МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»
Кафедра автоматизированных систем управления

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

Индивидуальные задания

ТОМСК – 2019

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА
Индивидуальные задания

Составитель А.А. Мицель
Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – 2019. – 85 с.

В пособии приведены варианты индивидуальных заданий по следующим разделам финансовой математики: реальные инвестиции, количественный финансовый анализ ценных бумаг с фиксированным доходом, дюрация облигации, инвестиции в портфель облигаций, теория иммунизации портфеля, портфельный анализ в условиях неопределённости.
Пособие подготовлено для студентов, обучающихся по направлению 09.04.01 – «информатика и вычислительная техника (магистратура)».

СОДЕРЖАНИЕ

Индивидуальное задание № 1.

Инвестиционные процессы

1.1. Наращение и дисконтирование денежных сумм

Наращение по простым процентам

Наращенная сумма – это первоначальная сумма с начисленными на эту сумму процентами. Наращенная сумма S вычисляется по формуле

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i). \tag{1.1}$$

Здесь P – начальная сумма, n – срок долга, i – процентная ставка.
Величина $(1 + n \cdot i)$ называется **множителем наращения** по простой процентной ставке, т.е. множитель наращения показывает накопленную к моменту n будущую стоимость 1 д.е., вложенной в момент $t = 0$ на срок n.

Наращение по сложным процентам

В долгосрочных финансовых операциях для наращения первоначальной суммы применяют сложные проценты. При начислении сложных процентов за базу принимают не первоначальную сумму, а сумму, получившуюся после начисления процентов и присоединения их к сумме долга в предыдущих периодах.

В общем виде формула наращения по сложным процентам запишется так:

$$S = P(1 + i)^n. \tag{1.2}$$

Множитель $(1 + i)^n$ называется множителем **наращения** по формуле сложных процентов.

Дисконтирование по простым ставкам

Рассмотрим следующую задачу. По заданной сумме S, которую следует уплатить через время n, требуется определить первоначальную сумму P. В этом случае говорят, что сумма S *дисконтируется***.**

Термин *дисконтирование* в широком смысле означает определение стоимости денежной суммы в данный момент времени при условии, что в будущем она составит величину S. Такой расчёт называется *приведением стоимостного показателя к заданному моменту времени***.**

Величину P, найденную дисконтированием суммы S, называют *современной или приведённой величиной* S **.**

Современная величина P суммы S, вычисленная по простой ставке, равна

$$P = S\frac{1}{1+n\cdot i}. \qquad (1.3)$$

Данная формула называется формулой *математического дисконтирования* (в отличие от банковского дисконтирования или учета, которое здесь не рассматривается).

Величина $\frac{1}{1+n\cdot i}$ называется *дисконтным множителем*, разность $(S-P)$ называется *дисконтом* суммы S.

Дисконтирование по сложной ставке процентов

Современная величина P суммы S, вычисленная по сложной ставке, равна

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S\cdot v^n, \qquad (1.4)$$

где $v^n = \frac{1}{(1+i)^n}$ — дисконтный множитель (множитель дисконтирования).

Если проценты начисляются m раз в год с использованием номинальной ставки i, то

$$P = \frac{S}{(1+\frac{i}{m})^{m\cdot n}} = S\cdot w^{m\cdot n}, \qquad (1.5)$$

где дисконтный множитель $w^{m\cdot n} = \frac{1}{(1+\frac{i}{m})^{m\cdot n}}$.

Сравнение методов наращения

Методы наращения приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

Метод наращения	Формула	Множитель наращения
По простой процентной ставке i	$S = P(1+in)$	$1+in$
По сложной процентной ставке i	$S = P(1+i)^n$	$(1+i)^n$

По номинальной процентной ставке i	$S = P(1+\frac{i}{m})^{nm}$	$(1+\frac{i}{m})^{nm}$
По постоянной силе роста δ	$S = Pe^{\delta n}$	$e^{\delta n}$
По номинальной учетной ставке d	$S = \frac{P}{(1-\frac{d}{m})^{nm}}$	$\frac{1}{(1-\frac{d}{m})^{nm}}$
По сложной учетной ставке d	$S = \frac{P}{(1-d)^n}$	$\frac{1}{(1-d)^n}$
По простой учетной ставке d	$S = \frac{P}{1-nd}$	$\frac{1}{1-nd}$

Сравнение методов дисконтирования

Методы дисконтирования показаны в таблице 1.2.

Таблица 1.2.

Метод дисконтирования	Формула	Дисконтный множитель
По простой учетной ставке d	$P = S(1-nd)$	$1-nd$
По сложной учетной ставке d	$P = S(1-d)^n$	$(1-d)^n$
По номинальной учетной ставке d	$P = S(1-\frac{d}{m})^{nm}$	$(1-\frac{d}{m})^{nm}$
По постоянной силе роста δ	$P = Se^{-\delta n}$	$e^{-\delta n}$
По номинальной процентной ставке i	$P = \frac{S}{(1+\frac{i}{m})^{nm}}$	$\frac{1}{(1+\frac{i}{m})^{nm}}$
По сложной процентной ставке i	$P = \frac{S}{(1+i)^n}$	$\frac{1}{(1+i)^n}$
По простой процентной ставке i	$P = \frac{S}{1+in}$	$\frac{1}{1+in}$

1.2. Краткие сведения о финансовых потоках

Основные определения

Потоком платежей будем называть последовательность (ряд) выплат и поступлений, приуроченных к разным моментам времени.

Поток платежей, все элементы которого - положительные величины, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны, называют **финансовой рентой** или **аннуитетом** вне зависимости от цели, назначения и происхождения этих платежей.

Финансовая рента описывается следующими параметрами:

1. Член ренты - величина каждого отдельного платежа.
2. Период ренты - временной интервал между платежами.
3. Срок ренты - время от начала ренты до конца её последнего периода.
4. Процентная ставка - это ставка, которая используется при наращении или дисконтировании платежей, из которых состоит рента.

Кроме того, могут быть дополнительные параметры: количество платежей в год, количество начислений процентов в год, моменты выплаты платежей (в начале или в конце периода ренты) и т. д.

Виды финансовых рент

Рента называется годовой, если ее период равен одному году.

Рента называется p – срочной, если ее период меньше года и количество

платежей в год равно p.

Рента называется **ограниченной,** если количество платежей конечно, в противном случае рента называется **бесконечной** или **вечной.** Например, долгосрочное обязательство, когда срок финансовой операции продолжителен и заранее не оговаривается, представляет собой вечную ренту.

Ренты бывают **немедленные и отложенные (отсроченные).** Срок немедленных рент начинается с момента заключения контракта. Если рента отложенная, то срок начала выплат отодвигается на какое-то время.

Если платежи осуществляются в конце периода, то такая рента называется **обычной** или **постнумерандо.** Если выплаты осуществляются в начале периода, то такая рента называется **пренумерандо.**

Обобщающие характеристики потоков платежей

Для анализа потоков платежей необходимо уметь рассчитывать их основные обобщающие характеристики. Таких характеристик две: наращенная сумма и современная величина ренты.

Наращенной суммой потока платежей называют сумму всех последовательных платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Современной величиной потока платежей называют сумму всех платежей, дисконтированных на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или упреждающий его.

1.3. Наращенная сумма потока платежей

Наращенная сумма годовой ренты

Наращенная сумма годовой ренты вычисляется по формуле:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Величина

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (1.6)$$

называется коэффициентом наращения годовой ренты. Здесь R – размер платежа, n – срок ренты, i – процентная ставка.

С использованием введенного обозначения выражение для наращенной суммы годовой ренты можно записать так:

$$S = Rs_{n,i}. \qquad (1.7)$$

Если платежи поступают в начале периода, то коэффициент наращения ренты равен

$$\hat{s}_{n,i} = (1+i)\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i} = (1+i)\cdot s_{n,i}. \qquad (1.8)$$

Наращенная сумма ренты общего вида

Коэффициент наращения ренты общего вида вычисляется по формуле

$$s^{(p)}_{n,j/m} = \frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{p\left[(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}} - 1\right]} \qquad (1.9)$$

Тогда формула для наращенной суммы примет вид

$$S = Rs^{(p)}_{n,j/m}.$$

Здесь p – количество платежей в год; m – количество начислений процентов в год.
Для p – срочной ренты пренумерандо с начислением процентов m раз в год коэффициент наращения равен

$$\hat{s}_{n,j/m}^{(p)} = (1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}} \frac{(1+\frac{j}{m})^{mn}-1}{p\left[(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}}-1\right]} = (1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}} \cdot s_{n,j/m}^{(p)}. \qquad (1.10)$$

1.4. Современная величина потока платежей

Современная величина годовой ренты

Современная величина ренты (обозначим ее символом A) равна

$$A = \frac{Rv(v^n-1)}{v-1} = R\frac{1-v^n}{i} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (1.10)$$

Величина

$$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (1.11)$$

называется **коэффициентом приведения годовой ренты**.

С учетом этого выражение для современной величины примет вид

$$A = Ra_{n,i}. \qquad (1.12)$$

Если платежи поступают в начале периода, то коэффициент приведения ренты равен

Современная величина ренты общего вида

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m/p}-1}. \qquad (1.13)$$

Здесь

$$a_{mn,j/m}^{(p)} = \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p\left[(1+j/m)^{m/p}-1\right]} \qquad (1.14)$$

– коэффициент приведения общей ренты.

Тогда окончательно формула для современной величины данной ренты примет вид

$$A = Ra^{(p)}_{n,j/m}\,. \tag{1.15}$$

Если платежи поступают в начале периода (рента пренумерандо), то коэффициент приведения вычисляется по формуле

$$a^{(p)}_{mn,j/m} = (1+j/m)^{m/p}\,\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p\left[(1+j/m)^{m/p}-1\right]}\,. \tag{1.16}$$

1.5. Характеристики инвестиционного проекта

В финансовом анализе реальных инвестиций применяют четыре основных показателя:

1) чистый приведённый доход;
2) внутренняя норма доходности;
3) срок окупаемости;
4) индекс рентабельности.

Чистый приведенный доход

Чистый приведенный доход (NPV) - это разность дисконтированных по ставке сравнения на один момент времени (обычно на начало реализации проекта) потоков доходов и вложений.

Эта величина характеризует абсолютный результат инвестиционной деятельности. Рассмотрим последовательно модели различных наиболее характерных вариантов инвестиционных процессов, на основе которых рассчитывается NPV, начиная с простейших.

1. Пусть инвестиции осуществляются одним платежом в начальный момент времени. Отдача от инвестиций поступает один раз в год в конце года в течение n лет. Обозначим K - размер инвестиций, R - размер ежегодного дохода, W - чистый приведенный доход. Таким образом, очевидно, поток доходов можно рассматривать как годовую ренту. Тогда, в соответствии с определением, чистый приведенный доход

$$W = R\frac{1-(1+q)^{-n}}{q} - K\,, \tag{1.17}$$

где q - ставка сравнения, первое слагаемое - современная величина потока доходов.

2. Предположим, что инвестиционные затраты и доходы разделяются на два неравномерных потока платежей, причем процесс отдачи от инвестиций начинается сразу после окончания вложений и все платежи поступают в конце года. Пусть R_j – размеры доходов в году j $\left(j = 1,2,...,n_2\right)$, K_t - инвестиционные расходы в году t $(t = 1,2,...,n_1)$.

Тогда выражение равнение для NPV имеет вид

$$W = v^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} R_j v^j - \sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t\,. \tag{1.18}$$

Здесь $v = \dfrac{1}{1+i}$ – множитель дисконтирования.

3. Предположим, что процессы вложения и отдачи задаются в виде единого неравномерного потока платежей, поступающих один раз в конце года. Это означает, что процессы вложения и получения доходов могут протекать как последовательно, так и параллельно.

Обозначим R_t - размер отдельного платежа. Тогда чистый приведенный доход определится по формуле

$$W = \sum_t R_t v^t, \ t = 1, 2, ..., n_1 + n_2,$$

где $n_1 + n_2$ – полный срок осуществления проекта. В этой формуле платежи R_t, соответствующие вложениям, берутся со знаком «минус».

Внутренняя норма доходности

Для данного показателя в финансовой литературе часто используют сокращенное обозначение IRR (от английского термина Internal Rate of Return).

Под IRR понимают расчётную ставку процентов, при которой капитализация получаемого дохода даёт сумму, равную приведённым инвестициям, и, следовательно, инвестиционные вложения являются окупаемой операцией.

Экономический смысл данного показателя заключается в том, что в случае, если вложения предшествуют потоку доходов, он дает предельное значение нормы дисконтирования, при которой проект еще остается выгодным.

Внутренняя норма доходности q_b рассчитывается из уравнения

$$W = v^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_j \left(\frac{1}{1+q_b} \right)^j - \sum_{t=1}^{n_1} K_t \left(\frac{1}{1+q_b} \right)^t = 0. \qquad (1.19)$$

В качестве q_b берется наименьший положительный корень.

Срок окупаемости

Под сроком окупаемости понимают продолжительность периода, в течение которого сумма доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, становится равной сумме инвестиций, приведённых к тому же моменту времени. Дисконтирование осуществляется по ставке сравнения. Подчеркнем, что при определении срока окупаемости, в отличие от других показателей, все платежи приводятся на момент завершения инвестиций (или, что то же самое, на момент начала периода отдачи).

Рассмотрим, как определяется срок окупаемости $n_{ок}$ в общем случае.

Пусть K - приведённая к началу периода отдачи величина инвестиций, то есть K - наращенная сумма всех платежей, которые составляют вложения $K = \sum_{j=1}^{n_1} K_j (1+q)^j$.

Пусть доходы - произвольный поток поступлений. Тогда срок окупаемости $n_{ок}$ определяется суммированием доходов, дисконтированных по ставке q до тех пор, пока не получим сумму, равную объёму инвестиций, т.е. $K = \sum_{t=1}^{n_{ок}} R_t \dfrac{1}{(1+q)^t}$.

Индекс рентабельности

Индекс рентабельности показывает, сколько денежных единиц современной стоимости будущего денежного потока доходов приходится на одну денежную единицу приведенных инвестиций.

Предположим, что инвестиционные расходы и доходы - переменные потоки платежей, поступающих один раз в конце года. Тогда индекс рентабельности определяется по формуле

$$U = \frac{v^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} R_j v^j}{\sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t}.$$

Здесь в числителе - современная величина потока доходов на момент начала инвестиционного проекта, в знаменателе - инвестиционные расходы, дисконтированные на этот же момент времени.

1.6. Варианты заданий

1. Как изменяется срок окупаемости проекта при изменении величины инвестиций, годовых доходов, ставки процента?

2. Проверить следующие расчеты инвестиционного проекта: K = 4000 д.е., последующий годовой доход при i = 8% годовых равен R = 1000 д.е., длительность проекта n = 6 лет и получено, что чистый приведенный доход NPV = 623 д.е. и срок окупаемости t = 6 лет.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.1.

Таблица 1.1.

Вариант	K, д.е.	i,%	R, д.е.	n, лет	NPV, д.е.	t, лет
1	2000	9	500	6	243	6
2	3000	10	750	7	651	6
3	1000	6	400	7	1233	3
4	1500	9	500	6	743	4
5	4200	7	1000	6	566,5	6
6	3800	7	800	7	511	6
7	3900	9	800	7	126	7
8	4000	9	900	7	530	6
9	4500	8	900	7	186	7
10	5000	8	1100	6	85	6

3. Проверьте расчеты для инвестиционного проекта длительностью n = 6 лет с планируемыми годовыми доходами R=400 д.е. и годовой ставкой i =10% найдены необходимые инвестиции K = 1742 д.е.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.2.

Таблица 1.2.

Вариант	n, лет	R, д.е.	i, %	K, д.е.
1	4	600	11	1861
2	5	500	8	1996
3	5	630	11	2328
4	6	1000	9	4486
5	6	430	11	1819
6	7	300	10	1461
7	7	400	10	1947
8	8	450	13	2159
9	9	400	13	2053
10	10	1000	7	7024

4. Допустим, инвестиционный проект «циклический». Фабрика работает циклами: один год из n=10 она на капитальном ремонте и обновлении, что требует K=$30 000, в остальные девять лет (n-1) цикла фабрика приносит доход R=$10 000 в год. Годовая ставка равна i=10%. Найдите характеристики данного потока платежей. (Уточним, что затраты относят на конец первого года цикла, доход поступает в конце каждого года цикла, начиная со второго года).

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.3.

Таблица 1.3.

Вариант	n, лет	K, $	R, $	i, %
1	9	70000	20000	10
2	9	90000	22000	12
3	9	95000	25000	12
4	9	60000	18000	11
5	9	50000	10000	11
6	10	80000	15000	10
7	10	100000	20000	9
8	10	140000	20000	11
9	10	45000	8000	10
10	11	53000	13000	10

5. В банке взят кредит под инвестиционный проект по ставке g, а доходы от проекта помещаются в другой банк по большей ставке j. Для обеспечения возврата долга обычно создаётся погасительный фонд. Вычислите итоговые характеристики для следующих схем погашения:

1. Основной долг погашается из фонда в конце срока разовым платежом.

Сумма взносов в фонд с процентами на них должна быть равна долгу на момент его уплаты. Проценты по долгу выплачиваются не из фонда.
2. Условия финансового обязательства вместо периодической выплаты процентов предусматривают их присоединение к сумме основного долга.
3. Фонд формируется таким образом, чтобы обеспечить периодическую выплату процентов по долгу (из фонда) и в конце срока возврат основного долга.

Исходные данные. Пусть заем размером D = 1000 д.е. взят в начале года под инвестиционный проект по ставке g = 5 % сроком на n =10 лет, а доходы от проекта помещаются в другой банк по ставке i = 10%.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.4.

Таблица 1.4.

