеж R_1^0 реинвестируется в облигации. Так как при покупке и продаже облигаций трансакционные расходы отсутствуют, то стоимость портфеля Π_1 равна $V^1 = V^0(r_1, t_1)$ (см. (5.6)). Инвестиции в облигации каждого вида составляют $V_j^1 = x_j^1 V^1 = x_j^1 V^0(r_1, t_1), \ \ j = 1, 2, ..., m$. Дюрация этого портфеля равна его сроку $(T - t_1)$ лет. Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_1 на момент T равна

$$V^1(r_1, T) = V^1(1 + r_1)^{T - t_1}. \tag{5.8}$$

Заметим, что $V^1 = V^0(r_1, t_1) = V^0(r_1)(1 + r_1)^{t_1}$ (см. формулу (4.15)). Тогда $V^1(r_1, T) = V^0(r_1, t_1)(1 + r_1)^{T - t_1} = V^0(r_1)(1 + r_1)^T = V^0(r_1, T)$ (см. (5.5)). Таким образом,

$$V^1(r_1, T) = V^0(r_1, T) \tag{5.9}$$

– планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_1 на момент T равна фактической стоимости инвестиции в портфель Π_0 на момент T.

Ожидаемый поток платежей от этого портфеля $R_1^1, R_2^1, ..., R_{n-1}^1$ в моменты времени $t_2, ..., t_n$.

Если сразу после t_1 (или до момента t_2) процентные ставки на рынке изменились до значения r_2 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут, то фактическая стоимость инвестиции в Π_1 в момент $t = T$ равна

$$V^1(r_2, T) = \sum_{i>1;t_i \le T} R_i^1 (1+r_2)^{T-t_i} + \sum_{i>1;t_i > T} \frac{R_i^1}{(1+r_2)^{t_i - T}}. \qquad (5.10)$$

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$V^1(r_2, T) \ge V^1(r_1, T). \qquad (5.11)$$

Следовательно, портфель Π_1 иммунизирован против изменения процентных ставок сразу после t_1 (или до момента t_2).

Итак, имеем

$$V^1(r_2, T) \ge V^1(r_1, T) = V^0(r_1, T) \ge V^0(r, T) = V(1+r)^T. \qquad (5.12)$$

Таким образом, в отсутствие трансакционных расходов сумма $V(1+r)^T$ иммунизирована от изменения процентных ставок на рынке, если инвестор придерживается стратегии иммунизации. Процедуру переформирования портфеля можно повторить в момент t_2, когда поступит платеж от портфеля. Если в какой-то момент времени нельзя сформировать портфель с требуемой дюрацией, то имеющийся портфель продается, а все вырученные средства инвестируются под действующую на данный момент процентную ставку до окончания срока T.

Пример 5.1. В начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 8% годовых. На рынке имеются два вида купонных облигаций со следующими параметрами:

Вид облигации	Номинал (д.е.)	Купонная ставка	Число платежей за год	Срок до погашения (годы)
A_1	100	10%	1	2
A_2	100	10%	1	4

Инвестор формирует портфель облигаций стоимостью 1000 д.е. с инвестиционным горизонтом 3 года. Рассчитать стратегию иммунизации этого портфеля для следующего изменения процентных ставок: 9% годовых сразу после формирования портфеля, 8 % годовых – непосредственно после момента t = 1.

Сумма инвестиции (д.е.)	V	1000 д.е.
Срок инвестиции (годы)	T	3 года
Рыночная ставка для всех сроков в момент 0	r	8%
Рыночная ставка для всех сроков сразу после 0	r_1	9%
Рыночная ставка для всех сроков сразу после 1	r_2	8%

Решение.

Момент времени t = 0. Формирование иммунизированного портфеля облигаций.

r = 8 % годовых - действующая процентная ставка в момент инвестирования. Значения цен и дюраций облигаций A_1 и A_2 в момент t = 0:

P_1^0 = 103,566, D_1^0 = 1,910; P_2^0 = 106,624, D_2^0 = 3,504.

Чтобы сформировать портфель, дюрация которого равна 3 годам, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} 1,910596x_1 + 3,504213x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Так как $D_1^0 < 3 < D_2^0$, то система разрешима. x_1^0 = 0,316396 – доля облигаций 1-го вида в портфеле, x_2^0 = 0,683604 – доля облигаций 2-го вида.

Таким образом, в начальный момент времени сформирован портфель облигаций

$$\Pi_0 = \Pi(V_1^0, V_2^0),$$

стоимость которого равна V = 1000 д.е. Сумма инвестиций в облигации каждого вида $V_1^0 = x_1^0 V$ = 316,395; $V_2^0 = x_2^0 V$ = 683,604. Дюрация портфеля совпадает с его инвестиционным горизонтом 3 года. Поток платежей от этого портфеля приведен в таблице:

t_i	1	2	3	4
R_i^0	94,663	400,163	64,113	705,247

Проверка иммунизации портфеля Π_0

Сразу после t = 0 процентные ставки изменились с r = 0,08 на r_1 = 0,09 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут. Необходимо проверить иммунизацию портфеля.

Планируемая стоимость инвестиции в портфель на момент T = 3 года равна:

$$V^0(r,3) = 1000(1 + 0,08)^3 = 1259,712.$$

Фактическая стоимость инвестиции в портфель на момент T = 3 года равна:

$$V^0(r_1,3) = 94,663\,(1 + 0,09)^2 + 400,163\,(1 + 0,09) + 64,113 + $$
$$+ \frac{705,247}{1+0,09} = 1259,777.$$

Так как $V^0(r_1,3) > V^0(r,3)$, портфель Π_0 иммунизирован от изменения процентных ставок сразу после t = 0.

Момент времени $t = 1$***. Переформирование портфеля облигаций.***

В момент $t = 1$ от портфеля Π_0 поступает первый платеж R_1^0 = 94,663391.

Стоимость инвестиции в портфель Π_0 в момент $t = 1$ равна

$$V^0(r_1,1) = 94{,}663391 + \frac{400{,}163171}{1+0{,}09} + \frac{64{,}113413}{(1+0{,}09)^2} +$$

$$+ \frac{705{,}247542}{(1+0{,}09)^3} = 1060{,}329.$$

Таким образом, в момент времени $t=1$ инвестор располагает денежной суммой R_1^0 и портфелем облигаций стоимостью:

$$\frac{400{,}163}{1+0{,}09} + \frac{64{,}113}{(1+0{,}09)^2} + \frac{705{,}247}{(1+0{,}09)^3} = 965{,}665.$$

Дюрация этого портфеля в момент $t=1$ равна 2,18 года. Инвестиционный горизонт 2 года. Так как дюрация портфеля не совпадает с его инвестиционным горизонтом, портфель необходимо переформировать.

Переформирование портфеля производится в момент действия ставки r_1 = 0,09.

Цены и дюрации облигаций в момент $t=1$:

облигация A_1: P_1^1 = 100,917, D_1^1 = 1;

облигация A_2: P_2^1 = 102,531; D_2^1 = 2,734.

Чтобы в момент $t=1$ сформировать новый портфель облигаций, дюрация которого равна 2 годам, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2{,}738954x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Так как $D_1^1 < 2 < D_2^1$, то система разрешима. x_1^1 = 0,424 – доля облигаций 1-го вида в новом портфеле, x_2^1 = 0,575 – доля облигаций 2-го вида.

Таким образом, в момент $t=1$ сформирован портфель облигаций

$$\Pi_1 = \Pi(V_1^1, V_2^1),$$

стоимость которого $V^1 = V^0(r_1,1)$ = 1060,329018 д.е. Инвестиции в облигации каждого вида $V_1^1 = x_1^1 V^1$ = 450,577 д.е.; $V_2^1 = x_2^1 V^1$ = 609,751 д.е. Дюрация этого портфеля совпадает с его инвестиционным горизонтом 2 года. Поток платежей от портфеля Π_1 приведен в таблице:

t_i	2	3	4
R_i^1	550,599	59,469	654,167

где i = 1, 2, 3 – номер платежа от портфеля Π_1.

Проверка иммунизации портфеля Π_1

Сразу после t = 1 процентные ставки снизились с r_1 = 0,09 до r_2 = 0,08 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут. Необходимо проверить иммунизацию портфеля.

Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_1 на момент T = 3 года равна:

$$V^1(r_1,3) = 1060{,}329\ (1 + 0{,}09)^2 = 1259{,}776.$$

Фактическая стоимость инвестиции в портфель на момент T = 3 года равна:

$$V^1(r_2,3) = 550{,}599\ (1 + 0{,}08) + 59{,}469 + \frac{654{,}167}{1+0{,}08} = 1259{,}827.$$

Так как $V^1(r_2,3) > V^1(r_1,3)$, портфель Π_1 иммунизирован против изменения процентных ставок сразу после t = 1.

Замечание. Рассмотрим механизм переформирования портфеля облигаций в момент t = 1. Обозначим через v_i и y_i, где i = 1, 2, денежные суммы, затраченные на покупку, и вырученные от продажи облигаций соответственно при переформировании портфеля. Тогда в момент t = 1 облигации A_1 куплены в количестве:

$$\frac{V_1^1}{P_1^1} - \frac{V_1^0}{P_1^0} = \frac{450{,}577}{100{,}917} - \frac{316{,}395}{103{,}566} = 4{,}4641 - 3{,}054 = 1{,}409$$

на сумму 1,409817$\cdot P_1^1$ = 1,409 ⋅100,917 = 142,275 = v_1.

Облигации A_2 проданы в количестве

$$\frac{V_1^0}{P_1^0} - \frac{V_1^1}{P_1^1} = \frac{683{,}604}{106{,}624} - \frac{609{,}751}{102{,}531} = 6{,}411 - 5{,}946 = 0{,}464$$

на сумму 0,464$\cdot P_2^1$ = 0,464⋅102,531 = 47,611 = y_2.

