**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»**

Б.А. Люкшин
Н.Ю. Гришаева
Г.Е. Уцын

# Теоретическая механика

Учебное пособие

Томск
2020

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73

Рецензенты:
**Барашков В.Н.**, профессор кафедры строительной механики Томского государственного архитектурно-строительного университета, д-р физ.-мат. наук

**Авторы:**
Б.А. Люкшин, Н.Ю. Гришаева, Г.Е. Уцын

**Люкшин, Борис Александрович**
Теоретическая механика: учебное пособие / Б.А. Люкшин [и др.]. — Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2020. — 134 с.

В учебном пособии изложены основы теоретической механики по статике, кинематике, динамике в объеме, соответствующем образовательным стандартам, содержащим в плане вопросы теоретической механики, для всех направлений и специальностей ТУСУРа. Приведены примеры решения задач, сопровождающиеся методическими указаниями.

Для студентов всех форм обучения.

Одобрено на заседании каф. Механики и Графики, протокол №130 от 10.02.2020

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров ТУСУР по всем направлениям и специальностям подготовки, в которых предусмотрено изучение теоретической механики. Оно представляет собой адаптированное к объему часов, предусмотренному образовательными стандартами, изложение «Краткого курса теоретической механики» С. М. Тарга. Это пособие [1] предназначено для студентов механических специальностей высших технических учебных заведений, и потому его содержание и объем много шире, чем предусмотрено образовательными стандартами для указанных выше направлений. Студентам, желающим получить более полное представление о вопросах теоретической механики, можно рекомендовать указанное пособие для самостоятельной проработки.

В пособии отражены в основном теоретические вопросы курса. Основные навыки решения задач для студентов очной формы обучения приобретаются в общении с преподавателем на практических занятиях. Для студентов, желающих получить навыки решения задач, а также обучающихся по дистанционной технологии и по заочной форме, авторами разработано пособие в виде практикума по решению задач теоретической механики применительно к объему и содержанию теоретической части, изложенной в настоящем пособии. Это пособие предназначено для самостоятельной работы студентов в части решения задач теоретической механики.

Уровень усвоения материала проверяется самоконтролем, для этого после каждого раздела пособия размещены вопросы.

Статика выделена как наиболее важный раздел теоретической механики. Внимательный читатель пособия обратит внимание на то, что построение теоретической части курса – и это характерно для большинства учебников по теоретической механике – в значительной мере сводит многие вопросы динамики к формулировкам, характерным для проблем статики. Видимо, этому есть объяснение, один из элементов которого связан с историей развития дисциплины. В течение почти полутора тысячелетий, начиная с трудов Архимеда, все вопросы, позднее ставшие составной частью теоретической механики, рассматривались в статической постановке. Поэтому методы решения задач статики, как наиболее развитые, традиционно принято использовать и при решении динамических задач.

Хотелось бы отметить, что объем и содержание классического курса теоретической механики – например, читаемого студентам механических и строительных специальностей технических вузов, а также механико-математических факультетов университетов – много шире, чем отражено в настоящем пособии. Так, совершенно не отражены вопросы динамики тел с переменной массой. Не освещены вопросы теории гироскопов даже в элементарной форме, и т.д. Более того, даже те вопросы, что нашли место в этом пособии, изложены местами практически конспективно. Причины выше указаны.

Студентам, которым хотелось бы расширить свои знания по настоящему курсу, можно рекомендовать учебные пособия, приведенные в списке литературы.

В пособии нет списка используемых обозначений, каждое из них комментируется и расшифровывается по мере появления обозначения в тексте. Следует обратить внимание читателя на обозначения векторных величин. Каждая из них обозначается либо надчерком над соответствующей буквой, либо выделением этой буквы жирным шрифтом, например, обозначения $\bar{F}$ и $\mathbf{F}$ эквивалентны.

## Глава 1

# 1. МЕХАНИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Изменение материи называется движением. Под движением можно понимать все процессы, происходящие во Вселенной – от простого механического перемещения до мышления.

***Механика*** *– наука о механическом движении и о механическом взаимодействии тел.*

Независимо от специальности инженеру приходится сталкиваться с разнообразными вопросами, решение которых зачастую связано с исследованием механического движения и/или механического взаимодействия материальных тел. Так, для специалистов в области электронного приборостроения и машиностроения задачи теоретической механики возникают при конструировании механизмов настройки и управления радиоэлектронной аппаратуры, при создании разного рода электромеханических устройств, защиты аппаратуры от вибрации, ударов и т.п. Важную роль играет механика в вопросах робототехники и т.д.

Классическая механика исходит из предположения, что свойства пространства и времени не зависят от того, какие материальные объекты участвуют в движении и как именно они движутся. Поэтому появляется возможность выделить и описать некоторые общие свойства движения. При таком подходе рассматриваются лишь некоторые общие геометрические характеристики движения, которые в равной мере могут быть отнесены к движению самых разных объектов – молекулы или Солнца, изображения на экране телевизора или тени самолета на Земле.

Предполагается, что пространство однородно и изотропно, а время однородно. Однородность (соответственно изотропность) пространства означает, что в пространстве нет каких-либо точек (направлений), которые отличаются от других. Однородность времени означает, что при течении времени нет каких-либо примечательных, специально выделенных моментов и безразлично, от какого момента ведется отсчет. Пространство и время предполагаются «метризуемыми», т.е. в пространстве можно ввести масштаб, а во времени – часы.

Сам термин «механика» введен впервые Аристотелем (384 – 322 гг. до н.э.) и в те времена ассоциировался с такими понятиями, как «сооружение, машина».

В настоящее время под механикой понимается наука, охватывающая математические методы описания механических движений.

***Механическое движение*** *– происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве. Примерами механического движения являются движения небесных тел,* *течения газов и жидкостей, тепловое движение молекул, движения транспортных средств и живых существ и т.д. Приведенные в этом ряду примеры движений существенно отличаются пространственными и временными масштабами. Тем не менее, с точки зрения механики, они описываются во многом сходными понятиями и закономерностями.*

***Механическое взаимодействие тел*** *– такое воздействие тел друг на друга, в результате которого происходит изменение движения, формы и (или) размеров тел. Мерой механического взаимодействия является сила.*

Возможны разные способы классификации разделов механики. Например, есть классификация, в соответствии с которой механика делится на три ветви: 1) теоретическую, 2) квантовую и 3) релятивистскую.

О первом направлении пойдет речь в нашем курсе, второе изучает объекты микроскопических масштабов, в третьем речь идет о движении тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме.

В механике можно выделить следующие направления, каждое из которых тоже представляет собой комплекс дисциплин.

1. Собственно теоретическая (общая) механика. О ней будет речь идти ниже на протяжении всего курса.

2. Реология (буквально – наука об изменении, о течении). Это направление в качестве одной из важнейших составных частей содержит в себе механику деформируемого твердого тела. Она делится на такие составляющие, как теория упругости, теория пластичности, теория вязкоупругости, прикладная механика, теория оболочек, теория балок и стержней (сопротивление материалов), теория механизмов и машин, и т.д. Второе крупное направление – механика жидкости, газа и плазмы. Можно детализировать и дальше каждую из перечисленных дисциплин, но важно подчеркнуть то обстоятельство, что во всех частных или более общих разделах реологии используются понятия и методы, составляющие предмет теоретической механики. На них мы и остановимся.

В основе классической механики лежат законы Ньютона, которые являются обобщением опытных данных. Эти законы верны для подавляющего большинства приложений, во всяком случае, пока мы не принимаем во внимание поправки, связанные с теорией относительности.

---

Основной метод исследования в механике – моделирование. Модель – это всегда абстракция, некоторое упрощенное представление об объекте или явлении, отражающее их характерные черты. Модель иногда сравнивают с карикатурой: это не портрет и не фотография, но сходство с оригиналом обычно является настолько очевидным, что не нужно объяснять, о ком или о чем идет речь.

---

В классической механике почти все используемые положения и понятия являются абстракциями, или моделями.

Вместо реальных объектов в теоретической механике рассматриваются две основные модели:

- материальная точка;
- абсолютно твердое тело.

***Материальная точка*** *по аналогии с математической точкой не имеет пространственной протяженности, но, в отличие от математической точки, обладает массой.*

На практике понятие точки используется обычно тогда, когда для описания движения реального тела достаточно знать положение его «в целом», а ориентация тела значения не имеет. Материальный объект может рассматриваться как материальная точка, если можно считать, что в любой момент времени скорости и ускорения всех точек объекта одинаковы. Вопрос о том, можно ли рассматривать тот или иной объект как материальную точку, определяется не размерами объекта, а особенностями его движения и степенью идеализации задачи. Описание движения самолета или ракеты по траектории можно проводить с использованием понятия материальной точки, если не интересоваться ориентацией их в пространстве. Аналогичным образом движение Земли или любой другой планеты вокруг Солнца можно рассматривать как движение материальной точки. Как только нужно учесть ориентацию самолета или ракеты, Земли или планеты на траектории, модель материальной точки уже непригодна.

***Абсолютно твердое тело*** *– это объект, который не меняет своих размеров при любой нагрузке и при любом движении.*

Иногда используется другое определение: абсолютно твердое тело – множество материальных точек, расстояние между которыми во время движения не меняется. Ясно, что все реальные тела в той или иной степени подвержены изменению формы и/или размеров. В модели абсолютно твердого тела такими изменениями пренебрегается по сравнению с исходными размерами тела.

Хотя эти модели представляют собой абстрактные понятия, при их использовании получается большое количество практически полезных результатов.

Теоретическая механика в инженерном образовании является базой многих областей современной техники.

По характеру рассматриваемых задач механика (независимо от объектов и методов исследования) делится на три больших основных раздела – статика, кинематика и динамика.

***Статика*** *– учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил.*

***Кинематика*** *– описание геометрических свойств движения твердых тел.*

***Динамика*** *– учение о движении материальных тел под действием сил.*

Из этих определений следует, что синтетическим разделом механики, в известном смысле объединяющим в себе статику и кинематику, является динамика. По этой причине, в частности, в разных учебниках по теоретической механике можно найти различную последовательность изложения предмета – в одних излагается сначала статика, а затем кинематика, в других эта последовательность изменена, но динамика излагается всегда в последнюю очередь. Ниже изложение начинается со статики. В известном смысле это соответствует истории развития механики.

**Историческая справка**

Происхождение термина «механика», как было отмечено выше, связывается с именем Аристотеля. Возникновение и развитие механики – впрочем, как и подавляющего большинства других наук – тесно связано с развитием производительных сил общества, уровнем техники на каждом этапе его развития.

Так, приемы статики уже широко использовались при строительстве таких сооружений, как знаменитые пирамиды древнего Египта, дворцовые и храмовые комплексы, дошедшие и до наших дней. Систематически начала статики впервые изложены в трудах Архимеда (287 – 212 гг. до н. э.).

Именно статика дала теорию так называемых простейших машин – строительных приспособлений, таких как блок, ворот, рычаг, наклонная плоскость и т. д.

Практически до XV – XVI вв. статика и теоретическая механика в целом не получили никакого существенного развития. Лишь в связи с развитием мореплавания, военного дела, с появлением огнестрельного оружия в XVII веке сформулированы законы динамики Галилеем (1564 – 1642 гг.) и позднее Ньютоном (1643 – 1727 гг.).

Все более или менее значимые результаты этого периода приведены в систему в труде И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» (1687 г.).

Кинематика как особый раздел механики начала оформляться в XVIII – XIX веках под влиянием развития машиностроения. Практически в то же время начинает развиваться и динамика.

Аналитические методы механики – с использованием дифференциального и интегрального исчисления – начали развиваться в XVIII веке и связаны с именами Л. Эйлера (1707 – 1783), Ж. Даламбера

(1717 – 1783), Ж. Лагранжа (1736 – 1813). Эти методы остаются основными до сих пор.

Из российских ученых необходимо отметить таких исследователей, оставивших заметный след в развитии многих направлений механики, как М. В. Ломоносов (1711 – 1765), Л. Эйлер, М. В. Остроградский, П. Л. Чебышев, С. В. Ковалевская, А. М. Ляпунов, И. В. Мещерский, К. Э. Циолковский, А. Н. Крылов, Н. Е. Жуковский и многие, многие другие.

В дальнейшем при изложении материала ссылки на авторов тех или иных результатов не приводятся.

## 1.1 Статика твердого тела

### Основные понятия и аксиомы статики

***Статика*** *– раздел механики, представляющий собой учение о силах и условиях равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.*

***Равновесие*** *– состояние покоя тела по отношению к другим телам.*

В курсе теоретической механики рассматривается равновесие материальных точек и абсолютно твердых тел (АТТ).

Все тела при действии нагрузок деформируются, т.е. меняют форму и/или размеры. Тело, подвергающееся воздействию, изменяет свое движение или форму и размеры не мгновенно, а с течением времени. Это свойство называется инертностью.

Для обеспечения прочности подавляющего большинства изделий из распространенных материалов необходимо, чтобы деформации были малыми. Если мерой деформации считать относительное изменение размеров изделия, то оно не должно превышать доли процента, редко – для материалов типа полимеров – единицы процентов, и только уж совсем необычные в этом отношении материалы типа каучука и резины, а также некоторые полимеры без разрушения выдерживают деформации, измеряемые десятками и сотнями процентов. При изучении условий равновесия «обычных» тел принимается, что допустимо пренебрегать изменением формы и размеров по сравнению с исходными их значениями и считать тело абсолютно твердым.

Силой называется мера механического взаимодействия твердых тел. В механике постулируется принцип независимости действия сил: сила, обусловленная каким-либо источником, не зависит от наличия сил, обусловленных другими источниками.

Величина силы определяется на основе некоторых эталонов. Поскольку при действии силы (механического взаимодействия) меняются либо размер и форма тела (возникают деформации), либо закон его движения, все распространенные измерители сил связаны с использованием этих факторов. Известны разного рода упругие силоизмерительные устройства. Простейшим примером являются пружинные весы, служащие для определения веса тел, т. е. сил тяжести, действующих на эти тела. Реже используются устройства, основанные на свойствах инерции.

---

Сила как вектор характеризуется:

1. Величиной.
2. Направлением.
3. Точкой приложения.

---

Единицей измерения силы в системе СИ является 1 ньютон (Н); 1 Н – это сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение 1 м/с$^2$, а записывается это как соотношение Н = кг·м/с$^2$.

Графически сила изображается, как и любой вектор, в виде направленного отрезка.

В тех случаях, когда величина силы и ее направление зависят только от положения точки, говорят, что существует силовое поле. Примерами силовых полей могут служить поле сил тяжести, силы упругости, силы электрического или магнитного взаимодействия и т. д.

Прямая, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы. Направление вектора в ту или другую сторону в этом случае роли не играет. Попутно можно отметить, что ось, в отличие от прямой, имеет направление, начало отсчета и масштаб, поэтому величина (знак) проекции вектора на ось зависит от направления вектора.

***Система сил*** *– совокупность сил, приложенных к телу (или к телам). Если линии действия всех сил расположены в одной плоскости, система сил называется плоской, иначе – пространственной. Если линии действия сил пересекаются в одной точке, то силы являются сходящимися. Если линии действия сил параллельны, то и силы называются параллельными.*

*Если тело из данного положения можно свободно перемещать, оно называется* ***свободным****.*

*Если при замене одной системы сил на другую тело не меняет своего равновесия (или движения), эти системы сил* ***эквивалентны****.*

*Система сил, под действием которой тело может находиться в покое, называется* ***уравновешенной или эквивалентной нулю****.*

*Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется* ***равнодействующей****.*

*Силы* ***внешние****, если они действуют на данное тело со стороны других тел;* ***внутренние*** *– если отражают взаимодействие частей тела (или тел данной системы).*

*Сила, приложенная к телу в данной точке, –* ***сосредоточенная****. Силы, приложенные к части или всей поверхности или объему, –* ***распределенные****.*

**Классификация сил**

По способу приложения можно различать силы равномерные или неравномерные поверхностные, действующие на поверхность тела или ее часть, и объемные, приложенные к каждой точке тела (например, силы тяжести или силы инерции). При этом различают силы локальные, т.е. приложенные к части поверхности или объема. Распределенные силы приложены ко всей поверхности или объему. Сосредоточенные силы приложены в точке поверхности или объема, и т. д.

По характеру изменения во времени силы бывают постоянными и переменными; последние могут быть, в частности, периодическими.

Силы можно классифицировать по источнику механического действия, например, это силы тяготения или силы тяжести, реакции опор, упругие воздействия от пружин, рессор и т. д., электрические и магнитные поля, напор потока жидкости или газа.

---

**Аксиомы статики**

1. Если на свободное АТТ действуют две силы, то тело может находиться в равновесии только тогда, когда эти силы равны по величине и направлены вдоль одной прямой в разные стороны.

2. Действие данной системы сил на АТТ не изменится, если к ней добавить или отнять уравновешенную систему сил.

---

Это означает, что две системы сил, отличающиеся на уравновешенную систему, эквивалентны друг другу.

**Следствие.** Действие силы на АТТ не изменится при перенесении точки приложения силы вдоль линии действия.

Для доказательства приложим, кроме силы $\bar{F}$, еще $\bar{F}_1 = \bar{F}$ и $\bar{F}_2 = -\bar{F}$ (рисунок 1.1).

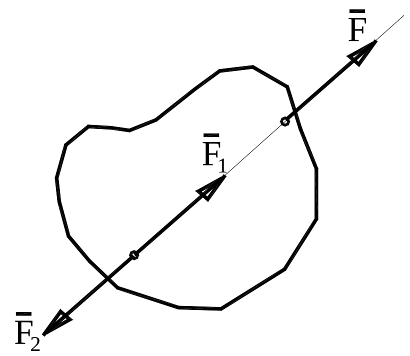



Рисунок 1.1 – К доказательству следствия из второй аксиомы статики

Отбросив $\bar{F} + \bar{F}_2 = 0$, получим силу $\bar{F}_1$, эквивалентную $\bar{F}$. В данном случае вектор $\bar{F}$ является и называется скользящим, т.е. таким вектором, который можно передвигать вдоль линии действия.

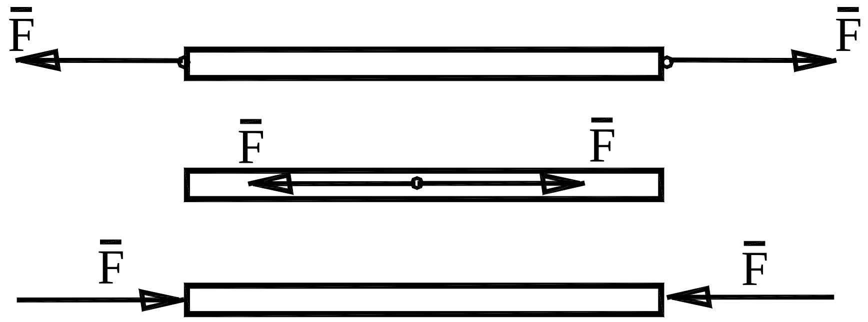



Рисунок 1.2 – Возможные варианты приложения уравновешенной системы двух сил

Этот результат справедлив только для АТТ. Если тело деформируемо, то его напряженное и деформированное состояния существенно зависят от точки приложения силы. Так, для трех случаев, показанных на рисунке 1.2, в первом случае стержень растянут, во втором – не напряжен, в третьем – сжат.

Это значит, что при определении внутренних напряжений в теле точку приложения силы вдоль линии ее действия переносить нельзя!

**Суммирование сил**

Если в одной точке тела приложены две разнонаправленные силы, то они суммируются по правилу параллелограмма (как векторы). В механике это формулируется в виде общего закона, который носит название закона параллелограмма сил:

Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.

Вектор $\overline{R}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ (рисунок 1.3), называется геометрической суммой векторов $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$: $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$.

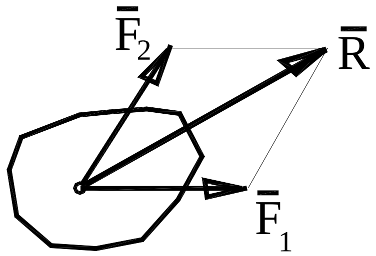



Рисунок 1.3 – Суммирование сил по правилу параллелограмма

---

Закон параллелограмма сил можно сформулировать еще так: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической (векторной) сумме этих сил и приложенную в той же точке.

---

**Сумма сил и равнодействующая сила – разные понятия. Сумма сил** строится как сумма любых векторных величин и **существует всегда**, в отличие от равнодействующей.

---

**Закон равенства действия и противодействия**: при всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие.

---

Этот закон является одним из основных в механике (третий закон Ньютона). Из него следует, что взаимодействие тел $A$ и $B$ характеризуется двумя силами, равными по величине, действующими вдоль одной прямой в противоположных направлениях (рисунок 1.4).

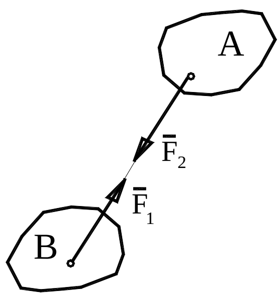



Рисунок 1.4 – К закону равенства действия и противодействия

Т.к. мы рассматриваем АТТ, то любые его две части действуют друг на друга одинаково по величине и в противоположных направлениях, и соответствующие силы образуют самоуравновешенную систему. Поэтому в дальнейшем при исследовании АТТ ведем речь только о внешних силах.

***Связь*** *– это то, что ограничивает перемещение данного тела в пространстве.*

*Связью называем тело, которое реализует это ограничение (нить, трос, рельс, шарнир, подвижная или неподвижная опора, поверхность и т.д.).*

***Реакция связи*** *– это сила, с которой связь действует на тело.*

Направление реакции связи всегда противоположно направлению, куда связь не дает перемещаться телу.

Если сама связь препятствует перемещениям тела в нескольких направлениях, то направление реакции становится неизвестным, и оно должно определяться в процессе решения задачи.