Вариант	D, д.е.	g, %	n, лет	i, %
1	800	5	9	12
2	900	6	9	12
3	1000	5	10	11
4	1100	6	10	12
5	1200	4	9	10
6	1300	5	10	12
7	1400	5	10	11
8	1500	6	10	11
9	1600	5	9	10
10	1700	6	9	10

6. Некто получил наследство в виде солидного банковского счета и теперь его «проедает», беря каждый год со счета в банке определенную сумму и тратя ее в течение года. По сути, это «перевернутый» инвестиционный процесс. Что здесь является инвестициями, сроком окупаемости, внутренней нормой доходности, чистым приведенным доходом. Какие меры должен принять наследник при увеличении темпов инфляции? Расчеты выполнить для следующих исходных данных: K = 30000 д.е., R =6000 д.е., годовая ставка i =10%.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.5.

Таблица 1.5.

Вариант	K, д.е.	R, д.е.	i, %
1	30000	6000	10
2	35000	6500	10
3	40000	7000	10
4	45000	7000	11

5	50000	7500	11
6	55000	7500	11
7	60000	8000	9
8	65000	8000	9
9	70000	9000	9
10	75000	9000	9

7. С помощью компьютера найден размер годовой уплаты R=200,4 д.е. при погашении займа A = 800 д.е. равными годовыми уплатами. Заем выдан на n=5 лет при годовой ставке i=8%. Проверьте компьютерные расчеты.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.6.

Таблица 1.6.

Вариант	A, д.е.	n, лет	i,%	R, д.е.
1	1000	3	10	402,1
2	500	2	9	284,2
3	400	4	5	112,8
4	600	5	8	150,3
5	700	6	8	151,4
6	800	4	9	246,9
7	900	7	10	184,87
8	1000	8	7	167,47
9	1100	6	7	230,78
10	1200	9	11	216,72

8. Рассчитайте ежегодный платеж за аренду оборудования стоимостью P=$20 000 в течение n=10 лет, если к концу аренды остаточная стоимость оборудования будет S=$10 000. Внутреннюю норму j доходности принять равной 15%.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.7.

Таблица 1.7.

Вариант	P, $	n, лет	S,$	j, %
1	10000	10	2000	12
2	15000	5	10000	10
3	20000	11	5000	12
4	25000	10	10000	11
5	28000	8	9000	11
6	30000	12	5000	12

7	35000	10	15000	12
8	37000	9	20000	10
9	40000	15	10000	10
10	41000	10	19000	10

9. Выясните, надо ли купить оборудование стоимостью P= \$20 000 или арендовать его на n=8 лет с ежегодным арендным платежом R= \$3000, если ставка процента j= 6% годовых, а норматив амортизации оборудования h = 15%.

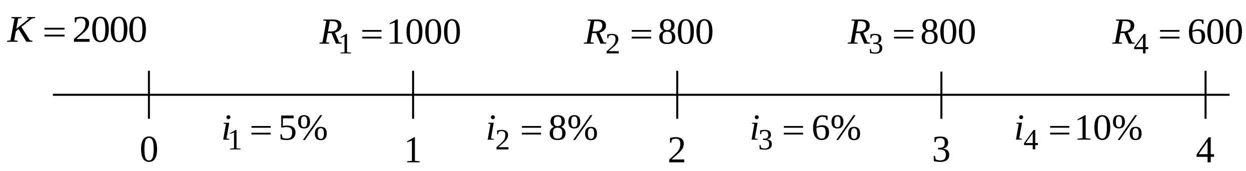
Примечание. Остаточная стоимость оборудования $S = P(1 - n \cdot h)$, где P – стоимость оборудования, n – срок эксплуатации.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.8.

Таблица 1.8.

Вариант	P, \$	n, лет	R, \$	j, %	h, %
1	24000	8	4500	6	9
2	27000	8	4600	6	11
3	30000	8	4000	6	15
4	32000	9	5000	7	11
5	33000	8	4000	6	8
6	35000	8	4000	6	10
7	35000	9	5200	7	11
8	38000	9	5200	7	10
9	40000	10	6000	8	10
10	45000	10	7000	8	10

10. Проанализируйте инвестиционный проект с переменной процентной ставкой:



Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.9.

Таблица 1.9.

Вариант	K, д.е.	R_1, д.е.	R_2, д.е.	R_3, д.е.	R_4, д.е.	i_1, %	i_2, %	i_3, %	i_4, %
1	1500	500	400	600	500	4	5	4	3
2	1500	500	900	400	500	5	7	4	7
3	2000	1000	800	800	500	5	8	5	9
4	2500	900	1000	1000	500	6	5	4	7
5	3000	1500	800	750	750	4	7	6	8
6	3200	1000	1800	500	800	7	8	5	6
7	3900	900	1500	1800	800	6	7	5	4
8	4000	2000	1000	1900	900	5	3	4	6
9	4500	2000	1500	500	1500	5	6	7	4
10	5000	1000	1900	2000	1800	4	6	5	6

Индивидуальное задание № 2

Влияние фактора неопределенности на экономические расчеты

2.1. Плавающая ставка процента

Рассмотрим три варианта начисления процентов за пользование деньгами в единичном промежутке:

1) в конце промежутка по ставке i начисляются проценты;

2) в конце промежутка начисляются проценты по случайной ставке, в среднем ставка равна i процентов;

3) проценты начисляются дважды: половина – незадолго до конца промежутка и вторая половина – на таком же временном расстоянии после окончания промежутка.

Первый вариант начисления процентов — это вариант детерминированного финансового анализа, т.е. анализа в условиях определенности. Поэтому проанализируем второй и третий варианты. Достаточно ограничиться рассмотрением единичной денежной суммы.

Второй вариант. Пусть $f(x)$ — плотность распределения случайной ставки x, среднее значение которой равно $i = M[x] = \int x \times f(x)dx$. Тогда начисляемые процентные деньги на сумму P есть случайная величина $I = P \cdot x$ с плотностью $f(x)$ и математическим ожиданием $M[I] = M[P \cdot x] = P \cdot i$. Другими словами, детерминированный эквивалент процентных денег есть $P \cdot i$, а детерминированный эквивалент случайной ставки – это среднее значение ставки $i = M[x]$.

Рассмотрим третий вариант. Пусть первая половина процентных денег по ставке i начисляется в момент 1-ε, а вторая половина, так же по ставке i, в момент 1+ε, где ε — небольшое положительное число. Тогда в первый раз начисленные процентные деньги $I_1 = (P/2) \cdot i$, во второй раз так же $I_2 = (P/2) \cdot i$. Приведем эти суммы к моменту 1, для чего I_1 умножим на $(1+i)^{\varepsilon}$, а I_2 умножим на $(1+i)^{-\varepsilon}$. Получаем детерминированный эквивалент суммарных процентных денег в момент 1: $(P/2) \cdot i \cdot [(1+i)^{\varepsilon} + (1+i)^{-\varepsilon}]$. Отсюда, детерминированный эквивалент процентной ставки равен $j = \frac{1}{2} i \times [(1+i)^{e} + (1+i)^{-e}]$. Так как $[(1+i)^{\varepsilon} + (1+i)^{-\varepsilon}] > 2$, то получившиеся процентные деньги больше, чем $P \cdot i$, т.е. детерминированный вариант процентной ставки $j > i$.

Как можно представить второй и третий варианты? Пусть банк имеет много филиалов, относительно самостоятельных в части выплаты процентов. Второй вариант получается, когда все они начисляют проценты в конце промежутка, но сами проценты случайные, хотя в среднем по всему банку процентная ставка равна i (усреднение по географическому признаку). Третий вариант получается, когда в каждом филиале начисляются одни и те же проценты, но день начисления случаен. Такая случайность есть начисление процентов (неслучайных) в случайный момент времени (здесь усреднение по времени начисления процентов).

Итак, детерминированный эквивалент случайных процентов (второй вариант) равен математическому ожиданию случайной величины начисляемых процентов. Детерминированный эквивалент случайного во времени начисления процентов (третий вариант) больше, чем начисляемых не случайных процентов по ставке i.

Аналогичные выводы следуют по поводу различных вариантов дисконтирования к современному моменту будущих сумм. Рассмотрим три варианта выплаты займа (в долг взята сумма P), взятого на единичный промежуток времени по ставке i процентов:

1) в конце промежутка выплачивается сумма $P\cdot(1+i)$ — детерминированный вариант;
2) в конце промежутка выплачивается случайная сумма в среднем равная $P\cdot(1+i)$);
3) сумма выплачивается дважды: половина — незадолго до конца промежутка и вторая половина — на таком же временном расстоянии после окончания промежутка.

Анализ, подобный приведенному выше, показывает, что во втором варианте средняя величина дисконтированных к современному моменту выплат равна P; в третьем варианте средняя величина дисконтированных к современному моменту выплат оказывается больше, чем P. Итак, для кредитора предпочтительнее третий вариант.

Все это хорошо известно финансистам и может быть выражено словами: *если возможно, свой долг плати позже, долги себе собирай пораньше.*

Общее понятие детерминированного эквивалента финансового показателя

Пусть f — какой-нибудь финансовый показатель (ставка процента, доходность, срок окупаемости и т.п.), являющийся случайной величиной. Предполагается, что финансовая операция, показателем которой является f, может быть повторена большое число раз (теоретически, хотя бы мысленно, неограниченное число раз). Тогда детерминированный эквивалент финансового показателя f есть такое значение его в детерминированном финансовом анализе, которое дает в среднем тот же результат, что и он сам.

Часто детерминированным эквивалентом является математическое ожидание f.

2.2. Случайные потоки платежей

Такие потоки могут быть весьма разнообразны:

1) полностью детерминированный поток — моменты платежей и величины платежей полностью определены;

2) частично детерминированный поток — полностью определены моменты платежей либо величины платежей и т.д.

Ограничимся рассмотрением двух примеров.

Пример 2.1. По договору в течение 5 лет в конце каждого квартала издательство переводит на счет автора случайную сумму денег (зависит от числа проданных книг). Предположим, что эта сумма равномерно распределена от 1000 до 1400 руб. Как найти современную величину этой ренты?

Решение. Так как момент платежей точно определен, то для расчетов можно заменить поток реальных платежей потоком их математических ожиданий и использовать соответствующую формулу из детерминированного анализа. Так как переводимая сумма равномерно распределена, то ее математическое ожидание есть середина промежутка распределения, т.е. 1200 руб. Для простоты пусть квартальная ставка сложных процентов i = 3%, тогда искомая современная величина равна

1200·a(20, 3) = 1200·14,877 = 17 862 руб.

Пример 2.2. Предположим, что платежи R следуют друг за другом через случайные промежутки времени, распределенные по показательному закону с параметром λ>0 (пуассоновский поток платежей). Найдем математическое ожидание современной величины такого случайного потока платежей.

Решение. Дисконтируем к современному моменту первый платеж. Для этого надо подсчитать интеграл

$$R\cdot\int_0^{\infty}(1+i)^{-t}\cdot\lambda e^{-\lambda t}dt = R\cdot\int_0^{\infty}\lambda e^{-t(\lambda+\ln(1+i))}dt = R\cdot\lim_{A\to\infty}\int_0^{A}\lambda e^{-t(\lambda+\ln(1+i))}dt =$$

$$= R\cdot\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{\lambda}{\lambda+\ln(1+i)}e^{-t(\lambda+\ln(1+i))}\Big|^{A}\right) = \frac{R\cdot\lambda}{\lambda+\ln(1+i)}.$$

Параметр λ в показательном законе есть обратная величина к математическому ожиданию, и получаем, что $\lambda = 1/T$, где T – среднее время между платежами, и окончательно, что математическое ожидание современной величины первого платежа равно $R/[1+T\ln(1+i)]$.

Далее, так как промежуток времени между платежами распределен одинаково, то математическое ожидание современной величины второго платежа равно $R/[1+T\ln(1+i)]^2$, третьего – $R/[1+T\ln(1+i)]^3$ и т.д. Сумма всех этих величин и даст искомую величину. Поскольку $1/[1+T\ln(1+i)]$ < 1, то члены суммы есть члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии и, значит вся сумма равна $R/T\ln(1+i)$.

В частности, при T =1 получаем $R/\ln(1+i)$. Заметим, что если бы поток был неслучайным и платежи следовали бы друг за другом через единичный промежуток времени, то современная величина такого потока была бы R/i. Так как $\ln(1+i)$ < i, то современная величина случайной ренты больше, чем регулярной.

Потоки платежей со случайным временем платежа часто встречаются на практике. Например, таков поток платежей оплаты за квартиру — ведь редко кто платит за квартиру в строго определенный день. Если бы в примере 1 издательство переводило автору деньги за каждую проданную тысячу экземпляров книги, то получился бы поток неслучайных платежей в случайные моменты времени.

Еще одним важным примером случайного потока (неслучайных) платежей является поток выплат страховых сумм на случай смерти родственникам умершего. Анализом подобных потоков платежей занимается так называемая актуарная математика.

2.3. Расчет доходности вероятностных операций в условиях неопределенности

В детерминированном анализе доходность d финансовой операции определяется из уравнения $K = H(1+d)$ или $d = (K-H)/H$, где *Н, К* — денежные оценки соответственно начала операции (затраты, инвестиции) и конца операции (доход, наращенный капитал). Вообще говоря, эти величины также могут быть неопределенны. Однако начальная оценка чаще все же точно известна. Неопределенность конечной оценки может быть двоякой: неполностью известна ее величина, но момент окончания операции известен точно; или же известна полностью ее величина, но окончиться операция может в случайный момент. Подсчет доходности операции в процентах годовых в этих двух случаях производится по-разному. В первом случае вместо конечной оценки используется ее математическое ожидание.

Пример 2.3. Начальный капитал «челнока» равен $1000. Опытные люди сказали ему, что в результате поездки за товаром и его последующей реализации капитал может с равной вероятностью возрасти в два раза, не измениться или уменьшиться в два раза (с вычетом сопутствующих издержек). Найти среднюю ожидаемую доходность планируемой операции.

Решение. Математическое ожидание конечной оценки капитала равно, очевидно, (2000+1000+500)/3 = 3500/3, так что средняя ожидаемая доходность будет (3500/3 – 1000)/1000 = 500/3000 = 17%.

Для иллюстрации подсчета доходности во втором случае рассмотрим следующий пример.

Пример 2.4. Запас золота в месторождении известен, как и начальные инвестиции в его разработку. Фактически полная отдача месторождения тоже фиксирована, следовательно, доходность (в процентах годовых) будет зависеть от длительности выработки месторождения: чем дольше будет вырабатываться месторождение, тем меньше доходность.

В случае, когда начальная оценка операции не может быть точно определена, доходность операций может быть рассчитана как математическое ожидание доходностей вариантов операции с учетом их вероятностей.

Пример 2.5. Базовый вариант операции, вероятность которого оценивается в 0,9, предусматривает затраты $10 000, а прибыль — $7000, следовательно, его доходность равна 0,7; с вероятностью 0,1 возможен и другой вариант, при котором затраты равны $20 000, а прибыль равна $10 000. Какова средняя ожидаемая доходность операции?

Решение. Эта доходность равна 0,9·0,7+0,1·0,5 = 0,68.

2.4. Варианты заданий

1. Дайте определение детерминированного эквивалента плавающей процентной ставки в простейшем случае начисления процентов за пользование деньгами на единичном промежутке.

2. Найдите детерминированный вариант процентной ставки, если ее начисление происходит дважды: первая половина в момент t_1=0,9; вторая половина — в момент t_2=1,1.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.1.

Таблица 2.1

Вариант	t_1	t_2
1	0,7	1,3
2	0,75	1,25
3	0,8	1,2
4	0,85	1,15
5	0,86	1,14
6	0,87	1,12
7	0,88	1,12
8	0,89	1,11
9	0,91	0,09
10	0,95	1,05

3. Найти детерминированный вариант процентной ставки, если с вероятностью p_1=1/3 ее начисление происходит в момент t_1=0,9, и с вероятностью p_2=2/3 — в момент t_2=1,1.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.2.

Таблица 2.2

Вариант	p_1	t_1	p_2	t_2
1	1/3	0,7	2/3	1,3
2	1/4	0,75	3/4	1,25
3	1/3	0,8	2/3	1,2
4	1/5	0,85	4/5	1,15
5	1/4	0,86	3/4	1,14
6	2/3	0,87	1/3	1,12
7	3/4	0,88	1/4	1,12
8	2/3	0,89	1/3	1,11
9	3/4	0,91	1/4	0,09
10	4/5	0,95	1/5	1,05

4. Найдите детерминированный вариант процентной ставки, если момент ее начисления равномерно распределен на временном отрезке $[a;b]$ (a=0,9,

b=1,1).

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.3.

Таблица 2.3

Вариант	a	b
1	0,7	1,3
2	0,75	1,25
3	0,8	1,2
4	0,85	1,15
5	0,86	1,14
6	0,87	1,12
7	0,88	1,12
8	0,89	1,11
9	0,91	0,09
10	0,95	1,05

5. Проанализируйте инвестиционный проект с параметрами: инвестиции K = 1000, доход в первый год R_1 = 600, доход во второй год R_2 = 600, процентная ставка i_1=8%. Окупаются ли инвестиции? Эксперты признали проект среднерисковым и увеличили процентную ставку дисконтирования будущих доходов до i_2=13%. Окупятся ли инвестиции в этом случае?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.4.

Таблица 2.4

Вариант	K	R_1	R_2	i_1, %	i_2, %
1	500	300	300	7	15
2	600	350	350	10	14
3	700	400	400	8	15
4	800	450	450	6	10
5	900	500	500	7	11
6	1100	650	650	8	13
7	1300	800	800	9	15
8	1500	950	950	7	10
9	2000	1100	1100	8	14
10	3000	1600	1600	7	13

6. В случайный момент, равномерно распределенный на отрезке [0,1], приходит платеж R. Найдите математическое ожидание его современной величины.