Поступивший в момент t = 1 платеж R_1^0 = 94,663. Имеем равенство

$$v_1 = R_1^0 + y_2$$

– затраты равны поступлениям. Следовательно, переформирование портфеля облигаций в момент t =1 происходит следующим образом. На поступивший платеж R_1^0 и выручку от продажи части облигаций одного вида покупаются облигации другого вида. Купля, продажа производятся по ценам облигаций на момент t = 1, т.е. P_1^1, P_2^1

Момент времени t **= 2.**

От портфеля Π_1 поступает платеж R_1^1 = 550,599 д.е. Облигация A_1 погашена. На рынке действует ставка r_2 = 0,04. Дюрация портфеля Π_1 в момент t = 2 равна D_2^1 = 1,910 – дюрации облигаций A_2, оставшихся в портфеле. Инвестиционный горизонт портфеля Π_1 в момент t = 2 равен 1 году. Так как дюрация портфеля не совпадает с его инвестиционным горизонтом, портфель необходимо переформировать. Однако из облигаций A_2 нельзя сформировать портфель с дюрацией, равной 1 году. Портфель продается.

Стоимость инвестиции в портфель Π_1 в момент t = 2:

$$V^1(r_2,2) = 550{,}599 + \frac{59{,}469}{1+0{,}08} + \frac{654{,}167}{(1+0{,}08)^2} = 1166{,}507.$$

В момент t = 2 инвестор располагает суммой 550,599 д.е. и облигациями вида A_2 стоимостью $\frac{59{,}469}{1+0{,}08} + \frac{654{,}167}{(1+0{,}08)^2}$ = 615,907 д.е. После продажи облигаций вся вырученная сумма $V^1(r_2,2)$ = 1166,507 д.е. инвестируется на 1 год (например, вкладывается на банковский счет) под действующую ставку 8% годовых. Через год можно получить сумму

$$1166{,}507(1 + 0{,}08) = 1259{,}827.$$

Таким образом, в результате осуществления стратегии иммунизации инвестор через 3 года получит сумму 1259,827 д.е., которая больше планируемой с самого начала суммы, равной 1259,712 д.е.

5.2. Иммунизация портфеля облигаций при наличии трансакционных расходов

Предположим, рынок облигаций удовлетворяет перечисленным в начале параграфа условиям, кроме наличия трансакционных расходов. При покупке и продаже облигаций удерживаются комиссионные в размере C_b и C_a соответственно.

Рассмотрим схему управления портфелем облигаций в стратегии иммунизации при наличии трансакционных расходов.

Момент времени $t=0$**. Формирование иммунизированного портфеля облигаций.**

Предположим, в начальный момент времени t = 0 инвестор формирует портфель облигаций стоимостью V на срок T лет. Тогда на формирование этого портфеля инвестору потребуется сумма $V(1+C_b)$. Портфель формируется из m видов облигаций без кредитного риска, цены и дюрации которых в момент t = 0 равны соответственно P_j^0 и D_j^0 ($j=1,2,...,m$). Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r.

Портфель, защищенный от изменения процентных ставок сразу после покупки облигаций, формируется в соответствии с решением системы:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j D_j^0 = T, \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j=1,...,m. \end{cases} \tag{5.13}$$

Пусть $x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0$ – решение этой системы. Тогда в момент t = 0 формируется портфель облигаций

$$\Pi_0 = \Pi(V_1^0, V_2^0, ..., V_m^0),$$

стоимость которого равна V, а $V_j^0 = x_j^0 V$, где $j = 1, 2, ..., m$. Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_0 на момент T равна

$$V^0(r,T) = V(1+r)^T. \qquad (5.14)$$

Дюрация этого портфеля равна его сроку T. Ожидаемый поток платежей от этого портфеля $R_1^0, R_2^0, ..., R_n^0$ в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$.

Если сразу после формирования портфеля (или до момента t_1, первого платежа от портфеля) процентные ставки изменились до значений r_1 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут, то фактическая стоимость инвестиции в Π_0 в момент $t = T$ равна (формула 4.13):

$$V(r_1, T) = \sum_{i; t_i \le T} R_i^0 (1 + r_1)^{T - t_i} + \sum_{i; t_i > T} \frac{R_i^0}{(1 + r_1)^{t_i - T}}. \qquad (5.15)$$

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$V^0(r_1, T) \ge V^0(r, T). \qquad (5.16)$$

Таким образом, портфель Π_0 иммунизирован против изменения процентных ставок на рынке до момента t_1.

Момент времени $t = t_1$. Переформирование портфеля облигаций.

В момент $t = t_1$ от портфеля Π_0 поступает первый платеж R_1^0. Стоимость инвестиции в портфель Π_0 в момент t_1 равна

$$V^0(r_1, t_1) = R_1^0 + \sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1 + r_1)^{t_i - t_1}}. \qquad (5.17)$$

Таким образом, в момент времени t_1 инвестор располагает денежной суммой R_1^0 и портфелем облигаций стоимостью $\sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1 + r_1)^{t_i - t_1}}$. Инвестиционный горизонт портфеля составляет $(T - t_1)$ лет. Чтобы обеспечить равенство дюрации портфеля $(T - t_1)$ годам, портфель необходимо переформировать.

Опишем условия, в которых происходит переформирование портфеля Π_0 в момент t_1:

- переформирование портфеля потребует от инвестора трансакционных расходов;
- рыночный уровень доходности r_1;
- цены и дюрации облигаций, из которых сформирован портфель, изменились до значений P_j^1 и D_j^1 соответственно, $j = 1, ..., m$;

Чтобы сформировать портфель, дюрация которого равна $(T - t_1)$ годам, необходимо решить систему

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j D_j^1 = T - t_1, \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1, \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1,...,m. \end{cases} \quad (5.18)$$

Пусть $x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1$ – решение этой системы. Для переформирования портфеля часть облигаций придется купить, часть – продать. Так как при покупке и продаже облигаций удерживаются комиссионные, то часть стоимости $V^0(r_1, t_1)$ (см.(5.17)) пойдет на трансакционные расходы при переформировании портфеля. Обозначим величину трансакционных расходов на переформирование портфеля через C. Пусть v_j, y_j, где $j = 1,2,...,m$ – денежные суммы, затраченные на покупку, и вырученные от продажи облигаций соответственно. Тогда $C = C_b \sum_{j=1}^{m} v_j + C_a \sum_{j=1}^{m} y_j$.

Чтобы минимизировать трансакционные расходы необходимо решить задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} \min C \\ \dfrac{V_j^0}{P_j^0} P_j^1 + v_j - y_j = x_j^1 \left(V^0(r_1, t_1) - C \right), \\ C = C_b \sum_{j=1}^{m} v_j + C_a \sum_{j=1}^{m} y_j, \\ C \geq 0, \ v_j \geq 0, \ y_j \geq 0, \ \ j = 1,...,m. \end{cases} \quad (5.19)$$

Здесь P_j^0, P_j^1 – цена облигации j – го вида в моменты t = 0 и $t = t_1$ соответственно.

Множество допустимых решений задачи ограничено и замкнуто. Задача разрешима. Пусть $v_1^1, v_2^1, ..., v_m^1, \ y_1^1, y_2^1, ..., y_m^1, \ C^1$ – решение задачи (5.19). Тогда в момент t_1 сформирован портфель облигаций $\Pi_1 = \Pi(V_1^1, V_2^1, ..., V_m^1)$.

Стоимость портфеля равна $V^1 = V^0(r_1, t_1) - C^1$. Инвестиции в облигации каждого вида составляют $V_j^1 = x_j^1 V^1$, $j = 1,2,...,m$. Дюрация этого портфеля равна его сроку ($T - t_1$) лет. Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_1 на момент T равна

$$V^1(r_1, T) = V^1 (1 + r_1)^{T - t_1} . \quad (5.20)$$

Ожидаемый поток платежей от этого портфеля $R_1^1, R_2^1, ..., R_{n-1}^1$ в моменты времени $t_2,...,t_n$.

Если сразу после t_1 (или до момента t_2) процентные ставки на рынке изменились до значения r_2 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут, то фактическая стоимость инвестиции в Π_1 в момент $t = T$ равна

$$V^1(r_2, T) = \sum_{i>1; t_i \le T} R_i^1 (1+r_2)^{T-t_i} + \sum_{i>1; t_i > T} \frac{R_i^1}{(1+r_2)^{t_i - T}}. \quad (5.22)$$

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$V^1(r_2, T) \ge V^1(r_1, T), \quad (5.23)$$

Следовательно, портфель Π_1 иммунизирован против изменения процентных ставок сразу после t_1 (или до момента t_2).

Если нельзя сформировать портфель с требуемой дюрацией, то имеющийся портфель продается, что снова потребует трансакционных расходов. Все вырученные средства размещаются на счет в банк под действующую на данный момент процентную ставку до окончания срока T. Вследствие наличия трансакционных расходов полученная в результате сумма будет несколько меньше той, которая была бы в их отсутствие. При наличии трансакционных расходов инвестор сталкивается с проблемой выбора частоты пересмотра портфеля.

Пример 5.2. В начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 10 % годовых. На рынке имеются два вида купонных облигаций со следующими параметрами:

Вид облигации	Номинал (д.е.)	Купонная ставка	Число платежей за год	Срок до погашения (годы)
A_1	100	8 %	1	2
A_2	100	8 %	1	4

Инвестор, располагая суммой 10050 д.е., желает сформировать портфель из указанных облигаций на 3 года. При покупке и продаже облигаций берутся комиссионные в размере 0,5 %. Рассчитать стратегию иммунизации этого портфеля для следующего изменения процентных ставок: 9% годовых сразу после формирования портфеля, 8 % годовых – непосредственно после момента t = 1.