Примеры связей:

- гладкая поверхность (без трения); реакция такой связи всегда направлена по нормали к поверхности;
- нить; реакция этой связи направлена вдоль нити к точке подвеса;
- цилиндрический шарнир, реакция такой связи может быть ориентирована в любом направлении в плоскости, перпендикулярной оси шарнира;
- сферический шарнир, реакция его может быть направлена в любом направлении в пространстве.

При решении задач рисуется схема, на которой наряду с заданными внешними (активными) силами изображаются и реакции связей. В тех случаях, когда направление этой реакции (а реакция связи по определению – сила) известно, как в примере с нитью, она изображается в виде вектора, направление которого задано. Если же направление реакции сразу не может быть определено, как правило, изображаются составляющие этой реакции вдоль осей координат, и эти составляющие в дальнейшем отыскиваются. Если в задаче нужно определить полную реакцию, то ее величина и направление определяются так же, как для любого вектора, по его составляющим. При решении конкретной задачи может получиться, что те или иные составляющие получились отрицательными. Это означает, что на самом деле соответствующая составляющая реакции действует в другую сторону, противоположную выбранной и изображенной на схеме. Не следует переделывать чертеж и заново строить решение задачи – по исходной схеме понятно, как выбраны направления составляющих, и знаки в ответе ясно показывают, как реально они направлены.

## 1.2 Сложение сил. Система сходящихся сил

***Главным вектором системы сил*** *называется величина, равная геометрической сумме всех сил.*

Если суммируем силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2$, ориентированные под углом α друг к другу, то длина суммарного вектора $\overline{R}$ определяется по формуле:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

Построение суммы двух сил проводится по правилу параллелограмма, в случае трех сил, не лежащих в одной плоскости, – по правилу косоугольного параллелепипеда. Более простой способ геометрического суммирования заключается в построении так называемого силового многоугольника (рисунок 1.5). В этом случае, как и при суммировании обычных векторов, начало каждого следующего вектора совмещается с концом предыдущего, а сумма векторов получается «замыканием» – результирующий вектор получается соединением начала первого вектора с концом последнего.

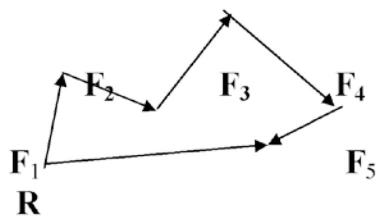



Рисунок 1.5 – Суммирование нескольких векторов

Если рассмотреть систему сходящихся сил (т. е. таких, линии действия которых пересекаются в одной точке), то она эквивалентна системе сил, приложенных к этой точке. Это следует из доказанного выше утверждения, что каждую силу, приложенную к твердому телу, можно переносить вдоль линии ее действия.

**Система сходящихся сил всегда имеет равнодействующую**, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке пересечения линий действия.

*Аналитический метод решения задач статики* основывается на использовании понятия проекции силы на ось.

*Проекция силы на ось*, как и любого другого вектора, – *это число со знаком* (алгебраическая величина).

---

**Проекция на плоскость – это двумерный вектор** (!), имеющий длину и направление. На это следует обратить особое внимание, впредь такие случаи – проецирования вектора на плоскость и на оси – будут встречаться, и следует понимать, что в итоге получается, вектор или число.

---

В трехмерном пространстве силу, как и любой вектор, можно задать через ее величину и косинусы углов с осями координат, т. е. сначала должна быть определена система координат.

На практике иногда удобнее задать силу через ее проекции на оси вводимой системы координат. Далее, когда нет специальных оговорок, будет использоваться декартова система координат. В этом случае модуль силы и направляющие косинусы, которыми определяется направление силы, вычисляются по формулам

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\cos\alpha = F_x / F, \quad \cos\beta = F_y / F, \; \cos\gamma = F_z / F,$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – углы, которые образует вектор силы соответственно с осями *OX, OY, OZ*.

На плоскости вектор (его модуль и так называемые направляющие косинусы, т. е. косинусы углов, которые составляет вектор с положительными направлениями осей) определяется через две составляющие (проекции) в виде

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \; \cos\alpha = F_x / F, \; \cos\beta = F_y / F.$$

**Сумма векторов определяется суммами одноименных проекций.**

Так, если $\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$, то

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{xk}, \quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{yk}, \quad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{zk}.$$

Для системы **сходящихся** сил можно сформулировать условия равновесия в следующих формах.

1. **Геометрическая форма:**

- для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы соответствующий силовой многоугольник был замкнутым ($\overline{R} = 0$).

2. **Аналитическая форма:**

- для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из координатных осей были равны нулю.

В самом деле, если $\overline{R} = 0$, то $R = 0$, но тогда необходимо

$$R_x = R_y = R_z = 0.$$

**Теорема о трех силах**

Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, **лежащих в одной плоскости**, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

**Доказательство**

Рассмотрим любые две силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ (рисунок 1.6); поскольку они не параллельны и лежат в одной плоскости, то линии их действия обязательно пересекаются в некоторой точке $A$. По доказанной в предыдущем разделе теореме можно всегда перенести силы, так что они будут сходиться в одной точке $A$. Тогда их можно заменить равнодействующей силой $\overline{R}$.

Если тело в равновесии, то в соответствии с первой аксиомой статики эта сила должна быть уравновешена силой $\boldsymbol{F}_3$, причем эта сила должна лежать на прямой $AB$ – линии действия силы $R$. Но это и означает, что линия действия силы $\boldsymbol{F}_3$ проходит тоже через точку $A$.

Обратная теорема неверна: из пересечения линий действия сил не следует равновесие тела.

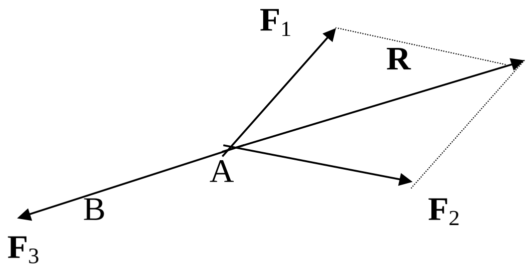



Рисунок 1.6 – К теореме о трех силах

Полученные выше результаты позволяют решать ряд задач статики. Это задачи, в которых:

1) известны полностью или частично все приложенные к телу силы и нужно найти, при каких соотношениях между силами тело будет в равновесии; или в каком положении тело придет в равновесие;

2) известно, что тело находится в заданном положении равновесия и нужно найти все или часть неизвестных сил, приложенных к нему. Во всех случаях реакции связей подлежат определению – по величине и по направлению.

---

**Последовательность решения** можно описать следующим набором действий. В первую очередь рисуется схема, на которой изображаются рассматриваемое тело и все приложенные к нему (заданные условием задачи) силы. Реакции связей (неизвестные силы) рисуются явно в виде векторов, если известны их направления. Если эти направления заранее неизвестны, лучше реакции изобразить в виде их составляющих (компонент), направленных вдоль осей выбранной системы координат. Далее записывается условие равновесия тела в виде сумм проекций сил и реакций на каждую ось, равных нулю в случае равновесия.

---

Если оказывается, что определяемые в процессе решения некоторые значения сил или реакций отрицательны, это не означает, что решение неправильно – просто на схеме неудачно выбраны направления сил или реакций, они на самом деле действуют в противоположную сторону. Не нужно при получении такого результата перерисовывать схему или менять знаки в ответе. Знаки полученных величин и наличие схемы позволяют правильно проанализировать решение.

---

Полученное решение записывается в виде ответа. Полезно еще раз посмотреть на условие задачи, чтобы в ответе было записано именно то, что требуется.

---

### 1.3 Момент силы относительно центра. Пара сил

Известно, что сила может как перемещать, так и поворачивать тело. Это означает, что сила характеризуется не только величиной и направлением, но и тем, какое «поворачивающее» действие она производит. Это действие связано с т.н. моментом силы.

Введем понятие момента силы относительно точки.

*Точка, относительно которой берется момент, называется **центром момента.***

Под действием момента силы тело стремится совершать вращательное движение.

***Плечо силы** – длина перпендикуляра, опущенного из центра на линию действия силы.*

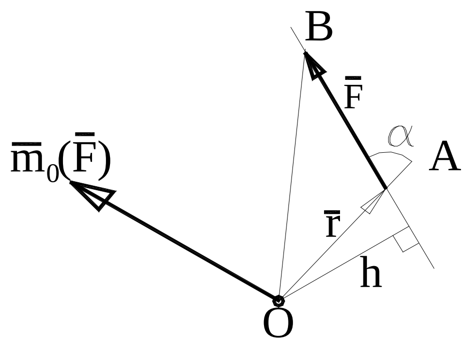



Рисунок 1.7 – К определению момента силы относительно центра

**Моментом силы** $\overline{F}$ **относительно центра *O*** называется вектор $\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F},$, приложенный в точке *O*, модуль которого равен $F{\cdot}h$ ($h$ – плечо), и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через *O* и линию действия силы так, что при взгляде с конца вектора $\overline{F}$ тело стремится повернуться против часовой стрелки (рисунок 1.7).

Проще назвать способ определения направления момента «правилом буравчика», известным из школьного курса физики. Из определения векторного произведения его модуль определяется формулой

$$\left|\overline{m}_0(\overline{F})\right| = \left|\overline{r}\right|\left|\overline{F}\right|\sin\alpha.$$

Заметим, что $|\bar{r}|\sin\alpha = h,\ |\bar{F}| = AB,$ тогда

$$|\bar{m}_O(\bar{F})| = AB \cdot h = 2S,$$

где $S$ – площадь треугольника $OAB$.

**Свойства момента силы**:

1) момент не меняется при движении точки приложения силы вдоль линии действия;

2) момент равен нулю, если линия действия силы проходит через центр.

Из определения величины момента следует, что момент силы определяется не величиной силы или плечом, а произведением этих величин. Можно одно и то же значение момента получить разными способами – меняя величину силы и ее плечо.

Размерность момента определяется произведением силы на плечо, в системе СИ размерность момента Н·м.

**Теорема Вариньона**

Пусть $\bar{R}$ – равнодействующая системы сходящихся в точке $A$ сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$, т.е. $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + ... + \bar{F}_n$ (рисунок 1.8).

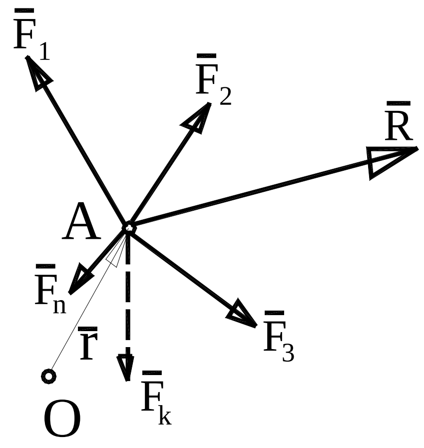



Рисунок 1.8 – К теореме Вариньона

Из некоторого центра, точки $O$, проведем радиус вектор $\bar{r}$ в точку $A$ приложения сил и равнодействующей. Домножим предыдущее равенство векторно на радиус-вектор $\bar{r}$:

$$\bar{r} \times \bar{R} = \bar{r} \times \bar{F}_1 + \bar{r} \times \bar{F}_2 + ... + \bar{r} \times \bar{F}_n.$$

По определению момента силы относительно центра это равенство можно записать в виде

$$\bar{m}_O(\bar{R}) = \bar{m}_O(\bar{F}_1) + \bar{m}_O(\bar{F}_2) + ... + \bar{m}_O(\bar{F}_n),$$

или

$$\overline{m}_O(\overline{R}) = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k).$$

Таким образом, момент равнодействующей относительно центра равен геометрической сумме моментов сил, составляющих эту равнодействующую, относительно того же центра.

***Парой сил*** *называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на АТТ.*

***Пара сил не имеет равнодействующей****. Это утверждение означает, что* ***пару сил нельзя заменить никакой одной силой****. Плоскость, проходящая через линии действия сил (поскольку эти линии параллельны, такую плоскость всегда можно построить), называется* ***плоскостью действия пары****.*

*Расстояние h между линиями действия сил называется* ***плечом пары****.*

***Момент пары*** *(вращающий эффект) характеризуется следующими параметрами:*

1. *Модулем Fh.*
2. *Положением плоскости действия пары в пространстве.*
3. *Направлением поворота пары в этой плоскости.*

***Моментом пары сил*** *называется вектор $\overline{m}$, модуль которого равен $F \cdot h$ и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары так, что с конца вектора* ***m*** *пара видна как поворачивающая тело против часовой стрелки.*

В отличие от момента силы, вектор **m** может быть приложен в любой точке (такой вектор называется свободным).

Момент пары относительно любого центра *O* равен сумме моментов сил, образующих пару (рисунок 1.9):

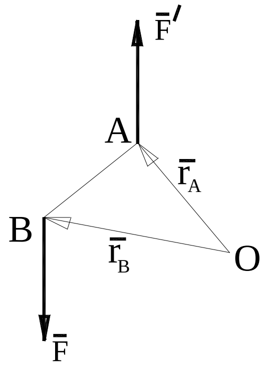



Рисунок 1.9 – К определению момента пары сил

$$\bar{m} = \bar{m}_O(\bar{F}) + \bar{m}_O(\bar{F}^{/}),$$

$$\bar{m}_O(\bar{F}) = \bar{r}_B \times \bar{F}; \qquad \bar{m}_O(\bar{F}^{/}) = \bar{r}_A \times \bar{F}^{/} = -\bar{r}_A \times \bar{F};$$

$$\bar{m}_O(\bar{F}) + \bar{m}_O(\bar{F}^{/}) = (\bar{r}_B - \bar{r}_A) \times \bar{F} = \overline{AB} \times \bar{F} = \bar{m}.$$

В частности, момент пары равен моменту одной из ее сил относительно точки приложения другой силы.

**Две пары, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны**. Это означает, что можно одновременно менять расстояние между линиями действия сил, составляющих пару, и величину каждой из сил, если при этом произведение $Fh$ не меняется.

Если на тело действует несколько пар сил, то сумма моментов эквивалентна одной паре (это формулировка теоремы о сложении пар):

$$\bar{M} = \sum \bar{m}_k.$$

---

Итак, сформулируем следующие **свойства пары сил**:

1) пару сил можно переносить в плоскости ее действия куда угодно, при этом действие пары на твердое тело не изменится;

2) действие пары не изменится, если одновременно менять величину сил и плечо между ними таким образом, чтобы величина момента не изменилась;

3) если пару сил перенести в плоскость, параллельную данной, то ее действие на твердое тело не изменится.

---

### 1.4 Приведение системы сил к центру. Условия равновесия

**Теорема: силу, приложенную к АТТ, можно переносить из данной точки в любую другую, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда она переносится.**

***Доказательство.*** Если есть сила $\bar{F}$, приложенная в точке $A$, то прибавление системы любых сил $\bar{F}^{/} = -\bar{F}^{//}$, приложенных в любой точке, например, в точке В, равных другу по величине и противоположно направленных вдоль одной прямой, ничего не меняет (рисунок 1.10).

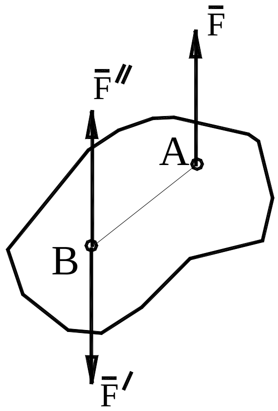



Рисунок 1.10 – К переносу точки приложения силы

Это следует из аксиом статики. Если теперь принять, что модули этих сил равны между собой: $F = F^{/} = F^{//}$, то в случае, когда эта прямая параллельна направлению силы $\overline{F}$, имеем просто случай переноса точки приложения силы $\overline{F}$ из точки $A$ в точку $B$ с прибавлением пары сил $\overline{F}$ и $\overline{F}^{//}$.

**Пример 1.**

Брус-балка будет в равновесии, если его вес уравновесить приложенной в середине силой $Q$ (рисунок 1.11). Если же попытаться удержать эту же балку за ее конец, то нужно еще добавить пару сил, компенсирующих вращательный момент от силы тяжести.

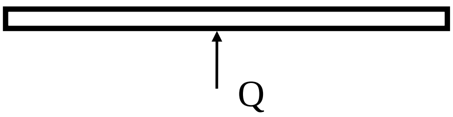



Рисунок 1.11 – К примеру о равновесии балки

Рассмотрим задачу о приведении системы сил к данному центру, т. е. о замене ее к одной силе и паре (моменту).

Пусть на тело действует система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$. Выберем точку $O$ за центр приведения и перенесем туда все силы – с добавлением соответствующих пар сил. В итоге к центру $O$ будет приложена система сил, равных $\overline{F}_k$ (k=1,2,...,n), а к телу в целом еще и система моментов $\overline{m}_O(\overline{F}_k)$ (k=1,2,...,n).

Сходящиеся в точке O силы можно заменить главным вектором $\overline{R}$**,** приложенной в этой же точке, причем

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k .$$

Система пар в результате сложения векторов моментов заменится одной парой

$$\bar{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{F}_k).$$

В итоге получаем две векторные величины: $\bar{R}$ – геометрическая сумма всех сил – т.н. главный вектор системы сил; $\bar{M}_O$ – геометрическая сумма моментов – главный момент системы сил.

Этот результат формулируется как **теорема о приведении системы сил: любая система сил, действующих на АТТ, при приведении к произвольному центру *O* заменяется одной силой, равной главному вектору этих сил, приложенному в этом центре, и одной парой с моментом, равным моменту системы относительно центра *O*.**

Важно заметить, что **главный вектор** $\bar{R}$ **в общем случае не является равнодействующей данной системы сил, т.к. заменяет эту систему только вместе с парой.**

**Следствие.** Две системы сил, имеющие одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного центра, эквивалентны (условие эквивалентности систем сил).

## 1.5 Плоская система сил

Когда все силы ориентированы в одной плоскости, система сил называется плоской.

Для плоской системы моменты всех сил относительно любого центра перпендикулярны плоскости и могут отличаться лишь направлением. Одно из них принимаем за положительное направление, и его будем отмечать знаками плюс, тогда второе, противоположное направление, отмечаем знаками минус. Тогда момент любой силы $\bar{F}$ относительно центра *O* будет алгебраической величиной. В отличие от общего случая момент можно рассматривать не как вектор и применять соответствующие обозначения.

Алгебраический момент силы $\bar{F}$ относительно центра *O* равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо:

$$m_0(F)=\pm Fh,$$

причем направление момента и соответственно знак в правой части определяются по так называемому правилу буравчика.

Алгебраический момент пары равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил на плечо пары:

$$m=\pm Fd,$$

при этом остаются в силе прежние правила определения направления момента и знака.

Как и в общем случае, плоская система сил приводится к главному вектору и главному моменту:

$$R_x = \sum_k F_{kx},\ R_y = \sum_k F_{ky},\ M_0 = \sum_k m_0(\overline{F}_k),$$

причем моменты – алгебраические величины.

**В результате такого приведения могут быть следующие варианты**:

1. $\overline{R}$=0, $M_0 \neq 0$ – в этом случае говорят, что система сил приведена к одной паре с моментом $M_0$.

2. $\overline{R} \neq 0$ – система приведена к равнодействующей, при этом возможны следующие случаи:

а) $\overline{R} \neq 0$, $M_0 = 0$. Раз момента нет (он равен нулю), это значит, что равнодействующая проходит через центр *О*. Другие варианты в этом случае невозможны, ибо тогда неизбежно должен возникать момент.

б) $\overline{R} \neq 0$, $M_0 \neq 0$. В этом случае пару, дающую момент $M_0$, заменим силами $\overline{R}' = \overline{R},\ \overline{R}'' = -\overline{R}$. Величину $d = OC$ – плечо пары – выбираем из условия, что $R$d = $|M_0|$. Силу $\overline{R}'$ (вектор, ее изображающий), совмещаем с исходным вектором $\overline{R}$, тогда сила $\overline{R}''$ направлена противоположно исходному вектору $\overline{R}$ и уравновешивает его.

Отбрасывая $\overline{R}$ и $\overline{R}''$, получаем, что вся система сил заменяется равнодействующей $\overline{R}' = \overline{R}$, проходящей через точку С. Положение этой точки определяется условиями:

1) $OC = d$;

2) знак момента относительно точки *О* силы, приложенной в точке С, должен совпадать со знаком $M_0$.

**Равновесие** любой **системы сил**, в том числе и плоской, обеспечивается, если

$$\overline{R} = 0, \overline{M}_O = 0. \tag{1.1}$$

Соответствующие аналитические условия равновесия можно записать в трех формах.

1. **Основная форма** условий равновесия сводится к записи первого из векторных равенств (1.1) в проекциях на оси декартовой системы координат $x$ и $y$, а второго – в виде суммы моментов от отдельных сил: суммы проекций сил на оси координат и сумма моментов этих сил относительно произвольного центра должны быть равны нулю:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ \Sigma F_{ky} = 0,\ \Sigma m_0(\mathbf{F}_k) = 0 \tag{1.2}$$

2. **Вторая форма**: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов этих сил относительно каких-либо центров $A$, $B$ и сумма их проекций на ось $OX$, не перпендикулярную $AB$, были равны нулю:

$$\Sigma m_A(\mathbf{F}_k)=0,\ \Sigma m_B(\mathbf{F}_k)=0,\ \Sigma F_{kx}=0.$$

**Необходимость** этих условий очевидна: если какое-либо из равенств нарушено, то или $R\neq 0$, или $M_A\neq 0\neq M_B$, и равновесия не будет.

**Достаточность** докажем. Пусть для данной системы сил выполнены два первых условия, тогда $M_A = M_B = 0$. Такая система сил может не быть в равновесии и иметь равнодействующую $R$, проходящую через точки $A$, $B$ (иначе моменты относительно этих точек не равны нулю, что противоречит условию). Но по третьему условию необходимо $R_x = 0$. Т.к. ось x не перпендикулярна $AB$, то и $\overline{R} = 0$.

