

Министерство науки и высшего образования РФ

Томский государственный университет  
систем управления и радиоэлектроники

А. В. Новиков

# **КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ СИГНАЛА В КОДИРОВКЕ MLT-3**

Учебное наглядное пособие для магистрантов,  
обучающихся по направлениям подготовки "Радиотехника" и  
"Инфокоммуникационные технологии и системы связи"

Томск

2020

УДК 621.391

ББК 32.88-01

**Рецензент:**

**Акулиничев Ю.П.**, профессор кафедры радиотехнических систем ТУСУР,  
докт. техн. наук

**Новиков, Анатолий Викторович**

Корреляционная функция и спектральная плотность мощности сигнала в кодировке MLT-3. Учебное наглядное пособие. Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2020. – 17 с.

Настоящее учебное наглядное пособие составлено с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС ВО).

В пособии дан детальный вывод выражения в замкнутой форме для автокорреляционной функции дискретной случайной последовательности, соответствующей коду MLT-3. Также в замкнутой форме найдено выражение для соответствующей спектральной плотности мощности. Пособие может быть полезно не только магистрантам, но и аспирантам, инженерам и научным работникам, исследующим проблемы передачи цифровой информации.

Одобрено на заседании каф. радиотехнических систем, протокол № 07 от 05 марта 2020 г.

УДК 621.391

ББК 32.88-01

© Новиков А. В., 2020

© Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2020

## Оглавление

Введение.....	4
Логика кодирования MLT-3.....	5
Формирование кодированного видеосигнала и его спектральная плотность мощности.....	6
Автокорреляционная функция кода MLT-3.....	8
Свертка выражения для автокорреляционной функции.....	13
Выражение для спектральной плотности мощности кода MLT-3.....	14
Заключение.....	16
Приложение А. Расчет спектральной плотности мощности кода MLT-3 по автокорреляционной функции.....	17

## Введение

Попытка найти выражение в замкнутой форме для автокорреляционной функции дискретной случайной последовательности, соответствующей коду MLT-3, а также для соответствующей спектральной плотности мощности дала отрицательный результат. В связи с чем возникла идея синтезировать эти выражения с подробным описанием процесса синтеза, преследуя прежде всего методическую цель, что, возможно, даст идеи для синтеза автокорреляционных функций других широко используемых кодов: HDB3, 4B3T, B3ZS и т. п.

Кодировка MLT-3 является трехуровневой и используется в технологии Fast Ethernet 100Base-TX для передачи битов по витой паре — медному кабелю. Преобразование MLT-3 предназначено для снижения уровня:

- междуканальных помех (в случае многоканальной системы);
- межсимвольной интерференции (при передаче по каналу с ограниченной полосой частот).

Код MLT-3 устроен таким образом, что верхняя частота в спектре кодированного сигнала, в целом, в 4 раза ниже верхней частоты некодированного. Так как с уменьшением частоты сигнала способность проводника излучать соответствующие электромагнитные волны падает, то кодировка, фактически, снижает уровень излучения от кабеля, т. е. спектральную плотность помехи (Crosstalk level).

Снижение ширины спектра кодированного сигнала позволяет передавать его по каналу с меньшей полосой пропускания без снижения производительности системы, или по каналу с той же полосой, но с меньшим уровнем межсимвольной интерференции (Inter-Symbol Interference) и меньшим затуханием.

Уровень межсимвольной интерференции и междуканальной помехи в приемнике можно охарактеризовать суммарной спектральной плотностью эквивалентной помехи типа белый шум (вместе с тепловым шумом приемника), поэтому, в итоге, снижение уровня помехи приведет к снижению вероятности ошибки в приемнике — ключевому показателю (помимо скорости передачи) качества работы цифровых систем передачи информации.

## Логика кодирования MLT-3

Кодирующее устройство (кодер) MLT-3 преобразует последовательность двоичных символов  $U_n$  в последовательность троичных  $R_n$ .