Затраты на формирование портфеля	$V(1+C_b)$	10 050 д.е.
Комиссионные	$C_b = C_a$	0,5%
Сумма инвестиций в портфель	V	10 000 д.е.

Срок инвестиций	T	3 года
Рыночная ставка для всех сроков в момент 0	r	10%
Рыночная ставка для всех сроков сразу после 0	r_1	9%
Рыночная ставка для всех сроков сразу после 1	r_2	8%

Решение.

Момент времени $t = 0$*. Формирование иммунизированного портфеля облигаций.*

r = 10% годовых - действующая процентная ставка в момент инвестирования. Значения цен и дюраций облигаций A_1 и A_2 в момент t = 0:

$$P_1^0 = 96{,}528,\ D_1^0 = 1{,}924;\ P_2^0 = 93{,}660,\ D_2^0 = 3{,}561.$$

Чтобы сформировать портфель, дюрация которого равна 3 годам, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} 1{,}924x_1 + 3{,}561x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение системы: x_1^0 = 0,343, x_2^0 = 0,656. Следовательно, в начальный момент формируется портфель облигаций

$$\Pi_0 = \Pi(V_1^0, V_2^0),$$

стоимость которого равна V = 10000 д.е. Сумма инвестиций в облигации каждого вида $V_1^0 = x_1^0 V$ = 3431,1644; $V_2^0 = x_2^0 V$ = 6568,8356. Дюрация портфеля совпадает с его инвестиционным горизонтом 3 года. Поток платежей от этого портфеля приведен в таблице:

t_i	1	2	3	4
R_i^0	845,441	4399,986	561,077	7574,548

Проверка иммунизации портфеля Π_0.

Сразу после t = 0 процентные ставки изменились с r = 0,1 на r_1 = 0,09 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут. Необходимо проверить иммунизацию портфеля Π_0.

Планируемая стоимость инвестиции в портфель на момент T = 3 года равна:

$$V^0(r,3) = 10000(1 + 0,1)^3 = 13\,310,00.$$

Фактическая стоимость инвестиции в портфель на момент T = 3 года равна:

$$V^0(r_1,3) = 845,441\,(1 + 0,09)^2 + 4399,986\,(1 + 0,09) +$$

$$+ 561,077 + \frac{7574,548}{1+0,09} = 13\,310,654.$$

Так как $V^0(r_1,3) > V^0(r,3)$, портфель Π_0 иммунизирован против изменения процентных ставок сразу после t = 0.

Момент времени $t = 1$. Переформирование портфеля облигаций.

От портфеля Π_0 поступает первый платеж R_1^0 = 845,441287. Стоимость инвестиции в портфель Π_0 в момент t = 1 равна

$$V^0(r_1,1) = 845,441 + \frac{4399,986}{1+0,09} + \frac{561,077}{(1+0,09)^2} + \frac{7574,548}{(1+0,09)^3} = 11203,315.$$

Часть этой суммы будет затрачена на выплату комиссионных при переформировании портфеля. Переформирование портфеля производится в момент действия ставки r_1 = 0,09. Цены и дюрации облигаций в момент t = 1:

$$P_1^1 = 99,082,\quad D_1^1 = 1;\quad P_2^1 = 97,468;\quad D_2^1 = 2,780.$$

Чтобы в момент t = 1 сформировать новый иммунизированный портфель облигаций, дюрация которого равна 2 годам, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2,780x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение системы: x_1^1 = 0,438; x_2^1 = 0,561.

При переформировании портфеля в соответствии с найденным решением x_1^1 , x_2^1 необходимо минимизировать трансакционные расходы.

Задача минимизации трансакционных расходов (5.19) имеет вид:

$$\min C$$

$$\begin{cases} \dfrac{V_1^0}{P_1^0} P_1^1 + v_1 - y_1 = x_1^1\left(V^0(r_1,t_1) - C\right), \\ \dfrac{V_2^0}{P_2^0} P_2^1 + v_2 - y_2 = x_2^1\left(V^0(r_1,t_1) - C\right), \\ C = C_b(v_1 + v_2) + C_a(y_1 + y_2), \\ C \ge 0,\ v_j \ge 0,\ y_j \ge 0,\ j = 1,2. \end{cases}$$

Здесь v_i и y_i, i = 1, 2, – денежные суммы, затраченные на покупку, и вырученные от продажи облигаций соответственно при переформировании портфеля;

C – величина трансакционных расходов на переформирование портфеля;

$C_b = C_a$ = 0,005 – комиссионные при покупке и продаже облигаций соответственно. Тогда

$$\min C$$

$$\begin{cases} \dfrac{3431,164}{96,528} 99,082 + v_1 - y_1 = 0,438302\left(11203,31525 - C\right), \\ \dfrac{6568,835}{93,660} 97,468 + v_2 - y_2 = 0,561\left(11203,315 - C\right) \end{cases}$$

$$C = 0.005(v_1 + v_2) + 0.005(y_1 + y_2),$$

$$C \ge 0,\ v_1 \ge 0,\ v_2 \ge 0,\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

Оптимальное решение задачи имеет вид:

v_1^1 = 1384,263, v_2^1 = 0, y_1^1 = 0, y_2^1 = 548,486, C^1 = 9,663.

После выплаты трансакционных расходов стоимость портфеля в момент $t = 1$ станет равной

$$V^1 = V^0(r_1,1) - C^1 = 11193,651.$$

Таким образом, в момент $t = 1$ сформирован портфель

$$\Pi_1 = \Pi(V_1^1, V_2^1),$$

стоимость которого V^1= 11193,651 д.е. Инвестиции в облигации каждого вида $V_1^1 = x_1^1 V^1$ = 4906,198 д.е.; $V_2^1 = x_2^1 V^1$ = 6287,452 д.е. Дюрация этого портфеля совпадает с его инвестиционным горизонтом 2 года. Поток платежей от портфеля Π_1 приведен в таблице:

t_i	2	3	4
R_i^1	5863,815	516,059	6966,799

где i = 1, 2, 3 – номер платежа от портфеля Π_1.

Проверка иммунизации портфеля Π_1.

Сразу после $t = 1$ процентные ставки снизились с r_1 = 0,09 до r_2 = 0,08 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут. Необходимо проверить иммунизацию портфеля.

Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_1 на момент $T = 3$ года равна:

$$V^1(r_1, 3) = 11193{,}651503\,(1 + 0{,}09)^2 = 13299{,}177.$$

Фактическая стоимость инвестиции в портфель на момент $T = 3$ года равна:

$$V^1(r_2, 3) = 5863{,}815(1 + 0{,}08) + 516{,}059 + \frac{6966{,}799}{1 + 0{,}08} = 13299{,}720.$$

Так как $V^1(r_2, 3) > V^1(r_1, 3)$, портфель Π_1 иммунизирован против изменения процентных ставок сразу после $t = 1$.

Замечание. Рассмотрим процедуру переформирования портфеля облигаций в момент t = 1. В момент t = 1 облигации A_1 куплены в количестве

$$\frac{V_1^1}{P_1^1} - \frac{V_1^0}{P_1^0} = \frac{4906{,}198}{99{,}082} - \frac{3431{,}164}{96{,}528} = 49{,}516 - 35{,}545 = 13{,}970$$

на сумму $13{,}970 \cdot P_1^1$ = 13,970·99,082 = 1384,263 = v_1.

Облигации A_2 проданы в количестве

$$\frac{V_2^0}{P_2^0} - \frac{V_2^1}{P_2^1} = \frac{6568{,}835}{93{,}660} - \frac{6287{,}452}{97{,}468} = 70{,}134 - 64{,}507 = 5{,}627$$

на сумму $5{,}627 \cdot P_2^1$ = 5,627·97,468 = 548,486 = y_2.

Трансакционные расходы 0,005$(v_1 + y_2)$ = 9,663= C^1

Поступивший в момент $t = 1$ платеж R_1^0 = 845,441. Имеем равенство

$$C^1 + v_1 = R_1^0 + y_2 = 1393{,}927$$

– затраты равны поступлениям. На поступивший платеж R_1^0 и выручку от продажи части облигаций одного вида покупаются облигации другого вида и выплачиваются комиссионные на переформирование портфеля. Купля, продажа производятся по ценам облигаций на момент $t = 1$, т.е. P_1^1 , P_2^1 .

Момент времени $t = 2$

От портфеля Π_1 поступает платеж R_1^1 = 5863,815 д.е. Облигация A_1 погашена. Рыночная ставка r_2 = 0,04. Дюрация портфеля Π_1 в момент $t = 2$ равна D_2^2 = 1,925 – дюрации облигаций A_2, оставшихся в портфеле. Инвестиционный горизонт портфеля Π_1 в момент $t = 2$ равен 1 году. Так как дюрация портфеля не совпадает с его инвестиционным горизонтом, портфель необходимо переформировать. Однако из облигаций A_2 нельзя сформировать портфель с дюрацией, равной 1 году. Портфель продается.

Стоимость инвестиции в портфель Π_1 в момент $t = 2$:

$$V^1(r_2, 2) = 5863{,}815 + \frac{516{,}059}{1 + 0{,}08} + \frac{6966{,}799}{(1 + 0{,}08)^2} = 12314{,}555.$$

Портфель продается за

$$P(r_2, 2) = \frac{516{,}059}{1 + 0{,}08} + \frac{6966{,}799}{(1 + 0{,}08)^2} = 6450{,}740.$$

Сумма комиссионных 0,005$P(r_2, 2)$ = 32,253. На счет в банк вкладывается

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит суть схемы управления портфелем в стратегии иммунизации?
2. Приведите первый этап схемы управления иммунизированным портфелем без трансакционных расходов в момент времени t = 0.
3. Приведите второй этап схемы управления иммунизированным портфелем без трансакционных расходов в момент времени $t = t_1$.
4. Что надо сделать с портфелем, если в какой-то момент времени нельзя сформировать портфель с требуемой дюрацией?