**Третья форма** (уравнение трех моментов): для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы для любых трех центров $A$, $B$, $C$, не лежащих на одной прямой, выполнялись равенства:

$$\Sigma m_A(\mathbf{F}_k)=0,\ \Sigma m_B(\mathbf{F}_k)=0,\ \Sigma m_C(\mathbf{F}_k)=0.$$

**Необходимость** очевидна.

**Достаточность** следует из того, что если при выполнении этих условий система сил не находится в равновесии, то она может иметь равнодействующую, и эта равнодействующая обязана проходить через все точки $A$, $B$, $C$ (иначе моменты не будут равны нулю), но эти точки по условию теоремы не лежат на одной прямой.

В любом из рассмотренных выше случаев используются три условия равновесия.

Если имеем систему параллельных сил, то одно из равенств (1.2) выполнится автоматически. Так, например, если ось $OX$ перпендикулярна направлению действия сил, остается лишь два условия равновесия:

$$\Sigma F_{ky}=0,\ \Sigma m_0(\overline{F}_k)=0.$$

Для второй формы условий равновесия:

$$\Sigma m_A(\overline{F}_k)=0,\ \Sigma m_B(\overline{F}_k)=0.$$

При этом точки $A$, $B$ не должны лежать на одной прямой, параллельной силам.

***Задачи*** *называются* ***статически определимыми****,* ***(и системы – статически определимыми),*** *если число неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия, содержащих эти реакции.*

Пример статически определимой системы – груз, подвешенный на одном или двух тросах. В последнем случае имеем две неизвестные силы (усилия в тросах) и два условия равновесия (рисунок 1.12).

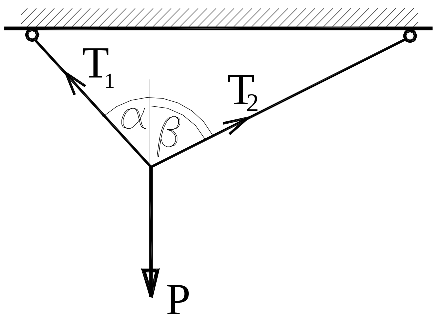



Рисунок 1.12 – Пример статически определимой системы

$$T_2 cos\beta + T_1 cos\alpha = P,$$

$$T_1 sin\alpha - T_2 sin\beta = 0.$$

Примером статически неопределимой системы может служить груз, подвешенный на трех тросах, лежащих в одной вертикальной плоскости. В этом случае можно записать по-прежнему два уравнения равновесия, а реакций (усилий в тросах) будет три. Это значит, что такая система не решается однозначно.

По той же причине балка, лежащая на двух опорах, статически определима, а на трех – нет.

## 1.6 Трение

***Сила сопротивления относительному скольжению тел называется трением скольжения****. Такое сопротивление существует практически для всех соприкасающихся тел. В одних случаях трение играет положительную роль, например, при торможении транспортных средств и при ходьбе (вспомните, как неприятно ездить и ходить в гололед). В других случаях, например, в разного рода двигателях, передачах и т.д., такая сила играет отрицательную роль.*

На основе многочисленных экспериментальных исследований сформулированы три следующих основных закона трения скольжения.

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (сцепления) $F$, для которой существуют ограничения

$$0 \le F \le F_{пр}.$$

Здесь $F_{пр}$ называется предельной силы трения.

**Сила трения всегда направлена против направления, в котором действующие на тело силы стремятся его сдвинуть или двигают**.

2. Предельная сила трения определяется соотношением

$$F_{пр} = f_0 \cdot N,$$

где $f_0$ – безразмерный коэффициент трения (покоя), $N$ – нормальное давление, т.е. давление, которое оказывает одно из соприкасающихся тел на другое по нормали к поверхности контакта. Если такая поверхность горизонтальна, то свободно лежащее на ней тело давит силой своего веса $P$ ($P = N$), если же поверхность наклонна, то нужно учесть именно нормальную к этой поверхности составляющую веса тела. Коэффициент трения $f_0$ зависит от материалов и состояния поверхностей контактирующих тел.

3. Значение $F_{пр}$ в широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей.

Очевидно, при равновесии тела под действием приложенной сдвигающей силы $F$ справедливо соотношение $F < F_{пр}$, или $F < f_0 \cdot N$. Если $F = F_{пр}$, то налицо случай предельного равновесия. Значения коэффициента трения для различных пар соприкасающихся тел варьируются в широких пределах. В некоторых машиностроительных справочниках, наряду с другими значениями, обязательной является величина силы трения пары тел из одного материала. Для примера приведем ряд значений:

| | | |
|---|---|---|
| $f_0 = 0{,}4...0{,}7$ | – | дерево по дереву, |
| $f_0 = 0{,}15...0{,}25$ | – | металл по металлу, |
| $f_0 = 0{,}027$ | – | сталь по льду. |

При движении **сила трения всегда направлена против направления движения**, при этом $F = f \cdot N$, $f$ – динамический коэффициент трения скольжения; этот коэффициент определяется экспериментально.

Величина $f$ зависит от скорости скольжения $V$; обычно с ростом $V$ сначала $f$ уменьшается, далее $f = const$. На практике обычно принимается, что сила трения постоянна и не зависит от скорости скольжения.

Реакция $\bar{R}$ шероховатой поверхности имеет две составляющие – нормальную $\bar{N}$ и силу трения $\bar{F}$. В итоге $\bar{R}$ всегда отклонена от нормали на угол $\varphi_0$ (рисунок 1.13):

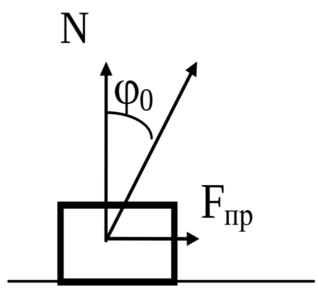



Рисунок 1.13 – К определению угла трения

$$tg\ \varphi_0 = F_{np}/N,$$

$\varphi_0$ – наибольший угол, который образует с поверхностью полная реакция шероховатой связи. Это т. н. **угол трения**. Т. к.

$$F_{np} = f \cdot N,$$

то

$$tg\ \varphi_0 = f_0.$$

Если тело в равновесии, то полная реакция $\bar{R}$ всегда находится внутри угла трения. Если к телу приложить силу, прижимающую его к поверхности под углом $\alpha<\varphi_0$, то это тело не сдвинется. Для движения необходимо, чтобы

$$P\sin\alpha > F_{np} = f_0 \cdot P\cos\alpha, \text{ или } tg\ \alpha > f_0.$$

Это объясняет эффект «самозаклинивания» или самоторможения тел. Таким образом, угол трения имеет и такой физический смысл.

### Трение нити о цилиндрическую поверхность

Рассмотрим равновесие участка нити длиной $Rd\theta$ (рисунок 1.14).

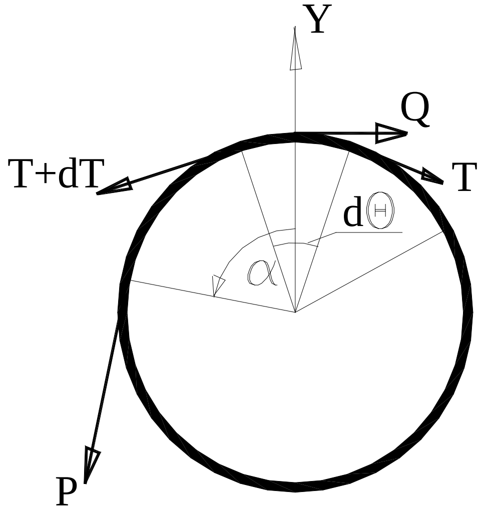


Рисунок 1.14 – Схема к задаче о трении нити о цилиндрическую поверхность

Обозначим разность натяжений нити через

$$dT = f_0 \cdot dN, \qquad (1.3)$$

где $dN$ – нормальная реакция. Ее определяем из уравнения равновесия в проекции на ось Y.

$$dN = T\sin(d\theta/2) + (T + dT)\sin(d\theta/2) \approx Td\theta.$$

Подставим это в (1.3):

$$dT = f_0\, T\, d\theta, \;\; dT/T = f_0\, d\theta.$$

Слева берем интеграл от $Q$ до $P$, справа – от 0 до $\alpha$ (при $\alpha$=0 $Q \equiv P$):

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = \int_0^\alpha f_0 d\theta, \qquad \ln\frac{P}{Q} = f_0\alpha, \qquad Q = Pe^{-f_0\alpha}.$$

Так, если на деревянный столб наматывать пеньковый канат, то при $f_0$ = 0,5 получим:

| α | π | π | π | π |
|---|---|---|---|---|
| Q/P | 0,208 | 0,043 | 0,009 | 0,002 |

Таким образом, дважды обмотав канат вокруг столба, мы при усилии 20 Н удержим 10000 Н.

**Трение качения**

***Трение качения*** *– сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.*

Если, например, цилиндрический каток катится по шероховатой абсолютно твердой поверхности, то вес $\overline{P}$ уравновешен реакцией $\overline{N}$ (рисунок 1.15, а), а горизонтальная сила $\overline{Q}$ с силой трения $\overline{F}$ образуют пару, т.к. численно они равны. В этом случае при любом, даже самом малом, значении $\overline{Q}$ должно начаться качение.

В действительности дело обстоит иначе.

Вследствие деформации тел их реальное взаимодействие идет по некоторой площадке $AB$ (рисунок 1.15, б).

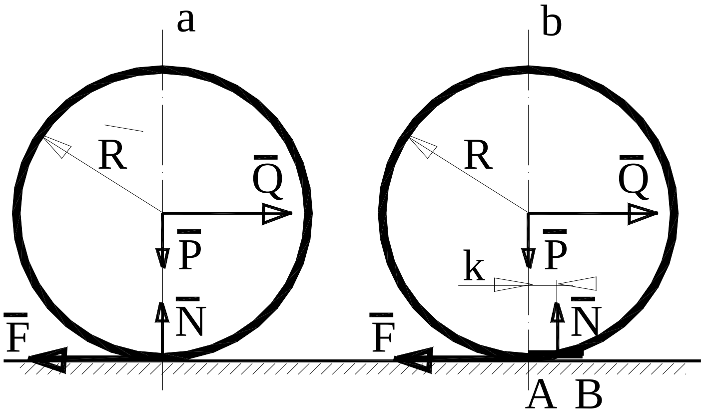



Рисунок 1.15 – Идеальная (а) и реальная (б) схемы взаимодействия катящегося круглого цилиндра с горизонтальной опорой

В итоге реакция связи (в данном случае горизонтальной опоры) $\overline{N}$ смещается в сторону точки $B$. С увеличением $Q$ это смещение растет до некоторого предельного значения k. В предельном положении, когда $Q$ = $Q_{\text{пр}}$, имеем

$$Q_{пр}\cdot R = N\cdot k, \text{ или } Q_{пр} = k/R\cdot N.$$

При $Q < Q_{\text{пр}}$ каток будет находиться в покое.

$k$ – это линейная (размерная) величина и называется коэффициентом трения качения.

Величина $k$ (в см) для случаев:

- дерево по дереву 0,05...0.8;
- колесо по рельсу 0,005;
- шарикоподшипник 0,001.

Как правило, $k/R << f_0$, поэтому скольжение всегда стараются заменить качением.

## 1.7 Пространственная система сил

Выше вводилось понятие момента силы относительно точки. Им особенно удобно пользоваться для плоской системы сил, хотя само по себе это понятие справедливо для произвольной системы. Однако в пространственном случае удобнее использовать понятие момента силы относительно оси.

***Проекция вектора*** *$m_0(F)$, т.е. момента силы относительно какого-либо центра, на ось z, проходящую через этот центр, называется моментом силы F относительно оси z:*

$$m_z(\overline{F}) = \left[\overline{m}_O(\overline{F})\right]_z = \left|\overline{m}_O(\overline{F})\right|\cos\gamma,$$

*где $\gamma$ – угол между вектором $\overline{m}_O(\overline{F})$ и осью z. Таким образом, момент силы относительно оси $m_z(\overline{F})$ – величина алгебраическая (в отличие от момента силы относительно точки).*

Из рисунка 1.16 видно, что

$$2пл.\Delta O_1A_1B_1 = 2пл.\Delta OAB\cdot\cos\gamma = \left|\overline{m}_O(\overline{F})\right|\cos\gamma = m_z(\overline{F}).$$

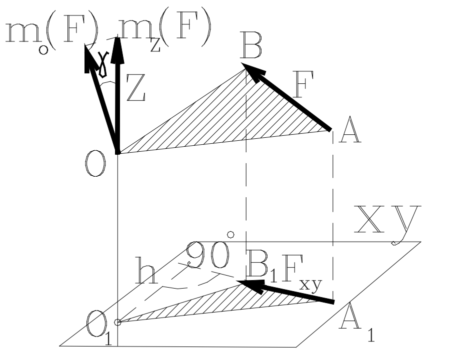



Рисунок 1.16 – К определению момента относительно оси

Таким образом,

$$2пл.\Delta O_1A_1B_1 = m_z(\overline{F}) = \pm\overline{F}_{xy}\cdot h,$$

где $\overline{F}_{xy}$ – проекция силы $\overline{F}$ на плоскость $O_1xy$, $h$ – кратчайшее расстояние от точки $O_1$ до линии действия вектора $\overline{F}_{xy}$.

Таким образом, момент силы $F$ относительно оси $z$ равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси $z$ с этой плоскостью.

---

**Правило знаков: момент положителен**, если при взгляде с положительного конца оси $z$ **поворот** осуществляется **против часовой стрелки**.

Если точка $O$ будет перемещаться вдоль оси $z$, то момент относительно точки будет меняться, а относительно оси – нет.

---

Величина $m_z(\overline{F})$ – характеристика вращательного эффекта силы $\overline{F}$ вокруг оси z.

Последовательность определения момента силы относительно оси z:

1. Проводим плоскость $XУ \perp z$.
2. Проецируем $\overline{F}$ на эту плоскость – получаем $\overline{F}_{xy}$.
3. Находим длину перпендикуляра h от оси до линии действия $\overline{F}_{xy}$.
4. Находим произведение $F_{xy}\cdot h$.
5. Определяем знак момента.

Частные случаи:

1. Если сила параллельна оси, то ее момент относительно оси равен нулю (формально это следует из равенства $F_{xy} = 0$).

2. Если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно оси равен нулю ($h = 0$).

Из этих частных случаев следует: **если сила и ось лежат в одной плоскости, то момент силы относительно оси всегда равен нулю**.

3. Если сила лежит в плоскости, перпендикулярной оси, то ее момент относительно оси равен произведению модуля силы на плечо, взятому с соответствующим знаком.

---

Для моментов силы относительно оси справедлива **теорема Вариньона**:

$$m_z(\overline{R}) = \Sigma m_z(\overline{F}_k),$$

где $\overline{R}$ – равнодействующая системы сил $\overline{F}_k$ Формулировка этой теоремы может выглядеть таким образом: **момент равнодействующей системы сил относительно какой-либо оси равен сумме моментов сил системы относительно той же оси**.

---

Этой теоремой удобно пользоваться при нахождении моментов силы относительно оси, разлагая силы на составляющие, которые параллельны осям или их пересекают. Для этого разложим силу на составляющие вдоль осей. Тогда по теореме Вариньона

$$m_x(\overline{F}) = m_x(\overline{F}_x) + m_x(\overline{F}_y) + m_x(\overline{F}_z);$$

но $m_x(\overline{F}_x) = 0$, т.к. $\overline{F}_x \,||\, x$, а $m_x(\overline{F}_y) = -z\,|\overline{F}_y|$, $m_x(\overline{F}_z) = y\,|\overline{F}_z|$, т. к. эти последние две составляющие перпендикулярны оси x.

В итоге

$$\begin{aligned} m_x(\overline{F}) &= y\,|\overline{F}_z| - z\,|\overline{F}_y|, \\ m_y(\overline{F}) &= z\,|\overline{F}_x| - x\,|\overline{F}_z|, \\ m_z(\overline{F}) &= x\,|\overline{F}_y| - y\,|\overline{F}_x|. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Эти соотношения являются аналитическими выражениями моментов силы относительно координатных осей. Моменты вычисляются по проекциям силы и координатам точки их приложения.

Левые части в (1.4) одновременно есть проекции вектора $\overline{m}_O(\overline{F})$ на оси координат (с началом отсчета в точке $O$). Модуль этого момента

$$|\ \overline{m}_0(\overline{F})\ | = \sqrt{\left[m_x(\overline{F})\right]^2 + \left[m_y(\overline{F})\right]^2 + \left[m_z(\overline{F})\right]^2}.$$

Главный вектор и главный момент системы сил определяли ранее:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k, \qquad \overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k).$$

Выразим эти величины через их проекции. В итоге получим достаточно очевидные равенства:

$$R_x = \Sigma F_{kx},\ R_y = \Sigma F_{ky},\ R_z = \Sigma F_{kz};$$

$$M_x = \Sigma m_x(\overline{F}_k),\ M_y = \Sigma m_y(\overline{F}_k),\ M_z = \Sigma m_z(\overline{F}_k).$$

Поскольку любая система сил приводится к главному вектору и главному моменту, то шесть величин слева в этих равенствах задают и определяют любую систему сил.

**Приведение системы сил к простейшему виду**

Как показано выше, любая система сил сводится к главному вектору $\overline{R}$ и к главному моменту $\overline{M}_O$. Рассмотрим существующие варианты ее упрощения.

1. Если $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_O \neq 0$, то система сил сводится к паре сил. В этом случае значение $\overline{M}_O$ от выбора центра $O$ не зависит.

2. $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O = 0$. Система сил приводится к равнодействующей, проходящей через точку $O$. Это следует из равенства момента нулю – если сила не проходит через точку, то момент не может быть равным нулю

3. Если $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O \neq 0$, а $\overline{M}_O \perp \overline{R}$ (рисунок 1.17), то система приводится к равнодействующей, не проходящей через точку $O$.

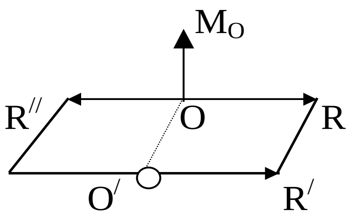



Рисунок 1.17 – К упрощению системы сил

Выбирая плечо $OO^{/}$ так, чтобы пара сил $\overline{R}^{/}$, $\overline{R}^{//}$, по модулю равных $\overline{R}$, давала момент $\overline{M}_O$, получим этот вариант реализованным. По существу, этот случай встречался при анализе плоской системы сил. Именно для такой системы вектор-момент всегда перпендикулярен плоскости действия сил.

4. Если $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O \neq 0$, а вектор $\overline{R}$ параллелен вектору $\overline{M}_O$, то система сил приводится к силе $\overline{R}$ и паре сил $\overline{P}$, $\overline{P}^{/}$ в плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{R}$ (рисунок 1.18).

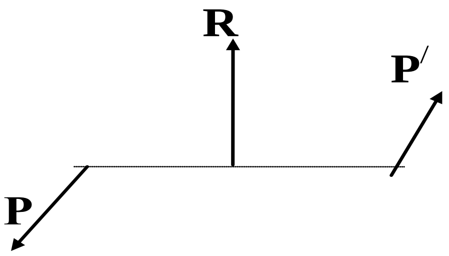



Рисунок 1.18 – Динамический винт

Такая совокупность силы и пары называется **динамическим винтом**, а прямая вдоль $\bar{R}$ – осью винта. Эта система сил более не упрощается, т.е. не приводится к одной силе или паре сил.

Если при движении вдоль оси винта вращение направлено по часовой стрелке, винт называется правым, иначе – левым.

Аналогия с обычной резьбой вполне очевидна.

Если $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$, а эти векторы не параллельны и не перпендикулярны, то такая система сил приводится к динамическому винту, ось которого не проходит через точку $O$.

**Равновесие системы сил**

Система будет в равновесии, если $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O = 0$. Вместо этих двух векторных равенств можно использовать шесть скалярных:

$$R_x = R_y = R_z = 0,\ M_x = M_y = M_z = 0,$$

или

$$\Sigma F_{kx} = \Sigma F_{ky} = \Sigma F_{kz} = 0,\ \ \Sigma m_x(F_k) = \Sigma m_y(F_k) = \Sigma m_z(F_k) = 0.$$

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на координатные оси и суммы их моментов относительно осей были равны нулю.

При этом суммирование проекций сил можно проводить в одной системе осей, а проекций моментов – в другой.

## 1.8 Центр тяжести

Когда есть система сил, параллельных, например, оси $z$, то проекции этих сил на оси $x$, $y$ равны нулю, и моменты относительно оси $z$ тоже равны нулю.

Тогда из шести уравнений равновесия актуальными останутся только три:

$$\Sigma F_{kz} = 0,\ \Sigma m_x(\bar{F}_k) = 0,\ \ \Sigma m_y(\bar{F}_k) = 0.$$

Очевидно, что для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную этим силам, и суммы проекций их моментов на другие оси были равны нулю.

Пусть в точках *A, B* приложены однонаправленные параллельные силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ (рисунок 1.19). Они должны иметь равнодействующую $\overline{R}$ в некоторой точке *C*, при этом $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$. Чтобы система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ сводилась к равнодействующей $\overline{R}$, необходимо

$$F_1 \cdot AC - F_2 \cdot BC = 0.$$

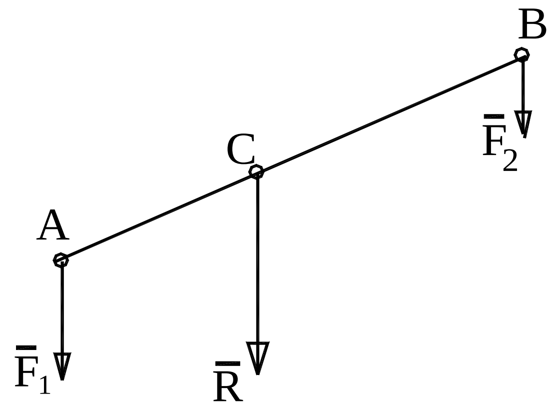



Рисунок 1.19 – Определение равнодействующей для двух параллельных сил

Это требование означает, что сумма моментов сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ относительно точки *C* равна нулю. Тогда сила $\overline{R}$ и есть равнодействующая (она одна эквивалента системе сил $F_1$, $F_2$).