Здесь  $n \in \mathbb{Z}$ , т.е. индекс  $n$  пробегает множество целых чисел  $\mathbb{Z}$ . Если на вход кодера  $U_n$  поступает бит 0, то уровень  $R_n$  на



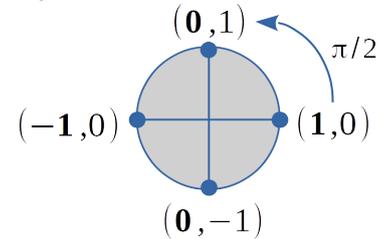
выходе кодера остается без изменений. Если на вход кодера поступает бит 1, то выходной уровень изменяется на следующий. Следующему уровню соответствует поворот вспомогательного вектора  $C_n$  на  $+90$  градусов, рис. 1, причем в качестве выходного уровня берется всего лишь одна координата вектора (выделена жирным шрифтом); здесь это координата по горизонтальной оси — вещественная часть  $\Re[\cdot]$  комплексного числа  $C_n$ .

$$C_n = C_{n-1} \exp\left(\frac{\pi j}{2} U_n\right)$$

$$R_n = \Re(C_n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$C_{-\infty} = 1 \quad j = \sqrt{-1}$$

Рис. 1 Математика кода MLT-3



Таким образом, последовательность, допустим, из всех единиц  $(1,1,1,\dots)$  отображается в периодически повторяющуюся последовательность  $(1,0,-1,0)$ , отсчеты которой можно представить как выборку значений некоторого синусоидального колебания,

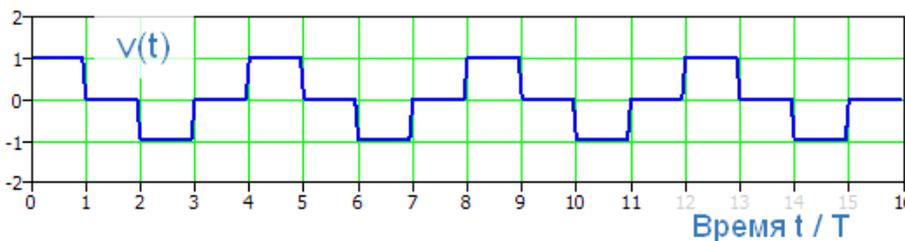


Рис. 2 Кодированный MLT-3 видеосигнал, переносящий биты «все единицы»

частота которого в 4 раза ниже символьной частоты  $1/T$ . Причем подача на вход кодирующего устройства нулей приведет лишь к замедлению процесса на выходе. Такое наблюдение позволяет сделать вывод о том, что частота  $1/(4T)$  определяет некую фундаментальную гармонику, левее которой концентрируется основная мощность соответствующего видеосигнала  $v(t)$ .

Заметим, что поворот вектора на 90 градусов можно интерпретировать как дифференциальную фазовую манипуляцию ФМн-4 (D-QPSK) соответствующего радиосигнала, в связи с чем в процессе приема и декодирования кода MLT-3 возможно появление парных ошибок.

## Формирование кодированного видеосигнала и его спектральная плотность мощности

Видеосигнал  $v(t)$ , подаваемый непосредственно в среду передачи (в линию связи), является откликом некоторого линейного фильтра на код — трехзначную последовательность  $R_n$

$$v(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n g(t - nT), \quad (1)$$

где  $g(t)$  — импульсная характеристика (ИХ) фильтра, который называется формирующим. Этот фильтр определяет спектр формируемого сигнала, а также позволяет проконтролировать (задать) уровень возможного влияния нескольких соседних импульсов друг на друга — межсимвольную интерференцию. Формула (1) описывает свертку последовательности  $R_n$  с сигналом  $g(t)$  в точном соответствии с теорией линейной фильтрации. Вероятно, вам более знакома интегральная форма записи свертки

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) g(t - \tau) d\tau,$$

которая, однако, для дискретного входного сигнала

$$r(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n \delta(\tau - nT) \quad (\delta(t) \text{ — дельта-функция})$$

переходит в (1).

Сигналам на рис. 3 и рис. 4 соответствует фильтр с прямоугольной ИХ  $g(t)$ , а различие в спектрах, рис. 5, вызвано лишь кодом. Здесь видеосигналы выровнены по средней мощности, равной 0,5, что косвенно подтверждается равенством их спектральных плотностей<sup>1</sup> на нулевой частоте, рис. 5. Форма спектральной плотности мощности сигнала без кода совпадает с формой спектральной плотности одиночного импульса  $g(t)$  и равна квадрату функции Котельникова. Заметим, что некодированному сигналу при

<sup>1</sup> Если спектр отображен в децибелах, то допускается говорить «спектральная плотность», не конкретизируя по мощности или амплитуде

этом соответствует последовательность некоррелированных равновероятных битов, отображенных сигнальными уровнями  $1/\sqrt{2} \approx 0,707$  и  $-1/\sqrt{2} \approx -0,707$ . Некоррелированная последовательность битов является эталонной, в том смысле, что такие биты не приводят к изменению формы спектральной плотности мощности модулированного сигнала  $v(t)$ . Свойство сохранять форму спектра вызвано отсутствием корреляции битов, т. е. игольчатой автокорреляционной функцией, АКФ.