5. Приведите первый этап схемы управления иммунизированным портфелем при наличии трансакционных расходов в момент времени $t = 0$.
6. Приведите второй этап схемы управления иммунизированным портфелем при наличии трансакционных расходов в момент времени $t = t_1$.
7. Что надо сделать с портфелем, если в какой-то момент времени нельзя сформировать портфель с требуемой дюрацией?
8. С какой проблемой сталкивается инвестор при наличии трансакционных расходов?

Тема 6. Основы портфельного анализа в условиях неопределенности. Модель Марковица

Модель портфельного анализа Марковица основана на следующих предположениях:

- Рынок состоит из конечного числа абсолютно ликвидных активов, которые подразумеваются бесконечно делимыми. Доходности рисковых активов являются нормально распределенными случайными величинами, имеющими конечные моменты первого (математическое ожидание) и второго (дисперсия) порядка.
- Индивидуальные предпочтения инвестора задаются функцией полезности от двух аргументов: ожидаемой доходности, измеряемой математическим ожиданием, и риска, оцениваемого дисперсией. Соответственно сравнение портфелей осуществляется на основе только двух критериев.
- Инвестор не склонен к риску, т.е. из двух портфелей с одинаковой ожидаемой доходностью он предпочтет портфель с меньшим риском. В то же время из двух портфелей с одинаковым риском инвестор выберет портфель с большей ожидаемой доходностью.
- Налоги и трансакционные издержки равны нулю.

6.1. Вероятностная модель финансового рынка

Введем следующие обозначения. Пусть $A=\{A_1,\dots,A_N\}$ – множество активов (акций, облигаций, валютных единиц, комбинаций активов), обращающихся на финансовом рынке; $S_i(t)$ и $S_i(t+1)$ – рыночная стоимость актива $A_i \in A,\ i=\overline{1,N}$ в дискретные моменты времени t и $t+1$; $D_i(t+1)$ – величина чистого денежного потока, связанного с активом A_i, в промежутке между t и $t+1$: дивиденды, купонные выплаты и т.д. Тогда доходность актива A_i за период времени $[t,t+1]$ определяется по формуле:

$$\rho_i(t)=\frac{S_i(t+1)-S_i(t)+D_i(t+1)}{S_i(t)},\ \ \rho_i(t)>-1.$$

Доходность актива $\rho_i(t)$ является случайной величиной. Математическое ожидание случайной величины $\rho_i,\ i=\overline{1,N}$ определяется по формуле:

$$\mu_i=E\rho_i,$$

Дисперсия случайной величины $\rho_i,\ i=\overline{1,N}$:

$$\sigma_i^2=Var(\rho_i)=E(\rho_i-\mu_i)^2,$$

ковариация между ρ_i и $\rho_j,\ i,\ j=\overline{1,N}$:

$$V_{ij}=Cov(\rho_i,\rho_j)=E[(\rho_i-\mu_i)(\rho_j-\mu_j)].$$

Если $i=j$, то $V_{ii}=\sigma_{ii}^2$.

На практике вместо $\mu_i,\ \sigma_i^2$ и V_{ij} часто используют их выборочные оценки, построенные на основе прошлых значений доходностей $\rho_i(t),\ t=1,\dots,T$:

$$\mu_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\rho_i(t),$$

$$V_{ii} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\Big(\rho_i(t) - \mu_i\Big)^2,$$

$$V_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\Big(\rho_i(t) - \mu_i\Big)\Big(\rho_j(t) - \mu_j\Big).$$

В однопериодной ($[T, T+1]$) модели Марковитца инвестор в момент времени T формирует портфель x:

$$x \in X = \left\{ x = (x_1, ..., x_N):\ \sum_{i-1}^{N} x_i = 1 \right\}, \qquad (6.1)$$

где $x_i,\ i = \overline{1, N}$ показывает, какая доля капитала инвестора размещена в актив $A_i \in A,\ i = \overline{1, N}$. Множество X, представляющее собой всю совокупность портфелей, которые могут быть сформированы из N активов, называют *достижимым множеством*.

Любой портфель $x \in X$ характеризуется, согласно подходу Марковитца, двумя показателями – математическим ожиданием μ_x и дисперсией σ_x^2.

Математическое ожидание

$$\mu_x = E(\sum_{i=1}^{N} x_i\rho_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i E\rho_i = \sum_{i=1}^{N} x_i\mu_i$$

показывает ожидаемую доходность портфеля x. Формируя портфель активов, инвестор стремится к увеличению ожидаемой доходности.

Дисперсия портфеля x

$$\sigma_x^2 = Var(\sum_{i=1}^{N} x_i\rho_i) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j V_{ij}, \qquad (6.2)$$

(или его стандартное отклонение $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$) характеризует уровень риска, связанного с портфелем x. Инвестор, формируя портфель x стремится к уменьшению его дисперсии.

Таким образом, можно по-разному формулировать оптимизационную задачу выбора x из класса допустимых портфелей X в зависимости от критерия оптимальности. Например, найти $x^* \in X$, являющийся решением задачи:

1. $\sigma_x^2 \to \min\limits_{x \in X}$,

   $\mu_x = m$,

где m – некоторая константа, задающая значение ожидаемой доходности портфеля.

2. $U(\mu_x, \sigma_x) \to \max\limits_{x \in X}$,

где $U(\mu_x, \sigma_x)$ – функция полезности инвестора с частными производными

$$\frac{\partial U}{\partial \mu_x} > 0,\ \frac{\partial U}{\partial \sigma_x} < 0.$$

Здесь $U(\mu_x,\sigma_x)=a\cdot\mu_x-b\cdot\sigma_x^2=a\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i\mu_i-b\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_i x_j V_{ij}$ – функция полезности Неймана – Моргенштейна, где $a,b>0$.

3. $U(\mu_x,\sigma_x)\to\max\limits_{x\in X}$

$Ax\le b$

задача с дополнительными линейными ограничениями на множестве искомых портфелей.

Портфель x^*, являющийся решением задачи оптимизации, которая отражает индивидуальные предпочтения инвестора относительно ожидаемой доходности и риска и ограничения рынка, на котором он действует, называется *эффективным портфелем*.

Множество X^* портфелей, каждый из которых обеспечивает:

- максимальную ожидаемую доходность среди портфелей достижимого множества с одинаковым уровнем риска
$$X^*=\left\{x^*\in X:\ \mu_{x^*}=\max\{\mu_x:\ x\in X,\ \sigma^2_{x^*}=\sigma^2_x,\ \sigma^2_x\le\sigma^2_{x_{\min}}\}\right\}$$
- минимальный риск среди портфелей достижимого множества с одинаковым значением ожидаемой доходности, не меньшей, чем доходность портфеля с минимальным риском, т.е.
$$X^*=\left\{x^*\in X:\sigma^2_{x^*}=\min\{\sigma^2_x:\ x\in X,\ \mu_{x^*}=\mu_x,\ \mu_x\ge m_{\min}\right\},$$

называется *эффективным множеством* (где $m_{\min}=\mu_{x_{\min}}$, $\sigma^2_{x_{\min}}=\min(\sigma^2_x)$).

На рис. 6.1. отображено множество точек (σ_x , μ_x), которое иллюстрирует местоположение достижимого множества $x\in X$ в системе координат (σ_x , μ_x). Часть достижимого множества, расположенного на его границе между точками A и B представляет эффективное множество X^*.

Анализ портфелей $x\in X$ с использованием показателей среднего μ_x и дисперсии σ^2_x называют *средне – дисперсионным анализом*. Целью его является определение множества X^* эффективных портфелей, обеспечивающих максимум ожидаемой доходности при минимуме риска.

Для поиска эффективного портфеля могут использоваться разные алгоритмы в соответствии с критериями оптимальности инвестора относительно ожидаемой доходности или риска. В то же время состав эффективного множества при одних и тех же ограничениях на портфели будет одинаковым независимо от методики его нахождения. Будем рассматривать эффективное множество как бесконечное множество эффективных портфелей, каждый из которых удовлетворяет критерию оптимальности какого-либо инвестора.

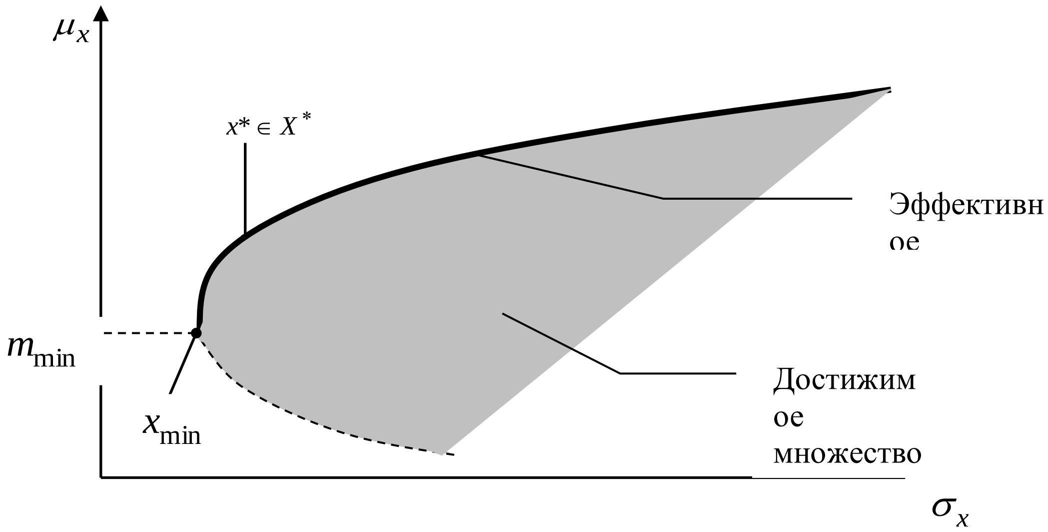

Рис. 6.1. Достижимое и эффективное множества

6.2. Эффективный портфель при фиксированном значении ожидаемой доходности

В данном случае инвестор выбирает портфель с фиксированным значением ожидаемой доходности и минимальным для этого уровня доходности риском. Совокупность эффективных портфелей для всех допустимых в эффективном множестве значений ожидаемой доходности составит искомое эффективное множество.