Если одновременно обе силы повернуть на один и тот же угол, при этом они останутся параллельными, то новая их равнодействующая тоже пройдет через точку С, повернувшись на такой же угол.

Этот результат – возможность приведения системы параллельных сил к равнодействующей, проходящей через некоторый центр – справедлив для любого числа сил. В самом деле, после приведения системы двух сил к центру рассматриваем равнодействующую этих сил и третью силу как новую систему двух сил. Повторяя все рассуждения, сделанные выше, опять приведем такую систему к новой равнодействующей (разумеется, проходящей в общем случае через новый центр), и т.д. Окончательно полученный центр называется центром параллельных сил.

Найдем координаты центра параллельных сил. Положение точки *C* не должно зависеть от выбора системы координат (систему координат мы выбираем сами, и этот выбор не меняет положение центра сил) и от направления действия сил. Повернем все силы так, чтобы они были параллельны оси *z*. Применим к повернутым силам теорему Вариньона с учетом, что $\overline{R}^{/}$ – равнодействующая системы сил $\overline{F}_k^{\,/}$, где $\left|\overline{R}^{/}\right| = \left|\overline{R}\right|$, $\left|\overline{F}_k^{/}\right| = \left|\overline{F}_k\right|$.

Тогда $m_y(\overline{R}^{/}) = \Sigma m_y(\overline{F}_k^{\,/})$, но $m_y(\overline{R}) = \left|\overline{R}\right| \cdot x_c$, $m_y(\overline{F}_k) = \left|\overline{F}_k\right| \cdot x_k$.

Отсюда следует

$$Rx_c = F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n,$$

и тогда

$$x_c = \Sigma F_kx_k/R, \quad y_c = \Sigma F_ky_k/R, \quad z_c = \Sigma F_kz_k/R.$$

Можно отметить, что эти формулы справедливы и для параллельных сил, направленных в разные стороны, но тогда нужно у сил учитывать знаки, предварительно условившись одно из направлений считать положительным, а противоположное – отрицательным; кроме того, необходимо, чтобы $R \neq 0$. Если последнее требование нарушается, т.е. $R = 0$, то система сил либо уравновешена, либо сводится к главному моменту, который можно заменить парой сил, не имеющей, как было отмечено, равнодействующей. В том и другом случае о приведении системы сил к центру говорить не имеет смысла.

*Область, в каждой точке которой на помещенную туда материальную частицу действует сила, зависящая (в общем случае) от положения точки, называется **силовым полем.***

Пример силового поля – поле сил тяжести.

Для тел, размеры которых невелики по сравнению с размерами Земли, силы тяжести параллельны друг другу и не зависят от положения точки тела при его поворотах. Такое поле сил называется однородным.

Равнодействующая сил тяжести, приложенных ко всем частицам тела, называется весом тела:

$$P = \Sigma\, p_k.$$

При любом повороте тела силы $\boldsymbol{p}_k$ приложены в одних и тех же точках и остаются параллельными друг другу. Следовательно, их равнодействующая $\boldsymbol{P}$ будет проходить всегда через одну и ту же точку – центр тяжести. Следует заметить, что центр тяжести не всегда является точкой, принадлежащей телу, для которого определяется этот центр. Например, центр тяжести кольца находится в его геометрическом центре – на «пустом месте»; центр тяжести дуги также находится вне ее, и т.д.

Поскольку одновременный и одинаковый поворот параллельных сил не меняет точку приложения их равнодействующей, центром тяжести твердого тела называется точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести при любом повороте тела.

Координаты центра тяжести определяются так же, как координаты центра параллельных сил:

$$x_c = \Sigma p_k x_k/P, \quad y_c = \Sigma p_k y_k/P, \quad z_c = \Sigma p_k z_k/P,$$

где $x_k$, $y_k$, $z_k$ – координаты точек приложения сил тяжести $\overline{p}_k$.

Если тело однородно, то вес любой его части объемом $v_k$ определится как

$$p_k = \gamma \cdot v_k,$$

где $\gamma$ – удельный вес.

Тогда вес всего тела объемом $V$ будет $P = \gamma \cdot V$, и в итоге

$$x_c = \Sigma v_k x_k/V, \quad y_c = \Sigma v_k y_k/V, \quad z_c = \Sigma v_k z_k/V.$$

Таким образом, в этом случае величина $\gamma = \mathrm{const}$ не играет роли, и центр тяжести тела полностью определяется формой и размерами тела. В таких случаях говорят о «центре тяжести объема» $V$.

Для плоской фигуры координаты «центра тяжести площади» определяются формулами

$$x_c = \Sigma s_k x_k/S, \quad y_c = \Sigma s_k y_k/S.$$

Здесь $S$ – площадь всей фигуры, $s_k$ – площадь отдельной k-той части.

Наконец, для пространственной линии координаты «центра тяжести линии»

$$x_c = \Sigma x_k l_k/L, \quad y_c = \Sigma y_k l_k/L, \quad z_c = \Sigma z_k l_k/L.$$

Когда тело непрерывное (сплошное), тогда, вместо сумм, во всех полученных выше выражениях следует перейти к интегралам.

Так, для объемного трехмерного тела объемом V:

$$x_c = \frac{1}{V}\int_V x dv, \quad y_c = \frac{1}{V}\int_V y dv, \quad z_c = \frac{1}{V}\int_V z dv.$$

Для плоской фигуры площадью S:

$$x_c = \frac{1}{S}\int_S x ds, \quad y_c = \frac{1}{S}\int_S y ds,$$

для пространственной кривой длиной L:

$$x_c = \frac{1}{L}\int_L x dl, \; y_c = \frac{1}{L}\int_L y dl, \; z_c = \frac{1}{L}\int_L z dl.$$

**Пример 1.**

Определить центр тяжести дуги окружности радиусом $R$, раствором $2\alpha$ (рисунок 1.20).

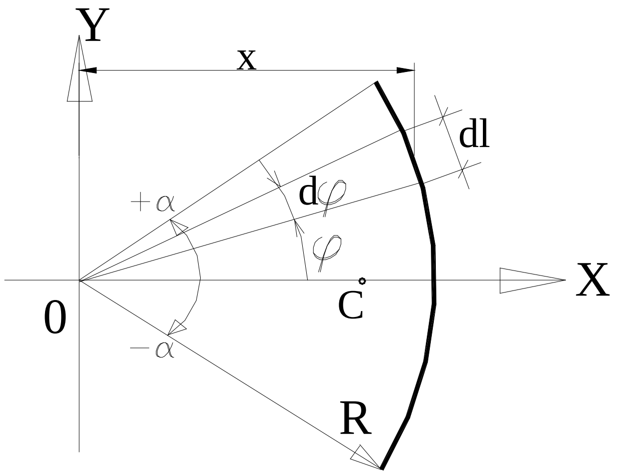



Рисунок 1.20 – Схема к определению центра тяжести дуги и сектора

Координата элемента дуги определяется как $x = R\cos\varphi$, величина элементарного участка дуги $dl = Rd\varphi$.

Тогда

$$x_c = \frac{1}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi R d\varphi = \frac{2R^2}{L}\sin\alpha.$$

Но $L = R\cdot 2\alpha$. Тогда $x_c = R\sin\alpha/\alpha$.

Если $\alpha\to 0$, то $x_c \to R$, если $\alpha = \pi/2$, то $x_c = 2R/\pi \approx 2/3\cdot$R.

**Пример 2.**

Найти центр тяжести сектора с той же геометрией (см. рисунок 1.20).

Для любого элементарного треугольника с основанием $dS$ его центр тяжести находится на расстоянии $2/3R$ от вершины сектора. Это следует из того, что центр тяжести треугольника находится на пересечении его медиан, а эта точка делит медиану на 2/3 ее длины от вершины, или 1/3 от основания треугольника.

Таким образом, центры тяжести набора элементарных секторов образуют дугу радиусом $r = 2/3R$. Но для определения центра тяжести дуги уже получена формула, и если ее использовать, получим

$$x_c = r\cdot\sin\alpha/\alpha = 2/3\cdot R\sin\alpha/\alpha.$$

Можно идти непосредственно от выражений координат центра тяжести для плоской фигуры, в частности:

$$x_c = \frac{1}{S}\int_S x ds.$$

В полярных координатах площадь элемента сектора $ds = rd\varphi dr$, а текущая координата точки $x = r\cos\varphi$. Здесь по сравнению с предыдущим случаем для дуги величина радиуса $r$ является переменной, и по ней нужно проводить интегрирование от 0 до $R$. Тогда

$$x_c = \frac{1}{S}\int_0^R\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\phi r d\phi dr = \frac{1}{S}\int_0^R r^2 dr \int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\phi d\phi = \frac{1}{S}\frac{R^3}{3}2\sin\alpha.$$

В свою очередь, часть площади круга $S = 2\alpha/2\pi\cdot\pi R^2 = \alpha R^2$, и тогда $x_c = 2R\sin\alpha/3\alpha$ – т.е. получается тот же результат, что и выше.

**Пример 3.**

Найти центр тяжести объема полушария.

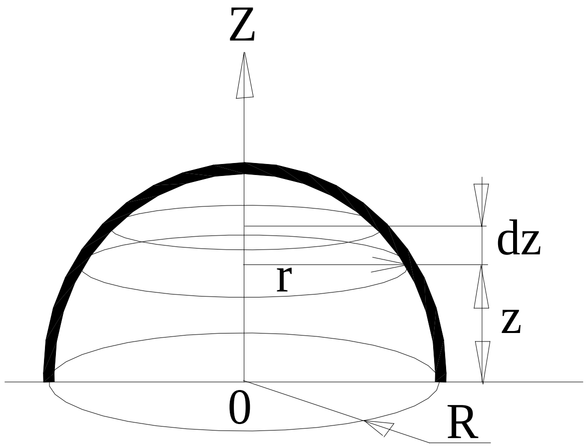



Рисунок 1.21 – Определение центра тяжести полушара

Из соображений симметрии $x_c = y_c = 0$, и необходимо найти лишь одну из координат по формуле $z_c = \frac{1}{V}\int_V z dv$.

В качестве элемента объема рассматривается часть полушара, заключенная между сечениями $z$ и $dz$, тогда

$$dv = \pi r^2 dz = \pi(R^2 - z^2)dz,$$

а интегрирование по объему можно заменить теперь интегрированием по координате $z$ в пределах от 0 до $R$:

$$z_c = \frac{1}{V}\int_V z dv = \frac{1}{V}\int_V z\pi r^2 dz = \frac{1}{V}\int_0^R z\pi(R^2 - z^2)dz = \frac{\pi}{V}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi R^4}{4V}.$$

$$V = \frac{2}{3}\cdot\pi R^3;\quad z_C = \frac{3}{8}\cdot R.$$

Следует обратить внимание, что положение центра тяжести полушара здесь отсчитывается от сечения так называемого большого круга.

Можно заметить, что если полушар перевернуть, так что он будет опираться на основание в точке, то получаем вариант «неваляшки» – положение такого полушара на горизонтальной плоскости будет устойчиво, когда плоскость сечения будет параллельна горизонту. В самом деле, если наклонить полушар, то точка опоры по-прежнему будет под его центром, а сила тяжести сместится так, что будет стремиться вернуть полушар в исходное положение.

На этом принципе основаны все конструкции неваляшек, от детских игрушек до технических устройств.

## Глава 2

# 2 КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

## 2.1 Кинематика точки

### 2.1.1 Основные понятия

***Кинематика*** *– раздел механики, изучающий геометрические свойства движения тел без учета их инертности и действующих на них сил.*

Кинематические зависимости в теоретической механике формулируются в привычном для нас обычном **(евклидовом)** пространстве и с использованием понятия абсолютного времени t.

Все кинематические величины – функции времени $t$; момент времени $t = 0$ в большинстве задач означает начало отсчета, некоторый условный момент времени.

Кинематически задать движение тела – значит, задать его положение относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

**Основная задача кинематики** – зная закон движения тела (точки), установить все остальные кинематические величины, характеризующие движение.

---

Наиболее употребительными в кинематике являются такие величины:

1) траектория;

2) скорость точки (тела);

3) ускорение точки (тела).

Эти величины фигурируют во всех задачах кинематики, часть их может входить в условия задачи, остальные подлежат определению.

---

На первом этапе обсуждаем кинематику точки.

***Траекторией*** *называется непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета.*

Если траектория – прямая линия, движение называется **прямолинейным**, иначе – **криволинейным**.

Движение точки может быть задано тремя способами:

- векторным способом;
- координатным;
- естественным.

**1. Векторный способ**

В любой момент времени $t$ положение точки можно определить радиус-вектором $\boldsymbol{r}$ (рисунок 2.1); описание движения сводится к построению зависимости

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \qquad (2.1)$$

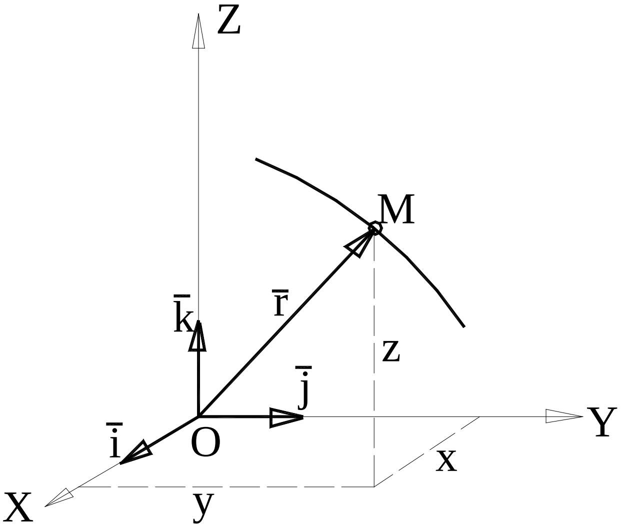



Рисунок 2.1 – К векторному описанию движения

Геометрическое место концов вектора **r** (годограф вектора) определяет траекторию движения.

Если $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, то

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \qquad (2.2)$$

**2. Координатный способ**

Если задать

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)\ , \qquad (2.3)$$

то соотношения (2.3) представляют собой уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах.

Аналогичные зависимости можно записать для цилиндрических, сферических и т.д. систем координат.

В случае, когда точка движется в плоскости, задают

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \qquad (2.4)$$

а при движении вдоль прямой, принимая ее за ось X,

$$x = f(t). \qquad (2.5)$$

По существу, (2.3) и (2.4) представляют собой т.н. параметрическое задание траектории. Исключая $t$, получаем привычные формы записи $y = y(x)$ и т.д.

Можно заключить, что векторный способ и координатный практически переходят друг в друга, и в известном смысле они идентичны. Однако координатный способ связан с выбором системы координат. Даже если мы рассмотрим две декартовы системы, сдвинутые и повернутые относительно друг друга, получим разные записи законов движения в координатной форме. Тем более разница скажется, если мы рассмотрим переход, например, от декартовых координат к цилиндрическим, сферическим и т. д.

**3. Естественный (траекторный) способ**

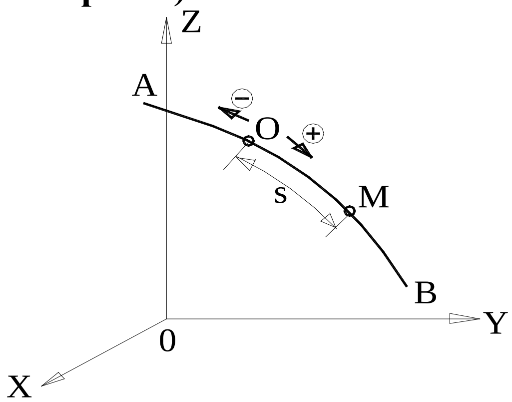



Рисунок 2.2 – К траекторному описанию движения

Этот способ описания движения удобен, когда траектория точки известна. В этом случае, принимая на траектории некоторую точку O за начало отсчета и определив положительное направление этого отсчета, закон движения можно представить в виде (рисунок 2.2)

$$s = s\,(t), \tag{2.6}$$

где $s$ – расстояние от начала отсчета, измеренное вдоль траектории, называемое дуговой координатой.

Таким образом, при этом способе нужно задать:

1) траекторию; 2) начало отсчета; 3) положительное направление отсчета дуговой координаты; 4)закон движения в виде (2.6).

Следует отметить, что $s$ – не путь, пройденный точкой, а ее текущее положение. Например, при колебаниях величина $s$ меняется в некоторых конечных пределах, а пройденный точкой путь все время растет.

### 2.1.2 Вектор скорости точки

Перемещение точки за время $\Delta t$ определится вектором $\Delta \boldsymbol{r}$ = $=\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}$ = $MM_1$ ($\boldsymbol{r}_1$ – текущий радиус-вектор точки $M_1$, $\boldsymbol{r}$ – исходный для точки M, рисунок 2.3). Если траектория прямолинейна, то приращение $\Delta \boldsymbol{r}$ – вдоль этой траектории, если криволинейна – то по хорде.

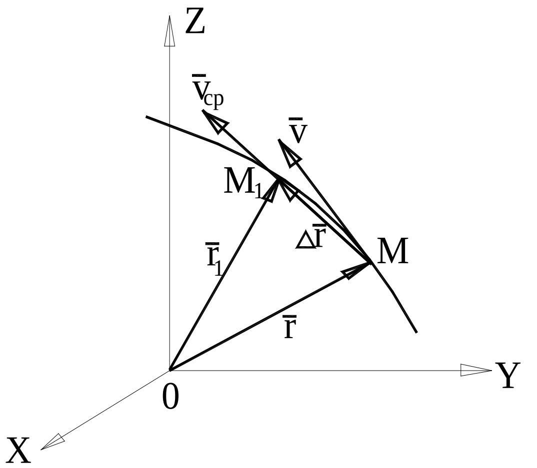



Рисунок 2.3 – К определению вектора скорости

Средняя скорость определяется как отношение смещения за некоторое время к величине этого времени:

$$\boldsymbol{v}_{cp} = \Delta\boldsymbol{r} \,/\, \Delta t. \tag{2.7}$$

Скорость в данный момент времени (мгновенная скорость) определяется предельным переходом при уменьшении интервала времени:

$$\bar{v}_{c\text{р}} = \lim_{\Delta t\to 0}(\bar{v}_{cp}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \tag{2.8}$$

Направление вектора скорости – по касательной к траектории в сторону движения. Можно заметить, что средняя и мгновенная скорости по величине совпадают, если в рассматриваемом интервале времени скорость движения постоянна, а по направлению совпадение этих скоростей будет только при прямолинейном движении.

Размерность скорости соответственно получается как отношение единицы длины (пройденного пути) к единице времени:

$[v]$ = м/с, см/мин, км/час и т.д.

### 2.1.3 Вектор ускорения точки

Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение скорости (по модулю и направлению) с течением времени.

За время $\Delta t$ скорость меняется на величину $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}$. Вектор приращения скорости $\Delta\boldsymbol{v}$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории. Это легко можно установить, рассмотрев два смежных направления вектора скорости точки при ее движении по криволинейной траектории. Среднее ускорение (рисунок 2.4) определяется формулой

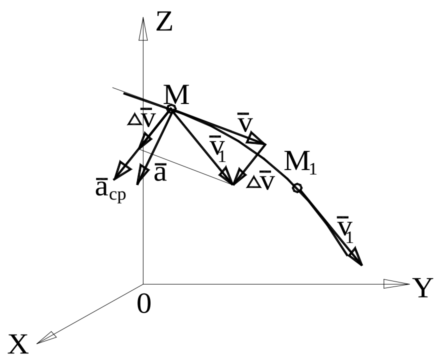



Рисунок 2.4 – К определению ускорения

$$\overline{a}_{ср} = \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}. \qquad (2.9)$$

Мгновенное ускорение

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}. \qquad (2.10)$$

$[a]$ = L/T$^2$ = м/с$^2$ и т.д.

При прямолинейном движении ускорение ориентировано вдоль траектории.

Если траектория – плоская кривая, то вектор ускорения лежит в плоскости кривой и направлен в сторону вогнутости.

Если траектория – пространственная кривая, то вектор ускорения направлен в сторону вогнутости кривой и находится в плоскости, проходящей через точку $M$ (исходную) и прямую, параллельную касательной в точке $M_1$ (текущей). В пределе при $\Delta t \to 0$ эта плоскость занимает положение так называемой соприкасающейся плоскости. В этой плоскости происходит бесконечно малый поворот касательной к траектории при малом перемещении точки.

### 2.1.4 Определение скорости и ускорения при координатном задании движения

Используется следующая теорема: **проекция производной от вектора на неподвижную ось равна производной от проекции вектора на ту же ось, т.е. если**

$$\overline{q} = \frac{d\overline{p}}{dt}, \text{ то}$$

$$q_x = \frac{dp_x}{dt}, q_y = \frac{dp_y}{dt}, q_z = \frac{dp_z}{dt}. \quad (2.11)$$

В соответствии с этим

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (2.12)$$

Или

$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}. \quad (2.13)$$

Здесь и далее точка над переменной означает производную по времени от этой переменной, являющейся функцией времени. Соответственно две точки – вторую производную, и т.д.

Итак, проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным по времени от соответствующих координат точки.

По проекциям скорости точки определяются ее величина и направление:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \quad \cos\alpha = v_x / v, \quad \cos\beta = v_y / v, \quad \cos\gamma = v_z / v. \quad (2.14)$$

Здесь $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – так называемые направляющие углы, составляемые вектором скорости с осями *X*, *Y*, *Z* соответственно.

По аналогии для ускорения справедливо:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}, \quad (2.15)$$

или проекции ускорения на оси системы координат равны первым производным по времени от проекций скоростей или вторым производным по времени от координат точки.

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \cos\alpha_1 = a_x / a, \cos\beta_1 = a_y / a, \quad \cos\gamma_1 = a_z / a. \quad (2.16)$$

В случае движения точки в плоскости упрощения очевидны: исчезают проекции скорости и ускорения на ось z.