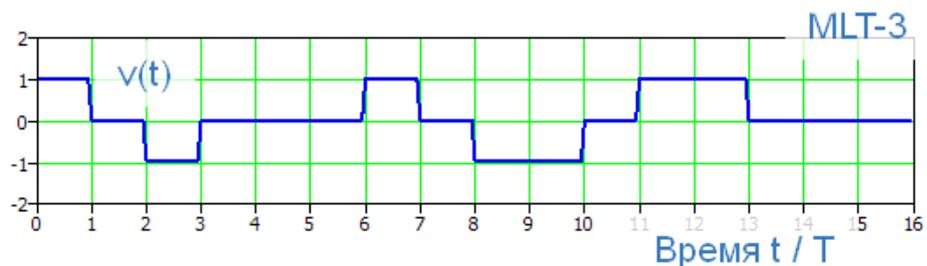


Рис. 3 Кодированный MLT-3 видеосигнал, переносящий биты 1111001110110100

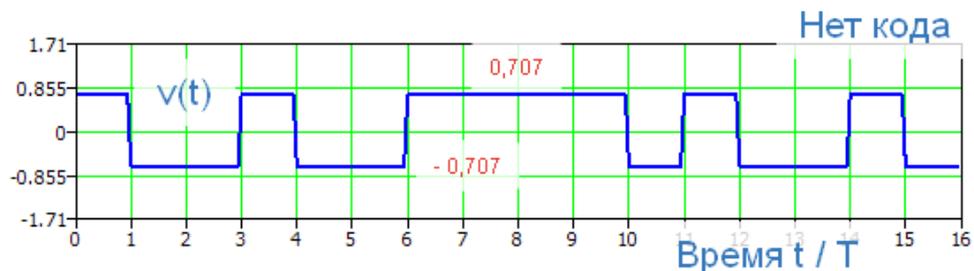


Рис. 4 Биполярный видеосигнал, переносящий биты 1001001111010010

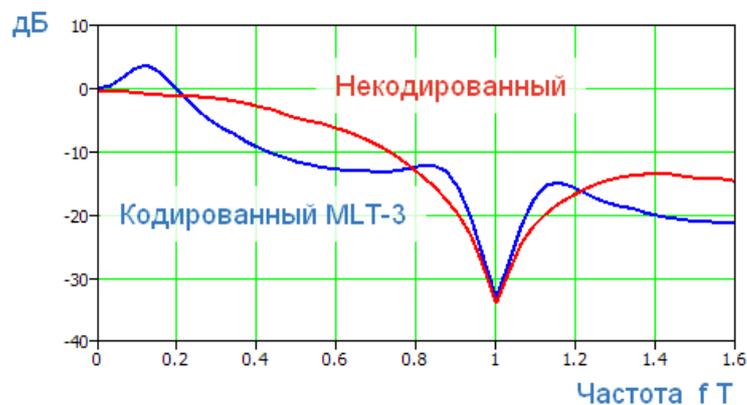


Рис. 5 Спектральные плотности информационных видеосигналов. Кривые получены путем статистического моделирования на ЭВМ.

Известно, что в общем случае спектральная плотность мощности сигнала с линейной модуляцией (1) равна произведению двух спектральных плотностей

$$\Phi_{vv}(f) = \Phi_{gg}(f) \Phi_{RR}(f) , \quad (2)$$

где  $\Phi_{gg}(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2$  — спектральная плотность мощности одиночного импульса  $g(t)$  ,

$$\Phi_{RR}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_{RR}(n) e^{-2\pi jfnT} \quad \text{— спектральная плотность мощности}$$

последовательности  $R_n$  , являющаяся дискретным преобразованием Фурье ее АКФ  $\varphi_{RR}(n) = M[R_i R_{i+n}]$  . Здесь  $M[\ ]$  — оператор математического ожидания.