Рассмотрим финансовый рынок с N рисковыми активами. Обозначим через $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{i=1}^N$ вектор $\lfloor N \times 1 \rfloor$ ожидаемых доходностей, через $V = (V_{ij})_{i,j=1}^N$ – матрицу $\lfloor N \times N \rfloor$ ковариаций доходностей. Пусть ожидаемая доходность как минимум для двух активов различна: $\exists i \neq j \; (i, j = \overline{1, N}): \; \mu_i \neq \mu_j$, а матрица ковариаций положительно определена:

$$\exists \; i \in [1, N]: \; x_i \neq 0 \; \text{ и } \; \sum_{i,j=1}^N x_i x_j V_{ij} > 0 .$$

Отметим, что матрица ковариаций будет вырождена, если верно хотя бы одно из следующих утверждений:

1. Достижимое множество содержит безрисковый портфель.
2. Один актив является комбинацией других активов.
3. Рынок является арбитражным, т.е. существует самофинансируемый портфель с положительной ожидаемой доходностью и нулевым риском:

$$\exists \, x^{arb} = (x_1^{arb}, \ldots, x_N^{arb}): \; \sum_{i=1}^N x_i^{arb} = 0, \; \mu_{x^{arb}} > 0, \; \sigma^2_{x^{arb}} = 0.$$

Обозначим через $\mathbf{x}$ вектор $\lfloor N \times 1 \rfloor$ весов для активов из сформированного портфеля $x: \sum_{i=1}^N x_i = 1$. Ожидаемая доходность портфеля равна: $\mu_x = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x}$, а дисперсия $\sigma_x^2 = \mathbf{x}^T V \mathbf{x}$. Задача нахождения портфеля, минимизирующего риск при заданном значении m ожидаемой доходности портфеля, сводится к следующей задаче оптимизации:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^T V\mathbf{x} \to \min_{\mathbf{x}} \\ &\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x} = m, \\ &\mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1, \end{aligned} \tag{6.3}$$

где $\mathbf{e}^T = (1,\ldots,1) \in R^N$ – вектор $\lfloor N\times 1 \rfloor$, состоящий из единиц.

Решение задачи (6.3) на условный экстремум будем искать с помощью метода множителей Лагранжа. Для этого необходимо построить функцию Лагранжа, найти ее производную по $\mathbf{x}$, приравнять к нулю, добавить уравнения – ограничения и решить систему линейных уравнений относительно $\mathbf{x}$. Итак, получаем следующую функцию Лагранжа:

$$L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2) = \mathbf{x}^T V\mathbf{x} + \lambda_1(\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x} - m) + \lambda_2(\mathbf{e}^T\mathbf{x} - 1),$$

где λ_1 и λ_2 – множители Лагранжа.

Таким образом, необходимо решить систему $N+2$ линейных уравнений с $N+2$ неизвестными:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \mathbf{x}} = 2V\mathbf{x} + \lambda_1\boldsymbol{\mu} + \lambda_2\mathbf{e} = 0, \\ &\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x} = m, \\ &\mathbf{e}^T\mathbf{x} = 1. \end{aligned}$$

В соответствии с предположениями, сделанными для $\boldsymbol{\mu}$ и V, решение задачи (6.3) существует и единственно. Его можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + m\mathbf{v},$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ – векторы $\lfloor N\times 1 \rfloor$:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{d}\left[b(V^{-1}\mathbf{e}) - a(V^{-1}\boldsymbol{\mu}) \right],$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{d}\left[c(V^{-1}\boldsymbol{\mu}) - a(V^{-1}\mathbf{e}) \right],$$

$$a = \mathbf{e}^T V^{-1}\boldsymbol{\mu}, \quad b = \boldsymbol{\mu}^T V^{-1}\boldsymbol{\mu}, \quad \mathrm{c} = \mathbf{e}^T V^{-1}\mathbf{e}, \quad \mathrm{d} = bc - a^2.$$

Решая задачу оптимизации для каждого $m \in [m_{\min}, m_{\max}]$, где

$$\begin{aligned} &m_{\min} = \mu_{x_{\min}} : \sigma^2_{x_{\min}} = \min\{\sigma_x^2, x \in X\}, \\ &m_{\max} = \max\{\mu_x, x \in X\}, \end{aligned}$$

получаем эффективное множество X^* (рис. 6.2).

6.3. Эффективный портфель в зависимости от отношения инвестора к риску

Пусть ожидаемая доходность как минимум для двух активов различна: $\exists i \ne j \ (i, j = \overline{1, N})$: $\mu_i \ne \mu_j$, а матрица ковариаций положительно определена: $\exists\ i \in [1, N]$: $x_i \ne 0$ и $\sum\limits_{i,j=1}^{N} x_i x_j V_{ij} > 0$. Эти предположения обеспечивают существование и единственность решения задачи оптимизации.

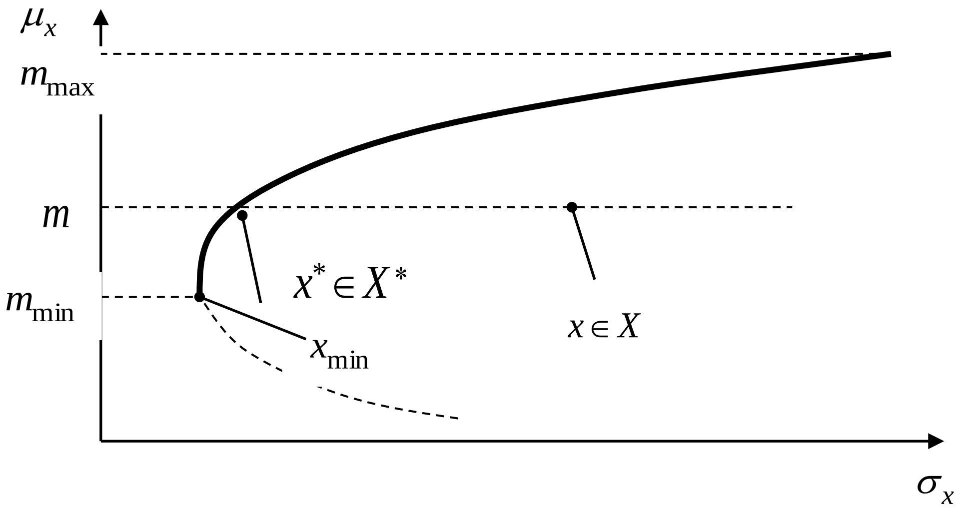

Рис. 6.2. Эффективное множество и эффективный портфель при заданном уровне доходности

Определение эффективного портфеля в зависимости от отношения инвестора к риску сводится к следующей задаче оптимизации:

$$2\tau\mu_x - \sigma_x^2 = 2\tau \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j V_{ij} \to \max_x$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

или в векторной форме:

$$2\tau\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}^T V\mathbf{x} \to \max_x \qquad (6.4)$$

$$\mathbf{e}^T\mathbf{x} = 1.$$

Параметр $\tau \geq 0$ отражает терпимость инвестора к риску и может быть соотнесен с относительной мерой риска Эрроу – Пратта $R_R = -U''(w)/U'(w)$ обратной зависимостью $\tau = 1/R_R$. Здесь $U(w) = aw - bw^2$ – функция полезности Неймана – Моргенштейна, где $a, b > 0$.

Решением задачи оптимизации (6.4) для всех $\tau \in [0, +\infty)$ является эффективное множество X^* (рис. 6.3).

В соответствии с методом множителей Лагранжа, построим функцию Лагранжа:

$$L(\mathbf{x},\ \lambda) = 2\tau\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}^T V\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{e}^T\mathbf{x} - 1).$$

Решение задачи (6.4) будет удовлетворять системе $(N+1)$ линейных уравнений с $(N+1)$ неизвестным:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x},\ \lambda)}{\partial \mathbf{x}} = 2\tau\boldsymbol{\mu} - 2V\mathbf{x} + \lambda\mathbf{e} = 0, \qquad (6.5)$$

$$\mathbf{e}^T\mathbf{x} = 1.$$

Для $\tau=0$ решением задачи оптимизации является вектор

$$\mathbf{x}_{\min}=\frac{1}{\mathbf{e}^T V^{-1}\mathbf{e}}V^{-1}\mathbf{e}, \quad (6.6)$$

соответствующий портфелю с минимальной дисперсией на множестве всех эффективных портфелей: $\sigma^2_{\mathbf{x}_{\min}} = \min\left\{\sigma_x^2:\ x\in X^*\right\}$ (рис. 6.3).