Для прямолинейного движения (одномерный случай):

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (2.17)$$

### 2.1.5 Примеры решения задач кинематики точки

**Пример 1.**

Пусть заданы уравнения движения точки в плоскости координатным способом:

$$x = 8t - 4t^2,\ y = 6t - 3t^2. \qquad (2.18)$$

Найти траекторию, скорость и ускорение точки.

Из (2.18) следует:

$$3x - 4y = 0, \text{ или } y = (3/4)\cdot x -$$

это уравнение описывает форму траектории, в данном случае прямую линию, проходящую через точки $A(0, 0)$ и $B(4, 3)$ (рисунок 2.5).

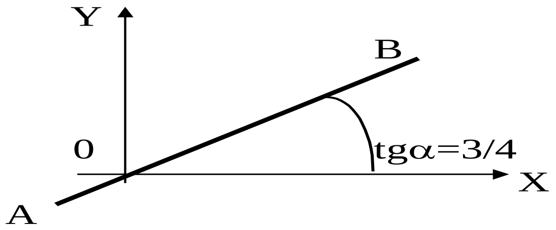



Рисунок 2.5 – Траектория движения

Составляющие скорости

$$v_x = 8 - 8t,\ \ v_y = 6 - 6t.$$

Тогда величина скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{8^2 + 6^2}\left|1-t\right| = 10\left|1-t\right|.$$

Ускорение

$$a_x = -8,\ \ a_y = -6,\ a = 10\ (\text{м/с}^2).$$

Вектор $\boldsymbol{a}$ направлен вдоль траектории (прямой) $AB$ (рисунок 2.5), причем в начальный момент времени точка находится в начале координат (при $t = 0$ координаты точки $x = y = 0$). Так как проекции этого вектора отрицательны (они постоянны и не меняются во все время движения), точка движется с ускорением, направленным от точки В к точке $A$. При

$$t = 0: v = 10;\ t = 1: v = 0;\ t > 1 : v_x < 0,\ v_y < 0\ ,$$

т.е. и скорость после этого момента направлена от $B$ к $A$. Итак, движение точки начинается в момент времени $t = 0$ из точки 0 к точке В, в начальный момент времени ($t = 0$) и далее вплоть до момента $t = 1$ обе компоненты скорости положительны. Координаты точки в момент остановки будут $x_B = 4$, $y_B = 3$. После этого при $t > 1$ компоненты скорости становятся отрицательными, т.е. движение идет уже в обратную сторону. При $t = 2$ точка проходит снова через точку 0 и затем с нарастающей скоростью продолжает движение в ту же сторону вдоль прямой $BA$.

**Пример 2.**

Пусть заданы уравнения пространственного движения точки:

$$x = R\sin\omega t, y = R\cos\omega t,\ z = ut,$$

где $R$, $u$, ω – постоянные величины.

Поскольку

$$x^2 + y^2 = R^2\ ,$$

то траектория лежит на круглом цилиндре радиуса $R$. С течением времени точка перемещается по поверхности этого цилиндра, одновременно продвигаясь вдоль оси $z$, так что в итоге получается так называемая винтовая линия. Один виток точка проходит за время $t_1$, определяемое из равенства

$$\omega t_1 = 2\pi.$$

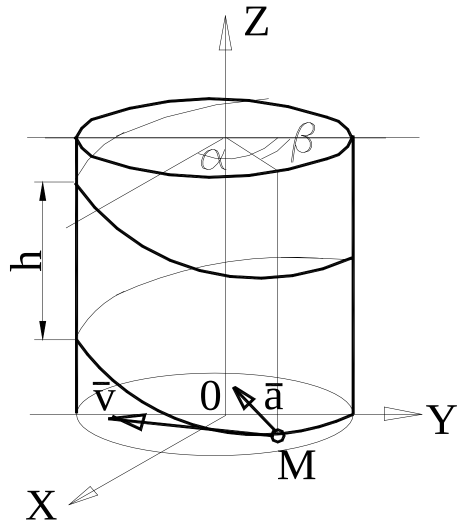



Рисунок 2.6 – К задаче о винтовом движении

За это время вдоль оси цилиндра точка смещается на величину

$$h = u\cdot 2\pi/\omega;$$

эта величина называется *шагом винтовой линии*.

Проекции вектора скорости

$$v_x = R\omega\cos\omega t,\ v_y = -R\omega\sin\omega t,\ v_z = u,$$

а скорость

$$v = \sqrt{R^2\omega^2 + u^2} = const\,.$$

Ненулевые проекции ускорения непостоянны:

$$a_x = -R\omega^2\sin\omega t,\ a_y = -R\omega^2\cos\omega t,\ a_z = 0.$$

Ускорение

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2 = const\,.$$

$$\cos\alpha_1 = a_x/a = -\sin\omega t = -x/R,$$

$$\cos\beta_1 = a_y/a = -\cos\omega t = -y/R,\ \cos\gamma_1 = a_z/a = 0.$$

С другой стороны,

$$x/R = \cos\alpha,\ y/R = \cos\beta,$$

где $\alpha$, $\beta$ – углы, образованные $R$ с осями $x$, $y$ соответственно. Но это означает, что ускорение направлено вдоль радиуса к оси цилиндра.

### 2.1.6 Оси естественного трехгранника. Числовые значения скорости. Касательное и нормальное ускорение точки

Понятие осей естественного трехгранника используется, когда закон движения задан естественным, или траекторным, способом.

В этом случае проекции скорости и ускорения строятся в осях $M\tau nb$, движущихся вместе с точкой $M$. Оси этого так называемого естественного трехгранника направлены следующим образом:

- ось $\tau$ направлена по касательной к траектории в сторону положительных значений $s$;
- ось $n$ направлена по нормали к траектории, расположенной в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории;
- ось $b$ направлена по нормали к $\tau$ и $n$ таким образом, чтобы в итоге система осей была правой.

$n$ носит название главной нормали, $b$ – бинормали.

В этих осях скорость точки определяется только одной проекцией на ось $\tau$, причем $v_\tau = \pm\, v$ , т.е. проекция скорости может отличаться только знаком. Поэтому далее обозначаем $v_\tau = v$ и называем $v$ числовым (алгебраическим) значением скорости.

Как и ранее,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Знак $v$ совпадает со знаком $ds$, т.е. при движении в положительном направлении $s$ будет $v > 0$.

Вектор ускорения $\boldsymbol{a}$ всегда находится в соприкасающейся плоскости М$\tau n$. Следовательно, проекция этого вектора на ось $b$ всегда равна нулю. Остается определить две другие проекции. Обозначим проекции вектора $d\mathbf{v}$ на оси $\tau$ и $n$ соответственно через $dv_\tau$ и $dv_\mathrm{n}$; тогда

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \overline{a}_n = \frac{dv_n}{dt}.$$

Модуль вектора $d\mathbf{v}_\mathrm{n}$ (рисунок 2.7):

$$dv_n = vd\varphi, \ d\varphi \text{ – угол смежности.}$$

Отношение $d\varphi/ds$ определяет так называемую кривизну траектории

$$d\varphi/ds = k = 1/\rho,$$

где $\rho$ – радиус кривизны. Тогда

$$a_n = v\frac{d\varphi}{dt} = v\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho}.$$

Окончательно

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \ a_n = \frac{v^2}{\rho}, \ a_b = 0.$$

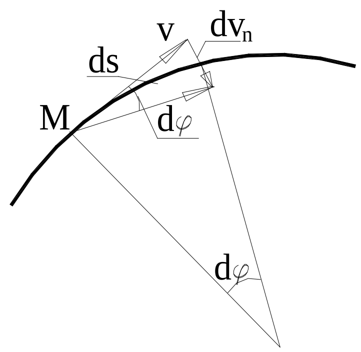



Рисунок 2.7 – Определение кривизны траектории

Если траектория – плоская кривая, то можно ввести понятие угловой скорости $\omega = d\varphi/dt$, тогда $a_n = v\cdot\omega$ – нормальное ускорение равно произведению скорости точки на угловую скорость поворота касательной к траектории.

Полное ускорение точки

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}.$$

### 2.1.7 Частные случаи движения точки

**1. Прямолинейное движение**

В этом случае радиус кривизны траектории равен бесконечности и

$$\rho=\infty, \ a_\text{n} = 0 \text{ и } a = a_\tau = dv/dt.$$

Направление движения не меняется, т.к. касательное (оно же и полное) ускорение характеризует изменение только числового значения скорости.

2. **Равномерное криволинейное движение**

В случае равномерного криволинейного движения скорость по величине не изменяется. В силу криволинейности траектории в этом случае скорость меняет только направление

$$v = \text{const},\ a_\tau = 0.$$

Ускорение

$$a_n \text{ n} = v^2/\rho,$$

причем вектор ускорения $\boldsymbol{a}_n$ направлен по нормали к траектории. Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.

Закон равномерного криволинейного движения следует из равенства

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{0}^{t} v dt,$$

что дает

$$s = s_0 + vt.$$

Если $s_0 = 0$, то $s = vt$, $v = s/t$.

3. **Равномерное прямолинейное движение**

В этом случае $a_n = a_\tau = 0$. Это означает, что при равномерном прямолинейном движении (и ни в каких других случаях!) ускорение точки равно нулю.

4. **Равнопеременное криволинейное движение**

Движение называется равнопеременным, если $a_\tau = \text{const}$.

В этом случае

$$v = v_0 + a_\tau t,\ \ s = s_0 + v_0 t + a_\tau t^2/2.$$

Сопоставляя направления векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$, можно ввести понятия ускоренного (угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$ острый) и замедленного (угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$ тупой) движения. Если скорость и ускорение имеют одинаковые знаки, то движение равноускоренное, если разные – равнозамедленное.

5. **Гармонические колебания**

Движение представляет собой простые гармонические колебания, если оно подчиняется уравнению

$$x = A \cos kt,$$

где $A$, $k$ – постоянные величины, $A$ – амплитуда колебаний.

Т.к. функция косинус периодическая с периодом $2\pi$, то $T = =2\pi/k$ – период колебаний. Скорость и ускорение определяются из закона движения однократным и двойным дифференцированием по времени соответственно:

$$v = -Ak \sin kt, \quad a = -Ak^2 \cos kt. \qquad (2.19)$$

Таким образом, при гармонических колебаниях все характеристики движения – координата, скорость и ускорение – меняются по гармоническому закону.

Все полученные выше результаты остаются в силе, если закон колебаний задать в виде

$$x = A \sin kt,$$

только знаки у скорости и ускорения после дифференцирования могут быть другими.

Гармоническое движение (колебания) и все его закономерности могут быть справедливы при криволинейном движении, только вместо координаты x вводится величина s, отсчитываемая вдоль траектории:

$$s = A \cos kt.$$

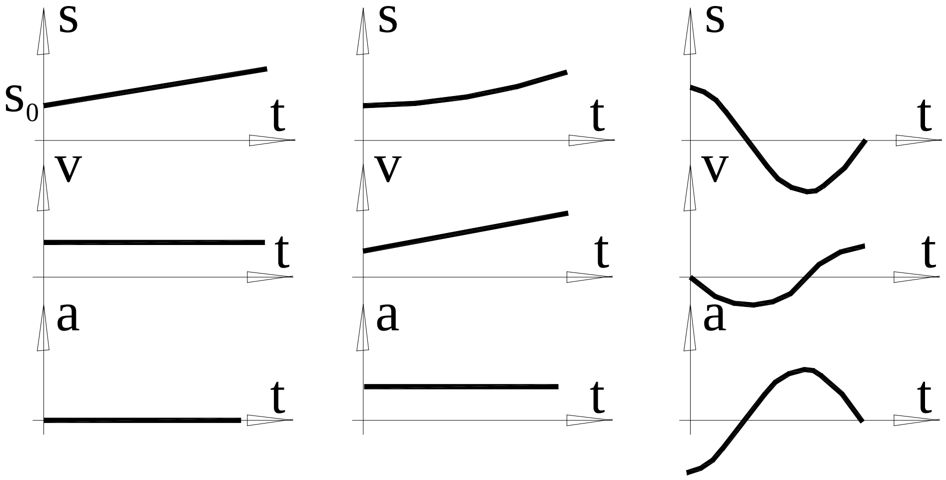
В этом случае имеется касательное ускорение, направленное по касательной к траектории, а нормальная составляющая ускорения определяется как

$$a_n = v^2 / \rho.$$

### 2.1.8 Графики движения, скорости и ускорения точки

Если в декартовых координатах по оси абсцисс откладывать время, а по оси ординат – расстояние $s$, то графиком движения точки будет кривая $s = f(t)$.

Совершенно аналогично строятся графики скорости $v(t)$ и ускорения полного $a(t)$, касательного $a_\tau(t)$ и нормального $a_n(t)$. На рисунке 2.8 приведены зависимости положения точки ($s$), скорости ($v$) и ускорения ($a$) от времени $t$ для трех разных законов движения – равномерного (рисунок 2.8, а), равнопеременного (рисунок 2.8, б) и гармонического (рисунок 2.8, в).




$s = vt$ а)  $s = s_0 + v_0 + a_\tau t^2/2$ б)  $s = A \cos kt$ в)

Рисунок 2.8 – Графики положения, скорости и ускорения точки в зависимости от времени

График движения не следует путать с траекторией. Нормальное и полное ускорения зависят от вида траектории (ее кривизны), и при одном и том же законе движения они могут сильно отличаться.

### 2.1.9 Примеры решения задач

**Пример 1.**

Пусть колебания груза, подвешенного на нити длиной $l$, описываются законом (начало отсчета в нижней точке траектории).

$$s = A \sin kt,\ A = \text{const},\ k = \text{const}$$

Найти скорость, нормальное и касательное ускорения груза и те точки на траектории, где они обращаются в нуль.

Из заданного закона движения дифференцированием по времени определяются скорость и касательное ускорение, а нормальное ускорение определяется через скорость и длину $l$ нити (она определяет радиус кривизны траектории груза):

$$v = ds/dt = Ak \cos kt,$$

$$a_\tau = dv/dt = -Ak^2 \sin kt,$$

$$a_n = v^2/l = A^2k^2/l \cdot \cos^2 kt.$$

Из этих выражений видно, что скорость обращается в нуль в крайних точках, т. к. там $\sin(kt) = \pm 1$, следовательно, $\cos(kt) = 0$. Это же справедливо и для $a_n$.

Ускорение касательное в этих точках максимально и равно $a_\tau = \pm Ak^2$.

Таким образом, при криволинейном неравномерном движении в отдельных точках траектории $a_n$, $a_\tau$ могут обращаться в нули. При этом касательное ускорение равно нулю, если $dv/dt = 0$, а нормальное – если $v = 0$ или $\rho\to\infty$. Последнее означает, что траектория становится прямой линией или имеет точку перегиба.

**Пример 2.**

Пусть для точки М

$$x = R\cos(\varepsilon t^2/2),\ \ y = R\sin(\varepsilon t^2/2).$$

где $R$ имеет размерность длины, $\varepsilon$ – углового ускорения, а их величины принимаются постоянными.

Требуется определить движение точки естественным способом – т.е. найти траекторию и закон движения вдоль этой траектории.

Поскольку $x^2 + y^2 = R^2$, то траектория представляет собой окружность радиусом $R$ с центром в начале координат.

При $t = 0$ $x = R$, $y = 0$. Эту точку принимаем за начало отсчета. Тогда $s(0) = 0$.

При $t > 0$ координата $y$ начинает расти, а координата $x$ – убывать, т.е. точка начинает двигаться по окружности против часовой стрелки.

Для определения дуговой координаты s найдем

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (\dot{x}\,dt)^2 + (\dot{y}\,dt)^2, \quad s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt.$$

$$\dot{x} = -Rt\varepsilon\sin(\varepsilon t^2/2),\ \dot{y} = Rt\varepsilon\cos(\varepsilon t^2/2);\ s = R\varepsilon\int_0^t t\,dt = R\varepsilon t^2/2.$$

$$v = \dot{s} = Rt\varepsilon;\ a_\tau = R\varepsilon;\ a_n = v^2/R = r\varepsilon^2 t^2,$$

$$a = R\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2 t^2},\ tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} = 1/\varepsilon t^2.$$

При $t = 0$ получаем $a = a_\tau = R\varepsilon$ ($a_n = 0$), $\mathrm{tg}\mu = \infty$, $\mu = \pi/2$.

Это значит, что в начальный момент времени ускорение направлено строго по касательной к окружности. С течением времени (при $t \to \infty$) $\mathrm{tg}\mu \to 0$, или $\mu \to 0$, т.е. полное ускорение направлено по радиусу к центру О.

**Пример 3.**

Рассмотрим движение горизонтально брошенного камня со скоростью $v_0$. Уравнения его движения в координатной форме имеют вид:

$$x = v_0 t,\ \ y = gt^2/2. \tag{2.20}$$

здесь $g$ – ускорение свободного падения.

Траектория точки в обычном виде получается после исключения времени из этих соотношений (по существу соотношения (2.20) уже представляют собой уравнения траектории в так называемой параметрической форме). В итоге траекторией оказывается парабола:

$$y = gx^2/2v_0^{\,2}.$$

Дифференцируя уравнения движения по времени, получим

$$v_x = \dot{x} = v_0,\ v_y = \dot{y} = gt,\ v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}. \tag{2.21}$$

При $t = 0$ из условия задачи $v = v_0$, с ростом времени растет и скорость.

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = 0,\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = g.$$

В итоге $a = a_y = g$ – постоянная величина.

Условием равноускоренного движения является $a_\tau$ = const, в данном случае эта величина непостоянна:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{gt^2}{v}.$$

Можно $t$ определить через $v$ из последнего соотношения (2.21):

$$t = \frac{\sqrt{v^2 - v_0^2}}{g},$$

Тогда

$$a_\tau = \frac{g\sqrt{v^2 - v_0^2}}{v} = g\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^2}.$$

Таким образом, $a_\tau$ изменяется от нуля до ускорения свободного падения, когда скорость меняется от начального значения до бесконечности.

Радиус кривизны траектории определяется из соотношения

$$a_n = v^2/\rho,\ \text{откуда}\ \rho = v^2/a_n = v^3/v_0 g.$$

Кривизна максимальна (радиус минимален) в начальный момент времени, и со временем с ростом скорости она стремится к нулю.

### 2.1.10 Скорость и ускорение точки в полярных координатах

Если движение точки происходит в одной плоскости, оно может быть описано в полярных координатах *r*, φ (см. рисунок 2.9):

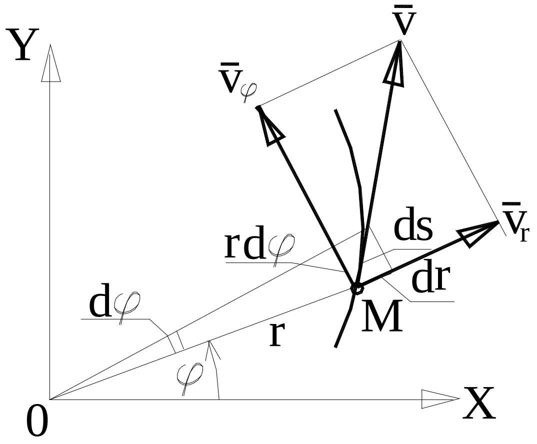



Рисунок 2.9 – Движение точки в полярных координатах

$$r = f_1(t),\ \varphi = f_2(t).$$

Составляющие скорости

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r},\ \ v_\phi = r\frac{d\phi}{dt} = r\dot{\phi},\ v = \sqrt{v_r^2 + v_\phi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}\ .$$

Эти же равенства можно получить чисто формально, сделав замены

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,$$

тогда

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi,\ \ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\ .$$

По той же схеме после определения $\ddot{x},\ \ddot{y}$ можно найти ускорение в виде выражения

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)^2 + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})^2}\ .$$

В первой скобке под радикалом не что иное, как составляющая ускорения $\boldsymbol{a}_r$ вдоль радиуса *r*, во второй – составляющая $\boldsymbol{a}_\varphi$, направленная по касательной к окружности радиуса *r*.

## 2.2 Поступательное и вращательное движения твердого тела

### 2.2.1 Поступательное движение

В кинематике абсолютно твердого тела рассматриваются две основные задачи:

- о движении тела как целого;
- об определении характеристик движения отдельных точек.

В первом случае, как отмечалось во введении, для описания движения тела можно использовать модель материальной точки, поскольку, когда говорится о движении тела как целого, имеется ввиду, что пространственная ориентация тела значения не имеет.

Во втором случае используется модель абсолютно твердого тела.

***Поступательным движением твердого тела*** *называется такое, при котором любая прямая, принадлежащая этому телу, при его перемещении остается параллельной своему начальному положению.*

---

Не следует путать вид траектории движения и характер движения – поступательное или вращательное. Так, движение стеклоочистителя («дворника») на большинстве легковых автомашин является вращательным, на больших автобусах и грузовиках, где обычно используется устройство привода в виде параллелограмма – поступательным. Таким образом, при поступательном движении тела в целом траектория любой точки тела может быть криволинейной. В качестве примера можно рассмотреть движение педали велосипеда. Считая, что она расположена все время горизонтально, можно заключить, что движение педали является поступательным. В то же время траектория представляет собой достаточно сложную кривую (циклоиду): велосипед движется, например, горизонтально, а педаль вместе с рычагом в это же время еще и вращается вокруг оси.

---

**Свойства поступательного движения** можно сформулировать в виде следующей **теоремы**: При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (т.е. совпадающие при наложении) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Пусть точки $A$ и $B$ (рисунок 2.10) принадлежат твердому телу.