Если АКФ игольчатая, т. е.  $\varphi_{RR}(n) = \sigma^2 \delta_n$  , где  $\delta_n$  —  $\delta$  - последовательность<sup>2</sup>, то  $\Phi_{RR}(f) = \sigma^2 = \text{const}$  . Здесь  $\sigma^2$  пропорциональна средней мощности последовательности  $R_n$  .

Отсутствие корреляции в некоторой стационарной последовательности  $B_n$  математически обозначается так

$$\varphi_{BB}(n) = M[B_{i+n} B_i] = \overline{B_{i+n} B_i} = 0 , \quad \forall n \neq 0 .$$

Заметим, что значение АКФ в нуле есть средний квадрат некоторой случайной величины

$$\varphi_{BB}(0) = M[B_n B_n] = \overline{B_n^2} ,$$

который пропорционален средней мощности соответствующего дискретного случайного процесса.

## Автокорреляционная функция кода MLT-3

Определим для начала среднюю мощность последовательности равновероятных битов в биполярном коде  $(-1, +1)$  ,  $B_n$

$$\varphi_{BB}(0) = \overline{B_n^2} = (-1)^2 1/2 + (+1)^2 1/2 = 1 .$$

Далее определим среднюю мощность последовательности на выходе кодера MLT-3. Для этого вычислим вероятности значений  $(-1, 0, +1)$  троичного символа  $R_n$  . Выясним какие причины влекут появление уровня 0 на выходе кодера. Во-первых, это переход из 1 в 0 или из -1 в

2 Единичный импульс, дискретный импульс

0 при поступлении на вход бита 1. Во-вторых, это пребывание в предыдущем состоянии 0 при поступлении на вход бита 0. Данную причинно-следственную связь оформим математически

$$p(0) = 1/2 p(+1) + 1/2 p(-1) + 1/2 p(0) ,$$

где  $p(x)$  — вероятность значения  $x$  на выходе кодера. Вероятности по  $1/2$  означают вероятности входных битов. Рассуждая аналогично, запишем уравнения для выходных уровней +1 и -1

$$p(+1) = 1/2 p(0)/2 + 1/2 p(+1) ,$$

$$p(-1) = 1/2 p(0)/2 + 1/2 p(-1) .$$

В этих двух уравнениях после  $p(0)$  идет коэффициент  $1/2$ , потому что переход в +1 при поступлении на вход 1 возможен лишь из нуля, следующего за -1. Вспомните кольцо уровней (+1, 0, -1, 0). Решая систему из трех уравнений, находим ответ

$$p(+1) = p(-1) = 1/4 , \quad p(0) = 1/2 .$$

Отсюда средняя мощность

$$\varphi_{RR}(0) = \overline{R_n^2} = (-1)^2 1/4 + (0)^2 1/2 + (+1)^2 1/4 = 1/2 .$$

Получается так, что средняя мощность кодированных символов  $R_n$  уменьшилась в 2 раза относительно некодированных  $V_n$ . Однако кодированные символы в 2 раза ближе некодированных. Если два процесса выровнять по средней мощности, то кодированные символы будут в  $\sqrt{2}$  раз ближе некодированных, что при той же спектральной плотности эквивалентной помехи несколько повысит вероятность ошибки при детектировании кодированных импульсов. Дополнительной платой за использование кода MLT-3 является увеличение требуемого динамического диапазона приемника (передатчика) на 3 дБ (уровни  $\sqrt{2}$ , 0,  $-\sqrt{2}$  против 1, -1).

Рассуждая для произвольных вероятностей  $p_0 + p_1 = 1$  входных битов кодера MLT-3, можно составить систему из четырех уравнений

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_0-1 & 0 \\ 0 & p_0-1 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_1 & p_0-1 \\ p_0-1 & p_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0_1) \\ p(0_2) \\ p(+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где выходные нули обозначены индексами:  $(+1, 0_1, -1, 0_2)$ . Решение данной системы дает интересный результат (здесь ранг матрицы равен 3, при  $p_1 \neq 0$ )

$$p(+1) = p(-1) = 1/4, \quad p(0) = p(0_1) + p(0_2) = 1/2.$$

Моделирование кода MLT-3, например, в *Mathcad*, позволяет убедиться в этом.