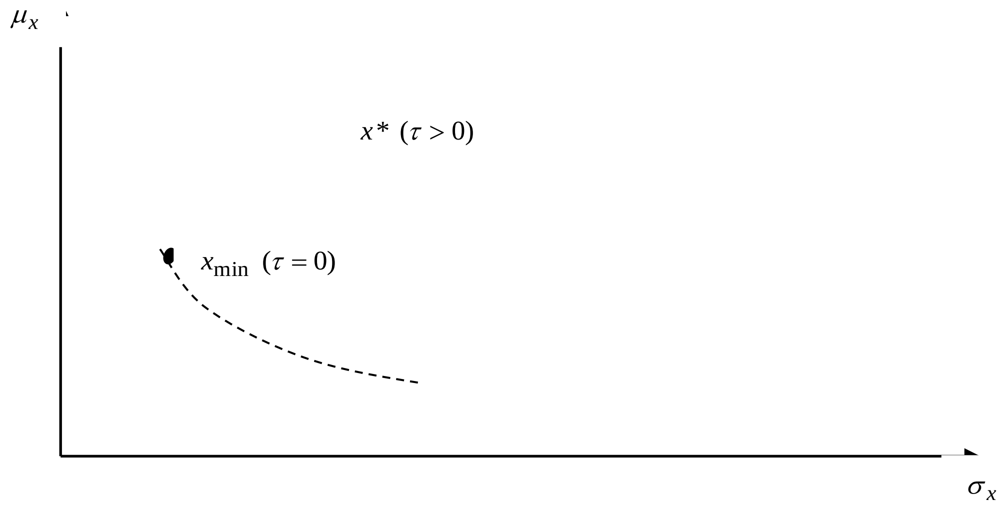

Рис. 6.3. Эффективный портфель и отношение инвестора к риску

Для фиксированного $\tau>0$ решение задачи представимо в следующем виде:

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{x}_{\min}+\tau\cdot\mathbf{z}, \quad (6.7)$$

где $z=V^{-1}\mu-\dfrac{e^T V^{-1}\mu}{e^T V^{-1}e}\cdot V^{-1}e = V^{-1}\mu-\dfrac{a}{c}\cdot V^{-1}e$ – вектор $(N\times 1)$,

обладающий следующим свойством:. $\sum_{i=1}^{N} z_i = 0$. Действительно, сумма компонентов вектора z равна скалярному произведению единичного вектора e на вектор z, т.е. $\sum_{i=1}^{N} z_i = e^T z$. Тогда получим:

$$e^T z = e^T V^{-1}\mu - \frac{e^T V^{-1}\mu}{e^T V^{-1}e}\cdot e^T V^{-1}e = 0.$$

Экономический смысл вектора $\mathbf{z}$ состоит в том, что он представляет собой не принадлежащий достижимому множеству самофинансируемый портфель, в котором покупка одних активов осуществляется за счет продажи других.

Таким образом, любой эффективный портфель является линейной комбинацией портфеля $\mathbf{x}_{\min}$, который зависит только от V и обеспечивает минимальный риск, и портфеля $\mathbf{z}$ $(\mathbf{z}\notin X)$, генерирующего максимальную доходность.

Так как $Cov(\rho_{x_{\min}}, \rho_z) = \mathbf{z}^T V \mathbf{x}_{\min} = 0$ (где $\rho_{x_{\min}} = \sum_{i=1}^{N} (x_{\min})_i \cdot \rho_i = x_{\min}^T \rho$, $\rho_Z = \sum_{i=1}^{N} z_i \cdot \rho_i = z^T \rho$), то в результате эффективное множество в системе координат (σ_x, μ_x) будет определяться следующими формулами:

$$\mu_{x*} = \mu_{x_{\min}} + \tau \mu_z,$$
$$\sigma_{x*} = \sqrt{\sigma_{x_{\min}}^2 + \tau^2 \sigma_z^2}.$$

6.4. Модель Марковица с безрисковым активом

Пусть инвестор формирует портфель из N рисковых активов $A_i,\ i = \overline{1, N}$ с вектором ожидаемых доходностей $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{i=1}^N$ и матрицей ковариаций $V = (V_{ij})_{i,j=1}^N$ и безрискового актива A_0 с детерминированной доходностью μ_0.

Предполагается, что $\exists\ i \in \{1, \ldots, N\}:\ \mu_i \neq \mu_0$ и матрица ковариаций V положительно определена, т.е. решение задачи оптимизации существует и единственно. Для любого портфеля x из достижимого множества

$$X = \left\{ (x_0, x_1, \ldots, x_N) : \sum_{i=0}^{N} x_i = 1 \right\} \tag{6.8}$$

имеем:

$$\mu_x = x_0 \mu_0 + \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i,$$
$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j V_{ij}$$

или в векторной форме

$$\mu_x = x_0 \mu_0 + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x},$$
$$\sigma_x^2 = \mathbf{x}^T V \mathbf{x},$$

где $\mathbf{e}^T = (1, \ldots, 1) \in R^N$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$.

Определение эффективного портфеля может быть сведено к следующим задачам оптимизации.

1. Если критерием оптимальности является минимальный риск при заданном значении m ожидаемой доходности портфеля, то получаем задачу оптимизации:

$$\mathbf{x}^T V \mathbf{x} \to \min$$
$$\mu_0 x_0 + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x} = m,$$
$$x_0 + \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1.$$

Решение задачи находится из системы $N+3$ линейных уравнений с $N+3$ неизвестными:

$$\lambda_1\mu_0+\lambda_2=0,$$
$$2V\mathbf{x}+\lambda_1\boldsymbol{\mu}+\lambda_2\mathbf{e}=0,$$
$$\mu_0 x_0+\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x}=m,$$
$$x_0+\mathbf{e}^T\mathbf{x}=1,$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2$ – множители Лагранжа. Получаем:

$$x_0=1-\frac{(m-\mu_0)}{d^2}\mathbf{e}^T V^{-1}(\boldsymbol{\mu}-\mu_0\mathbf{e}),$$
$$\mathbf{x}=(x_1,\ ...,\ x_N)^T=\frac{(m-\mu_0)}{d^2}V^{-1}(\boldsymbol{\mu}-\mu_0\mathbf{e}).$$

где $d^2=(\boldsymbol{\mu}-\mu_0\mathbf{e})^T V^{-1}(\boldsymbol{\mu}-\mu_0\mathbf{e})$

Решая задачу оптимизации для каждого $m\in[\mu_0,\ \max\{\mu_i,\ i=\overline{1,\ N}\}]$, получаем эффективное множество, которое в случае существования безрискового актива будет иметь в системе координат (μ_x,σ_x) форму луча (рис. 6.4).

Для справки

$$\sigma_x^2=x^T Vx=\frac{(m-\mu_0)^2}{d^4}(\mu-\mu_0 e)^T V^{-1}(\mu-\mu_0 e)=\frac{(m-\mu_0)^2}{d^2},$$

$\sigma_x=\dfrac{(m-\mu_0)}{d}$, $m=\mu_0+d\cdot\sigma_x$; так как $\mu_x=\mu_0 x_0+\mu^T x=m$, то

$\mu_x=\mu_0+\mathrm{d}\cdot\sigma_x$

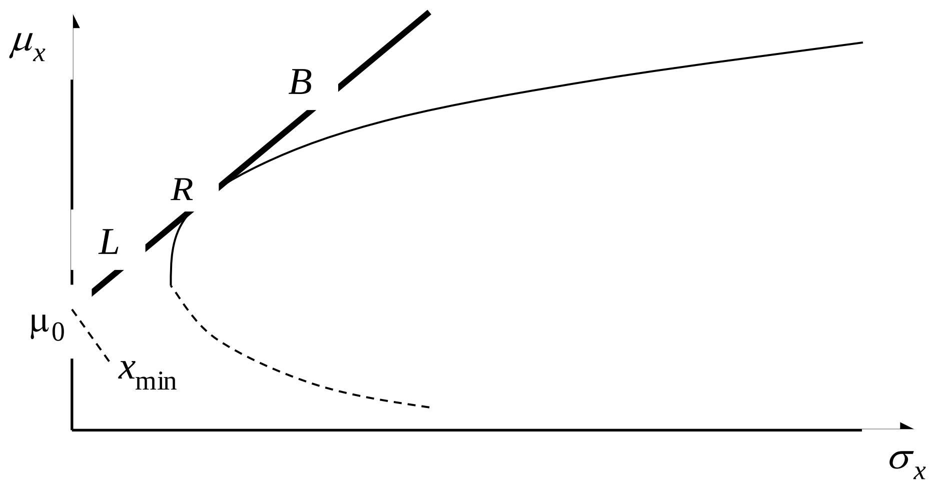

Рис. 6.4. Эффективное множество при наличии безрискового актива

2. Если эффективный портфель определяется с учетом отношения инвестора к риску, то задача оптимизации будет иметь следующий вид:

$$2\tau(\mu_0 x_0 + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x}) - \mathbf{x}^T V \mathbf{x} \to \max$$
$$x_0 + \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1,$$

где $\tau \geq 0$ характеризует терпимость инвестора к риску. Решение задачи находится из системы $N+2$ линейных уравнений с $N+2$ неизвестными:

$$\begin{aligned} &2\tau\mu_0 + \lambda = 0, \\ &2\tau\boldsymbol{\mu} - 2V\mathbf{x} + \lambda\mathbf{e} = 0, \\ &x_0 + \mathbf{e}^T\mathbf{x} = 1, \end{aligned} \tag{6.9}$$

где λ – множитель Лагранжа.
Решение имеет вид:
$x = \tau \cdot V^{-1}(\mu - \mu_0 e)$, $x_0 = 1 - \tau \cdot e^T V^{-1}(\mu - \mu_0 e)$.
Таким образом, эффективный портфель можно представить в следующем виде:

$$(x_0,\, x_1, \ldots,\, x_N)^T = x_{\min} + \tau \cdot (z_0 + z), \tag{6.10}$$

где $\mathbf{x}_{\min} = (1, 0, \ldots, 0)^T \in R^{N+1}$ – портфель с минимальной дисперсией, для которого $\tau = 0$;
$z_0 = -e^T V^{-1} \cdot (\mu - \mu_0 e)$;
$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_N)^T$ – вектор, обладающий свойством: $z_0 + \sum_{i=1}^{N} z_i = 0$, причем:

$$z = V^{-1} \cdot (\mu - \mu_0 e)$$

Решая задачу оптимизации для каждого $\tau \geq 0$, получаем эффективное множество (рис. 6.4) в виде луча.
Докажем, что в случае наличия безрискового актива эффективное множество в системе координат (σ_x, μ_x) является лучом.