7. Найдите математическое ожидание современной величины случайной ренты: платежи R осуществляются раз в год с равной вероятностью либо 1 октября, либо 1 декабря. Ставка равна i .

Решить аналогичную задачу, взяв данные (даты платежей) из таблицы 2.5.

Таблица 2.5

Вариант	Дата 1	Дата 2
1	1 Февраля	1 Апреля
2	1 Марта	1 Мая
3	1 Апреля	1 Июня
4	1 Мая	1 Июля
5	1 Июня	1 Августа
6	1 Июля	1 Сентября
7	1 Августа	1 Октября
8	1 Сентября	1 Ноября
9	1 Марта	1 Июля
10	1 Апреля	1 Августа

8. Найдите математическое ожидание современной величины случайной ренты, в которой момент годового платежа равномерно распределен в текущем году.

9. Сегодня днем цена акции равна P=100 руб. За сутки цена может вырасти на ΔP=10% с вероятностью 1/3, с такой же вероятностью уменьшится в n=1,1 раза и с такой же вероятностью 1/3 остаться равной 100 руб. Найдите распределение цены акции завтра и послезавтра.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.6.

Таблица 2.6

Вариант	P, руб.	ΔP, %	n
1	50	10	1,15
2	70	8	1,1
3	90	13	1,2
4	130	10	1,1
5	140	14	1,2
6	150	5	1,07
7	160	12	1,15
8	170	15	1,1
9	180	20	1,25
10	200	25	1,4

10. Осуществляется одновременно множество инвестиционных проектов. Инвестиции в каждый проект равны K=$5000, а будущий годовой доход случаен по проектам — равномерно распределен от R_1=500 до R_2=3000 долл. Какая часть проектов окупится в течение n=10 лет? Процентную годовую ставку принять равной i=8%.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.7.

Таблица 2.7

Вариант	K,$	R_1, $	R_2, $	n, лет	i, %
1	3000	600	2000	5	7
2	4000	800	3500	5	9
3	6000	1000	3000	6	8
4	7000	1000	2500	7	7

5	8000	800	4000	10	8
6	9000	1000	4000	9	9
7	10 000	1000	5000	10	6
8	15 000	1500	3000	10	7
9	20 000	2000	5000	10	8
10	25 000	2500	4000	10	9

11. В начале года страховая компания кладет в банк R д.е. под i % годовых. В любой момент года возможен страховой случай, когда компании придется выплатить R д.е. страхового возмещения. Найдите математическое ожидание суммы на счете компании к концу года.

12. Проанализируйте инвестиционный проект, начальные инвестиции в который равны R в момент 0, а поток будущих доходов есть пуассоновский поток R платежей с плотностью $\lambda > 0$ платеж в ед. времени. Ставка процента равна i.

13. Предположим, что вкладчик срочного годового вклада может в любой момент востребовать свой вклад. При этом банк выплачивает за действительное время вклада проценты из расчета i_1=10% годовых вместо i_2=30% по срочному вкладу. Каков в среднем потерянный процент вкладчика?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.8.

Таблица 2.8

Вариант	i_1, %	i_2, %
1	5	15
2	5	20
3	6	20
4	7	25
5	8	25
6	9	30
7	10	25
8	11	35
9	12	35
10	13	40

Индивидуальное задание № 3

Ценные бумаги с фиксированным доходом

3.1. Общие сведения о безрисковых ценных бумагах

К ценным бумагам с фиксированным доходом (безрисковым ценным бумагам) относятся ценные бумаги, приносящие фиксированный доход в виде процентов - облигации, различные сертификаты, привилегированные акции и другие ценные бумаги, по которым выплачивается заранее обусловленный доход. Основным видом ценных бумаг с фиксированным доходом являются облигации.

Основные параметры облигации:

1. Номинальная цена или выкупная цена, если она отличается от номинала.
2. Дата погашения.
3. Норма доходности или купонная ставка. Это процентная ставка, по которой регулярно выплачивается доход владельцу облигации.
4. Сроки выплаты процентов.

Под курсом облигации понимают покупную цену одной облигации в расчете на 100 денежных единиц номинала.

Пусть P - рыночная цена, N - номинал, K - курс. Тогда, по определению

$$K = \frac{P}{N}100$$

Основные задачи анализа облигаций:

1) определение полной доходности облигации;
2) определение внутренней стоимости облигации и выявление неверно оцененных рынком ценных бумаг;
3) оценка риска, связанного с вложениями в облигации.

3.2. Определение полной доходности облигаций

Общий доход от облигаций складывается из трёх элементов:

1) периодически выплачиваемого купонного дохода;
2) изменения рыночной цены облигации за определённый период времени. Если облигация была куплена по цене ниже номинала, или, как говорят, с дисконтом, то этот элемент доходности - положительная величина. Если облигация была куплена по цене выше номинала или, как говорят, с премией, то этот элемент доходности будет отрицательной величиной. Если покупная цена равна номиналу, то этот элемент доходности отсутствует;

Показатель полной доходности измеряет реальную финансовую эффективность облигации для инвесторов и обычно определяется в виде годовой ставки сложных процентов. Для этой ставки в финансовой литературе используют различные наименования - **доходность к погашению, внутренняя доходность** облигации.

Определение. Годовая внутренняя доходность облигации r – это годовая ставка сложных процентов, по которой современная стоимость потока платежей по облигации равна рыночной стоимости P облигации в момент $t = 0$:

$$P = \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}} \; . \tag{3.1}$$

где $t_1, t_2, ..., t_n$ – моменты времени поступления платежей $C_1, C_2, ..., C_n$.
Здесь внутренняя доходность облигации определяется как годовая доходность, численное значение которой равно наименьшему положительному корню уравнения (3.1).

Рассмотрим частные случаи формулы (3.1).

Доходность облигации без выплаты процентов

Такая облигация имеет один источник дохода для инвестора - разность между выкупной ценой облигации (номинал) и ценой приобретения (рыночной ценой).

Пусть P - рыночная цена облигации (цена покупки), N - номинал, n - срок до погашения. Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$N\left(\frac{1}{1+r}\right)^n = P,$$

где r – искомая ставка доходности.

Доходность облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов

Доход от этого вида облигаций получают только в виде периодически выплачиваемых процентов от номинала. Пусть проценты выплачиваются один раз в конце года, g ~ купонная ставка, тогда gN - ежегодно получаемый доход.
Выплату потока процентных платежей можно рассматривать как вечную ренту. Приравняем эту величину покупной цене. Уравнение (3.1) примет вид

$$\frac{gN}{r} = P,$$

Доходность облигации с выплатой процентов в конце срока

Для такого вида облигаций проценты начисляются и выплачиваются в конце срока в виде одной суммы вместе с номиналом. Эта облигация имеет два источника дохода:
1) проценты за весь период займа;
2) прирост капитала, т.е. разность номинала и покупной цены.

В конце срока владелец такой облигации получает сумму $N(1+g)^n$.
Дисконтируем эту величину и приравняем результат к цене приобретения. В результате (3.1) примет вид

$$\frac{N(1+g)^n}{(1+r)^n} = P$$

из которого определим ставку r.

Определение доходности облигации с периодической выплатой процентов, погашаемой в конце срока

Суммарный доход от облигации данного вида складывается из двух элементов:

1) текущего дохода, реализуемого с помощью купонов;

2) дохода, получаемого в конце срока (равного номиналу или выкупной цене, если она не совпадает с номиналом).

Уравнение (3.1) для этой облигации имеет вид

$$\frac{N}{(1+r)^n}+\frac{Ng}{p}\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{(1+r)^{1/p}-1}=P,$$

где p – количество купонных выплат в год.

Определение доходности облигации, купленной на вторичном рынке

Пусть P – рыночная стоимость облигации в момент $t=0$, купоны по которой выплачиваются p раз в год. Предположим, облигация продается через время τ после последней перед продажей купонной выплаты, когда до погашения остается n купонных выплат. Уравнение (3.1) в этом случае приобретает вид

$$P=\sum_{i=1}^{n}\frac{q}{\left(1+r\right)^{\frac{i}{p}-\tau}}+\frac{N}{\left(1+r\right)^{\frac{n}{p}-\tau}} \tag{3.2}$$

Годовая полная доходность r купонной облигации определяется как корень уравнения (6.3).

Количество купонных выплат n и время τ рассчитываются по формулам

если $T\cdot p$ – целое, то $n=T\cdot p$ и $\tau=0$;

если $T\cdot p$ – не целое, то $n=[T\cdot p]+1$ и $\tau=\dfrac{n}{p}-T$,

где T – срок гашения облигации в годах.

Доходность портфеля облигаций

Доходность портфеля измеряется в виде годовой ставки сложных процентов. Эта ставка определяется из решения уравнения, в котором общая стоимость облигаций, входящих в портфель, приравнивается к сумме современных величин всех видов платежей по облигациям. Пусть S_t - элемент потока платежей в момент времени t, Q_j - количество облигаций вида j, входящих в портфель, P_j - цена приобретения одной облигации вида j. Уравнение для определения доходности имеет вид

$$\sum_t S_t v^t-\sum_j Q_j P_j=0$$

Здесь $\sum\limits_j Q_j P_j$ – рыночная стоимость портфеля, $\sum\limits_t S_t v^t$ – сумма современных величин всех платежей по всем облигациям, которые входят в портфель.

Ставка определяется численным методом.

3.3. Оценивание облигаций

Возможны два подхода к решению данной задачи:

1. Ставка доходности к погашению облигаций, которые анализирует инвестор, сравнивается со значением ставки, которое является «справедливым», по мнению инвестора. Свое мнение инвестор формирует на основе анализа как характеристик облигации, так и текущей рыночной ситуации. Если доходность облигации выше справедливой, то говорят, что облигация недооценена и в этом случае она – кандидат на покупку. Если доходность к погашению меньше справедливой, то облигацию называют переоцененной, и тогда она – кандидат на продажу.
2. Инвестор оценивает истинную или внутреннюю стоимость облигации и сравнивает её с рыночной ценой. Если текущая рыночная цена меньше внутренней стоимости, то облигация недооценена рынком, и наоборот, если текущая рыночная стоимость больше внутренней стоимости, то облигация переоценена.

Обе процедуры анализа и оценки облигации основаны на методе капитализации дохода, т.е. на приведении всех платежей по облигации к настоящему моменту времени. Рассмотрим первый подход.

Доходность к погашению

Найденную из решения уравнения (3.1) ставку r сравниваем с некоторой справедливой, по мнению инвестора, ставкой r^*.

Если $r > r^*$, то данная облигация недооценена.

Если $r < r^*$, то облигация переоценена на рынке.

Если $r = r^*$, то облигация оценена рынком справедливо

Внутренняя стоимость

Метод, основанный на определении внутренней стоимости, предполагает, что внутренняя стоимость любого актива, в том числе облигации, определяется дисконтированными величинами платежей, которые инвестор ожидает получить в будущем за счет владения этим активом.

Определим внутреннюю стоимость облигации следующим образом:

$$V = \frac{C_1}{1+r^*} + \frac{C_2}{(1+r^*)^2} + ... + \frac{C_n}{(1+r^*)^n}$$

или

$$V = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r^*)^t}.$$

Данную модель называют **базовой моделью оценивания облигации** (The Basic Bond Valuation Model).

Чистая приведенная стоимость (NPV) облигации:

$$NVP = V - P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r^*)^t} - P.$$

Если NVP > 0, то облигация недооценена рынком; если NVP < 0, то переоценена. Любая облигация, у которой $r > r^*$, будет иметь NVP > 0 и наоборот.

3.4. Оценка риска, связанного с вложениями в облигации

Выделяют два основных вида рисков:

1) кредитный;
2) рыночный.

Кредитный риск связан с возможностью отказа эмитентом от своих обязательств, что может повлечь либо полное прекращение выплаты текущих платежей и выкупной цены, либо нарушение оговоренных сроков выплат.

Рыночный риск связан с колебаниями рыночной процентной ставки, которые в значительной мере влияют на изменение внутренней стоимости облигации и, соответственно, рыночной цены облигации.

Рыночный и кредитный риски связаны со сроком облигации - чем больше срок, тем выше риск. Однако просто срок облигации, т. е. период времени от ее приобретения до погашения, не учитывает особенность распределения доходов во времени у разных видов облигаций - так называемый *профиль доходов*. Очевидно, при прочих равных условиях, риск вложений в облигации, по которым периодически выплачиваются проценты, меньше, чем риск вложений в облигации без выплаты процентов.

Рассмотрим два показатели (средний срок и среднюю продолжительность платежей), которые позволяют измерять риск с учетом профиля доходов.

Средний срок

Этот показатель учитывает сроки выплат всех видов облигаций в виде взвешенной среднеарифметической величины. В качестве весов берутся размеры платежей. Таким образом, чем больше сумма платежа, тем большее влияние на средний срок оказывает срок выплаты этого платежа.

Средний срок определяется по формуле

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot C_i}{\sum_{i=1}^{n} C_i}. \qquad (3.3)$$

где C_i – размер платежа в момент времени t_i, n – количество платежей.

Дюрация

В общем виде дюрация определяется по формуле

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i C_i v^{t_i}}{\sum_{i=1}^{n} C_i v^{t_i}}, \qquad (3.4)$$

где v - множитель дисконтирования по ставке доходности к погашению r, т.е.

$v = \frac{1}{1+r}$; $C_1, C_2, ..., C_n$ – платежи по облигации через моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$. Срок гашения $T = t_n$.

3.5. Варианты заданий

1. Что хорошо для владельца ценной бумаги: увеличение или уменьшение действующей процентной ставки в период владения этой бумагой, если эта бумага: а) облигация; б) акция; в) депозитный сертификат.

2. Найдите курс облигации без погашения с периодической — раз в год — выплатой процентов при q = 8% , i = 5% . Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен K =120.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.1.

Таблица 3.1

Вариант	q, %	i, %	K
1	6	4	100
2	6	3	115
3	7	5	120
4	7	4	110
5	8	5	130
6	8	4	140
7	9	5	120
8	9	6	150
9	10	6	160
10	10	6	140

3. Найдите курс бескупонной облигации за m=5 лет до погашения при i = 6%. Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен K =70.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.2.

Таблица 3.2

Вариант	m, лет	i, %	K
1	4	5	50
2	4	6	60
3	4	7	100
4	5	4	50
5	5	5	80
6	5	7	90
7	6	4	120
8	6	5	70
9	6	6	90
10	6	7	80

4. Для бескупонной облигации с выплатой купонных процентов при

погашении с помощью компьютера вычислен курс облигации — K=212,7. Проверьте компьютерные расчеты, если купонная процентная ставка q=10%, срок облигации — n=10 лет, до гашения осталось m=4 года и процентная ставка — i=6% годовых.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.3.

Таблица 3.3

Вариант	q, %	n, лет	m, лет	i, %
1	9	10	4	4
2	9	10	5	5
3	9	9	4	5
4	10	10	3	4
5	10	10	4	5
6	10	9	5	7
7	11	10	4	5
8	11	10	3	7
9	11	9	4	6
10	11	8	3	7

5. Найдите курс бескупонной облигации с выплатой процентов при погашении за 5 лет до погашения при i=4%, если облигация выпущена на 10 лет и q = 8%. Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен 100.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.4.

Таблица 3.4

Вариант	n, лет	m, лет	i, %	q, %	K
1	7	3	5	9	100
2	8	4	6	10	120
3	8	3	4	11	150
4	9	5	4	10	140
5	9	4	5	12	120
6	10	4	5	11	90
7	10	6	4	9	100
8	11	4	5	11	110
9	11	6	4	10	130
10	12	4	6	12	150

6. Найдите цену вечной акции с квартальными дивидендами d=200 при годовой ставке i = 8%.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.5.

Таблица 3.5

Вариант	d	i, %
1	150	5
2	160	5
3	170	6
4	180	6

5	190	7
6	200	7
7	210	8
8	220	8
9	230	9
10	240	9

7. Вычислите доходность операции учета векселя по ставке q = 30% за m=3 месяца до его оплаты (временная годовая база равна 360 дней — месяц равен 30 дням). При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере k=0,5% от достоинства векселя.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.6.

Таблица 3.6

Вариант	q, %	m, мес.	k, %
1	20	2	0,2
2	21	2	0,3
3	22	2	0,3
4	23	3	0,4
5	24	3	0,4
6	25	3	0,5
7	30	4	0,5
8	31	4	0,5
9	32	4	0,6
10	33	5	0,6

8. Какова доходность ГКО (в процентах годовых и к погашению), если данный тираж был размещен по цене p=71,8% от номинала (цены гашения)?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.7.

Таблица 3.7

Вариант	p, %
1	68,9
2	69,4
3	70,3
4	71,3
5	72,1
6	72,8
7	73,2
8	73,7
9	74,9
10	75,1

9. По 6% купонной облигации номиналом N=200 д.е. обещают производить каждый квартал купонные платежи. Определить цену облигации в момент, когда до погашения облигации остается: а) 16 месяцев; б) 15 месяцев. Рыночная процентная ставка i = 10 %.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.8.

Таблица 3.8

Вариант	q, %	N, д.е.	i, %
1	4	130	9
2	4	140	9
3	5	150	9
4	5	160	10
5	6	170	10
6	6	180	10
7	7	190	11
8	7	200	11
9	8	210	11
10	8	220	12

10. Дана купонная облигация со следующими характеристиками: номинал 1000 д.е., срок до погашения 9,5 лет, купонные платежи каждые полгода. Внутренняя доходность облигации r = 9% годовых. Сравнить относительные изменения цены облигации при изменении ее внутренней доходности на величину Δr = ± 2% для купонных ставок g_1 = 8% и g_2 = 9% годовых.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.9.

Таблица 3.9.