Значение АКФ кода MLT-3 в нуле мы уже определили, это  $\varphi_{RR}(0) = \overline{R_n^2} = 1/2$ . Определим значение АКФ в другие моменты времени. Напомним, что АКФ является четной, поэтому достаточно лишь вычислить все  $\varphi_{RR}(n) = \overline{R_i R_{i+n}}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Рассмотрим подробно случай  $n = 1$ , табл. 1.

Табл. 1 Возможные состояния кодера MLT-3 для расчета корреляции соседних символов

$U_i$	$U_{i+1}$	$R_{i-1}$	$R_i$	$R_{i+1}$	$p$
(1, 1, 0, 0)	0	(+1, -1, 0 <sub>1</sub> , 0 <sub>2</sub> )	0	0	1/4
(1, 0)	1	(-1, 0 <sub>2</sub> )	0 <sub>2</sub>	+1	1/8
(1, 0)	1	(0 <sub>2</sub> , +1)	+1	0 <sub>1</sub>	1/8
(1, 0)	1	(0 <sub>1</sub> , -1)	-1	0 <sub>2</sub>	1/8
(1, 0)	1	(+1, 0 <sub>1</sub> )	0 <sub>1</sub>	-1	1/8
(1, 0)	0	(0 <sub>2</sub> , +1)	+1	+1	1/8
(1, 0)	0	(0 <sub>1</sub> , -1)	-1	-1	1/8

Здесь в двух столбцах (выделены серым), перебираются все возможные сочетания  $R_i R_{i+1}$ , после чего логически вычисляются возможные значения в первых трех столбцах. Затем ситуация "переворачивается", т. е. считается, что первые три столбца таблицы являются причиной, а следующие два — следствием, а вероятность следствия  $p$  вычисляется через вероятность соответствующей причины. Допустим

$$\begin{aligned} p(00) &= p_1 p_0 p(+1) + p_1 p_0 p(-1) + p_0 p_0 p(0_1) + p_0 p_0 p(0_2) = \\ &= 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/4 = 1/4, \end{aligned}$$

$$p(+1+1) = p_1 p_0 p(0_2) + p_0 p_0 p(+1) = \dots \\ = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/4 = 1/8$$

Суммируя, получим

$$\varphi_{RR}(1) = \overline{R_i R_{i+1}} = (+1) \cdot (+1) \cdot 1/8 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1/8 = 1/4 .$$

Мы просуммировали два слагаемых, т. к. остальные равны нулю. Этот факт можно использовать для ускорения анализа, т. е. анализировать лишь те произведения, которые отличны от нуля, чем мы далее и воспользуемся. Вычислим  $\varphi_{RR}(2) = \overline{R_i R_{i+2}}$ . Для этого по минимуму заполним табл. 2.

Табл. 2 Возможные состояния кодера MLT-3 для расчета корреляции двух символов, разделенных одним соседом

$R_{i-1}$	$R_i$	$R_{i+1}$	$R_{i+2}$	$p$
$(-1, 0_1)$	-1	$0_2$	+1	1/16
$(+1, 0_2)$	+1	$0_1$	-1	1/16
$(+1, 0_2)$	+1	+1	+1	1/16
$(-1, 0_1)$	-1	-1	-1	1/16

Вычислим, например, вероятность  $p(-1+1)$ . Если мы зафиксировали  $R_i R_{i+2} = -1+1$ , то согласно логике кодирования автоматически  $R_{i+1} = 0_2$ , т. е. столбец  $R_{i+1}$  становится неслучайным и становится ненужным (зависимым). Тогда предыдущим состоянием кодера  $R_{i-1}$  могут быть два значения:  $-1$  или  $0_1$ , при этом если  $R_{i-1} = -1$ , то на входе кодера будет  $U_i = 0$ , а если  $R_{i-1} = 0_1$ , то  $U_i = 1$ . Значения  $U_{i+1}, U_{i+2}$  обязаны быть равны по единице, потому что кодер меняет состояние как  $-1, 0_2, +1$ . Держа в уме эту логику, вычисляем искомую вероятность

$$p(R_i R_{i+2} = -1+1) = \\ = p(-1) p_0 p_1 p_1 + p(0_1) p_1 p_1 p_1 = \dots \\ = 1/4 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 + 1/4 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/16$$

В итоге все значимые состояния оказались равновероятными, что дает  $\varphi_{RR}(2) = 0$ .