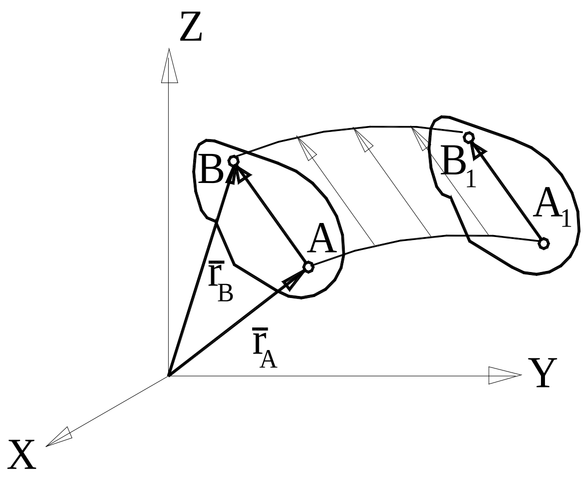



Рисунок 2.10 – К описанию поступательного движения

Тогда длина *AB* постоянна, т.к. тело абсолютно твердое, направление *AB* постоянно по определению поступательного движения. Это значит, что вектор ***AB*** является постоянным (его длина и направление не меняются). Тогда радиусы-векторы точек *A* и *B* отличаются в любой момент времени на постоянную векторную величину:

$$\overline{r}_B = \overline{r}_A + A\overline{B}$$

но *AB* = const, и все точки траекторий *A* и *B* отличаются на постоянный вектор. При соответствующем смещении они совпадут, что и означает одинаковость (равенство) траекторий.

Поскольку первая и вторая производные по времени от постоянной величины (в том числе векторной) равны нулю

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{A}\overline{B}\right) = 0, \ \ \frac{d^2}{dt^2}(\overline{A}\overline{B}) = 0,$$

то

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B, \ \ \boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_B.$$

Т.к. точки *A* и *B* взяты произвольно, эти утверждения справедливы для любых точек тела.

Полученные результаты означают, что для описания поступательного движения твердого тела достаточно знать закон движения его единственной точки. Для любой другой точки все характеристики движения будут такими же.

### 2.2.2 Вращательное движение твердого тела вокруг оси. Угловая скорость и угловое ускорение

***Вращательным движением АТТ вокруг неподвижной оси*** *называется такое, при котором какие-нибудь две точки тела остаются во все время движения неподвижными.*

*Прямая, проходящая через эти точки, называется* ***осью вращения****.*

Т.к. тело абсолютно твердое, то все точки на оси вращения неподвижны, а вне оси описывают окружности, плоскости которых перпендикулярны оси, и центры этих окружностей расположены на оси.

Если зафиксируем некоторое начальное положение плоскости, проходящей через ось, то угол поворота тела определится текущим положением плоскости (рисунок 2.11). На рисунке неподвижная плоскость (слева от оси вращения *ZZ*) показана более плотной штриховкой, текущее положение плоскости, вращающейся вместе с телом, выделено справа от оси более редкой штриховкой. Угол поворота тела определится положением именно этой подвижной плоскости в виде соотношения, связывающего угол поворота $\varphi$ и время $t$:

$$\varphi = f(t). \tag{2.22}$$

Размерность этой характеристики – это размерность угла. В большинстве случаев наиболее употребительны радианы. Следует помнить, что радиан – безразмерная величина, так как, по определению, один радиан – это такой центральный угол, у которого длина дуги, на которую он опирается, равна радиусу. Измерить угол в радианах означает найти отношение длины дуги к радиусу, а это отношение всегда безразмерно.

$$[\ \varphi\ ] = \text{рад}.$$

Уравнение (2.22) представляет собой закон вращательного движения АТТ вокруг неподвижной оси. Очевидно, что для описания такого движения не нужно привлекать какие-либо еще соотношения. В таких случаях, когда единственное уравнение полностью определяет движение твердого тела, задавая закон изменения одного параметра как функцию времени, говорят, что тело имеет одну степень свободы.

**Основными кинематическими характеристиками АТТ при его вращении вокруг неподвижной оси** являются угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

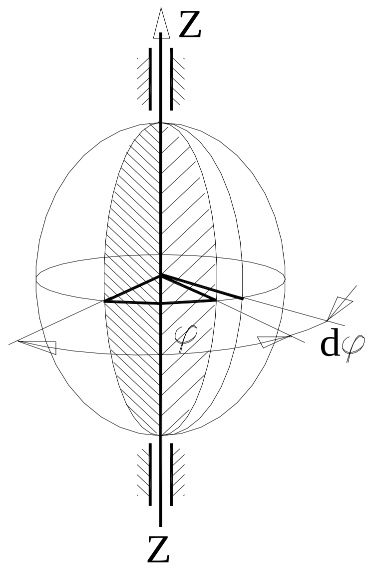



Рисунок 2.11 – Описание вращательного движения

Вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ вводится в известном смысле условно и направлен вдоль оси вращения в соответствии с известным правилом буравчика. Вектор углового ускорения $\overline{\varepsilon}$, характеризующий изменение угловой скорости, направлен тоже вдоль оси, но правило буравчика здесь неприменимо. Если скорость вращения растет, вектор углового ускорения направлен так же, как вектор угловой скорости. Если вращение замедляется, то вектор углового ускорения противоположен вектору угловой скорости. Обычно угловая скорость и угловое ускорение рассматриваются как алгебраические величины, которым в зависимости от выбранного положительного направления приписывают знаки плюс или минус.

Определяются угловая скорость и угловое ускорение из закона вращательного движения аналогично обычной линейной скорости и линейному ускорению – дифференцированием соответствующего закона движения (2.22) по времени:

$$\omega = d\varphi/dt, \quad \varepsilon = d^2\varphi/dt^2 = d\omega/dt.$$

Эти величины имеют соответствующие размерности:

$$[\ \omega\ ] = \text{рад/с} \quad \text{или} \quad \text{с}^{-1}, [\varepsilon] = \text{рад/с}^2 \quad \text{или} \quad \text{с}^{-2}.$$

На схемах угловая скорость часто изображается в виде вектора, направленного вдоль оси по правилу буравчика.

Как уже отмечалось, угловое ускорение тоже всегда направлено вдоль оси. При ускоренном вращении направления векторов $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{\omega}$ совпадают, при замедленном движении их направления противоположны.

## 2.2.3 Равномерное и равнопеременное вращения

Если угловая скорость постоянна, вращение тела называется **равномерным**. Тогда из соотношения

$$d\varphi/dt = \omega$$

следует

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

$$\varphi = \omega t,\ \ \omega = \varphi/t \ \text{ при } \varphi_0 = 0.$$

В технике часто используют для измерения угловой скорости внесистемную единицу – обороты в минуту. Для перехода к $с^{-1}$ нужно использовать формулу

$$\omega = 2\pi \cdot n/60 \approx 0{,}1\ n,$$

где n выражено в об/мин.

**Вращение тела** называется равнопеременным, если угловое ускорение постоянно: $\varepsilon = \text{const}$.

Тогда

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,\ \varphi = \varphi_0 + \omega t + \varepsilon t^2/2.$$

Аналогия с равноускоренным поступательным движением очевидна: зависимость угловой скорости от углового ускорения такая же, как зависимость линейной скорости от линейного ускорения. То же справедливо и для угла поворота как функции времени – зависимость точно такая же, как пройденного пути от времени в случае поступательного движения тела, с точностью до обозначений.

## 2.2.4 Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Если точка АТТ находится на расстоянии $h$ от оси вращения, а тело за время $dt$ поворачивается на угол $d\varphi$, то скорость движения этой точки определяется как

$$v = h\ d\varphi/dt = h\omega.$$

Для $v$ обычно используется термин «линейная» или «окружная» скорость точки М. Числовое значение скорости точки вращающегося тела равно произведению угловой скорости на расстояние от точки до оси вращения.

Линейная скорость $v$ направлена по касательной к окружности, перпендикулярно плоскости, проходящей через точку и ось вращения. Т.к.

угловая скорость одинакова для всех точек тела, то скорости точек вращающегося тела пропорциональны расстоянию от них до оси.

Ускорение точек тела получается из формул

$$a_\tau = dv/dt, \ a_n = v^2 / \rho.$$

Тогда

$$a_\tau = hdv/dt = h\varepsilon, a_n = h^2\omega^2/h = h\omega^2.$$

Ускорение $\bar{a}_\tau$ направлено по касательной к окружности, при ускоренном вращении – в сторону движения.

Ускорение $\bar{a}_n$ всегда направлено по радиусу к оси вращения.

Таким образом, касательное и нормальное ускорения всегда ориентированы взаимно перпендикулярно, поэтому величина полного ускорения определяется по формуле:

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Отклонение вектора полного ускорения $\bar{a}$ от радиального направления определяется углом

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Т.к. ε и ω одинаковы для всех точек тела, то ускорения всех точек тела пропорциональны $h$, и угол, составляемый вектором полного ускорения $\bar{a}$ с радиусом, одинаков для всех точек.

Таким образом, зная закон движения одной любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, мы можем определить эти законы для любых точек тела.

Если возьмем начало координат на оси вращения, и обозначим $\bar{r}$ – радиус-вектор, то (рисунок 2.12)

$$h = |\bar{r}| \cdot \sin\alpha,$$

тогда

$$|\bar{v}| = \omega h = |\bar{\omega}||\bar{r}|\sin\alpha .$$

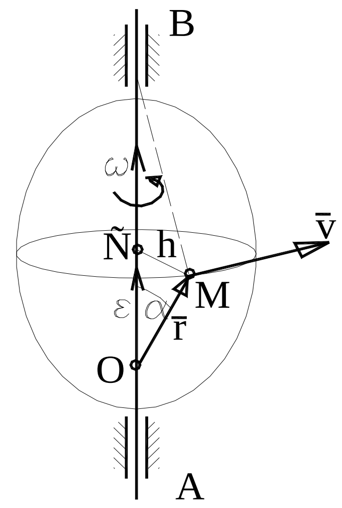


Рисунок 2.12 – Определение вектора скорости точки вращающегося тела

С другой стороны, модуль векторного произведения

$$|\overline{\omega}\times\overline{r}| = |\overline{\omega}||\overline{r}|\sin\alpha\,.$$

Т.к. направления $\overline{v}$ и $\overline{\omega}\times\overline{r}$ совпадают (оба этих вектора перпендикулярны плоскости, проходящей через точку и ось), то

$$\overline{v} = \overline{\omega}\times\overline{r} \tag{2.23}$$

т.е **вектор скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки**. Соотношение (2.23) иногда называют формулой Эйлера.

Для полного ускорения справедливо

$$\frac{d\overline{v}}{dt} = \left(\frac{d\overline{\omega}}{dt}\times\overline{r}\right) + \left(\overline{\omega}\times\frac{d\overline{r}}{dt}\right) = (\overline{\varepsilon}\times\overline{r}) + (\overline{\omega}\times\overline{v}). \tag{2.24}$$

В этом выражении первое слагаемое представляет собой вектор, направленный так же, как $\overline{\omega}\times\overline{r}$, – по касательной к траектории. При этом

$$|\overline{\varepsilon}\times\overline{r}||\overline{\varepsilon}||\overline{r}|\sin\alpha = \varepsilon h.$$

Следовательно, первое слагаемое является касательным ускорением $\overline{a}_\tau$.

Второе слагаемое $\overline{\omega}\times\overline{v}$ направлено по радиусу (поскольку $\overline{\omega}$ направлено вдоль оси, $\overline{v}$ – по касательной), при этом

$$|\overline{\omega}\times\overline{v}| = |\overline{\omega}||\overline{v}|\sin 90^0 = \omega v = \omega h^2,,$$

т.к. $v = \omega h$. Таким образом, второе слагаемое представляет собой нормальное ускорение $\overline{a}_n$.

**Пример 1.**

Вал вращается со скоростью 90 об/мин и после выключения вращается равнозамедленно, останавливаясь через $t_1$ = 30 с. Определить, сколько оборотов сделал вал до полной остановки.

Принимаем $\varphi_0 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} &\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2; &&(а) \\ &\omega = \omega_0 + \varepsilon t, &&(б) \end{aligned} \qquad (2.25)$$

где $\omega_0$ – начальная угловая скорость, в нашем случае это $2\pi n/60$. Конечная скорость равна нулю. Тогда из формулы (2.25, б) находим

$$0 = 2\pi n/60 + \varepsilon t_1; \;\; \varepsilon = -\pi n/(30 t_1).$$

Если $K$ – число оборотов до остановки, тогда $\phi = 2\pi K$, и подстановка этого значения $\phi$ в (2.25, а) дает

$$2\pi K = (\pi n/30 t_1)\cdot t_1 - 1/2\cdot(\pi n/30 t_1)\cdot t_1^2 = \pi n/60\cdot t_1;$$

Откуда

$$K = n/120\cdot t_1 = n/4 = 22{,}5 \text{ (оборота).}$$

**Пример 2.**

Маховик радиусом 0,7 м равномерно вращается со скоростью 100 об/мин. Найти скорость и ускорение точки на ободе.

$$v = R\omega = 2\pi n/60\cdot R \approx 7 \text{ м/с}.$$

Т.к. $\omega = \text{const}$, то

$$a_\tau = 0,\; a_n = a = v^2 / R \approx 70 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение направлено по радиусу к оси вращения.

## 2.3 Плоскопараллельное движение твердого тела

### 2.3.1 Уравнения плоскопараллельного движения. Разложение движения на поступательное и вращательное

***Плоскопараллельным,*** *или* ***плоским, движением*** *называется такое, при котором все точки абсолютно твердого тела (АТТ) перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости.*

Нетрудно увидеть, что частным случаем плоскопараллельного движения является вращение АТТ вокруг оси.

Если тело совершает плоское движение около плоскости $P$, то все точки тела, расположенные на прямой, перпендикулярной $P$, движутся одинаково (рисунок 2.13). Это неочевидное утверждение легко доказывается способом от противного: если предположить, что это не так, то расстояние между точками на этой прямой должно меняться, но это противоречит определению абсолютно твердого тела.

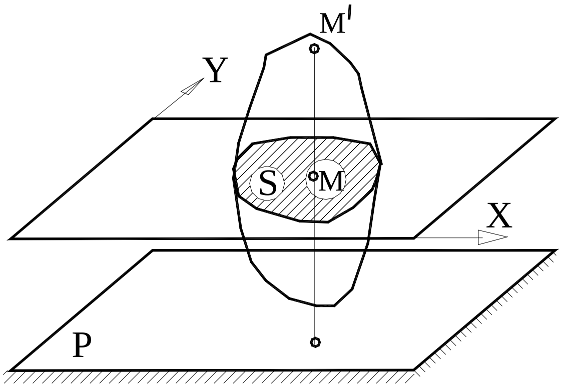



Рисунок 2.13 – Описание плоского движения

Таким образом, для описания движения тела достаточно изучить движение некоторого его сечения *S*. Далее рассматривается движение *S* в плоскости *Oxy*. Такое движение будет описано, если известно положение некоторого отрезка *AB* в сечении *S* (рисунок 2.14). Для этого достаточно знать, например, $x_A$, $y_A$ и угол φ между отрезком *AB* и осью *Ox*. В этом случае точка *A* называется **полюсом**.

Таким образом, плоское движение задано, если известны зависимости:

$$x_A = f_1(t),\ y_A = f_2(t),\ \varphi = f_3(t). \tag{2.26}$$

Уравнения (2.26) – уравнения движения плоской фигуры в ее плоскости. Одновременно это и уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.

Как видим, для описания этого вида движения задаются три уравнения, определяющие изменение во времени трех параметров – две координаты полюса и один угол вращения. Это означает, что при таком движении тело имеет три степени свободы.

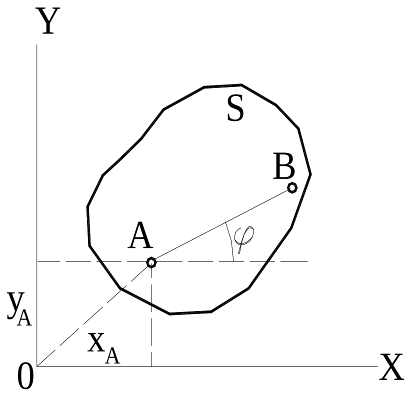



Рисунок 2.14 – Степени свободы тела при плоском движении

Если φ = const, то (2.26) представляют собой уравнения поступательного движения АТТ.

Если $x_A$ = const, $y_A$ = const, то (2.26) определяет вращение плоской фигуры вокруг точки А (или вращение АТТ вокруг оси, проходящей через точку А перпендикулярно плоскости этой плоской фигуры).

Таким образом, в общем случае движение плоской фигуры в ее плоскости слагается из поступательного движения полюса и вращения фигуры вокруг этого полюса.

---

Характеристиками плоского движения являются: *скорость и ускорение поступательного движения* полюса А и *угловые скорость и ускорение вращательного движения* вокруг этого полюса.

---

Все эти величины и определяются из уравнений движения (2.26).

В качестве полюса можно выбрать любую точку фигуры. При этом характеристики поступательного движения в общем случае изменятся (только в том случае, когда тело движется поступательно, изменение полюса не приведет к изменению уравнения его движения). Что касается вращательного движения, оно не меняется. Это усматривается из следующего рассуждения: если из точки *C* (нового полюса) провести прямую $CD \parallel AB$, то эти прямые всегда параллельны. Но это и означает, что вращательное движение не зависит от выбора полюса.

### 2.3.2 Определение траекторий точек плоской фигуры

Рассмотрим точку *M* плоской фигуры, так что угол *MAB* = α, а расстояние *AM* = *b* (рисунок 2.15).

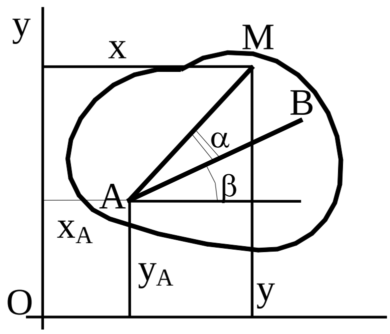



Рисунок 2.15 – К определению траекторий точек тела

Для точки *M*:

$$x_M = x_A + b\cos(\varphi+\alpha), \;\; y_M = y_A + b\sin(\varphi+\alpha). \qquad (2.27)$$

В этих уравнениях величины $x_A$, $y_A$, φ известны из (2.26). По существу, зависимости (2.27) и есть уравнение траектории в параметрическом виде. Если исключим $t$, получим более привычную форму: $y = y\ (x)$.

Пример. $AB = d$, $AM = b$ (рисунок 2.16).

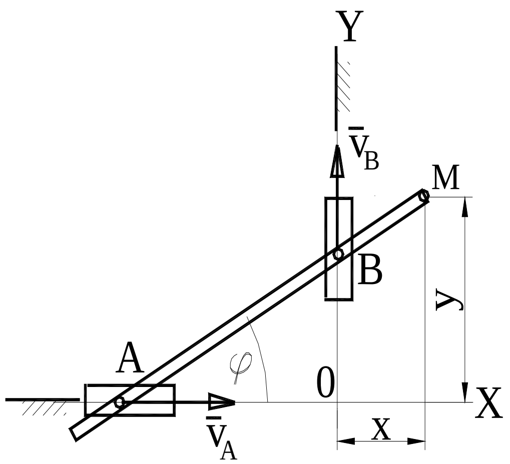



Рисунок 2.16 – Схема эллипсографа

Если положение линейки определяется углом φ при перемещении $A$ и $B$ вдоль осей, то для точки $M$ определяются ее координаты из соотношений:

$$x = (b - d)\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi.$$

Исключая отсюда φ, получим:

$$\frac{x^2}{(b-d)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $b - d$ и $b$ и с центром в точке О.

Таким образом, меняя $d$ и $b$, можно с помощью этого прибора строить эллипсы с различными полуосями. Прибор называется эллипсографом.

### 2.3.3 Скорости точек плоской фигуры

Положение точки $M$ определяется радиус-вектором:

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}_{AM}.$$

Тогда скорость

$$\bar{v}_M = \frac{d\bar{r}_M}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}_{AM}}{dt}.$$

Справа первое слагаемое – это скорость полюса $\bar{v}_A$, второе, в силу того, что $AM$=const, есть скорость точки $M$ за счет вращения вокруг полюса $A$:

$$v_{MA} = \omega \cdot MA,$$

причем $\overline{v}_{MA} \perp MA$;   $\omega$ – угловая скорость плоской фигуры.

Таким образом, скорость любой точки плоской фигуры геометрически складывается из скорости полюса и скорости за счет вращения этой точки вокруг полюса.

**Пример 1.**

Определить скорость точки *M* на ободе колеса, катящегося по прямолинейному рельсу без скольжения, если известна скорость оси колеса $\boldsymbol{v}_C$ (рисунок 2.17).

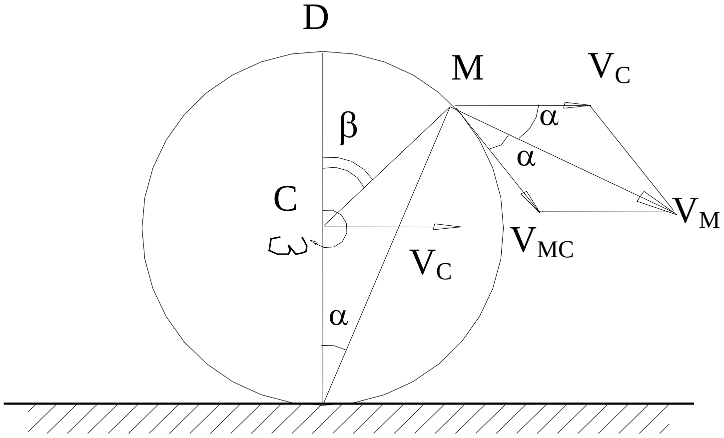



Рисунок 2.17 – Определение скорости точки на ободе колеса

Скорость произвольной точки *M*, как отмечалось выше, складывается из скорости полюса и скорости точки в ее движении вокруг полюса. В качестве полюса в данном случае логично взять точку С, закон движения которой по условию известен. Тогда

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{MC}; \qquad v_{MC} = v_{KC} = \omega \cdot R = v_C/R \cdot R = v_C.$$

Величина угловой скорости ω определена из следующих соображений. Поскольку точка касания колеса с рельсом неподвижна, то, приняв ее за полюс, движение точки *C* можно рассматривать как вращение ее вокруг точки касания. Но линейная скорость точки *C* известна, расстояние от точки *C* до точки касания равно радиусу *R*, поэтому $\omega = v_C/R$. *A* ранее отмечалось, что закон вращения не зависит от выбора полюса.