Вариант	r, %	Δr, %	g_1,%	g_2,%
1	9	±2	8	9
2	8	±2	8	9
3	7	±2	8	9
4	9	±2	9	10
5	9	±2	10	11
6	9	±2	11	12
7	9	±1	8	9
8	9	±2	8	9
9	9	±3	8	9
10	7	±2	8	9

Индивидуальное задание №4

Дюрация и показатель выпуклости облигации

4.1. Связь дюрации с изменением цены облигации

Рассмотрим связь дюрации с относительным изменением цены облигации $\Delta P(r)/P(r)$ при изменении ставки доходности r.

Для относительных изменений цены облигации, связанных с изменением рыночной ставки Δr, справедливы следующие соотношения

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D\frac{\Delta r}{1+r} \tag{4.1}$$

или

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D\frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2}C\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2, \tag{4.2}$$

где $C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)C_i v^{t_i}}{\sum_{i=1}^{n} C_i v^{t_i}}$ – показатель выпуклости облигации, $v = \dfrac{1}{1+r}$.

Дюрацию облигации D в формуле (3.5) можно рассматривать как меру процентного риска облигации – чем больше дюрация, тем больше процентный риск облигации, а показатель выпуклости облигации можно интерпретировать как показатель того, насколько точно дюрация облигации оценивает величину $\dfrac{\Delta P(r)}{P(r)}$.

Свойства дюрации и показателя выпуклости облигации

1. Дюрация облигации не превосходит срока до ее погашения T.
2. Дюрация облигации без выплаты процентов (чисто дисконтная облигация) равна сроку до ее погашения, т.е. $D = T$.
3. Если облигация купонная, то чем больше внутренняя доходность облигации, тем меньше ее дюрация и показатель выпуклости.
4. Если все платежи по облигации отсрочить на t_0 лет, не изменяя ее внутренней доходности r, то дюрация облигации увеличится на t_0 лет, а показатель выпуклости – на $(t_0^2 + 2t_0D + t_0)$ лет.
5. Если до погашения облигации остается больше одного купонного периода, то при заданном значении внутренней доходности r дюрация облигации и показатель выпуклости тем больше, чем меньше купонная ставка.
6. Зависимость дюрации облигации от срока до погашения при неизменных g и r, где g и r – купонная ставка и внутренняя доходность облигации соответственно, сформулируем в виде следующих утверждений. Пусть D_n –

дюрация облигации, платежи по которой выплачиваются p раз в год и до погашения которой остается n купонных периодов. Тогда

6а. Если $g \geq r$, то последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей.

6б. Если $g < r$, то можно указать число n_0 такое, что для облигаций с числом периодов до погашения $n < n_0$ последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей.

6в. $\lim\limits_{n \to \infty} D_n \approx \dfrac{r+p}{rp}$.

4.2. Временная зависимость стоимости инвестиции в облигацию

Рассмотрим облигацию, по которой через $t_1, t_2, ..., t_n = T$ лет от текущего момента времени t = 0 обещают выплатить денежные суммы $C_1, C_2, ..., C_n$ соответственно.

Определение. Стоимость инвестиции в облигацию в момент $t \in [0, T]$ – это стоимость потока платежей $P(t)$ по облигации $C_1, C_2, ..., C_n$ в момент t.

Выражение для расчета стоимости инвестиции в облигацию имеет вид

$$P(t) = \sum_{k=1}^{m} C_k (1+r)^{t-t_k} + \sum_{k=m+1}^{n} C_k \frac{1}{(1+r)^{t_k - t}}. \tag{4.3}$$

Таким образом, стоимость инвестиции в облигацию через t лет после покупки получают, исходя из следующих предположений:

1) все платежи, полученные от облигации до момента t, реинвестируются;

2) в момент t облигации данного выпуска имеются на рынке. Облигация, купленная t лет назад, может быть продана на рынке по существующей на этот момент времени рыночной цене P_t.

Теперь предположим, что в момент покупки облигации t = 0 временная структура процентных ставок такова, что безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Рассмотрим стоимость инвестиции в облигацию через t лет после покупки для двух случаев:

1) временная структура процентных ставок остается неизменной до погашения облигации;

2) сразу после покупки облигации безрисковые процентные ставки для всех сроков мгновенно изменились на одну и ту же величину и стали равными $\tilde{r}$, а затем уже не менялись.

Стоимость инвестиции в облигацию в момент t в первом случае называют планируемой и обозначают через $P(r,t)$, во втором случае – фактической и обозначают через $P(\bar{r},t)$.

Свойства планируемой и фактической стоимостей инвестиции

1. $P(r,t)$ и $P(\bar{r},t)$ – непрерывные возрастающие функции времени:

$$P(r,t) = P(r)(1+r)^t, \qquad P(\bar{r},t) = P(\bar{r})(1+\bar{r})^t.$$

2. Существует и притом единственный момент времени $t*$, когда фактическая стоимость инвестиции равна планируемой.

$$t^* = \frac{\ln\left(\dfrac{P(r)}{P(\bar{r})}\right)}{\ln\left(\dfrac{1+\bar{r}}{1+r}\right)} . \tag{4.4}$$

3. Теорема (об иммунизирующем свойстве дюрации облигации).
Пусть $D = D(r)$ – дюрация облигации в момент t = 0, когда безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Тогда в момент времени, равный дюрации облигации, $t = D$, фактическая стоимость инвестиции в облигацию не меньше планируемой, т.е.

$$P(\bar{r}, D) \geq P(r, D) \tag{3.9}$$

для любых значений $\bar{r}$.

4.3. Варианты заданий

Рассматривается 8% купонная облигация номиналом 1000 д.е., по которой обещают производить купонные выплаты дважды в году в течение 3-х лет. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 10% годовых.

1) Вычислить дюрацию и показатель выпуклости облигации;

2) оценить относительное изменение цены облигации при изменении процентных ставок на ± 1%, используя: а) только дюрацию облигации; б) дюрацию и показатель выпуклости облигации. Указать роль каждого из показателей в оценке изменения цены облигации. Представить графически зависимость $\Delta P / P$ от $\Delta r/(1+r)$.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.1.

Таблица 4.1.

Вариант	Номинал N, д.е.	Купонная ставка g, %	Процентная ставка r, %	Количество купонных выплат в году p	Срок гашения облигации T, лет
1	1500	8	12	2	2,0
2	2000	9	12	3	2,0
3	3000	7	10	4	1,5
4	400	6	10	6	1,5
5	500	4	11	2	3,0
6	2000	5	11	3	2,00
7	600	6	5	4	1,5

8	400	7	6	6	1,5
9	2000	6	9	2	2,5
10	2500	5	10	4	2,0

Даны две облигации с 10%-ными купонными ставками и номиналом 1000. Одна из них имеет срок до погашения T_1 = 4 года, а другая - T_2 = 15 лет. По обеим облигациям производятся ежегодные процентные платежи. Предположив, что внутренняя доходность облигаций возрастает с r_1 = 10% до r_2 = 14%, рассчитайте цену облигаций до и после изменения процентных ставок. Объясните различия в процентных изменениях цен облигаций.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.2.

Таблица 4.2.

Вариант	Номинал N, д.е.	Купонная ставка g, %	Процентная ставка r, %		Сроки гашения облигации T, лет	
			r_1	r_2	T_1	T_2
1	1500	8	12	16	4	16
2	2000	9	12	18	4	10
3	3000	7	10	14	2	6
4	400	6	10	15	2	8
5	500	4	11	13	3	15
6	2000	5	11	16	3	20
7	600	6	5	10	4	10
8	400	7	6	10	5	10
9	2000	6	9	14	2	10
10	2500	5	10	14	2	8

Не производя вычислений, ранжируйте следующие облигации по дюрации (купонный платеж выплачивается в конце срока), см. таблицу 4.3:

Таблица 4.3.

Облигация	Срок до погашения	Купонная ставка	Внутренняя доходность
A	30 лет	10 %	10%
B	30 лет	0 %	10 %
C	30 лет	10 %	7 %
D	5 лет	10 %	10 %

Можно ли сказать, не производя вычислений (см. таблицу 4.4.), какая из трех облигаций будет иметь большее процентное изменение цены при изменении безрисковых процентных ставок на одну и ту же величину? Предполагается, что облигации продаются с одной и той же внутренней доходностью.

Таблица 4.4.

Облигация	Срок до погашения	Купонная ставка
A	9 лет	8 %
B	11 лет	10 %
C	12 лет	11 %

Даны две облигации, потоки платежей по которым заданы в таблице 4.5.

Таблица 4.5

Момент платежей t_1, годы	1	2	3	4
Платежи , R_1	10	10	10	300
Момент платежей t_2, годы	2	3	4	5
Платежи, R_2	10	10	10	300

Внутренняя доходность облигаций составляет $r_1 = r_2 = 8\%$ годовых. Определите дюрацию и показатель выпуклости этих облигаций.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.6.

Таблица 4.6.

Вариант	Внутренняя доходность облигаций r, %	
	r_1	r_2
1	12	16
2	12	18

3	10	14
4	10	15
5	11	13
6	11	16
7	5	10
8	6	10
9	9	14
10	10	14

Дана облигация, поток платежей по которой задан в таблице 4.7.

Таблица 4.7.

Момент платежей t, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Платеж R	4	4	5	5	5	100

Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r = 6% годовых. Все платежи по облигации отсрочили на t = 0,5 года. Оцените процентное изменение цены облигации с отсроченными платежами, если безрисковые процентные ставки для всех сроков увеличились на $\mathrm{D}r$ = 1%.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.8.

Таблица 4.8.

Вариант	Процентная ставка r, %	Изменение процентной ставки $\mathrm{D}r$, %	Отсрочка платежей t, лет
1	10	1	0,5
2	12	2	0,7
3	15	3	0,4
4	16	2,5	0,2
5	10	3	0,5
6	8	1	0,7
7	9	1	0,4
8	10	2	0,2
9	12	3	0,5
10	14	2	0,3

Инвестор рассматривает покупку 20-летней облигации, купонные платежи по которой выплачиваются каждые полгода. Номинал облигации N = 1000 д.е., годовая купонная ставка g = 8 %, доходность к погашению r = 10 % годовых.

Инвестор ожидает, что он сможет реинвестировать купонные выплаты по годовой ставке i = 6% в течение m = 3 лет. В конце m - го года инвестор надеется продать облигацию с доходностью к погашению r_1 = 7 % годовых. Определить годовую доходность инвестиции в эту облигацию на m = 3 года при этих условиях.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.9.

Таблица 4.9.

Вариант	Номинал N, д.е.	Купонная ставка g, %	Доходность к погашению r, %	Ставка реинвестирования i, %	Срок реинвестирования m, лет	Доходность к погашению на момент продажи облигации r_1, %
1	1000	8	10	6	3	12
2	1200	8	8	7	4	10
3	1500	9	9	5	3,5	10
4	1600	7	10	4	5	12
5	2000	9	12	8	4	13
6	1800	10	11	6	3	12
7	1900	10	10	5	4	12
8	1000	9	13	4	3	14
9	1200	8	10	9	4	12
10	1400	9	9	5	6	10

Дана купонная облигация со следующими характеристиками: номинал N=1000 д.е., срок до погашения m=9,5 лет, купонные платежи каждые полгода. Внутренняя доходность облигации r=9% годовых. Сравнить относительные изменения цены облигации при изменении ее внутренней доходности на величину Δr = ± 2% для купонных ставок 8% и 9% годовых (g_1=8%, g_2=9%).

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.10.

Таблица 4.10

Вариант	N, д.е.	m, лет.	r, %	g_1, %	g_2, %
1	800	8,25	7	6	7
2	900	8,75	8	7	8
3	900	9,25	8	7	8
4	1000	9,25	8	7	8
5	1000	9,75	9	8	9
6	1000	10,25	10	9	10
7	1100	9,25	9	8	9

8	1100	9,5	10	9	10
9	1100	9,75	9	8	9
10	1100	10,25	11	10	11

На рынке имеется 9% купонная облигация номиналом 1000 д.е., по которой обещают каждый год производить купонные выплаты в течение 5 лет. Безрисковые процентные ставки r одинаковы и равны 9% годовых. Найти планируемую и фактическую стоимость инвестиции в облигацию в момент времени, равный дюрации облигации, если через t_1 = 0,5 года после покупки облигации процентные ставки снизились до r_1 = 8,5 % , а через t_2 = 1,5 года после покупки снова установились на уровне r_2 = 9 % годовых.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.11.

Таблица 4.11.

Вариант	N , д.е.	r , %	t_1, лет	r_1, %	t_2 , лет	r_2, %
1	1500	8	1,2	6,5	2,0	8
2	1600	9	1,2	8,5	2,0	9
3	1700	7	1,0	6	1,5	7
4	1800	6	1,0	5	1,5	6
5	1900	4	1,1	3,5	1,5	4
6	2000	5	1,1	4,5	2,1	5
7	2100	6	0,5	5,5	1,5	6
8	2200	7	0,6	6,5	1,6	7
9	2300	6	0,9	5,5	1,9	6
10	2400	5	1,0	4,5	1,9	5

Дана 10%-ная купонная облигация с полугодовыми купонами. Внутренняя доходность облигации равна 6%. Определите дюрацию облигации, когда до ее погашения остается $\frac{n}{2}$ лет, если n = 1,2,…,10. Зависимость дюрации от срока до погашения показать на рисунке.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.12.

Таблица 4.12.

Вариант	Купонная ставка g , %	Внутренняя доходность r , %
1	8	5
2	8	5
3	9	5
4	10	5
5	11	6
6	10	6

7	10	7
8	13	6
9	12	5
10	14	5

Индивидуальное задание №5

Портфель облигаций

5.1. Дюрация и показатель выпуклости портфеля

Дюрацией D_p и показателем выпуклости C_p портфеля облигаций $\Pi(V_1, V_2, ..., V_m)$ называется дюрация и показатель выпуклости облигации, эквивалентной портфелю

$$D_P = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}}, \tag{5.1}$$

$$C_P = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i (t_i + 1)\frac{R_i}{(1+r)^{t_i}}, \tag{5.2}$$

где r – безрисковая (совпадает с внутренней нормой доходности) процентная ставка в момент t = 0. Здесь $R_1, R_2, ..., R_n$ в моменты $t_1, t_2, ..., t_n$ – ожидаемый поток платежей от портфеля

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{V_j}{P_j} C_i^j, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{5.3}$$

где V_j – сумма, затраченная инвестором на приобретение облигаций j – го вида, j = 1, 2,…, m; $P_1, P_2, ..., P_m$ – цены облигаций в момент t = 0; C_i^j платеж по облигации j – го вида в момент t_i, где i = 1, 2, …, n; $V = \sum_{j=1}^{m} V_j$ – стоимость портфеля в момент t = 0.

Свойства дюрации и показателя выпуклости портфеля облигаций

1. Для дюрации и показателя выпуклости портфеля облигаций $\Pi(V_1, V_2, ..., V_m)$ справедливы равенства:

$$D_P = \sum_{j=1}^{m} x_j D_j, \tag{5.4}$$

$$C_P = \sum_{j=1}^{m} x_j C_j, \tag{5.5}$$

где $x_j = \dfrac{V_j}{V}$ – доля облигаций j – го вида в портфеле, D_j и C_j – дюрация и показатель выпуклости облигаций j – го вида.

2. Если D_p и C_p – дюрация и показатель выпуклости портфеля $\Pi(V_1, V_2, ..., V_m)$, то

$$\min_j \{D_j\} \le D_P \le \max_j \{D_j\},$$

$$\min_j \{C_j\} \le C_P \le \max_j \{C_j\}.$$

3. Если число D таково, что $\min_j \{D_j\} \le D \le \max_j \{D_j\}$, то всегда можно сформировать портфель, дюрация которого равна D (портфель с заранее заданным значением дюрации).

4. Пусть в момент формирования портфеля t = 0 безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны *r*. Если сразу после формирования портфеля процентные ставки для всех сроков мгновенно изменились на одну и ту же величину Δr, то относительное изменение цены портфеля приблизительно равно:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -D_P \frac{\Delta r}{1+r} \tag{5.6}$$

или

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -D_P \frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2} C_P \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right)^2 . \tag{5.7}$$

Из равенств (5.6) и (5.7) следует, что дюрацию портфеля облигаций D_p можно рассматривать как меру процентного риска портфеля, а показатель выпуклости C_p показывает, насколько точно дюрация оценивает этот риск. Чем меньше C_p, тем лучше D_p оценивает чувствительность цены портфеля к изменению рыночных процентных ставок. В связи с этим можно сформулировать следующую задачу: сформировать портфель облигаций с заданным значением дюрации D и наименьшим показателем выпуклости. Эта задача сводится к следующей задаче линейного программирования:

$$f = \sum_{j=1}^{m} x_j C_j \to \min_{x_j}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j D_j = D \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1 \end{cases} \tag{5.8}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., m.$$

5.2. Стоимость инвестиций в портфель облигаций

Пусть T лет – срок, на который сформирован портфель облигаций (инвестиционный горизонт). Для оценки портфеля через t лет после покупки, где $t \in [0, T]$, используем понятие стоимости инвестиции в портфель в момент t.