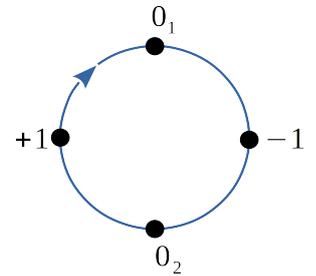
Заполним таблицу для вычисления  $\varphi_{RR}(3)$ .

Таблица 3 Возможные состояния кодера MLT-3 для расчета корреляции двух символов, разделенных двумя рядом стоящими соседями

$R_i$	$R_{i+1}$	$R_{i+2}$	$R_{i+3}$	$R_i R_{i+3}$	$p$
-1	-1	$0_2$	+1	-1	1/32
-1	$0_2$	$0_2$	+1	-1	1/32
-1	$0_2$	+1	+1	-1	1/32
+1	+1	$0_1$	-1	-1	1/32
+1	$0_1$	$0_1$	-1	-1	1/32
+1	$0_1$	-1	-1	-1	1/32
-1	-1	-1	-1	+1	1/32
+1	+1	+1	+1	+1	1/32

Зафиксируем мысленно цикл состояний кодера (кольцо на рисунке). Важны лишь ненулевые произведения

$R_i R_{i+3}$ , поэтому вся соль заключается в отыскании логики всех возможных переходов из ненулевого состояния в ненулевое. Для кода MLT-3 таких переходов четыре:



$$\{-1 \rightarrow -1, -1 \rightarrow +1, +1 \rightarrow -1, +1 \rightarrow +1\} .$$

Для некоторых переходов существует не один, а несколько путей. Допустим, из  $-1$  в  $+1$  при  $n=3$  можно перейти тремя способами. Здесь  $n$  – число тиков (шагов). Оно определяется аргументом АКФ  $\varphi_{RR}(n)$ . При трех тиках допускается один раз задержаться в  $-1$  или в  $0_2$  или в  $+1$ , т. к. если нигде не задерживаться, то осуществится переход из  $-1$  в  $0_1$ . Задержка в некотором состоянии соответствует поступлению 0 на вход кодера, а шаг по кольцу — 1. Итого,  $\varphi_{RR}(3) = -1/8$ .

Осознав логику движения по кольцу состояний, случай  $\varphi_{RR}(n=4)$  рассмотрим "в темпе вальса", обобщив логику на любое  $n$ . Для этого число пройденных дуг кольца обозначим как  $r$ , причем всегда  $0 \leq r \leq n$ . Если дуга пройдена, то обозначим это как 1, если нет, то как 0. Тогда, допустим, при  $n=4$  и  $r=2$  можно выписать следующие варианты переходов, хоть из  $-1$  в  $+1$ , хоть наоборот:

0000 — здесь ни одной дуги не было пройдено,  $r=0$ .

1100 , 1010 , 1001 , 0110 , 0101 , 0011 — здесь пройдено две дуги,  $r=2$

1111 — здесь пройдено 4 дуги,  $r=4$  (кольцо целиком).

Можно отметить, что переходам из ненулевого состояния в ненулевое всегда соответствует четное число  $r$ , т. к. ненулевые состояния разделены двумя дугами-четвертинками.

Известно, что число двоичных кодовых слов длиной  $n$  с количеством единиц  $r$  определяется числом сочетаний из  $n$  по  $r$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} .$$

Например

$$C_4^0 = \frac{4!}{0!(4-0)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1 , \quad C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6 .$$

Замечая, что можно переходить как из  $-1$ , так и из  $+1$  (число вариантов удваивается), а также нормируя АКФ к единице (в центре), получим следующий результат

$$\varphi_{RR}(n) = \frac{1}{2^n} \sum_{r \geq 0} C_n^{2r} (-1)^r , \quad n \geq 0 . \quad (3)$$

Заметим, что хотя количество слагаемых и конечно (порядка  $n/2$ ), найденное выражение неудобно с точки зрения линейного роста количества операций в зависимости от  $n$ , что, в итоге, при последовательном расчете всех  $n=0 \dots N$  значений дает общее число операций порядка  $N^2/2$ . Поэтому встает задача сворачивания суммы (3), что дополнительно упростит вычисление соответствующей спектральной плотности мощности.