Угол внутри ромба $2\alpha = \beta$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). С другой стороны, при точке К угол тоже равен $\alpha = \beta/2$ – он вписан в окружность и опирается на ту же дугу, что и β.

В связи с этим $v_M = 2v_C \cos\alpha$.

### 2.3.4 Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

**Теорема**

Проекции скоростей двух точек тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.

Скорость точки *B* вычисляется, если точку *A* принять в качестве полюса:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

Проектируя это равенство на ось, направленную вдоль *AB*, и учитываем при этом, что $\bar{v}_{BA} \perp AB$ (рисунок. 2.18),тогда

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha,$$

где $\alpha$, $\beta$ – углы между векторами $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$ и осью.

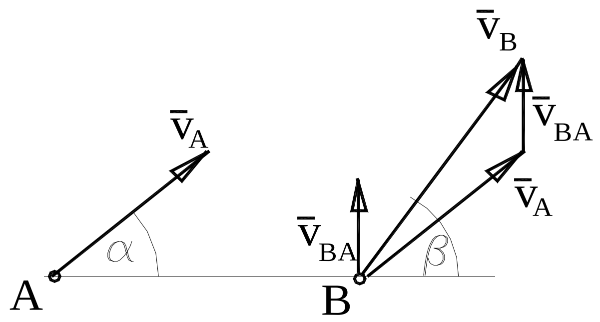



Рисунок 2.18 – К теореме о скоростях двух точек тела

**Пример 1.**

Найти зависимость между скоростями точек эллипсографа.

Поскольку направления движения точек *A* и *B* известны, проектируем векторы скоростей $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$ на *AB*.

По теореме:

$$v_A cos\varphi = v_B cos(90^o - \varphi); \quad v_A = v_B\, tg\varphi.$$

### 2.3.5 Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей. Центроиды

**Мгновенным центром скоростей** (МЦС) плоской фигуры называется точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

При непоступательном движении тела такая точка существует всегда. Пусть две точки тела *A* и *B* имеют непараллельные скорости (рисунок 2.19).

Тогда мгновенным центром скоростей будет точка *P*, поскольку $v_P$ = 0. Точка *P* лежит на пересечении перпендикуляров к направлениям скоростей точек $A$ и $B$, проведенных через эти точки. Если вектор $v_P \neq 0$, то он был бы одновременно перпендикулярен $AP$ и $BP$, но эти отрезки не могут быть параллельными между собой, поскольку они перпендикулярны непараллельным по условию векторам.

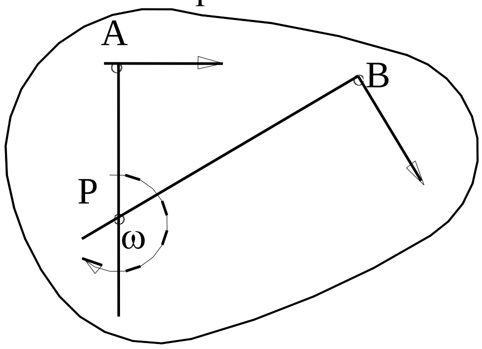



Рисунок 2.19 – Определение мгновенного центра скоростей

Никакая другая точка в это время не может иметь скорость, равную нулю – это следует из теоремы о проекциях скоростей.

Найдем с помощью МЦС скорость точки А, принимая за полюс точку $P$:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{AP} = \bar{v}_{AP}, \text{ и } |\bar{v}_{AP}| = \omega \cdot AP = |\bar{v}_A|.$$

Аналогично скорость точки В:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{v}_{BP} = \bar{v}_{BP}, \text{ и } |\bar{v}_{BP}| = \omega \cdot BP = |\bar{v}_B|,$$

т.е. скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

**Выводы**:

1. Для определения положения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей двух точек тела (плоской фигуры); мгновенный центр находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из этих точек к направлениям их скоростей (или к касательным к траекториям).

2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать скорость (модуль и направление) какой-либо точки $A$ и направление скорости другой точки $B$.

Мгновенный центр скоростей определяется, как это уже показано выше; по расстоянию $AP$ определяется угловая скорость ω. Для любой точки М скорость ее определяется как $\omega \cdot PM$.

3. Угловая скорость плоской фигуры в каждый момент времени равна отношению скорости какой-либо точки $A$ к расстоянию $AP$ до мгновенного центра скоростей $P$:

$$\omega = v_A / AP.$$

Для угловой скорости ω можно найти и другое выражение. Так, скорость точки B относительно *A* определяется как:

$$v_{BA} = \left| v_B - v_A \right|, \text{ и } v_{BA} = \omega \cdot BA,$$

отсюда

$$\omega = \frac{\left(v_B - v_A\right)}{AB} = \frac{\left(v_B + (-v_A)\right)}{AB}. \qquad (2.28)$$

Если $v_A = 0$ (т.е. точка *A* – мгновенный центр скоростей), то получаем тот же результат, что и выше.

**Частные случаи**:

1. Качение тела без скольжения по неподвижно поверхности другого тела (например, колеса по неподвижному рельсу). В точке касания находится мгновенный центр скоростей.

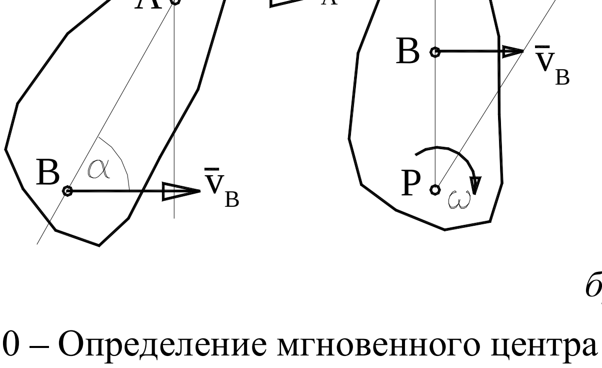
2. Если скорости точек *A* и *B* параллельны, а вектор $\overline{v}_A$ не перпендикулярен *AB*, то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности, а скорости всех точек параллельны $\overline{v}_A$ (рисунок 2.20, а). В этом случае говорят о мгновенном поступательном движении тела и поступательном распределении скоростей (угловая скорость в этот момент равна нулю).

3. Если скорости двух точек параллельны $\overline{v}_A || \overline{v}_B$, а $AB \perp \overline{v}_A$, то мгновенный центр скоростей строится в соответствии с рисунком 2.20, б. В этом случае нужно знать не только направления, но и величины скоростей $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_B$.

4. Если для точки *A* известен вектор скорости $\overline{v}_A$ и угловая скорость ω, то положение мгновенного центра *P* определяется по выражению:

$$BP = \omega_A / \omega.$$

В общем случае со временем положение мгновенного центра скоростей *P* меняется.




*а)* *б)*

Рисунок 2.20 – Определение мгновенного центра скоростей

**Центроиды**

Как показано выше, плоское движение тела в каждый конкретный момент времени можно рассматривать как вращение вокруг мгновенного центра скоростей (или мгновенного центра вращения). Этот центр, или точка на плоскости, в общем случае все время меняет свое положение. Например, качение колеса по рельсу можно представить как поступательное перемещение оси (полюса) и вращение вокруг оси, или же как серию вращений вокруг последовательно меняющих свое положения точек касания колеса с рельсом.

Мгновенный центр вращения меняет свое положение как на неподвижной (отсчетной) плоскости, так и на подвижной плоскости, связанной с движущимся телом. Геометрическое место мгновенных центров вращения, т.е. их положений, на неподвижной плоскости называется неподвижной центроидой. Соответственно геометрическое место этих центров на подвижной плоскости называется подвижной центроидой. В примере с колесом и рельсом неподвижная центроида – это прямая линия, обозначающая поверхность рельса, а подвижная центроида – окружность колеса. В каждый момент времени обе центроиды касаются друг друга, имея единственную общую точку. Пересекаться центроиды не могут – иначе это означало бы, что в данный момент времени существует два центра вращения, что невозможно.

Таким образом, при плоском движении тела происходит качение без скольжения подвижной центроиды по неподвижной, поскольку положение мгновенного центра вращений меняется непрерывно. Предположим, что мы обе центроиды осуществили в наглядном материальном виде, тогда плоское движение тела можно получить, скрепив подвижную центроиду с телом и катя эту центроиду без скольжения по неподвижной.

**Пример 1.**

Найти скорость точки $M$ обода колеса с помощью мгновенного центра скоростей (МЦС).

Точка касания и есть МЦС. Вектор скорости точки $M$ проходит через точку $D$, т.к. $\bar{v}_M \perp MP$, а вписанный прямой угол должен опираться на диаметр $DP$.

Из пропорции

$$\frac{v_M}{PM} = \frac{v_C}{R}$$

с учетом того, что $PM = 2R\cos\alpha$, следует:

$$v_{\mathrm{M}} = 2v_{\mathrm{C}} \cos\alpha.$$

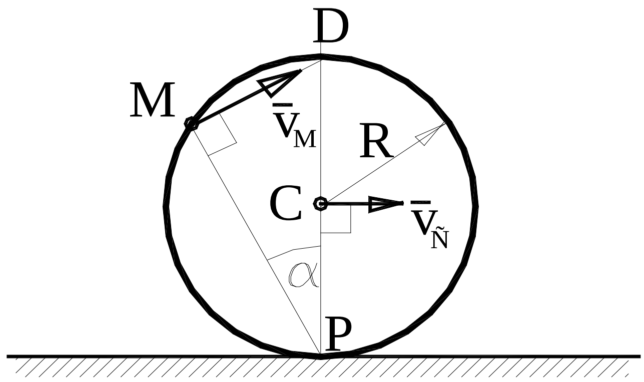



Рисунок 2.21 – Схема к задаче об определении скорости точки на ободе

Очевидно, что $v_D = 2v_C$ – скорость именно этой точки обода максимальна.

### 2.3.6 Ускорения точек плоской фигуры

Как и скорость, ускорение любой точки плоской фигуры складывается из ускорений за счет поступательного и вращательного движений фигуры.

Для точки *M* ее радиус-вектор (рисунок 2.22)

$$\overline{r}_M = \overline{r}_A + \overline{r}_{MA}.$$

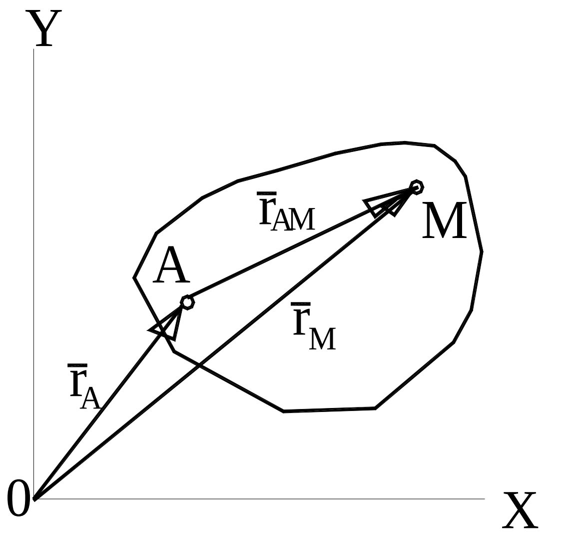



Рисунок 2.22 – Определение ускорения произвольной точки

Ускорение:

$$\overline{a}_M = \frac{d^2\overline{r}_M}{dt^2} = \frac{d^2\overline{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\overline{r}_{MA}}{dt^2} = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA}.$$

Первое слагаемое справа – ускорение полюса *А*, второе – ускорение точки М при вращении плоской фигуры вокруг полюса.

Второе слагаемое определяется так же, как в п.2.2.4 при анализе вращения тела вокруг неподвижной оси:

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

где ω и ε – угловая скорость и угловое ускорение фигуры, μ – угол между вектором $\overline{a}_{MA}$ и *МА*.

Таким образом, ускорение любой точки *М* плоской фигуры геометрически складывается из ускорения точки *А* (полюса) и ускорения, которое получает точка *М* при вращении фигуры вокруг этого полюса.

Проводить такое построение неудобно. Поэтому обычно заменяют ускорение $\overline{a}_{MA}$ его касательной и нормальной составляющими, так что

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA}^{\tau} + \overline{a}_{MA}^{n};$$

$\overline{a}_{MA}^{\tau}$ (вектор) всегда направлен в сторону вращения при ускоренном вращении. Нормальная составляющая – в сторону полюса *А*.

Численно:

$$a_{MA}^{\tau} = MA \cdot \varepsilon, \quad a_{MA}^{n} = MA \cdot \omega^2.$$

Ускорение самого полюса *А* можно представить как геометрическую сумму касательной и нормальной составляющих, и тогда

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n} + \overline{a}_{MA}^{\tau} + \overline{a}_{MA}^{n}.$$

---

При анализе этого выражения нужно иметь в виду, что верхние индексы у слагаемых в правой части, формально обозначающие касательные и нормальные составляющие ускорения, у первой пары слагаемых и у второй **разные**. У первой пары эти составляющие связаны с видом траектории точки *А* (полюса), у второй – с ускорением точки *М* при ее вращательном движении вокруг полюса.

Если траектория движения точки *М* известна, то и в левой части последней формулы можно разложить ускорение на касательную и нормальную составляющие:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_M^{\tau} + \overline{a}_M^{n}.$$

---

**Пример 1.**

Центр колеса перемещается со скоростью $v$ = 1 м/с, ускорением $a$ = 2 м/с$^2$, радиус колеса $R$ = 0,2 м (рисунок 2.23).

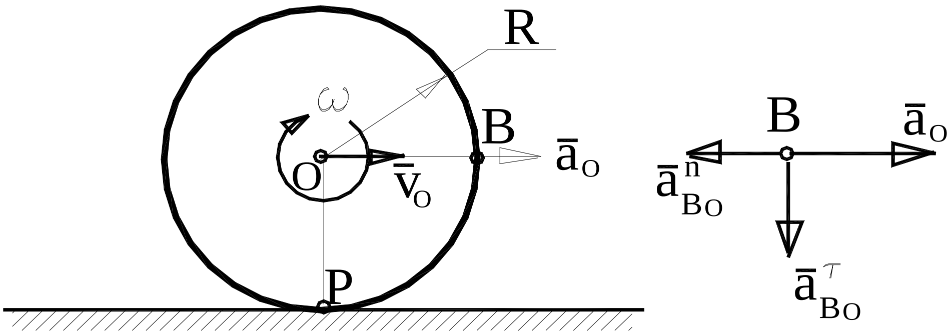



Рисунок 2.23 – К определению ускорений точек колеса

Найти ускорения точек *B* и *P*.

Принимаем центр колеса *O* за полюс – для него известны скорость и ускорение. Мгновенная угловая скорость относительно *P* (мгновенный центр скоростей) $\omega = v/R$, и поскольку $R$ = const, то угловое ускорение

$$\varepsilon = dv/Rdt = a/R.$$

Это справедливо, поскольку точка *O* – центр колеса – движется прямолинейно.

Для точки *B*:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_O + \bar{a}^\tau_{BO} + \bar{a}^n_{BO}. \qquad (2.29)$$

Величина первого слагаемого известна: $a_O$ = 2 м/с; второго $a^\tau_{BO}$ = R·ε = $a_O$ = 2 м/с; третьего $a^n_{BO} = BO\cdot\omega^2 = R\cdot\omega^2 = v_O^2/R$ = 5 м/с$^2$.

Определимся теперь с направлениями этих составляющих ускорения (см. схему справа на рисунке 2.23): $a_0$ направлено вправо – из условия.

Второе слагаемое направлено перпендикулярно радиусу *BO* (вниз на рисунке 2.23).

Третье – влево, к центру колеса.

В итоге величина ускорения:

$$a_B = \sqrt{(a_0 - a^n_{BO})^2 + (a^\tau_{BO})^2} = \sqrt{9+4} \approx 3{,}6 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Для определения ускорения точки Р можно записать векторное равенство, аналогичное (а), после анализа которого найдем

$$a_P = a_P{}^n = v^2/R = 5 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

и это ускорение направлено от точки *P* к точке *O*.

**Пример 2.**

По неподвижной шестерне радиусом $r_1$ = 0,3 м катится без проскальзывания шестерня 2 радиусом $r_2$ = 0,2 м с помощью кривошипа *OA* (рисунок 2.24). Кривошип вращается вокруг точки *O* против хода часовой стрелки с угловой скоростью $\omega = 1\ c^{-1}$ и угловым ускорением $\varepsilon = -4\ c^{-2}$. Найти в данный момент времени ускорение точки D.

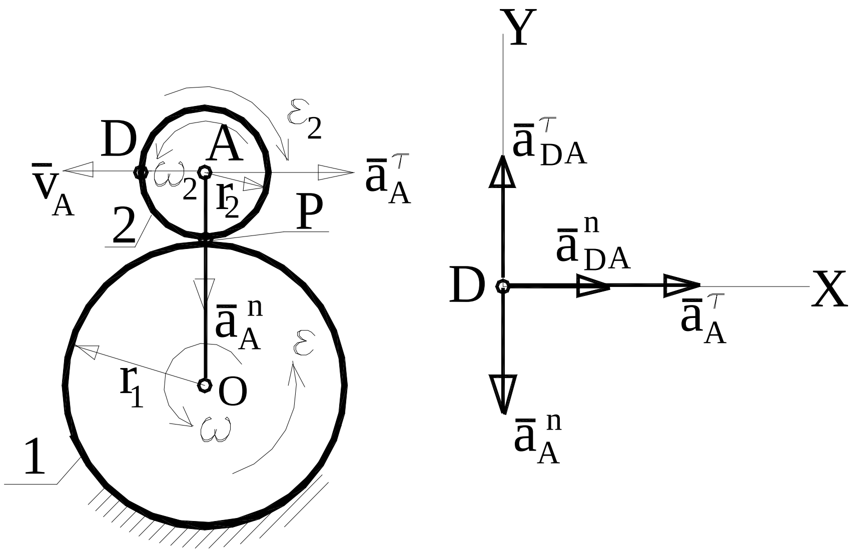



Рисунок 2.24 – Задача о шестеренках

Поскольку для точки А скорость и ускорение ее легко определяются, ее принимаем за полюс. Тогда

$$v_A = (r_1 + r_2)\cdot\omega = 0{,}5\ м/с;$$

$$a_A^\tau = (r_1 + r_2)\cdot\varepsilon = -2 м/c^2;\ a_A^n = (r_1 + r_2)\cdot\omega^2 = 0{,}5 м/c^2.$$

Поскольку угловое ускорение кривошипа отрицательно при положительном значении угловой скорости, то его вращение замедленное. Так как точка касания *P* является мгновенным центром скоростей для шестерни 2, то

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = 2{,}5c^{-1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{2}{r_2}\frac{dv_A}{dt} = \frac{a_A^\tau}{r_2} = -10c^{-2}.$$

Поскольку знаки $\omega_2$ и $\varepsilon_2$ разные, вращение шестерни 2 замедленное.

Для точки *D* (схема показано справа на рисунке 2.24):

$$\bar{a}_D = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{DA}^\tau + \bar{a}_{DA}^n, \qquad DA = r_2;$$

$$a_{DA}^\tau = r_2\varepsilon_2 = -2 м/c^2;\ a_{DA}^n = r_2\omega_2^2 = 1{,}25 м/c^2.$$

Проецируя выражение для $\bar{a}_D$ на ось *x*, находим:

$$a_{Dx} = \left|a_A^\tau\right| + a_{DA}^n = \left|-2\right| + 1{,}25 = 3{,}25 м/c^2.$$

Проецируя его на ось у, получим:

$$\left|a_{Dy}\right| = \left|a_{DA}^\tau\right| - a_A^n = 2 - 0{,}5 = 1{,}5\ \ м/c^2.$$

Полное ускорение по величине равно:

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = \sqrt{3,25^2 + 1,5^2} \approx 3,58\left(м / с\right).$$

## 2.4 Движение твердого тела вокруг неподвижной точки и движение свободного твердого тела

### 2.4.1 Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку

Примером движения тела с одной неподвижной точкой является вращение юлы (волчка), когда точка опоры неподвижна.

Для определения параметров, характеризующих положение твердого тела, вводим трехгранник *Oxyz*, жестко связанный с телом (рисунок 2.25). Точка *O* – неподвижная, и она одновременно является началом системы неподвижных координат $Ox_1y_1z_1$.

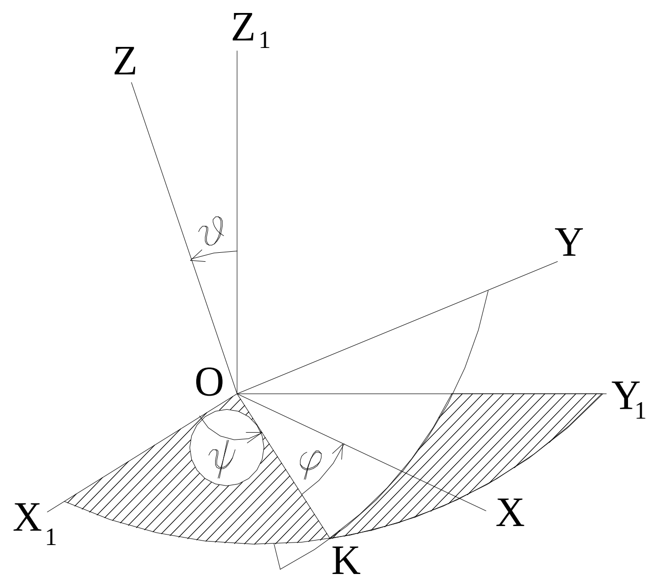



Рисунок 2.25 – Углы, определяющие положение тела

Линия *OK* пересечения плоскостей *Oxy* и $Ox_1y_1$ называется линией узлов.

Положение тела полностью определяется углами:

$$\varphi = KOX, \;\; \psi = X_1OK, \;\; \vartheta = Z_1OZ.$$

Это углы Эйлера: $\varphi$ – угол собственного вращения, $\psi$ – угол прецессии, $\vartheta$ – угол нутации.