Если в момент формирования портфеля t = 0 безрисковая процентная ставка равна r и после покупки портфеля остается неизменной до окончания срока T, то $V(r,t)$ – планируемая стоимость инвестиции в портфель в момент $t \in [0, T]$. Если сразу после формирования портфеля процентная ставка изменилась и осталась на новом уровне $\bar{r}$ в течение всего инвестиционного периода, то $V(\bar{r},t)$ – фактическая стоимость инвестиции в портфель в момент $t \in [0, T]$. Стоимости $V(r,t)$ и $V(\bar{r},t)$ рассчитываются, исходя из тех же принципов, что и в случае облигации. Тогда

$$V(r, t) = \sum_{i; t_i \le t} R_i (1 + r)^{t - t_i} + \sum_{i; t_i > t} \frac{R_i}{(1 + r)^{t_i - t}}, \tag{5.9}$$

$$V(\bar{r}, t) = \sum_{i; t_i \le t} R_i (1 + \bar{r})^{t - t_i} + \sum_{i; t_i > t} \frac{R_i}{(1 + \bar{r})^{t_i - t}}, \tag{5.10}$$

где $R_1, R_2, ..., R_n$ в моменты $t_1, t_2, ..., t_n$ – ожидаемый поток платежей от портфеля. $V(r,t)$ и $V(\bar{r},t)$ обладают теми же свойствами, что и планируемая и фактическая стоимости инвестиции в облигацию. Тогда

$$V(r,t) = V(r)(1+r)^t, \tag{5.11}$$

$$V(\bar{r},t) = V(\bar{r})(1+\bar{r})^t. \tag{5.12}$$

где $V(r) = V$ – цена покупки портфеля, $V(\tilde{r})$ – оценка портфеля на момент $t = 0$, соответствующая новой процентной ставке сразу после $t = 0$.

Иммунизирующее свойство дюрации портфеля

Пусть $D_p = D_p(r)$ – дюрация портфеля облигаций в момент $t = 0$, когда безрисковая процентная ставка для всех сроков одинакова и равна r. Тогда в момент времени, равный дюрации портфеля, $t = D_p$, фактическая стоимость инвестиции в портфель не меньше планируемой, т.е.

$$V(\bar{r}, D_p) \ge V(r, D_p) \tag{5.13}$$

для любых значений $\bar{r}$.

На этом свойстве дюрации портфеля облигаций основан принцип формирования иммунизированного портфеля: для защиты стоимости портфеля от изменений рыночной процентной ставки необходимо, чтобы дюрация портфеля совпадала с его инвестиционным горизонтом. Таким образом, чтобы сформировать иммунизированный портфель с инвестиционным горизонтом T лет, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j D_j = T \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1 \end{cases} \tag{5.14}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Дюрация портфеля, сформированного в соответствии с решением системы (5.14), совпадает с его инвестиционным горизонтом, $D_p = T$, поэтому

$$V(\bar{r}, T) \geq V(r, T). \tag{5.15}$$

5.3. Управление портфелем облигаций в стратегии иммунизации

Иммунизация портфеля облигаций без трансакционных расходов

Пусть V – сумма, которую в момент t = 0 инвестор вкладывает в покупку облигаций без кредитного риска для формирования портфеля. Срок инвестиции (инвестиционный горизонт) – T лет. От этой инвестиции он рассчитывает получить сумму, не меньшую $V(1+r)^T$. Очевидно, что после формирования портфеля процентные ставки на рынке могут измениться. Цель инвестора состоит в том, чтобы при любых изменениях на рынке обеспечить на заданный момент времени T стоимость своей инвестиции, не меньшую $V(1+r)^T$. Стратегия иммунизации – способ управления портфелем облигаций, обеспечивающий защиту стоимости портфеля от изменений процентных ставок на рынке. В основе этой стратегии – принцип иммунизации Ф. Реддингтона. Схема управления портфелем облигаций в стратегии иммунизации выглядит следующим образом.

Момент времени t **= 0. Формирование иммунизированного портфеля облигаций.**

Портфель формируется из m видов облигаций без кредитного риска. P_j^0 и D_j^0 – цены и дюрации облигаций в момент t = 0 ($j = 1, 2, ..., m$).

Чтобы портфель был иммунизирован от изменений процентной ставки сразу после t = 0 необходимо, чтобы дюрация портфеля совпадала с его инвестиционным горизонтом T лет (принцип Реддингтона). Следовательно, в момент t = 0 портфель должен быть сформирован в соответствии с решением системы:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j D_j^0 = T, \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1, \\ x_j \geq 0, \;\; j = 1, 2, ..., m. \end{cases} \tag{5.16}$$

Если срок портфеля T лет удовлетворяет неравенству $\min_j \left\{ D_j^0 \right\} \leq T \leq \max_j \left\{ D_j^0 \right\}$, то система (9.1) разрешима. Пусть $x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0$ – решение этой системы. Тогда в момент t = 0 сформирован портфель облигаций $\Pi_0 = \Pi(V_1^0, V_2^0, ..., V_m^0)$), стоимость которого равна V. Сумма инвестиций в облигации j – го вида $V_j^0 = x_j^0 V$, где $j = 1, 2, ..., m$. Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_0 на момент T равна:

$$V^0(r, T) = V(1 + r)^T . \tag{5.17}$$

Дюрация портфеля Π_0 равна его сроку T лет.

Ожидаемый поток платежей от этого портфеля $R_1^0, R_2^0, ..., R_n^0$ в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$.

Если сразу после формирования портфеля (или до момента t_1, первого платежа от портфеля) процентные ставки изменились до значений r_1 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут, то фактическая стоимость инвестиции в Π_0 в момент $t = T$ равна:

$$V^0(r_1, T) = \sum_{i; t_i \leq T} R_i^0 (1 + r_1)^{T - t_i} + \sum_{i; t_i > T} \frac{R_i^0}{(1 + r_1)^{t_i - T}} . \tag{5.18}$$

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$V^0(r_1, T) \geq V^0(r, T). \tag{5.19}$$

Таким образом, портфель Π_0 иммунизирован против изменения процентных ставок на рынке до момента t_1.

***Момент времени t* = *t*₁. Переформирование портфеля облигаций**

В момент $t = t_1$ от портфеля Π_0 поступает первый платеж R_1^0. Стоимость инвестиции в портфель Π_0 в момент t_1 равна

$$V^0(r_1, t_1) = R_1^0 + \sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1 + r_1)^{t_i - t_1}} . \tag{5.20}$$

Таким образом, в момент времени t_1 инвестор располагает денежной суммой R_1^0 и портфелем облигаций стоимостью $\sum_{i=2}^{n}\frac{R_i^0}{(1+r_1)^{t_i-t_1}}$. Инвестиционный горизонт портфеля составляет $(T-t_1)$ лет. Чтобы портфель был иммунизирован от изменений процентных ставок после t_1, необходимо, чтобы дюрация портфеля в момент t_1 совпадала с его инвестиционным горизонтом $(T-t_1)$ лет. Однако дюрация портфеля Π_0 в момент t_1 скорее всего отличается от этого значения. Действительно, дюрация облигаций зависит от времени, оставшегося до погашения, и нового уровня доходности, и не существует причин, по которым изменения этих двух факторов обязательно снизят дюрацию портфеля ровно на t_1 лет. Поэтому в момент t_1 портфель должен быть сбалансирован заново так, чтобы обеспечить равенство его дюрации $(T-t_1)$ годам.

Опишем условия, в которых происходит переформирование портфеля Π_0 в момент t_1:

- трансакционные расходы на переформирование портфеля отсутствуют;
- рыночный уровень доходности r_1;
- цены и дюрации облигаций, из которых сформирован портфель, изменились до значений P_j^1 и D_j^1 соответственно, $j=1,2,...,m$.

Чтобы сформировать портфель, дюрация которого равна $(T-t_1)$ годам, необходимо решить систему

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j D_j^1 = T - t_1, \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j=1,2,...,m \end{cases} \tag{5.21}$$

Пусть $x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1$ – решение этой системы. Тогда в момент $t=t_1$ сформирован портфель

$$\Pi_1 = \Pi(V_1^1, V_2^1, ..., V_m^1)).$$

Для переформирования портфеля часть облигаций придется купить, часть – продать. При этом поступивший платеж R_1^0 реинвестируется в облигации. Так как при покупке и продаже облигаций трансакционные расходы отсутствуют, то стоимость портфеля Π_1 равна $V^1 = V^0(r_1, t_1)$ (см. (5.20)). Инвестиции в облигации каждого вида составляют $V_j^1 = x_j^1 V^1 = x_j^1 V^0(r_1, t_1), \ j=1,2,...,m$. Дюрация этого портфеля равна его сроку $(T-t_1)$ лет. Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_1 на момент T равна

$$V^1(r_1,T)=V^1(1+r_1)^{T-t_1}. \tag{5.22}$$

Ожидаемый поток платежей от этого портфеля $R_1^1, R_2^1, ..., R_{n-1}^1$ в моменты времени $t_2,...,t_n$.

Если сразу после t_1 (или до момента t_2) процентные ставки на рынке изменились до значения r_2 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут, то фактическая стоимость инвестиции в Π_1 в момент $t=T$ равна

$$V^1(r_2,T) = \sum_{i>1;t_i\le T} R_i^1(1+r_2)^{T-t_i} + \sum_{i>1;t_i>T} \frac{R_i^1}{(1+r_2)^{t_i-T}}. \tag{5.23}$$

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$V^1(r_2,T)\ge V^1(r_1,T). \tag{5.24}$$

Следовательно, портфель Π_1 иммунизирован против изменения процентных ставок сразу после t_1 (или до момента t_2).

Итак, имеем

$$V^1(r_2,T)\ge V^1(r_1,T)=V^0(r_1,T)\ge V^0(r,T)=V(1+r)^T. \tag{5.25}$$

Таким образом, в отсутствие трансакционных расходов сумма $V(1+r)^T$ иммунизирована от изменения процентных ставок на рынке, если инвестор придерживается стратегии иммунизации. Процедуру переформирования портфеля можно повторить в момент t_2, когда поступит платеж от портфеля. Если в какой-то момент времени нельзя сформировать портфель с требуемой дюрацией, то имеющийся портфель продается, а все вырученные средства инвестируются под действующую на данный момент процентную ставку до окончания срока T.

Иммунизация портфеля облигаций при наличии трансакционных расходов

Предположим, рынок облигаций удовлетворяет перечисленным в начале параграфа условиям, кроме наличия трансакционных расходов. При покупке и продаже облигаций удерживаются комиссионные в размере C_b и C_a соответственно.

Рассмотрим схему управления портфелем облигаций в стратегии иммунизации при наличии трансакционных расходов.

Момент времени $t = 0$**. Формирование иммунизированного портфеля облигаций.**

Предположим, в начальный момент времени t = 0 инвестор формирует портфель облигаций стоимостью V на срок T лет. Тогда на формирование этого портфеля инвестору потребуется сумма $V(1 + C_b)$. Портфель формируется из m видов облигаций без кредитного риска, цены и дюрации которых в момент t = 0 равны соответственно P_j^0 и D_j^0 ($j = 1, 2, ..., m$). Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r.

Портфель, защищенный от изменения процентных ставок сразу после покупки облигаций, формируется в соответствии с решением системы:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j D_j^0 = T, \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1, \\ x_j \ge 0, \ \ j = 1, ..., m. \end{cases} \tag{5.26}$$

Пусть $x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0$ – решение этой системы. Тогда в момент t = 0 формируется портфель облигаций $\Pi_0 = \Pi(V_1^0, V_2^0, ..., V_m^0)$, стоимость которого равна V, а $V_j^0 = x_j^0 V$, где $j = 1, 2, ..., m$. Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_0 на момент T равна

$$V^0(r, T) = V(1 + r)^T. \tag{5.27}$$

Дюрация этого портфеля равна его сроку T. Ожидаемый поток платежей от этого портфеля $R_1^0, R_2^0, ..., R_n^0$ в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$.

Если сразу после формирования портфеля (или до момента t_1, первого платежа от портфеля) процентные ставки изменились до значений r_1 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут, то фактическая стоимость инвестиции в Π_0 в момент $t = T$ равна (формула 8.13):

$$V(r_1, T) = \sum_{i; t_i \le T} R_i^0 (1 + r_1)^{T - t_i} + \sum_{i; t_i > T} \frac{R_i^0}{(1 + r_1)^{t_i - T}}. \tag{5.28}$$

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$V^0(r_1, T) \ge V^0(r, T). \tag{5.29}$$

Таким образом, портфель Π_0 иммунизирован против изменения процентных ставок на рынке до момента t_1.

Момент времени $t = t_1$. Переформирование портфеля облигаций

В момент $t = t_1$ от портфеля Π_0 поступает первый платеж R_1^0. Стоимость инвестиции в портфель Π_0 в момент t_1 равна

$$V^0(r_1, t_1) = R_1^0 + \sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1+r_1)^{t_i - t_1}}. \tag{5.30}$$

Таким образом, в момент времени t_1 инвестор располагает денежной суммой R_1^0 и портфелем облигаций стоимостью $\sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1+r_1)^{t_i - t_1}}$. Инвестиционный горизонт портфеля составляет $(T - t_1)$ лет. Чтобы обеспечить равенство дюрации портфеля ($T - t_1$) годам, портфель необходимо переформировать.

Опишем условия, в которых происходит переформирование портфеля Π_0 в момент t_1:

- переформирование портфеля потребует от инвестора трансакционных расходов;
- рыночный уровень доходности r_1;
- цены и дюрации облигаций, из которых сформирован портфель, изменились до значений P_j^1 и D_j^1 соответственно, $j = 1, ..., m$;

Чтобы сформировать портфель, дюрация которого равна $(T - t_1)$ годам, необходимо решить систему

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j D_j^1 = T - t_1, \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., m. \end{cases} \tag{5.31}$$

Пусть $x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1$ – решение этой системы. Для переформирования портфеля часть облигаций придется купить, часть – продать. Так как при покупке и продаже облигаций удерживаются комиссионные, то часть стоимости $V^0(r_1, t_1)$ (см.(9.17)) пойдет на трансакционные расходы при переформировании портфеля. Обозначим величину трансакционных расходов на переформирование портфеля через C. Пусть v_j, y_j, где $j = 1, 2, ..., m$ – денежные суммы, затраченные на покупку, и вырученные от продажи облигаций соответственно. Тогда $C = C_b \sum_{j=1}^{m} v_j + C_a \sum_{j=1}^{m} y_j$.

Чтобы минимизировать трансакционные расходы необходимо решить задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} \min C \\ \dfrac{V_j^0}{P_j^0} P_j^1 + v_j - y_j = x_j^1 \left(V^0(r_1, t_1) - C \right), \\ C = C_b \sum_{j=1}^{m} v_j + C_a \sum_{j=1}^{m} y_j, \\ C \ge 0,\ v_j \ge 0,\ y_j \ge 0,\ j = 1, ..., m. \end{cases} \quad (5.32)$$

Здесь P_j^0, P_j^1 – цена облигации j – го вида в моменты t = 0 и $t = t_1$ соответственно.

Множество допустимых решений задачи ограничено и замкнуто. Задача разрешима. Пусть $v_1^1, v_2^1, ..., v_m^1,\ y_1^1, y_2^1, ..., y_m^1,\ C^1$ – решение задачи (9.19). Тогда в момент t_1 сформирован портфель облигаций $\Pi_1 = \Pi(V_1^1, V_2^1, ..., V_m^1)$.

Стоимость портфеля равна $V^1 = V^0(r_1, t_1) - C^1$. Инвестиции в облигации каждого вида составляют $V_j^1 = x_j^1 V^1$, $j = 1, 2, ..., m$. Дюрация этого портфеля равна его сроку ($T - t_1$) лет. Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_1 на момент T равна

$$V^1(r_1, T) = V^1 (1 + r_1)^{T - t_1}. \quad (5.33)$$

Ожидаемый поток платежей от этого портфеля $R_1^1, R_2^1, ..., R_{n-1}^1$ в моменты времени $t_2, ..., t_n$.

Если сразу после t_1 (или до момента t_2) процентные ставки на рынке изменились до значения r_2 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут, то фактическая стоимость инвестиции в Π_1 в момент $t = T$ равна

$$V^1(r_2, T) = \sum_{i > 1; t_i \le T} R_i^1 (1 + r_2)^{T - t_i} + \sum_{i > 1; t_i > T} \frac{R_i^1}{(1 + r_2)^{t_i - T}}. \quad (5.34)$$

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$V^1(r_2, T) \ge V^1(r_1, T), \quad (5.35)$$

Следовательно, портфель Π_1 иммунизирован против изменения процентных ставок сразу после t_1 (или до момента t_2).

Если нельзя сформировать портфель с требуемой дюрацией, то имеющийся портфель продается, что снова потребует трансакционных расходов. Все вырученные средства размещаются на счет в банк под действующую на данный момент процентную ставку до окончания срока T. Вследствие наличия трансакционных расходов полученная в результате сумма будет несколько меньше той, которая была бы в их отсутствие. При наличии трансакционных расходов инвестор сталкивается с проблемой выбора частоты пересмотра портфеля.

5.4. Варианты заданий

1. Имеются облигации трех видов с данными, приведенными в таблице 5.1.

Таблица 5.1.

Срок (годы)	B_1	B_2	B_3
0	-855,37	-291,74	-990,91
0,5	-	10,5	-
1	-	10,5	90
1,5	-	314	-
2	1035	-	1100

Построить поток платежей от портфеля $\mathrm{P}(V_1,V_2,V_3)$, где V_j – затраты на приобретение облигаций вида B_j, j = 1,2,3. Найти дюрацию и показатель выпуклости портфеля с параметрами $V_1 = V_2 = V_3 = 2000$ (рыночную процентную ставку определить из условия задачи).
Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 5.2.

Таблица 5.2.

Вариант	V_1	V_2	V_3
1	2000	3000	4000
2	2000	3500	4500
3	2000	1500	2500
4	1000	3500	1500
5	2500	3500	4000
6	2500	3500	1500
7	1000	1000	1000
8	3000	3000	3000
9	2000	3500	3500
10	1500	1500	1500

2. Дюрации пяти видов облигаций соответственно равны: 3; 3.5; 3.75; 4.2; 4.5 лет, а их показатели выпуклости – 10, 12, 15, 20 и 25 лет^2. Сформировать портфель из этих облигаций с дюрацией, равной 4 годам и наименьшим

показателем выпуклости, если доли облигаций $x_1 \le 0.2$, $x_2 \ge 0.2$, $x_3 \ge 0.2$. Для полученного значения показателя выпуклости портфеля оценить относительное изменение цены портфеля при изменении рыночной процентной ставки с 9% до 8% годовых.
Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 5.3.