## Свертка выражения для автокорреляционной функции

Используя свойство мнимой единицы  $i^4=1$  и бином Ньютона  $(1+i)^n$ , свернем выражение (3)

$$\varphi_{RR}(n) = 2^{-\frac{|n|}{2}} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) . \quad (4)$$

Это так, потому что с одной стороны, группируя четные и нечетные индексы, имеем равенство

$$(1+i)^n = \sum_{k \geq 0} C_n^k i^k = \sum_{k \geq 0} C_n^{2k} (-1)^k + i \sum_{k \geq 0} C_n^{(2k+1)} (-1)^k,$$

а с другой — имеем прямое следствие формулы Муавра

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{\frac{\pi i n}{4}},$$

поэтому беря вещественные части от обоих выражений, получаем искомый результат. Отрезок АКФ показан на рис. 6.

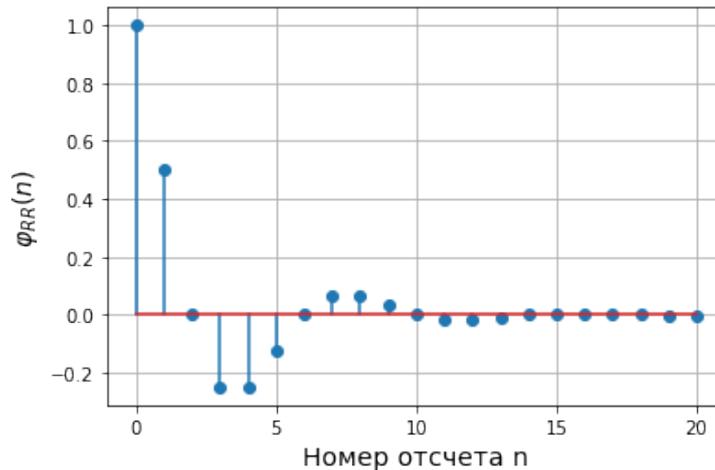


Рис. 6 Отрезок автокорреляционной функции кода MLT-3

Видно, что коэффициент корреляции соседних отсчетов равен 0,5, а отсчеты, взятые через один, — некоррелированы. Так как АКФ (4) промодулирована косинусом, то в соответствующей спектральной плотности мощности должна быть резонансная область в окрестности частоты 1/8, в чем мы далее и убедимся.

## Выражение для спектральной плотности мощности кода MLT-3

Используя формулу Эйлера и формулу суммы геометрической прогрессии<sup>3</sup>, вычислим спектральную плотность мощности кода MLT-3

$$\Phi_{RR}(fT) = \frac{3 - 2 \cos(2\pi fT)}{[2 \cos(2\pi fT) - 2 \sin(2\pi fT) - 3][2 \cos(2\pi fT) + 2 \sin(2\pi fT) - 3]}, \quad (5)$$

которая является результатом дискретного преобразования Фурье АКФ (4).

<sup>3</sup> Смотри Приложение А

График найденной спектральной плотности на одном периоде показан на рис. 7. Заметим, что для перевода в децибелы берется десять десятичных логарифмов, т. к. спектральная плотность мощности пропорциональна мощности и в квадрат ее возводить не требуется. Неравномерность спектра — 12 дБ. Подъем на +5 дБ говорит о доминировании в кодированном сигнале некой средней частоты, примерно равной 0,125. Ширина спектра по уровню -3 дБ составляет около 0,25. Таким образом, код MLT-3 приводит к перераспределению мощности из области высоких частот в область средних.