$\sigma_x^2 = x^T V x = \tau^2 \cdot (\mu - \mu_0 e)^T V^{-1} V V^{-1} (\mu - \mu_0 e) =$
$= \tau^2 \cdot (\mu - \mu_0 e)^T V^{-1} (\mu - \mu_0 e) = \tau^2 d^2$, где $d^2 = (\mu - \mu_0 e)^T V^{-1} (\mu - \mu_0 e)$.
Таким образом, $\sigma_x = \tau d$

$\mu_x = \mu_0 x_0 + \mu^T x = \mu_0 \left(1 - \tau \cdot e^T V^{-1}(\mu - \mu_0 e)\right) + \mu^T \tau \cdot V^{-1}(\mu - \mu_0 e) =$

$= \tau(\mu - \mu_0 e)^T V^{-1}(\mu - \mu_0 e) + \mu_0 = \tau d^2 + \mu_0$.

Окончательно получим: $\mu_x = \tau d^2 + \mu_0 = d\sigma_x + \mu_0$, т.е. получили уравнение луча с началом в точке $(0, \mu_0)$, которая соответствует портфелю с минимальной дисперсией $x_{\min} = (1, 0, \ldots, 0)$. Луч будет касаться эффективного множества, не имеющего безрискового актива (рис.6.4). Точка касания R соответствует портфелю, состоящему только из рисковых активов. Любая точка L слева от R характеризует портфель, для которого $x_0 > 0$, т.е. когда инвестор делает вложения в безрисковый актив. Для любой точки B справа от R $x_0 < 0$, т.е. инвестор заимствует безрисковый актив.

$$x_0 < 0$$

6.5. Модель Марковитца в случае наличия дополнительных линейных ограничений

Предположим, что инвестор формирует портфель из N рисковых активов с вектором весов $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^N$, вектором ожидаемых доходностей $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{i=1}^N$ $(\exists\, i \neq j : \mu_i \neq \mu_j,\ i, j = \overline{1,N})$ и положительно определенной матрицей ковариаций $V = (V_{ij})_{i,j=1}^N$. При этом существуют дополнительные линейные ограничения на эффективное или достижимое множество, например, запрет на осуществление короткой продажи $x_i \geq 0,\ i = \overline{1,N}$ или требование покупки одних активов за счет продажи других: $\sum\limits_{k \in K} x_k = 0$, где $K \in \{1,\ldots,N\}$ и т.д. Отметим, что ограничение на достижимое множество (6.1) может принять следующую форму: $\sum\limits_{i=1}^{N} x_i \leq 1$.

Задачу оптимизации в случае наличия дополнительных линейных ограничений можно сформулировать в общем виде следующим образом:

$$2\tau\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}^T V\mathbf{x} \to \max_{\mathbf{x}} \qquad (6.11)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

где $\mathbf{A}$ – матрица $[M, N]$, $\mathbf{b}$ – вектор $[M,1]$, определяющие ограничения на достижимое или эффективное множество.

Функция Лагранжа определяется следующим образом:

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = 2\tau\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}^T V\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}),$$

где $\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda_1,\ldots,\lambda_M)$ – вектор множителей Лагранжа. В соответствии с теоремой Куна-Таккера решение задачи (6.11) должно удовлетворять системе:

$$2\tau\boldsymbol{\mu} - 2V\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} = 0$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$$

$$\lambda_i \geq 0\ \forall i = \overline{1,M}$$

Решением системы является кусочно-непрерывная функция $x^*(\tau)$, имеющая разрывы в некоторых точках $\tau_1, \tau_2, \ldots$, в которых не выполняются ограничения задачи оптимизации. Следовательно, эффективное множество в системе координат (σ_x, μ_x) будет также кусочно-непрерывным (рис.6.5).

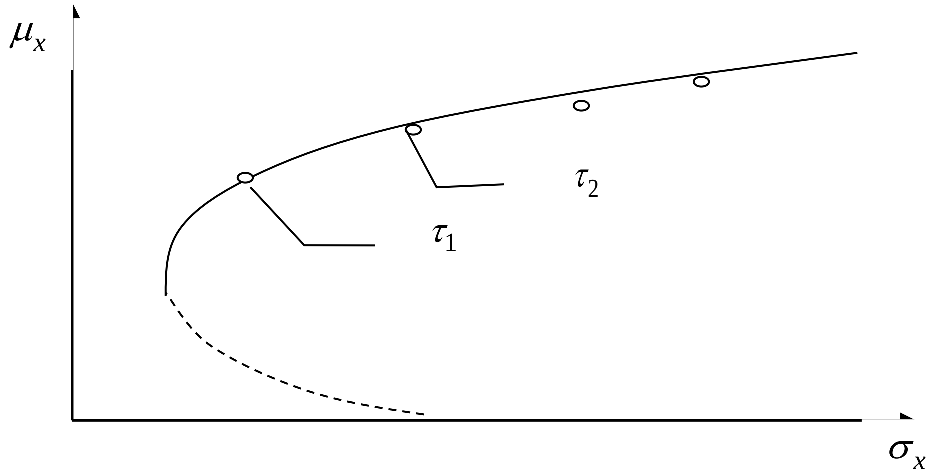

Рис. 6.5. Эффективное множество при наличии дополнительных линейных ограничений

6.6. Модель выбора инвестиционной стратегии с учетом обязательств

Рассмотрим однопериодную модель ($[T,T+1]$), характеризующую деятельность на финансовом рынке инвесторов, которые формируют свой портфель активов с учетом текущих и будущих обязательств. Такими инвесторами являются, например, пенсионные фонды и страховые компании, которые выбирают инвестиционную стратегию в зависимости от соотношения между своими активами и обязательствами.

Обозначим через L^T начальную стоимость чистых обязательств инвестора (пенсионного фонда, страховой компании), а через L^{T+1} – их стоимость в конце рассматриваемого временного периода. Тогда показатель роста обязательств, зависящий, в частности, от таких факторов, как ставка процента по безрисковым активам, уровень инфляции, показатель экономического роста и т.д., будет представлен следующей случайной величиной:

$$R_L = \frac{L^{T+1} - L^T}{L^T}.$$

Пусть начальная рыночная стоимость активов инвестора равна A^T. Формируя инвестиционный портфель $x \in X$, состоящий из N рисковых вложений и имеющий доходность ρ_x, инвестор увеличивает стоимость активов в конце рассматриваемого периода до величины

$$A^{T+1} = A^T(1+\rho_x).$$

Разница между активами и обязательствами в начальный момент времени равна $S^T = A^T - L^T$, а в конце периода – $S^{T+1} = A^{T+1} - L^{T+1} = A^T(1+\rho_x) - L^T(1+R_L)$.

Обозначим $R_S = \dfrac{S^{T+1} - S^T}{S^T} = \dfrac{A^T \rho_x - L^T R_L}{A^T - L^T}$.

В соответствии с подходом Марковица выбор инвестиционного портфеля x с учетом текущих и будущих обязательств осуществляется таким образом, чтобы обеспечить максимизацию соотношения

$$ER_S = E\frac{S^{T+1}-S^T}{S^T} = E\frac{A^T\rho_x - L^T R_L}{A^T - L^T} = \frac{A^T}{A^T-L^T}E\rho_x = \frac{A^T}{A^T-L^T}\mu_x$$

при минимальном значении риска

$$Var(R_S) = \frac{(A^T)^2}{(A^T-L^T)^2}\sigma_X^2 - 2\frac{A^T L^T}{(A^T-L^T)^2}Cov(\rho_X, R_L) + \frac{(L^T)^2}{(A^T-L^T)^2}\sigma_R^2$$

.

Здесь предполагается, что $ER_L = 0$.