Таблица 5.3.

Вариант	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	≤0.2	≥0.3	≥0.4	≥0	≥0
2	≤0.2	≥0.2	≥0	≥0.5	≥0
3	≤0.2	≥0.3	≥0.4	≥0	≥0
4	≤0.1	≥0.3	≥0.3	≥0.2	≥0
5	≤0.2	≥0.3	≥0	≥0	≥0.2
6	≥0.2	≤0.3	≥0	≤0.2	≥0
7	≤0.2	≥0	≥0	≥0.3	≥0.3
8	≤0.2	≥0	≥0.6	≥0	≥0
9	≥0.1	≥0.3	≥0.4	≥0	≥0
10	≤0.2	≥0.1	≥0.4	≥0	≥0.1

3. Портфель составлен из облигаций трех видов. Купонные платежи по облигациям производятся раз в год. Данные приведены в таблице 5.4.

Таблица 5.4.

Облигация	Купонная ставка, %	Срок погашения (годы)	Номинал, д.е.	Рыночная стоимость, д.е.
B_1	7,0	5	10000	9209
B_2	10,5	7	20000	18000
B_3	6,0	3	30000	28050

Определить средневзвешенную доходность портфеля $P(V_1, V_2, V_3)$ для $V_1 = V_2 = V_3 = 100\,000$ стоимостью 300 тыс. д.е. и внутреннюю ставку доходности.
Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 5.5.

Таблица 5.5.

Вариант	V_1	V_2	V_3
1	2000	3000	4000
2	2000	3500	4500
3	2000	1500	2500
4	1000	3500	1500
5	2500	3500	4000
6	2500	3500	1500
7	1000	1000	1000

8	3000	3000	3000
9	2000	3500	3500
10	1500	1500	1500

4. Инвестор через два года должен осуществить за счет своего портфеля платеж 1 млн. д.е. Инвестор рассматривает возможности инвестирования в облигации двух видов А1 и А2, параметры которых приведены в таблице 5.6.

Таблица 5.6.

Вид облигации	Номинал N (д.е.)	Купонная ставка g, %	Число платежей в год p	Срок гашения n, годы
А1	1000	7	1	1 год
А2	1000	8	1	3 года

Процентные ставки на рынке одинаковы для всех сроков и составляют 10 % годовых. Считая, что сразу после формирования портфеля процентные ставки поднялись до 11 % сформировать иммунизированный портфель, позволяющий инвестору через два года выполнить его обязательство.
Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 5.7.
Таблица 5.7.

Вариант	Облигация А1				Облигация А2			
	N, (д.н.)	g, %	p	n, годы	N, (д.н.)	g, %	p	n, годы
1	2000	7	1	1	1000	8	2	3
2	2000	7	2	1	1000	8	1	3
3	4000	7	1	1	1000	8	3	3
4	2000	7	2	1.5	1000	8	2	4
5	2000	7	4	2	1000	8	2	3
6	2000	7	1	1	1000	8	2	3
7	1000	7	6	2	1000	8	2	3
8	2000	7	1	1	3000	8	2	4
9	2000	7	2	1.5	1000	8	2	3
10	3000	7	2	1	1000	8	2	3

5. В начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 8% годовых. На рынке имеются два вида купонных облигаций, параметры которых приведены в таблице 5.8.

Таблица 5.8.

Вид облигации	Номинал N	Купонная ставка g, %	Число платежей в год p	Срок гашения n, годы

	(д.е.)			
A1	100	10%	1	2
A2	100	10%	1	4

Инвестор формирует портфель облигаций стоимостью 1000 д.е. с инвестиционным горизонтом 3 года. Рассчитать стратегию иммунизации этого портфеля для следующего изменения процентных ставок: 9% годовых сразу после формирования портфеля, 8 % годовых – непосредственно после момента t = 1.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 5.9.
Таблица 5.9.

Вариант	Облигация A1				Облигация A2			
	N, (д.н.)	g, %	p	n, годы	N, (д.н.)	g, %	p	n, годы
1	200	10	1	1	100	10	2	4
2	200	10	2	1	100	10	1	4
3	400	10	1	1	100	10	3	4
4	200	10	1	2	100	10	2	4
5	200	10	4	2	100	10	2	4
6	200	10	1	1	100	10	2	4
7	100	10	1	1	100	10	2	4
8	200	10	1	1	300	10	2	4
9	200	10	2	2	100	10	2	4
10	300	10	2	1	100	10	2	4

6. В начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 10 % годовых. На рынке имеются два вида купонных облигаций со следующими параметрами, указанными в таблице 5.10.

Таблица 5.10.

Вид облигации	Номинал N (д.е.)	Купонная ставка g, %	Число платежей в год p	Срок гашения n, годы
A1	100	8 %	1	2
A2	100	8 %	1	4

Инвестор, располагая суммой 10050 д.е., желает сформировать портфель из указанных облигаций на 3 года. При покупке и продаже облигаций берутся комиссионные в размере 0,5 %. Рассчитать стратегию иммунизации этого портфеля для следующего изменения процентных ставок: 9% годовых сразу после формирования портфеля, 8 % годовых – непосредственно после момента t = 1.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 5.11.
Таблица 5.11.

Вариант	Облигация А1				Облигация А2			
	N, (д.н.)	g, %	p	n, годы	N, (д.н.)	g, %	p	n, годы
1	200	10	1	1	100	10	2	4
2	200	10	2	1	100	10	1	4
3	400	10	1	1	100	10	3	4
4	200	10	1	2	100	10	2	4
5	200	10	4	2	100	10	2	4
6	200	10	1	1	100	10	2	4
7	100	10	1	1	100	10	2	4
8	200	10	1	1	300	10	2	4
9	200	10	2	2	100	10	2	4
10	300	10	2	1	100	10	2	4

7. Через 1, 2 и 3 года инвестору предстоят выплаты соответственно в размерах 400, 600 и 1000 д.е. На рынке имеются облигации А1 и А2 со следующими параметрами (см. таблицу 5.12):

Таблица 5.12.

Облигация	С1	С2	С3
А1	20	20	100
А2	10	100	

Рыночная ставка для всех сроков равна 5% годовых. Сформировать портфель наименьшей стоимости, позволяющий инвестору:

1) выполнить его обязательства;

2) выполнить его обязательства при условии, что часть платежа, поступающего от портфеля, используется для выполнения обязательства через год.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 5.13.
Таблица 5.13.

Вариант	Облигация А1			Облигация А2		
	С1	С2	С3	С1	С2	С3
1	20	10	100	20	100	200
2	20	10	200	20	10	300
3	40	10	100	40	10	400
4	20	10	100	20	100	500
5	20	10	100	20	10	400

6	20	10	100	20	100	200
7	10	10	100	10	10	200
8	20	10	100	20	10	300
9	20	10	100	20	100	200
10	30	10	100	30	100	200

8. Реструктуризация государственного долга была произведена следующим образом. Долг в сумме D=1,4 млрд. д.е., который должен быть выплачен 1 января 1995 года, преобразован в облигации, выпущенные под гарантии правительства. По этим облигациям государство, начиная с 1 января 1995 года дважды в год выплачивает равные суммы до 2007 года. Для реструктуризации долга использовалась ставка (сложная) i=3 % годовых. Какова сумма отдельного погасительного платежа?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 5.14.

Таблица 5.14.

Вариант	D, млрд. д.е.	i, %
1	1,1	2
2	1,2	2
3	1,3	3
4	1,4	4
5	1,5	4
6	1,6	4
7	1,7	3
8	1,8	3
9	1,9	4
10	1.9	3

Индивидуальное задание № 6

Оптимальный портфель ценных бумаг

6.1. Постановка задачи об оптимальном портфеле

Рассмотрим общую задачу распределения капитала, который участник рынка (инвестор) хочет потратить на покупку ценных бумаг, по различным видам ценных бумаг. Цель инвестора — вложить деньги так, чтобы сохранить свой капитал, а при возможности и нарастить его.

Набор ценных бумаг, находящихся у участника рынка, называется его *портфелем.* Стоимость портфеля — это суммарная стоимость всех составляющих его бумаг. Пусть стоимость портфеля сегодня равна P_0 д.е., а через год она окажется равной P_1 д.е. Величину $d_p = (P_1 - P_0)/P_0$ называют доходностью портфеля. Т.е. *доходность портфеля* — это доход на единицу его стоимости.

Пусть x_i — доля капитала, потраченная на покупку ценных бумаг i-го вида, причем $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$; d_i — доходность ценных бумаг i-го вида. Доходность всего портфеля d_p равна:

$$d_p = \sum_i d_i x_i \,. \tag{6.1}$$

Как правило, доходность бумаг колеблется во времени, так что будем считать ее случайной величиной. Пусть m_i, σ_i — средняя ожидаемая доходность и среднее квадратическое отклонение (СКО) этой случайной доходности, т.е. $m_i = M[d_i]$ — математическое ожидание доходности и $\sigma_i = \sqrt{V_{ii}}$, где V_{ii} — вариация или дисперсия i-й доходности. Будем называть m_i, σ_i соответственно эффективностью и риском i-й ценной бумаги. Риск i-й ценной бумаги будем обозначать через r_i. Через V_{ij} обозначим ковариацию доходностей ценных бумаг i-го и j-го видов.

Так как доходность составляющих портфель ценных бумаг случайна, то и доходность портфеля есть также случайная величина. Математическое ожидание доходности портфеля есть $M[d_p] = \sum_i x_i m_i$, обозначим его через m_p. Дисперсия доходности портфеля есть $D[d_p] = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$. Так же, как и для ценных бумаг, назовем m_p эффективностью портфеля, а величину $\sigma_p = \sqrt{D[d_p]}$ — риском портфеля и обозначим его через r_p. Обычно дисперсия доходности портфеля называется его вариацией V_p. Итак, эффективность и риск портфеля выражены через эффективности составляющих его ценных бумаг и их совместные ковариации.

Пример 1. Портфель наполовину (по стоимости) состоит из бумаг первого вида с доходностью 14% годовых и из бумаг второго вида с доходностью 8% годовых. Какова эффективность портфеля?

Решение. Оба термина — доходность и эффективность — специально упомянуты вместе.

Ответ: 0,5·14+0,5·8 = 11% годовых.

Каждый владелец портфеля ценных бумаг хотел бы иметь эффективность побольше, а риск поменьше.

Рассмотрим два портфеля ценных бумаг. Так как портфель оценивается по двум характеристикам — эффективности и риску, то между портфелями есть отношение доминирования. Скажем, что 1-й портфель с эффективностью e_1 и риском r_1 доминирует 2-й с e_2, r_2, если $e_1 \geq e_2$ и $r_1 \leq r_2$, и хотя бы одно из этих неравенств строгое. Недоминируемые портфели назовем *оптимальными по Парето,* такие портфели называют еще *эффективными.* Конечно, инвестор должен остановить свой выбор только на эффективных портфелях.

Если рассмотреть какое-нибудь множество портфелей и нанести их характеристики — риск r_p и эффективность m_p на плоскость риск — доходность, то типичное множество эффективных портфелей выглядит, как кривая *DAC* на рис. 1.

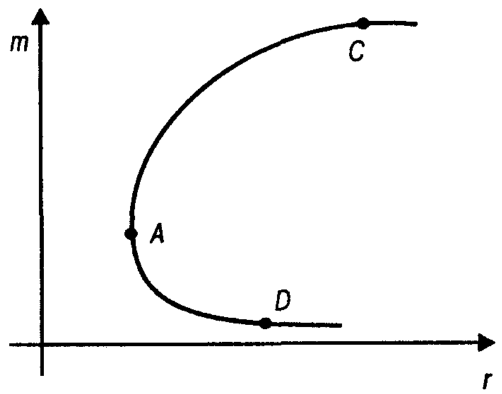


Рис. 1

6.2. Диверсификация портфеля

Любой инвестор заинтересован в уменьшении риска портфеля при поддержании его эффективности на определенном уровне. Какие существуют рекомендации общего характера по снижению риска портфеля?

Пусть в портфеле собрано n различных видов ценных бумаг. Рассмотрим дисперсию портфеля $V_p = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$. Рассмотрим примеры влияния корреляции разных ценных бумаг. Предположим сначала, что ценные бумаги различных видов ведут себя независимо, они некоррелированы, т.е. $V_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Тогда

$$V_p = \sum_i x_i^2 V_{ii} \text{ и } \sum_i x_i = 1.$$

Предположим далее, что деньги вложены равными долями, т.е. $x_i = 1/n$ для всех $i = 1,...,n$. Тогда $m_p = \frac{1}{n}\sum_i m_i$ средняя ожидаемая эффективность портфеля, и риск портфеля равен $r_p = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_i V_{ii}} \le \frac{1}{n}\sqrt{\sigma^2_{\max} \cdot n}$, где $\sigma^2_{\max}$ – максимальное значение дисперсии доходности. Тогда $r_p \le \sigma_{\max} / \sqrt{n}$.

Отсюда *вывод:* если ценные бумаги некоррелированы, то при росте числа их видов n в портфеле риск портфеля ограничен и стремится к 0 при $n \to \infty$.

Однако, полная некоррелированность ценных бумаг на практике невозможна. Поэтому, рассмотрим, как отражается корреляция между видами ценных бумаг на характеристиках портфеля. Корреляция не влияет на эффективность портфеля, так как $m_p = \sum_i x_i m_i$, но она сказывается на его вариации (риске), поскольку $V_p = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$. Введем в рассмотрение величины $k_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$ называемые коэффициентами корреляции. Тогда $V_{ij} = (\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) k_{ij}$. Для того чтобы понять влияние корреляции, рассмотрим два крайних случая.

Сначала случай полной прямой корреляции, когда все $k_{ij} = 1$ — это значит, что при изменении i-го фактора j также изменяется, причем прямо пропорционально. Тогда

$V_p = \sum_i \sum_j \sigma_i x_i \sigma_j x_j = \left(\sum_i \sigma_i x_i\right)^2$. Если при этом вложить деньги равными долями, т.е. $x_i = 1/n$, то $V_p = \frac{1}{n^2}\left(\sum_i \sigma_i\right)^2$ и риск портфеля $r_p = \frac{1}{n}\sum_i \sigma_i \le \sigma_{\max}$, где $\sigma^2_{\max} = \max V_{ii}$.

Следовательно, при полной прямой корреляции диверсификация портфеля не дает никакого эффекта — риск портфеля равен среднему арифметическому рисков составляющих его ценных бумаг и не стремится к нулю при росте числа видов ценных бумаг.

Положительная корреляция между эффективностями двух ценных бумаг имеет место, когда курс обеих определяется одним и тем же внешним фактором, причем изменение этого фактора действует на обе бумаги в одну и ту же сторону. Диверсификация портфеля путем покупки обеих бумаг бесполезна — риск портфеля от этого не уменьшится.

Теперь рассмотрим ситуацию полной обратной корреляции, т.е. когда $k_{ij} = -1$, если $i \ne j$. Для понимания сути дела достаточно рассмотреть портфель, состоящий всего из двух видов ценных бумаг ($n = 2$). Тогда

$V_p = (\sigma_1 x_1)^2 + (\sigma_2 x_2)^2 - 2\sigma_1 x_1 \sigma_2 x_2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2$ и если $x_2 = x_1 \sigma_1 / \sigma_2$, то $V_p = 0$.

Таким образом, при полной обратной корреляции возможно такое распределение вложений между различными видами ценных бумаг, что риск полностью отсутствует.

Полная обратная корреляция довольно редкое явление и обычно она очевидна. На практике не бывает ни полной прямой, ни полной обратной корреляции.

6.3. Портфель Марковица минимального риска

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу формирования оптимального портфеля: найдем x_i, минимизирующие вариацию портфеля

$$V_p = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} \to \min \tag{11.2}$$

при условии, что обеспечивается заданное значение эффективности портфеля m_p, т.е. $\sum_i x_i m_i = m_p$.

Поскольку x_i — доли, то в сумме они должны составлять единицу: $\sum_i x_i = 1$.

Решение (оптимальное) этой задачи обозначим через x_i^*. Если x_i^* > 0, то это означает рекомендацию вложить долю x_i^* наличного капитала в ценные бумаги i-го вида. Если же x_i^* < 0, то содержательно это означает провести операцию «short sale» («короткая продажа»). Если такие операции невозможны, значит необходимо ввести ограничения на переменные $x_i > 0$.

Этот портфель минимального риска из всех портфелей заданной эффективности называется *портфелем Марковица минимального риска.* Ясно, что его риск r_p есть функция его заданной эффективности m_p.

6.4. Портфель Тобина минимального риска

Если на рынке есть безрисковые бумаги (к таким можно отнести государственные ценные бумаги), то решение задачи об оптимальном портфеле сильно упрощается и приобретает замечательное новое качество.

Пусть m_0 — эффективность безрисковых бумаг (фактически это безрисковая банковская ставка), а x_0 — доля капитала, вложенного в эти бумаги, тогда в рисковую часть портфеля вложена $(1 - x_0)$ часть всего капитала. Пусть m_r — эффективность и V_r — вариация (дисперсия) рисковой части портфеля и $r_r = \sqrt{V_r}$ — риск этой рисковой части. Тогда эффективность всего портфеля равна $m_p = x_0 m_0 + (1 - x_0) m_r$, вариация портфеля равна $r_p = (1 - x_0) r_r$ (считается, что безрисковые бумаги некоррелированы с остальными). Исключая x_0, получим $m_p = m_0 + r_p (m_r - m_0) / r_r$, т.е. эффективность портфеля линейно зависит от его риска. Рисковые виды ценных бумаг будем нумеровать числами от 1 до n.