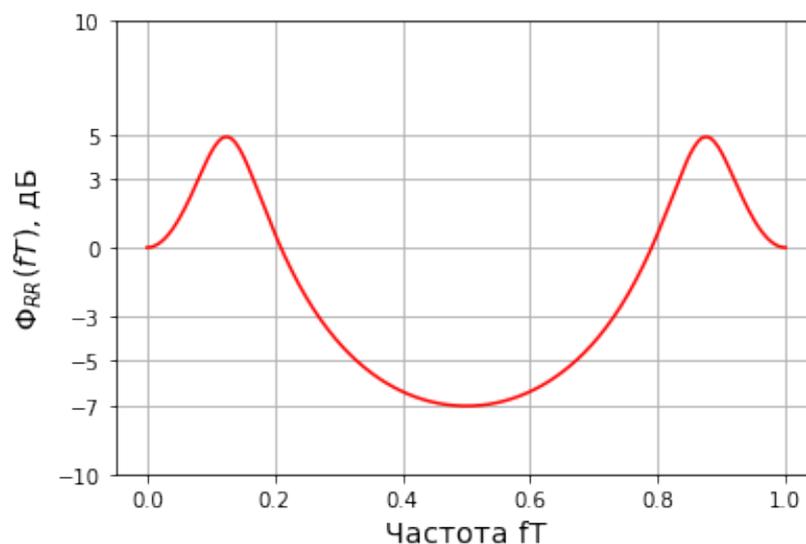


Рис. 7 Спектральная плотность кода MLT-3

Здесь частоте 0,5 или  $1/2T$  соответствует половина частоты дискретизации, т. е. максимальная доступная для анализа частота (верхняя частота). Частоте же 1 или  $1/T$ , фактически, соответствует нулевая частота, потому что если из некоторого процесса делаются выборки с частотой  $1/T$ , а процессом является гармоническое колебание с той же частотой  $1/T$ , то амплитуда формируемых отсчетов будет постоянной, что равнозначно выборке из сигнала с нулевой частотой (эффект трансформации частот).

Найденное выражение (5) определяет своего рода корректор, форму, которая накладывается (в дБ суммируется, в разгах — перемножается) на спектр одиночного импульса  $g(t)$ , т. е. на передаточную функцию формирующего фильтра — фильтра, преобразующего дискретную последовательность  $R_n$  в непрерывный сигнал  $v(t)$ , пригодный для передачи по некоторой линии связи.

## **Заключение**

Аналитически, а также путем статистического моделирования кода MLT-3, было показано, что спектр формируемого сигнала, переносящего информацию в цифровой форме, определяется не только передаточной функцией формирующего фильтра, но и корреляционными свойствами используемого кода. Выяснено, что использование кода MLT-3 приводит к перераспределению мощности из области высоких частот в область средних. В итоге, ширина спектра формируемого сигнала снижается в 4 раза, что повышает производительность многоканальной системы передачи информации.

Хочется надеяться, что предложенная методика поиска выражения автокорреляционной функции кода MLT-3 окажет помощь при синтезе автокорреляционных функций других широко используемых кодов: HDB3, 4B3T, B3ZS и т. п.

## Приложение А. Расчет спектральной плотности мощности кода MLT-3 по автокорреляционной функции

Используя определение спектральной плотности через дискретное преобразование Фурье АКФ, а также четность АКФ, получим

$$\Phi_{RR}(fT) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_{RR}(n) e^{-2\pi j n f T} = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} 2^{-n/2} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \cos(2\pi n f T)$$

Используя равенства

$$A(n) = \Re\left(e^{j\frac{\pi n}{4}} e^{j2\pi n f T}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \cos(2\pi n f T) - \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) \sin(2\pi n f T) ,$$

$$B(n) = \Re\left(e^{j\frac{\pi n}{4}} e^{-j2\pi n f T}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \cos(2\pi n f T) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) \sin(2\pi n f T) ,$$

$$\Phi_{RR}(fT) = 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{-n/2} [A(n) + B(n)] ,$$

найдем часть Фурье-суммы, связанную с  $A(n)$

$$S(n, fT) = \Re\left[\sum_{n \geq 1} 2^{-n/2} e^{j\frac{\pi n}{4}} e^{j2\pi n f T}\right] = \Re\left[\sum_{n \geq 1} q^n\right] ,$$

$$q = 2^{-1/2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j2\pi f T} .$$

Так как  $|q| < 1$  , то в последнем равенстве стоит сумма сходящейся геометрической прогрессии, поэтому

$$S(n, fT) = \Re\left[\frac{q}{1-q}\right] = \frac{\sqrt{2} \cos(2\pi f T + \pi/4) - 1}{2 - 2\sqrt{2} \cos(2\pi f T + \pi/4) + 1} .$$

Сумма, связанная с  $B(n)$  , находится как  $S(n, -fT)$  , откуда

$$\Phi_{RR}(fT) = 1 + S(n, fT) + S(n, -fT) .$$