Получаем следующую задачу оптимизации (опуская константу $\frac{(L^T)^2}{(A^T-L^T)^2}\sigma_R^2$):

$$2\tau\frac{A^T-L^T}{A^T}\mu_X - \sigma_X^2 + 2\frac{L^T}{A^T}Cov(\rho_X, R_L) \to \max_x$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

или в векторной форме

$$2\tau\frac{A^T-L^T}{A^T}\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}^T V\mathbf{x} + 2\boldsymbol{\gamma}^T\mathbf{x} \to \max_{\mathbf{x}} \tag{6.12}$$

$$\mathbf{e}^T\mathbf{x} = 1,$$

где $V = (V_{ij})_{i,j=1}^N$, $V_{ij} = Cov(\rho_i, \rho_j)$, $|V| \neq 0$, $\mu_X = \sum_{i=1}^N x_i \cdot \mu_i$, $\rho_X = \sum_{i=1}^N x_i \cdot \rho_i$

$$\boldsymbol{\mu}^T = (\mu_1,\ldots,\mu_N),\ \ \mu_i = E\rho_i,\ \ \exists i \neq j:\ \mu_i \neq \mu_j,\ \ i,j = \overline{1,N},$$

$$\boldsymbol{\gamma}^T = (\gamma_1,\ldots,\gamma_N),\ \ \gamma_i = \frac{L^T}{A^T}Cov(\rho_i, R_L),\ \ i = \overline{1,N},$$

$$\mathbf{e}^T = (1,\ldots,1) \in R^N.$$

Чтобы решить задачу оптимизации (6.12), построим функцию Лагранжа:

$$L(\mathbf{x},\lambda) = 2\tau\frac{A^T-L^T}{A^T}\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}^T V\mathbf{x} + 2\boldsymbol{\gamma}^T\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{e}^T\mathbf{x} - 1).$$

Искомый вектор $\mathbf{x}$, который существует и единственен, должен удовлетворять следующей системе уравнений:

$$2\tau\frac{A^T-L^T}{A^T}\boldsymbol{\mu} - 2V\mathbf{x} + 2\boldsymbol{\gamma} + \lambda\mathbf{e} = 0,$$

$$\mathbf{e}^T\mathbf{x} = 1.$$

Для $\tau = 0$ получаем портфель с минимальной дисперсией:

$$\mathbf{x}_{\min}^L = \mathbf{x}_{\min} + \mathbf{z}^L,$$

где $x_{\min} = \frac{1}{\mathbf{e}^T V^{-1} \mathbf{e}} V^{-1} \mathbf{e}$ совпадает с оптимальным портфелем (6.6) с минимальной дисперсией из задачи оптимизации (6.4) и определяется только матрицей ковариаций доходностей рисковых активов V,

$\mathbf{z}^L = V^{-1}\boldsymbol{\gamma} - \frac{\mathbf{e}^T V^{-1}\boldsymbol{\gamma}}{\mathbf{e}^T V^{-1}\mathbf{e}} V^{-1}\mathbf{e}$ обладает следующим свойством: $\sum_{i=1}^{N} z_i^L = 0$.

Для произвольного $\tau > 0$ решение задачи можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_{\min}^L + \tau \frac{A^T - L^T}{A^T} \mathbf{z} = \mathbf{x}_{\min} + \mathbf{z}^L + \tau \frac{A^T - L^T}{A^T} \mathbf{z},$$

где $\mathbf{z} = V^{-1}\boldsymbol{\mu} - \frac{\mathbf{e}^T V^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{e}^T V^{-1}\mathbf{e}} V^{-1}\mathbf{e}$ $\quad (\sum_{i=1}^{N} z_i = 0)$ – единственный вектор в правой части формулы, зависящий от $\boldsymbol{\mu}$.

Решая задачу для всех $\tau \geq 0$, находим эффективное множество X^*.

6.7. Диверсификация портфеля как способ снижения риска

Из формулы (6.2) для расчета дисперсии портфеля становится очевидной роль корреляции (или ковариации) доходностей активов, представленных в портфеле, как фактора увеличения или снижения риска:

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} x_i x_j V_{ij} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j,$$

где ρ_{ij} – корреляция между ρ_i и ρ_j, $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$, $i, j = \overline{1, N}$.

Чем больше отрицательных корреляций (ковариаций) между доходностями активов, тем меньше показатель дисперсии для одного и того же уровня ожидаемой доходности.

Так, в случае $N = 2$ формула для расчета дисперсии портфеля из двух активов приобретает следующий вид:

$\sigma_x^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + (1 - x_1)^2 \sigma_2^2 + 2 x_1 (1 - x_1) \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$.

Если $\rho_{12} = -1$, то дисперсия при прочих равных условиях будет минимальной. И наоборот, портфель, составленный из 2-х абсолютно положительно коррелированных активов ($\rho_{12} = +1$), будет связан с наибольшим риском. Рис. 6.6 наглядно демонстрирует это.

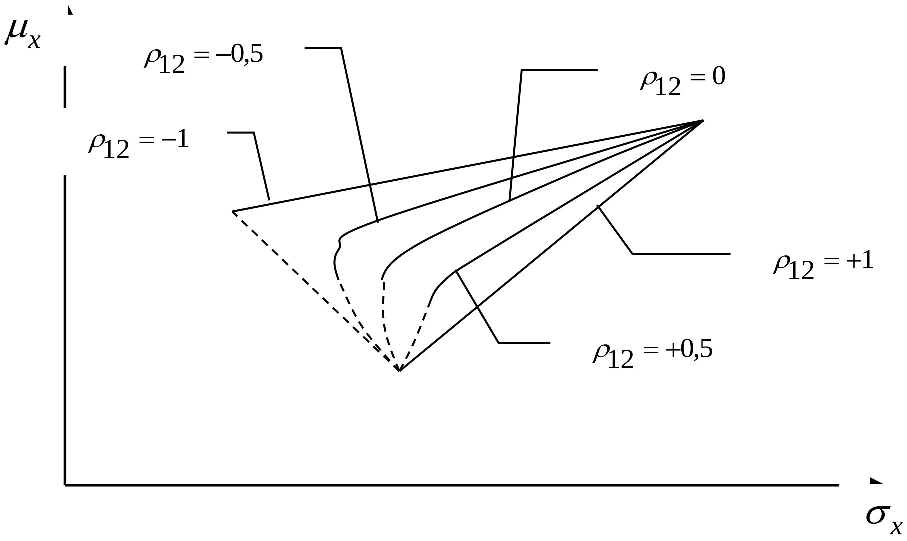

Рис. 6.6. Эффективное множество и корреляция для двух активов

Требование отрицательной коррелированности доходностей активов есть один из главных принципов диверсификации портфеля. Помимо этого способом снижения риска портфеля является увеличение количества активов N.

Пусть портфель составлен из N активов с некоррелированными доходностями ($\rho_{ij}=0 \ \ \forall\ i\neq j,\ i,j=\overline{1,N}$) и ограниченными дисперсиями ($\sigma_i^2 \leq \sigma_{\max}^2 \ \ \forall\ i=\overline{1,N}$). Тогда:

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_i^2 \leq \sigma_{\max}^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

Если, например, $x_i = 1/N$, то:

$$\sigma_x^2 \leq d \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \leq \frac{\sigma_{\max}^2}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Та составляющая риска, которая может быть редуцирована диверсификацией, т.е. является управляемой, называется *несистематическим риском*. Включение в портфель большого количества отрицательно коррелированных активов позволяет снизить несистематический риск. Другая составляющая риска – *систематический риск* – не поддается управлению диверсификацией и связана со стохастической природой финансового рынка. Оценка систематического и несистематического риска будет рассмотрена в следующей главе.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите предположения, но которых строится модель Марковица
2. Как определяется доходности рисковых ценных бумаг и их характеристики (математическое ожидание и ковариации)

3. Как определяется ожидаемая доходность и дисперсия портфеля?
4. Записать три постановки оптимизационных задач выбора оптимального портфеля
5. Как определяется эффективное множество портфелей?
6. Перечислите условия, при которых задача оптимизации имеет решение
7. При каких условиях матрица ковариации доходностей ценных бумаг будет вырождена?
8. Записать оптимизационную задачу выбора портфеля при заданном значении его доходности и способ ее решения
9. Запишите решение оптимизационной задачи выбора портфеля с заданной доходностью и постройте эффективное множество портфелей
10. Записать оптимизационную задачу выбора портфеля с учетом отношения инвестора к риску и способ ее решения
11. Запишите решение оптимизационной задачи выбора портфеля с учетом отношения инвестора к риску и постройте эффективное множество портфелей
12. Записать оптимизационную задачу выбора портфеля с безрисковым активом при заданном значении его доходности и способ ее решения
13. Запишите решение оптимизационной задачи выбора портфеля с безрисковым активом при заданном значении его доходности и постройте эффективное множество портфелей
14. Записать оптимизационную задачу выбора портфеля с безрисковым активом с учетом отношения инвестора к риску и способ ее решения
15. Запишите решение задачи выбора портфеля с безрисковым активом с учетом отношения инвестора к риску и постройте эффективное множество портфелей
16. Записать оптимизационную задачу выбора портфеля Марковица при наличии дополнительных ограничений и способ ее решения
17. Записать доходность и дисперсию инвестиционного портфеля с учетом обязательств
18. Записать оптимизационную задачу выбора инвестиционного портфеля с учетом обязательств и способ ее решения
19. Записать решение задачи выбора инвестиционного портфеля с учетом обязательств
20. Как влияют ковариации доходностей на риск портфеля?
21. Как диверсификация портфеля снижает его риск?
22. Что такое систематический и несистематический риск портфеля

Литература

1. Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С. Математические методы финансового анализа/ Под научной редакцией Мельникова А.В. –М.:АНКИЛ, 2006.–440с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: / https://etextbook.files.wordpress.com/2011/06/d187d0b0d181d182d18c1.pdf
2. Бочаров, П.П. Финансовая математика [Электронный ресурс] : учебник / П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2007. — 575 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2116
3. Капитоненко, В.В. Задачи и тесты по финансовой математике: учебное пособие [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон. дан. — М. : Финансы и статистика, 2011. — 368 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=28354.
4. Чусавитина, Г.Н. Основы финансовой математики [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон. дан. — М. : ФЛИНТА, 2014. — 175 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=51868 — Загл. с экрана.
5. Брусов, П.Н. Задачи по финансовой математике (для бакалавров) [Электронный ресурс] : учебное пособие / П.Н. Брусов, П.П. Брусов, Н.П. Орехова [и др.]. — Электрон. дан. — М. : КноРус, 2014. — 286 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=53412
6. Ширшов, Е.В. Финансовая математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е.В. Ширшов, Н.И. Петрик, А.Г. Тутыгин [и др.]. — Электрон. дан. — М. : КноРус, 2014. — 138 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=53582