Задача Марковица об оптимальном портфеле в этом случае такова:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min ,$$

$$x_0 m_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i m_i = m_p , \qquad (11.3)$$

$$x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 .$$

Пусть V — матрица ковариаций рисковых видов ценных бумаг, $x=(x_i), m=(m_i)$ — вектор-столбцы долей x_i капитала, вкладываемых в i-й вид рисковых ценных бумаг и ожидаемых эффективностей этого вида, $i=1,...,n$. Пусть также I — n-мерный вектор-столбец, компоненты которого равны 1. Тогда оптимальное значение долей x_i есть

$$x^* = \frac{m_p - m_0}{(m - m_0 I)^T V^{-1}(m - m_0 I)} V^{-1}(m - m_0 I) . \qquad (11.4)$$

В числителе дроби стоит число, в знаменателе, если выполнить все действия, тоже получится число, которое обозначим через d^2, т.е. $d^2 = (m - m_0 I)^T V^{-1}(m - m_0 I)$. Таким образом, величина $(m_p - m_0)/d^2$ является константой, определяемой рынком и не зависящей от инвестора. Следовательно, структура рисковой части портфеля не зависит от m_p, хотя сами компоненты вектора x^* зависят от m_p. а именно, компоненты вектора x^* пропорционально увеличиваются с ростом m_p, поэтому доля x_0 безрисковых вложений будет при этом сокращаться так как мы имеем ограничение $x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Выразим риск оптимального портфеля в зависимости от его доходности. Для этого в формулу вариации портфеля $V_p = x^T V x$ подставим оптимальный вектор *X** из формулы (10.4). Получим

$$V_p = (m_p - m_0)^2 / d^2 \text{ или } r_p = (m_p - m_0)/d .$$

Можно также написать выражение эффективности оптимального портфеля от его риска: $(m_p - m_0) = d \cdot r_p$ или $m_p = m_0 + d r_p$. Видно, что зависимости эти линейные.

Будем называть полученный оптимальный портфель *портфелем Тобина минимального риска,* т.е. портфель Тобина — это портфель Марковица при наличии на рынке безрисковых ценных бумаг.

6.5. Портфель Марковица и Тобина максимальной эффективности

Постановку Марковица задачи формирования оптимального портфеля (10.2) или (10.3) можно словами сформулировать так: сформировать портфель минимального риска из всех портфелей, имеющих эффективность не менее заданной.

Но столь же естественна и задача формирования портфеля максимальной эффективности из всех портфелей, имеющих риск не более заданного: найти x_i, максимизирующие ожидаемую эффективность портфеля

$$m_p = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \to \max$$

при условии, что обеспечивается заданное значение риска портфеля, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} = r_p^2$$

и выполняется условие $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Назовем данную формализацию *портфелем Марковица максимальной эффективности.*

Если на рынке есть безрисковые бумаги, то задача формирования портфеля максимальной эффективности имеет вид:

$$x_0 \cdot m_0 + m \cdot x \to \max,$$

$$x^T V x = r_p^2,$$

$$x_0 + IX = 1.$$

Решив эту задачу методом множителей Лагранжа, получим оптимальное значение долей x рисковых бумаг

$$x^* = \frac{r_p}{\sqrt{(m - m_0 I)^T V^{-1} (m - m_0 I)}} V^{-1}(m - m_0 I). \qquad (11.5)$$

Будем называть полученный оптимальный портфель *портфелем Тобина максимальной эффективности.*

Замечание 1. Обратим внимание, что структура рисковой части оптимального портфеля одна и та же в обеих постановках и не зависит от задаваемых доходности или риска портфеля.

6.6. Варианты заданий

1. С помощью компьютера найден оптимальный портфель Марковица для трех ценных бумаг с эффективностями и рисками: (4,10); (10,40); (40,80); нижняя граница доходности задана равной 15. Доли бумаг оказались равными: 46%, 28% ,26%, минимальный риск — 25,4, доходность оказалась равной заданной — 15. Проверить компьютерные расчеты.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 6.1.

Таблица 6.1

Вариант	(m_1, r_1)	(m_2, r_2)	(m_3, r_3)	m_p	(x_1, x_2, x_3), %	$r_{\min}$	m
1	(5,15)	(16,35)	(40,70)	12	(64,23,13)	15,48	12,08

2	(7,10)	(20,30)	(40,50)	14	(66,21,13)	11,2	14,02
3	(8,15)	(15,30)	(30,60)	17	(31,41,28)	21,33	17,03
4	(9,15)	(13,35)	(45,80)	10	(82, 15, 3)	13,59	10,68
5	(10,21)	(20,34)	(30,47)	11	(63,24,13)	16,7	15
6	(11,20)	(20,35)	(40,70)	18	(55,30,15)	18,48	18,05
7	(12,18)	(23,32)	(37,45)	16	(68,21,11)	14,81	17,06
8	(13,16)	(26,29)	(41,83)	13	(74,23,3)	13,82	16,83
9	(14,22)	(20,29)	(34,45)	15	(55,32,13)	16,33	18,52
10	(15,25)	(21,37)	(35,43)	20	(56,25,19)	18,66	20,3

2. С помощью компьютера найден оптимальный портфель максимальной эффективности для трех ценных бумаг с доходностью и риском: (4,10); (10,40); (40,80) (те же ценные бумаги, что и в примере 1); верхняя граница риска задана равной 50. Доли бумаг оказались равными: 6%, 34% ,60%. Проверить компьютерные расчеты.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 6.2.

Таблица 6.2.

Вариант	(m_1,r_1)	(m_2,r_2)	(m_3,r_3)	r_p	(x_1,x_2,x_3), %	$m_{\max}$	r
1	(5,15)	(16,35)	(40,70)	35	(4,54,42)	24,64	34,96
2	(7,10)	(20,30)	(40,50)	25	(13,45,42)	26,71	25
3	(8,15)	(15,30)	(30,60)	30	(4,54,42)	21,02	29,96
4	(9,15)	(13,35)	(45,80)	40	(22,3,48)	27,48	39,95
5	(10,21)	(20,34)	(30,47)	27	(6,49,45)	23,9	26,95
6	(11,20)	(20,35)	(40,70)	29	(18,49,33)	24,98	28,99
7	(12,18)	(23,32)	(37,45)	27	(5,44,51)	29,59	26,94
8	(13,16)	(26,29)	(41,83)	29	(2,75,23)	29,19	28,94
9	(14,22)	(20,29)	(34,45)	26	(10,38,52)	26,68	25,96
10	(15,25)	(21,37)	(35,43)	30	(6,29,65)	29,74	29,98

3. Из двух некоррелированных ценных бумаг с эффективностями m_1=2 и m_2=6 и рисками r_1=10 и r_2=20 с помощью компьютера составлено шесть портфелей: в портфеле с номером k доля первых бумаг $x=1-0,2k$, доля вторых равна $(1-x)$, т.е. портфель, состоящий только из бумаг 1-го вида, получает номер 0, а портфель, состоящий только из бумаг 2-го вида получает номер 5. Компьютер нашел их эффективности и риски.

Эффективности	2,0	2,8	3,6	4,4	5,2	6,0
Риски	10,0	8,9	10,0	12,6	16,1	20
Портфели	0	1	2	3	4	5

Проверьте компьютерные расчеты. Затем нанесите портфели как точки на плоскость риск — эффективность и отметьте доминируемые портфели и недоминируемые, т.е. оптимальные по Парето.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 6.3.

Таблица 6.3

Вариант	(m_1,r_1)	(m_2,r_2)	Эффективности	Риски	Портфели
1	(1,10)	(5,20)	1	10	0
			1,8	8,9	1
			2,6	10	2
			3,4	12,6	3
			4,2	16,1	4
			5	20	5
2	(2,15)	(6,30)	2	15	0
			2,8	13,4	1
			3,6	15	2
			4,4	19	3
			5,2	24,2	4
			6	30	5
3	(3,10)	(7,20)	3	10	0
			3,8	8,9	1
			4,6	10	2
			5,4	12,6	3
			6,2	16,1	4
			7	20	5
4	(4,15)	(10,30)	4	15	0
			5,2	13,4	1
			6,4	15	2
			7,6	19	3
			8,8	24,2	4
			10	30	5
5	(10,20)	(20,40)	10	20	0
			12	17,9	1
			14	20	2
			16	25,3	3
			18	32,2	4
			20	40	5
6	(5,15)	(10,30)	5	15	0
			6	13,4	1
			7	15	2
			8	19	3
			9	24,2	4
			10	30	5
7	(12,20)	(18,40)	12	20	0
			13,2	17,9	1
			14,4	20	2
			15,6	25,3	3
			16,8	32,2	4
			18	40	5
8	(15,10)	(25,30)	15	10	0
			17	10	1
			19	13,4	2
			21	18,4	3
			23	24	4
			25	30	5

9	(10,15)	(14,30)	10	15	0
			10,8	13,4	1
			11,6	15	2
			12,4	19	3
			13,2	24,2	4
			14	30	5
10	(8,10)	(12,30)	8	10	0
			8,8	10	1
			9,6	13,4	2
			10,4	18,4	3
			11,2	24	4
			12	30	5

4. Имея безрисковые ценные бумаги с эффективностью m_0=4 и некоррелированные рисковые с эффективностями m_1=8 и m_2=14 и рисками r_1=10 и r_2=30, с помощью компьютера составили портфель Тобина эффективности 12. Доли бумаг получились такими: x_0=-0,51, x_1=1,18, x_2=0,33. Проверьте компьютерные расчеты. Как понимать отрицательную долю безрисковых бумаг?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 6.4.

Таблица 6.4

Вариант	m_0	(m_1, r_1)	(m_2, r_2)	m_p	(x_0, x_1, x_2)
1	5	(8,10)	(14,30)	12	(-0,56;1,17;0,39)
2	6	(8,10)	(14,30)	10	(-0,04;0,72;0,32)
3	3	(7,10)	(14,30)	10	(-0,24;0,95;0,29)
4	4	(7,20)	(13,30)	11	(-0,09;0,47;0,62)
5	4	(7,15)	(13,30)	15	(-0,98;1,13;0,85)
6	5	(6,10)	(12,15)	16	(-0,98;0,48;1,5)
7	2	(5,10)	(10,15)	10	(-0,4;0,64;0,76)
8	3	(9,12)	(15,20)	14	(-0,29;0,75;0,54)
9	6	(10,12)	(15,20)	16	(-0,61;0,89;0,72)
10	7	(11,14)	(17,21)	15	(-0,12;0,53;0,59)

5. В портфеле бумаги с доходностью d_1=5% годовых составляют x_1=30% по стоимости, а остальные бумаги имеют доходность d_2=8% годовых. Какова доходность портфеля?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 6.5.

Таблица 6.5

Вариант	x_1, %	d_1, %	d_2, %
1	20	5	9
2	25	4	7

3	30	6	10
4	35	3	6
5	40	7	9
6	45	2	5
7	55	8	4
8	60	5	3
9	65	9	10
10	70	4	6

6. Сформировать портфель Тобина минимального риска из двух видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью m_0=2 и рисковых с эффективностью m_1=10 и риском r_1=5. Найти зависимость эффективности портфеля от его риска.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 6.6.

Таблица 6.6

Вариант	m_0	m_1	r_1
1	1	9	4
2	2	11	5
3	2	13	8
4	3	10	5
5	3	12	6
6	3	14	7
7	4	14	7
8	4	20	10
9	5	15	8
10	5	18	9

7. Решить задачу формирования портфеля Тобина минимального риска при наличии безрисковых бумаг и некоррелированных остальных в общем виде.

8. Сформировать портфель Тобина максимальной эффективности и риска не более заданного из трех видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью m_0=2 и некоррелированных рисковых ожидаемой эффективности m_1=4 и m_2=10 и рисками r_1=2 и r_2=4. Каковы соотношения доли бумаг в рисковой части оптимального портфеля?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 6.7.

Таблица 6.7

Вариант	m_0	(m_1, r_1)	(m_2, r_2)
1	2	(4,3)	(12,4)
2	2	(3,2)	(8,3)
3	3	(7,3)	(9,5)
4	3	(5,2)	(10,5)
5	3	(6,3)	(12,5)
6	4	(7,3)	(15,5)

7	4	(8,4)	(12,6)
8	4	(9,4)	(20,9)
9	5	(9,4)	(20,8)
10	5	(12,5)	(25,10)

9. Поставить обе задачи сформировать портфели Тобина: минимального риска при заданной эффективности и максимальной эффективности при заданном риске из трех видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью m_0=2 и рисковых с ожидаемой эффективностью m_1=6 и m_2=8 и рисками r_1=4 и r_2=9 и взаимной корреляцией k=9.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 6.8.

Таблица 6.8

Вариант	m_0	(m_1,r_1)	(m_2,r_2)	k
1	2	(6,3)	(8,9)	10
2	2	(4,2)	(6,8)	8
3	2	(7,4)	(9,10)	7
4	3	(9,6)	(12,14)	9
5	3	(9,7)	(11,12)	6
6	3	(10,8)	(13,15)	9
7	4	(12,8)	(16,18)	12
8	4	(13,9)	(15,16)	11
9	4	(12,7)	(16,17)	10
10	5	(15,10)	(20,23)	15

10. Запишем вариацию доходности портфеля $V_p = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$ в форме:

$V_p = \sum_i x_i \left(\sum_j x_j V_{ij} \right)$ и назовем величину $R_i = \left(\sum_j x_j V_{ij} \right)$ портфельной ковариацией доходности i-й ценной бумаги. Доказать, что в оптимальном портфеле эти ковариации пропорциональны превышению эффективности ценных бумаг над безрисковыми вложениями (подразумевается, что последние на рынке имеются).

ПРИЛОЖЕНИЕ
Примеры решения типовых задач

Задание 1. В банк помещен депозит в размере A = 5000 руб. По этому депозиту в первом году будет начислено i_1 = 10% , во втором - i_2 = 12%, в третьем - i_3 = 15%, в четвертом и пятом - $i_4 = i_5$ = 16% годовых. Сколько будет на счету в конце пятого года? Сколько надо было бы поместить на счет при постоянной процентной ставке i = 13%, чтобы обеспечить ту же сумму. Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Решение. Формула наращения по схеме сложных и простых процентов для переменной ставки имеет вид

а) $S = A(1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot (1+i_3)^{n_3} \cdot (1+i_4)^{n_4}$,

б) $S = A(1+\sum_{k=1}^{4} n_k i_k)$.

где n_i — i-ый период начисления процентов ($n_1 = n_2 = n_3 = 1, n_4 = 2$, $n = \sum_{i=1}^{4} n_i = 5$).

Вводим исходные данные

$$A := 5000 \qquad i := \begin{pmatrix} 10\% \\ 12\% \\ 15\% \\ 16\% \end{pmatrix} \qquad n := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad i1 := 13\% \qquad n1 := 5$$

Решение MathCAD для простой ставки

$$S := A \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{4} i_k \cdot n_k\right) \qquad S = 8.45 \times 10^3$$

$$P := 1$$

Given

$$S = P \cdot (1 + i1 \cdot n1)$$

$$P := \mathrm{Find}(P) \qquad P = 5.121212 \times 10^3$$

Решение MathCAD для сложной ставки

$$S1 := A \cdot \prod_{k=1}^{4} \left(1 + i_k\right)^{n_k} \qquad S1 = 9.53223 \times 10^3$$

$$P1 := 1$$

Given

$$S1 = P1 \cdot (1 + i1 \cdot n1)$$

$$P1 := \mathrm{Find}(P1) \qquad P1 = 5.777109 \times 10^3$$

Ответ: в конце 5-го года на счету будет 8450 руб. либо 9352 руб., если начисление процентов проводится по схеме простых процентов либо по схеме сложных процентов. Для получения суммы 8450 руб. в конце пятого года при ставке i = 13% необходимо в начале периода поместить депозит в размере 5121 руб. (по схеме простых процентов) либо 5 173 руб. руб. (по схеме сложных процентов) для получения суммы 9352 руб..

Задача 2. Вычислить размер платежа n - годичной ссуды покупки квартиры за A рублей с годовой ставкой i процентов и начальным взносом q процентов. Сделать расчет для ежемесячных выплат.

Расчет провести для следующих данных: n = 20 лет; A = 1 400 000 руб.; i = 18%; q = 30%.

Расчеты выполнить для сложной процентной ставки.

Решение. Сумма, которую нужно выплатить по ссуде, равна $A - q \cdot A = A \cdot (1-q)$.
Рассчитаем ежегодный платеж R выплаты ссуды из уравнения
$A \cdot (1-q) = R \cdot \dfrac{1-(1+j/m)^{-n \cdot m}}{(1+j/m)^{m/p}-1} = R \cdot a(p,n,j/m)$, отсюда $R = \dfrac{A \cdot (1-q)}{a(p,n,j/m)}$. Здесь p = 12 (количество платежей в год), m = 12 (количество начислений процентов в год).

Вводим исходные данные.

$A := 1400000$ $j := 18\%$ $q := 30\%$ $n1 := 20$

$p := 12$ $m := 12$

Решение MathCAD

$$a := \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-n1\cdot m}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

$a = 64.795732$

$$R := \frac{A\cdot(1-q)}{a}$$

$R = 1.512445\times 10^{4}$

Ответ. Ежемесячные выплаты составят 15 124, 45 руб.

Задача 3. *Семья хочет накопить $12000 на машину, вкладывая в банк $1000 ежегодно. Годовая ставка процента в банке 7%. Как долго ей придется копить?*

Решение. Для решения данной задачи используем формулу наращенной величины ренты.

$$.S = R\cdot(1+i)\frac{((1+i)^{n}-1)}{i}$$

Отсюда:

$$n = \frac{\ln(\frac{S\cdot i}{R(1+i)}+1)}{\ln(1+i)}$$

Запишем исходные данные:

$S := 12000$ $R := 1000$ $i1 := 7\%$

Решение MathCAD

$$n1 := \frac{\ln\left[1 + \frac{S \cdot i1}{R \cdot (1 + i1)}\right]}{\ln(1 + i1)} \qquad n1 = 8.564235$$

$$S1 := R \cdot (1 + i1) \cdot \frac{(1 + i1)^{9} - 1}{i1} \qquad S1 = 1.281645 \times 10^{4}$$

Ответ. Семье придется копить 9 лет. К концу 9-го года на счету будет 12816,5 руб.

Задача 4. Заем взят под i_1=16% годовых, выплачивать осталось ежеквартально по 500 д.е. (R_1=500 д.е.) в течение n=2 лет. Из-за изменения ситуации в стране процентная ставка снизилась до i_2=6% годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть новый размер выплаты? Расчеты провести для сложной процентной ставки.

Решение. *Для решения этой задачи необходимо записать современную величину невыплаченной суммы по ставке i_1=16% и приравнять современной величине потока платежей по ставке i_2=6%.*

Имеем $R_1 \frac{1-(1+i_1/m)^{-n \cdot m}}{(1+i_1/m)^{m/p}-1} = R_2 \frac{1-(1+i_2/m)^{-n \cdot m}}{(1+i_2/m)^{m/p}-1}$, где m = 4 (количество начислений процентов в год), p = 4 (количество платежей в год). Из этого уравнения находим размер платежа R_2.

Исходные данные для MathCAD.

$R1 := 500 \qquad n := 2 \qquad m := 4 \qquad p := 4$

$i1 := 16\% \qquad i2 := 6\%$

Решение MathCAD

$R2 := 1$

Given

$$R1 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i1}{m}\right)^{-n \cdot m}}{\left(1 + \frac{i1}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = R2 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i2}{m}\right)^{-n \cdot m}}{\left(1 + \frac{i2}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$R2 := \mathrm{Find}(R2) \qquad R2 = 449.693578$

Ответ. Размер новой выплаты составит 449,7 руб.

Задача 5. Необходимо учесть долговое обязательство на сумму 50 000 д.е. за 4
года до погашения. Банк для учета обязательства применяет сложную процентную ставку 5 % годовых. Проценты могут начисляться 1, 2 или 4 раза в год. Указать условия договора, по которому это обязательство может быть учтено.
Решение. В данной задаче необходимо найти современную величину суммы S, которая через 4 года составит 50 000 д.е. в зависимости от количества начисления процентов в год. Расчет проводим по формуле $P = \frac{S}{(1 + j/m)^{n \cdot m}}$, где j - годовая ставка, m - количество начислений процентов в год.

Исходные данные

$S := 50000 \qquad i1 := 5\%$

$n1 := 4$

Решение MathCAD

$$P1(m1) := \frac{S}{\left(1 + \frac{i1}{m1}\right)^{n1 \cdot m1}}$$

$$P1(1) = 4.113512 \times 10^4$$

$$P1(2) = 4.103733 \times 10^4$$

$$P1(4) = 4.098732 \times 10^4$$

Ответ. *Обязательство будет учтено на сумму 41 135 д.е. при начислении процентов один раз в год, на сумму 41037 д.е. – при начислении процентов два раза в год, на сумму 41987 д.е. – при начислении процентов четыре раза в год.*

Задача 6. Как изменяется срок окупаемости проекта при изменении величины инвестиций, годовых доходов, ставки процента? Построить графики и дать объяснение.

Решение. Рассмотрим следующую модель инвестиционного проекта. Инвестиции в проект в размере K осуществляются единовременным платежом в начале срока, доход R поступает регулярно один раз в год в течении n лет, процентная ставка равна j. Срок окупаемости в этом случае рассчитывается по формуле

$$n = -\frac{\ln(1 - \frac{K \cdot j}{R})}{\ln(1 + j)} \; .$$

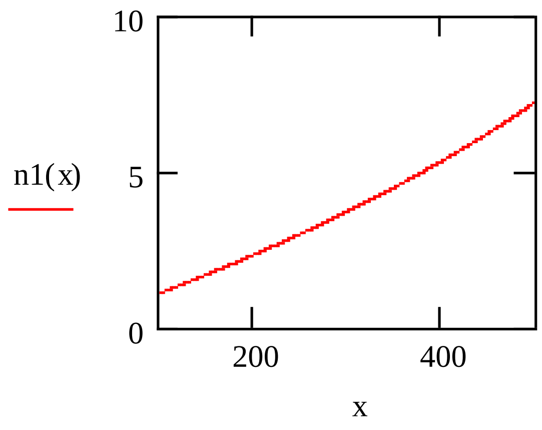
Исходные данные

$$K := 500 \qquad R := 100 \qquad j := 10\%$$

Решение MathCAD

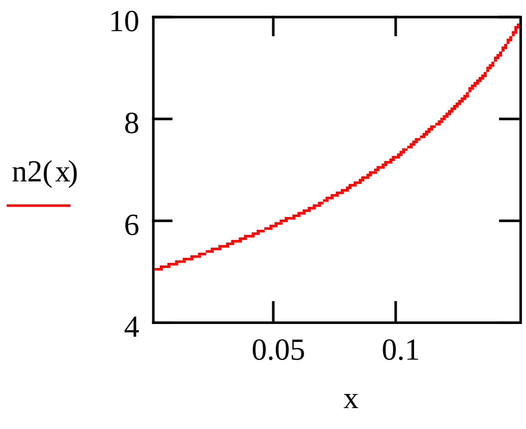
Зависимость срока окупаемости от размера инвестиций

$$n1(x) := \frac{-\ln\left(1 - \frac{x \cdot j}{R}\right)}{\ln(1 + j)}$$



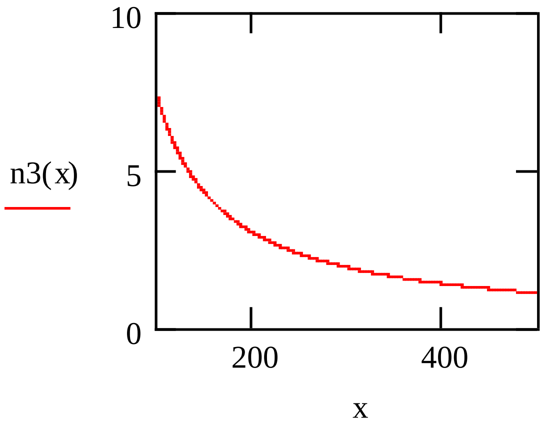
Зависимость срока окупаемости от ставки

$$n2(x) := \frac{-\ln\left(1 - \frac{x \cdot K}{R}\right)}{\ln(1 + x)}$$



Зависимость срока окупаемости от величины дохода

$$n3(x) := \frac{-\ln\left(1 - \frac{j \cdot K}{x}\right)}{\ln(1 + j)}$$



Ответ. Срок окупаемости с ростом объема инвестиций увеличивается, так как для окупаемости инвестиций требуется большее время получения дохода от проекта.

С ростом процентной ставки срок окупаемости растет. С экономической точки зрения это можно объяснить следующим образом. Если для инвестиций берется ссуда в банке под процентную ставку j, то с ростом ставки растут проценты по ссуде, и, следовательно, растет долг заемщика. Поэтому требуется большее время получения дохода от проекта для погашения ссуды.

С ростом дохода от проекта срок окупаемости уменьшается

Задача 7. Проверьте план погашения основного долга равными годовыми уплатами, если величина займа D составляет 600 д.е., а процентная ставка i – 8%.

Уплаты	168.0	158.4	148.8	139.2	129.6
Годы	1	2	3	4	5

Решение. Величина займа D = 600 д.е. погашается равными долями в течении 5 лет. Проценты по долгу выплачиваются каждый год на остаток долга.

Таким образом, размер срочной уплаты в году с номером t равен $Y_t = d + (D - (t-1)d) \cdot i$, где $d = D/n$, n – срок долга.

Исходные данные

$D := 600 \qquad n1 := 5 \qquad j := 0.08$

Решение MathCAD

$$d := \frac{D}{n1} \qquad d = 120$$

$$t := 1..n1$$

$$Y_t := d + [D - (t-1)\cdot d]\cdot j$$

$$Y = \begin{pmatrix} 168 \\ 158.4 \\ 148.8 \\ 139.2 \\ 129.6 \end{pmatrix}$$

Ответ. План погашения долга составлен верно.

Задача 8. *Проверьте расчеты. Для инвестиционного проекта длительностью 6 лет с планируемыми годовыми доходами 400 д.е. и годовой ставкой 10% с найдены необходимые инвестиции — 1742 д.е.*

Решение. Здесь рассматривается инвестиционный проект заданной длительности, с которой совпадает срок окупаемости. Проект должен обеспечивать заданный годовой доход.

В общем виде решение задачи таково: пусть R, n, i — размер последующего годового дохода (предполагается, что доходы от инвестиций начинают поступать после окончания вложений), длительность проекта и ставка процента. Какие нужны для обеспечения этого минимальные инвестиции?

Очевидно, что необходимые инвестиции есть $K = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Это значит, что чистый приведенный доход проекта равен 0, а внутренняя доходность совпадает со ставкой процента.

На основе этих заключений выполним компьютерные расчеты.

Запишем исходные данные:

$$R := 400 \qquad n1 := 6 \qquad j := 0.1$$

Решение MathCAD

$$K := R\cdot\frac{1-(1+j)^{-n1}}{j} \qquad K = 1.742104\times 10^{3}$$

Ответ: Величина необходимых инвестиций составит 1742 д.е., т.е. расчеты проекта верны.

Задача 9. Некто получил наследство в виде солидного банковского счета K и теперь его «проедает», беря каждый год со счета в банке определенную сумму R и тратя ее в течение года. По сути, это «перевернутый» инвестиционный процесс. Что здесь является инвестициями, сроком окупаемости, внутренней нормой доходности, чистым приведенным доходом. Какие меры должен принять наследник при увеличении темпов инфляции? Расчеты выполнить для следующих исходных данных: K = 30 000 д.е., R=10 000 д.е., ставка i =10%.

Решение. В данном случае мы имеем "перевернутый" инвестиционный проект. В качестве инвестиций выступает счет в банке K, на который банк начисляет проценты по ставке i. В качестве доходов от инвестиций мы имеем сумму R, которую снимает наследник ежегодно в банке. Поэтому срок окупаемости такого «проекта» будет равен сроку, за который наследник снимет всю сумму в банке. Внутренняя норма доходности – это предельная ставка процента, при которой за определенный срок наследник снимет всю сумму в банке.

Итак, срок окупаемости n, т.е. срок в течение которого наследник снимет всю сумму, определится из уравнения $K = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, где i – ставка банковского процента. Отсюда получим $n = \frac{-\ln(1-i \times \frac{K}{R})}{\ln(1+i)}$. Внутренняя норма доходности «проекта» определяется из того же уравнения, в котором срок n задан и нужно определить i. Если срок "проекта" равен сроку окупаемости, то внутренняя норма доходности совпадает с банковской процентной ставкой, а чистый приведенный доход будет равен нулю.

Исходные данные

$$K := 30000 \qquad R := 10000 \qquad j := 0.1$$

Решение MathCAD

$$no := \frac{-\ln\left(1 - \frac{K \cdot j}{R}\right)}{\ln(1 + j)} \qquad no = 3.742254$$

т.е. наследник проест свое наследство за 4 года, причем в последний 4 год он получит сумму меньшую, чем 10000 д.е. Найдем эту сумму.

$$R \cdot \frac{1-(1+j)^{-4}}{j} = 3.169865 \times 10^{4}$$

Отсюда получим 31699 – 30000 = 1699 д.е. Таким образом, в последний год наследник получит не 10000 д.е., а на 1699 д.е. меньше, т.е. 10000 – 1699 = 8301 д.е.

Найдем внутреннюю норму доходности «проекта».

$$q := 0.001$$

$$f(q) := \left[R \cdot \frac{1-(1+q)^{-no}}{q}\right] - K$$

$$\mathrm{root}(f(q), q) = 0.1$$

Таким образом, внутренняя норма доходности совпадает со ставкой процента банка.

Если ставка процента будет больше 10%, например, 13%, то чистый приведенный доход будет равен

$$j := 13\%$$

$$W := \left[R \cdot \frac{1-(1+j)^{-no}}{j}\right] - K$$

$$W = -1.76511 \times 10^{3}$$

В инвестиционном проекте это значило бы, что проект убыточен, а в данном «перевернутом проекте» это означает, что у наследника на счету останется еще 1765 д.е.

Задача 10. Найдите курс облигации без погашения с периодической — раз в год — выплатой процентов при q = 8% , i = 5% . Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен K =120.

Решение. Выплаты по такой облигации можно рассматривать как вечную ренту. Курс облигации по определению равен

$K=\frac{P}{N}100$, где P – рыночная цена облигации (цена покупки), N – номинал облигации. Рыночная цена облигации облигации без погашения с периодической выплатой процентов равна $P=\frac{N\cdot q}{i}$, где q – купонная ставка. Таким образом, курс равен $K=\frac{q}{i}100$. Доходность облигации равна $j=\frac{q}{K}100$.

Исходные данные

$$q := 0.08 \qquad j := 0.05 \qquad K1 := 120$$

Решение MathCAD

$$K := 100\cdot\frac{q}{j} \qquad K = 160$$

$$j1 := 100\cdot\frac{q}{K1} \qquad j1 = 0.066667$$

Ответ. Курс облигации при при q = 8% , i = 5% равен 160, доходность облигации при курсе 120 равна 6,67%.

Задача 11. Рассматривается 8% купонная облигация номиналом 1000 д.е., по которой обещают производить купонные выплаты дважды в году в течение 3-х лет. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 10% годовых. Вычислить дюрацию и показатель выпуклости облигации.

Решение. Дюрация – это средняя продолжительность платежей. Дюрация облигации характеризует меру процентного риска облигации – чем больше дюрация, тем больше процентный риск облигации. Показатель выпуклости облигации – это вспомогательная характеристика. Показатель выпуклости облигации можно интерпретировать как показатель того, насколько точно дюрация облигации оценивает величину процентного риска облигации.

Дюрация D и показатель выпуклости C облигации рассчитываются по следующим формулам

$$D=\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{m}t_k\frac{R_k}{(1+i)^{t_k}},\ C=\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{m}t_k(t_k+1)\frac{R_k}{(1+i)^{t_k}},$$

где $P=\sum_{k=1}^{m}\frac{R_k}{(1+i)^{t_k}}$ – рыночная цена облигации; R_k – размер платежа в момент времени t_k; i – безрисковая процентная ставка; $m=n\cdot p$ – количество платежей по облигации до срока гашения облигации (здесь n – срок долга, p – количество платежей в год). Размер k-го платежа равен $R_k=\frac{N\cdot q}{p}$, где N – номинал облигации.

Исходные данные

$n1 := 3 \qquad p := 2 \qquad q := 8\%$

$N := 1000 \qquad j := 10\%$

Решение MathCAD

$n2 := n1\cdot p$

$k := 1..\, n1\cdot p$

$t_k := \frac{k}{p} \qquad R_k := N\cdot\frac{q}{p} \qquad R_{n2} := R_{n2} + N$

$$P := \sum_{k=1}^{n2}\frac{R_k}{(1+j)^{t_k}} \qquad D := \frac{\sum_{k=1}^{n2}\frac{t_k\cdot R_k}{(1+j)^{t_k}}}{P} \qquad C := \frac{\sum_{k=1}^{n2}\frac{t_k\left(t_k+1\right)\cdot R_k}{(1+j)^{t_k}}}{P}$$

$D = 2.718466 \qquad C = 10.555657$

Ответ. Дюрация облигации равна 2,718 года, показатель выпуклости равен 10,555.

Задача 12. Рассчитать оптимальный портфель Марковица минимального риска для трех ценных бумаг с доходностями и рисками: (4,10); (10,40); (40,80); нижняя граница доходности портфеля m_p задана равной 15.

Решение. Портфель Марковица минимального риска формируется по следующей схеме.

Необходимо определить доли вложений x_j $(j=1,2,...,n)$ в рисковые ценные бумаги, минимизирующие вариацию (риск) портфеля

$$V_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j$$

при условии, что обеспечивается заданное значение m_p ожидаемой эффективности портфеля

$$\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \geq m_p .$$

Кроме того, должны быть выполнены дополнительные ограничения вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \ x_j \geq 0$$

при всех $j = 1, 2, ..., n$.

Здесь V_{ij} – элементы матрицы ковариации доходностей рисковых ценных бумаг ($i, \ j = 1, 2, ..., n$); n – количество видов ценных бумаг; m_j – доходность j-ой ценной бумаги.

Исходные данные

$$\mathrm{mp} := 15 \qquad \mathrm{m1} := 3$$

$$\mathrm{m2} := \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{r} := \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Решение MathCAD

$$Vp(x) := \left(r1_1\right)^2 \cdot x_1 + \left(r1_2\right)^2 \cdot x_2 + \left(r1_3\right)^2 \cdot x_3$$

$$x_3 := 0$$

Given

$$m2_1 \cdot x_1 + m2_2 \cdot x_2 + m2_3 \cdot x_3 \geq mp$$

$$\sum_{k=1}^{m1} x_k = 1$$

$$x \geq 0$$

$$x1 := \mathrm{Minimize}(Vp, x) \qquad x1 = \begin{pmatrix} 0.694444 \\ 0 \\ 0.305556 \end{pmatrix}$$

$$m2^T \cdot x1 = (15)$$

$$Vp(x1) = 2.025 \times 10^3$$

$$\sqrt{Vp(x1)} = 45$$

Ответ. Доли бумаг в портфеле составляют (0,69;0;0,31), риск портфеля равен 45.