Положение тела будет полностью определено, если известны зависимости

$$\varphi = f_1(t),\ \psi = f_2(t),\ \vartheta = f_3(t). \qquad (2.30)$$

Эти зависимости и являются уравнениями движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Таким образом, тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, имеет три степени свободы.

Изменение угла $\varphi$ приводит во вращение тело вокруг оси $Oz$ (собственное вращение) с угловой скоростью

$$\omega_1 = d\varphi/dt.$$

При изменении угла $\psi$ происходит вращение вокруг оси $Oz_1$; угловая скорость этого вращения

$$\omega_2 = d\psi/dt.$$

При изменении $\vartheta$ происходит вращение вокруг линии узлов $OK$ (нутация); угловая скорость этого вращения

$$\omega_3 = d\vartheta/dt.$$

Векторы угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$, $\boldsymbol{\omega}_3$ направлены соответственно вдоль осей $Oz$, $Oz_1$, $OK$ (рисунок 2.26). В общем случае все три угла со временем меняются, поэтому тело вращается с некоторой угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, равной геометрической сумме

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3.$$

Поскольку составляющие справа изменяются, то и слева величина угловой скорости изменяется, и поэтому она носит название мгновенной угловой скорости тела, а соответствующая ось $OP$, вдоль которой направлен ее вектор, – мгновенной оси вращения. Она в общем случае меняет как направление в пространстве, так и положение внутри тела, проходя все время через неподвижную точку $O$.

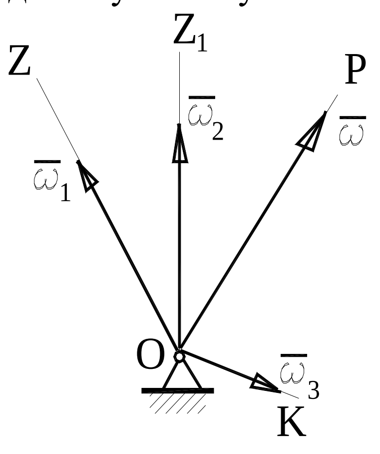



Рисунок 2.26 – Сложение угловых скоростей

В итоге движение твердого тела вокруг неподвижной точки слагается из серии последовательных элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту точку.

Вектор

$$\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt,$$

характеризующий изменение угловой скорости по направлению и по величине, называется мгновенным угловым ускорением.

Вектор угловой скорости со временем меняется, и его конец описывает в пространстве некоторую траекторию – годограф (рисунок 2.27).

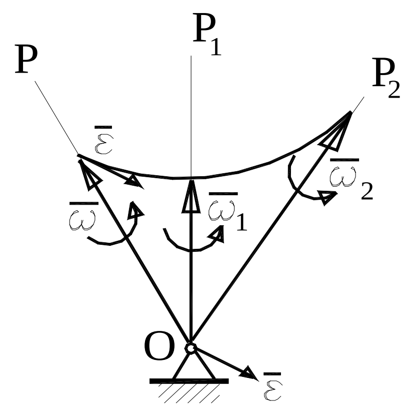



Рисунок 2.27 – Сложение угловых ускорений

Скорость движения конца вектора $\boldsymbol{\omega}$ вдоль этой траектории и есть угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$. Оно направлено вдоль касательной к этой траектории. Таким образом, в отличие от вращения тела вокруг неподвижной оси, в этом случае направления угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ не совпадают.

### 2.4.2 Общий случай движения свободного твердого тела

Движение АТТ полностью определится, если задать движение какой-либо его точки *A*, принятой за полюс, и положение «вмороженной в тело» системы координат:

$$x_{1A} = f_1(t),\ \ y_{1A} = f_2\,(t),\ \ z_{1A} = f_3\,(t),$$
$$\varphi = f_4\,(t),\quad \psi = f_5\,(t),\quad \vartheta = f_6\,(t). \tag{2.31}$$

Первые три соотношения определяют движение полюса, вторые три – вращение тела вокруг этого полюса. Таким образом, в самом общем случае свободно движущееся тело твердое может иметь максимум шесть степеней свободы.

В общем случае движение твердого тела можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как произвольно выбранный полюс со скоростью $\boldsymbol{v}_A$, и из серии элементарных поворотов с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через полюс *A*.

Основными кинематическими характеристиками такого движения являются скорость $\boldsymbol{v}_A$ и ускорение $\boldsymbol{a}_A$ полюса, определяющие поступательное движение, и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$, определяющие вращение вокруг этого полюса.

Можно отметить, что приняв другую точку В за полюс, получим в общем случае $\boldsymbol{v}_A \neq \boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{a}_A \neq \boldsymbol{a}_B$. Что касается характеристик вращательной составляющей движения, то они не меняются – так же, как и в случае плоского движения.

В частном случае плоскопараллельного движения АТТ векторы угловой скорости и углового ускорения всегда перпендикулярны плоскости движения. Достаточно очевидно, что скорость любой точки *M*

$$\overline{v}_M = \overline{v}_A + \overline{v}_{MA} = \overline{v}_A + (\overline{\omega} \times A\overline{M}),$$

а ускорение

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA},$$

где второе слагаемое определяется по соотношению вида (2.31).

## 2.5 Сложное движение точки

### 2.5.1 Относительное, переносное и абсолютное движения

В ряде задач механики целесообразно рассматривать движение точки в двух системах координат одновременно. Одна из них считается неподвижной (условно неподвижной), а вторая определенным образом движется относительно первой. При такой постановке движение точки (или тела) называют сложным, или составным.

Много задач при таком подходе упрощается. Если объект движется, например, внутри транспортного средства (внутри вагона, самолета и т.п.), то можно разложить движение на два: одно связано с движением объекта по отношению к транспортному средству, а второе с движением самого этого средства по отношению к неподвижной внешней местности. Такой подход делает описание и исследование такого движения намного проще.

Пусть точка *M* движется в системе *Oxyz,* которая сама движется по отношению к системе $O_1x_1y_1z_1$ (рисунок 2.28).

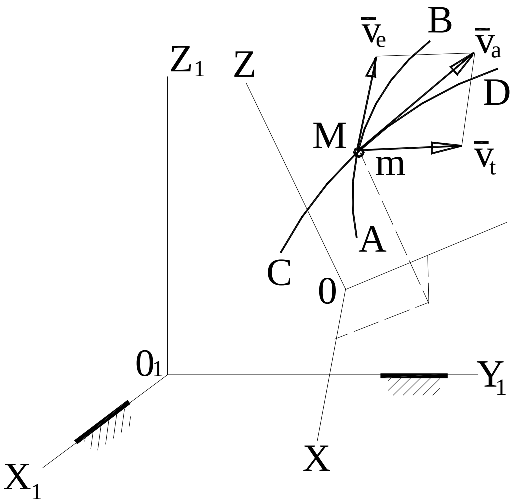



Рисунок 2.28 – К определению абсолютного, переносного

1. Движение точки $M$ по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$ называется относительным.

Траектория $AB$, описываемая точкой в относительном движении, называется относительной.

Скорость и ускорение точки в этом движении называются относительными и обозначаются индексом $r$.

2. Движение, совершаемое системой $Oxyz$ (и всеми связанными с ней точками пространства) по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для точки $M$ переносным движением.

Скорость той точки $m$, неизменно связанной с подвижными осями $Oxyz$, с которой совпадает в данный момент точка $M$, относительно $O_1x_1y_1z_1$ называется переносной скоростью, а ускорение – переносным ускорением, и обозначаются индексом е:

$$\overline{v}_e = \overline{v}_m, \overline{a}_e = \overline{a}_m.$$

3. Движение, которое совершает точка $M$ по отношению к неподвижной системе координат $O_1x_1y_1z_1$, называется абсолютным, или сложным.

Траектория $CD$ этого движения называется абсолютной траекторией, скорость – абсолютной скоростью, ускорение абсолютным ускорением, и все соответствующие величины обозначаются индексом $a$.

### 2.5.2 Теорема о сложении скоростей

Пусть за время $\Delta t = t_1 - t$ точка $M$ совершит некоторое относительное перемещение $MM^{/}$ (рисунок 2.29). За это же время сама кривая (траектория) из положения $AB$ перейдет в новое – $A_1B_1$. Точка $m$ кривой $AB$, совпадавшая с точкой $M$ в момент времени $t$, совершает переносное движение $m\overline{m}_1 = M\overline{m}_1$. В итоге точка *M* переходит в положение $M_1$, т.е. ее абсолютное перемещение будет $MM_1$.

Из векторного треугольника $Mm_1M_1$ следует

$$\overline{MM_1} = \overline{Mm_1} + \overline{m_1M_1}.$$

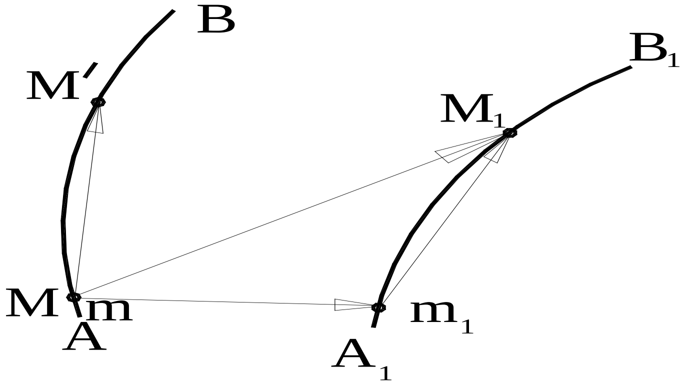



Рисунок 2.29 – Схема к теореме о сложении скоростей

Деля обе части этого равенства на $\Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим слева значение мгновенной абсолютной скорости, а справа – сумму относительной (по траектории $A_1B_1$) и переносной скоростей движения точки *m*:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_e.$$

Последнее слагаемое есть следствие движения траектории *AB* и перехода ее в положение $A_1B_1$.

---

Направлены векторы скоростей по касательным к соответствующим траекториям. Это выливается в **формулировку теоремы: При сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.**

---

Речь идет о суммировании векторных величин, поэтому в данной формулировке неслучайно выделено слово «геометрической».

**Пример 1.**

Точка *M* движется вдоль отрезка прямой *OA* с постоянной скоростью *u*, а прямая вращается в плоскости чертежа вокруг точки *O* с постоянной угловой скоростью ω. Найти скорость точки в зависимости от расстояния *OM* (рисунок 2.30).

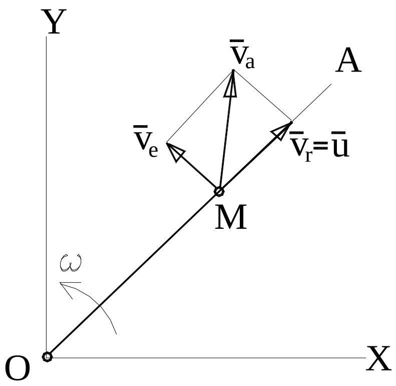



Рисунок 2.30 – Схема к задаче (пример 1)

Движение точки *M* вдоль *OA* является относительным, и скорость этого движения $v_r = u$ известна. Переносным является движение точки, совпадающей в данный момент времени с точкой *M* и лежащей на прямой *OA*. Скорость этого движения $v_e$ определяется формулой $v_e = \omega r$, где $r = OM$. Направления относительной и переносной скоростей взаимно перпендикулярны, поэтому величина абсолютной скорости

$$v_a = \sqrt{u^2 + \omega^2 r^2}.$$

**Пример 2.**

Кривошип *OA* длиной $r$ вращается с угловой скоростью ω. Длина шатуна $AB = b$ (рисунок 2.31). Для данного угла φ найти скорость ползуна *B* относительно кривошипа *OA* и его абсолютную скорость.

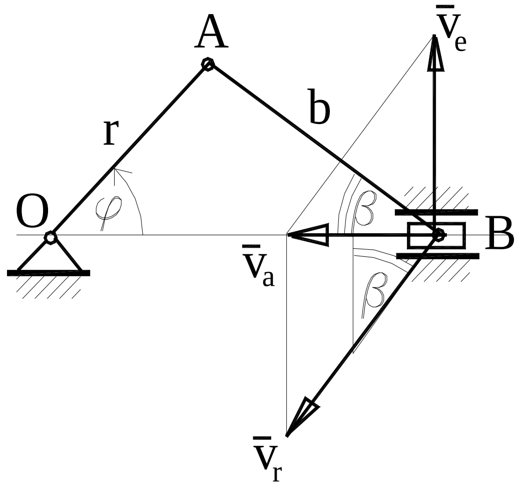



Рисунок 2.31 – *OA* – кривошип, *AB* – шатун, *B* – ползун

Относительное движение шатуна *AB* по отношению к кривошипу *OA* – это вращение вокруг шарнира *A*, и относительная скорость точки *B* направлена по нормали к *AB*. Абсолютная скорость точки *B* направлена вдоль *OB*.

Переносным для точки *B* является движение кривошипа *OA*. Представим, что *OAB* – жесткий треугольник, вращающийся вместе с кривошипом вокруг оси *O* с угловой скоростью ω. Тогда скорость точки *B* этого треугольника, совпадающей с точкой *B* шатуна *AB*, будет переносной скоростью точки *B* шатуна и направлена перпендикулярно *OB*:

$$v_e = \omega \cdot OB = \omega(r\cos\phi + l\cos\beta).$$

Построив из векторов $\boldsymbol{v}_{\text{e}}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{r}}$ параллелограмм скоростей, в котором диагональю является абсолютная скорость $\boldsymbol{v}_{\text{a}}$, найдем

$$v_r = v_e / \cos\beta = \omega(r\frac{\cos\phi}{\cos\beta} + l)\,.$$

Для получения зависимости $v_{\text{r}}(\varphi)$ исключим угол β. Заметим, что *b* sinβ = *r* sin φ, и

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\phi}; \quad v_r = \omega b(1 + \frac{r\cos\phi}{\sqrt{b^2 - r^2\sin^2\phi}}).$$

После этого можно получить

$$v_a = v_r \cdot \sin\beta.$$

Учитывая, что $\sin\beta = (r\sin\varphi)/b$, получим

$$v_a = (v_r r\sin\varphi)/b.$$

Если $r = b$, то

$$v_{\text{r}} = 2\,\omega \cdot b, \quad v_a = 2\omega b\,\sin\varphi.$$

### 2.5.3 Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Абсолютное ускорение точки

$$\overline{a}_a = \frac{d\overline{v}_a}{dt} = \frac{d\overline{v}_r}{dt} + \frac{d\overline{v}_e}{dt}.$$

Производные справа определяют изменение каждого из векторов при абсолютном движении. Эти изменения слагаются из изменений при относительном и переносном движениях. Т.е. если отмечать изменения векторов $\overline{v}_r$ и $\overline{v}_e$ при относительном движении индексом 1, а при переносном – индексом 2, то

$$\overline{a}_a = \frac{d\overline{v}_{r1}}{dt} + \frac{d\overline{v}_{r2}}{dt} + \frac{d\overline{v}_{e1}}{dt} + \frac{d\overline{v}_{e2}}{dt}. \tag{2.32}$$

По определению относительное ускорение характеризует изменение относительной скорости только при относительном движении, т.е. движение осей *Oxyz* (переносное) при этом во внимание не принимается.

Поэтому

$$\bar{a}_r = \frac{d\bar{v}_{r1}}{dt}.$$

В свою очередь, переносное ускорение характеризует изменение переносной скорости только при переносном движении, т.к. $\bar{a}_e = \bar{a}_m$, где m – точка, жестко связанная с осями *Oxyz*, и получает ускорение только при движении вместе с ними. Поэтому

$$\bar{a}_e = \frac{d\bar{v}_{e2}}{dt}.$$

В итоге

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \frac{d\bar{v}_{r2}}{dt} + \frac{d\bar{v}_{e1}}{dt}. \tag{2.33}$$

Обозначим

$$\bar{a}_{kor} = \frac{d\bar{v}_{r2}}{dt} + \frac{d\bar{v}_{e1}}{dt} - \tag{2.34}$$

эта величина характеризует изменение относительной скорости точки при переносном движении и переносной скорости при ее относительном движении и называется поворотным, или **кориолисовым,** ускорением точки. Тогда

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_{kor}. \tag{2.35}$$

---

Это не что иное, как теорема Кориолиса – **При сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений – относительного, переносного и поворотного (кориолисова).**

---

Можно показать, что кориолисово ускорение определяется зависимостью

$$\bar{a}_{kor} = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}).$$

Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости на относительную скорость точки.

При поступательном переносном движении угловая скорость равна нулю, и тогда $\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e$.

При поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений, как в обычном случае по теореме о сложении скоростей.

Кориолисово ускорение обращается в ноль в случаях:

1. Когда переносное движение является поступательным (переносная угловая скорость равна нулю).

2. Когда равна нулю относительная скорость, т.е. точка «привязана» к в подвижной системе координат.

3. Когда вектор скорости относительного движения $\overline{v}_r$ параллелен оси переносного вращения.

В качестве примера рассмотрим движение материальной точки по земному меридиану с севера на юг с постоянной относительной скоростью $u$ (рисунок 2.32).

Определим модуль и направление кориолисова ускорения, когда точка находится на широте $\beta$.

Угол, который составляет вектор скорости $\overline{u}$ с осью вращению, равен $\beta$. Поэтому ускорение Кориолиса равно величине

$$a_{\text{kor}} = 2 \cdot \omega \cdot u \cdot \sin \beta,$$

где ω – скорость вращения Земли.

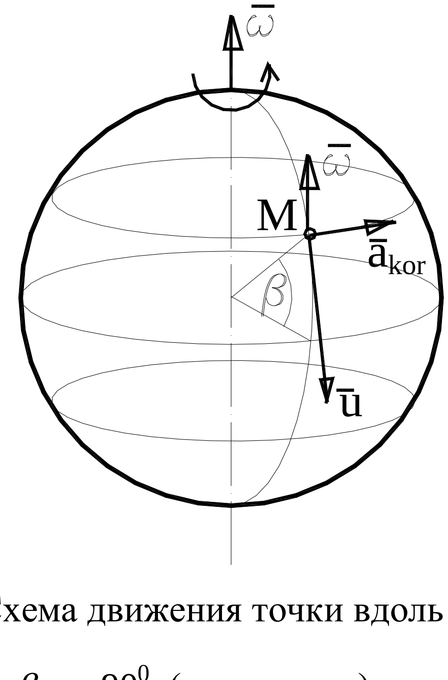



Рисунок 2.32 – Схема движения точки вдоль меридиана

Очевидно, что при $\beta$ = $90^0$ (на полюсе) кориолисово ускорение максимально, на экваторе, при $\beta = 0$ оно равно нулю.

По определению векторного произведения кориолисово ускорение направлено на восток. По этой причине в северном полушарии у реки, текущей на север, всегда правый берег подмывается водой, и является обычно более крутым, чем левый. Интересно отметить, что для реки, текущей в северном полушарии на юг, тоже правый ее берег (определяемый относительно направления течения) будет сильнее подмыт водой. Это легко определить, приняв в схеме рисунка 2.35 другое направление скорости $\boldsymbol{u}$.

## 2.6 Сложное движение твердого тела

### 2.6.1 Сложение поступательных движений

Выше рассматривалось сложное движение материальной точки. Далее анализируется движение абсолютно твердого тела.

Движение тела называется сложным, если тело движется относительно подвижных осей $O_{xyz}$, а эти оси движутся по отношению к неподвижной системе $O_{1x1y1z1}$.

Основные кинематические характеристики движения тела – его поступательные и угловые скорости и ускорения. Далее рассматриваются только скорости.

Если в относительном движении для всех точек скорость одинакова (что и говорит о поступательном движении) и равна $\boldsymbol{v}_1$, а в переносном движении постоянна и равна $\mathbf{v}_2$, то абсолютная скорость любой точки будет $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, и абсолютное движение тела будет тоже поступательным. Нужно обратить внимание на то, что эти равенства записаны в векторной форме, то есть при суммировании имеется в виду **геометрическая** сумма.

Итак, при сложении двух поступательных движений со скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ результирующее движение тоже будет поступательным со скоростью $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$.

### 2.6.2 Сложение вращений вокруг двух параллельных осей

Пусть тело вращается с угловой скоростью $\omega_1$ вокруг оси *aa,* содержащей точку $A$, а эта ось вращается с угловой скоростью $\omega_2$ вокруг оси *bb*, содержащей точку $B$ (рисунок 2.33).

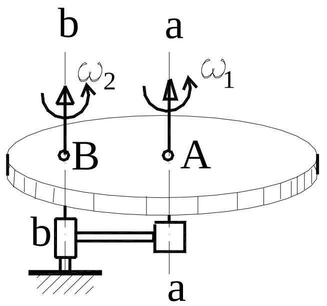



Рисунок 2.33 – Сложение параллельных вращений

Рассмотрим частные случаи.

1. **Вращения направлены в одну сторону**

Построим плоскость *S*, перпендикулярную осям; в этой плоскости находятся точки *A* и *B* (рисунок 2.34). Очевидно, что относительно точки *A* скорость точки *B* определяется обычным образом:

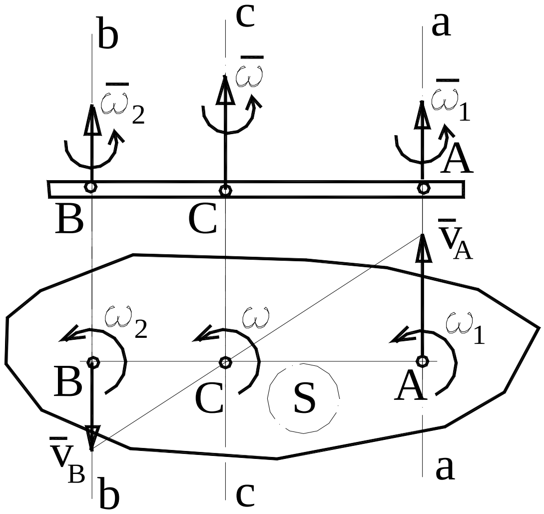



Рисунок 2.34 – Сложение однонаправленных параллельных вращений

$$v_B = \omega 2 \cdot AB.$$

Относительно точки B скорость точки A определяется аналогично

$$v_A = \omega_1 \cdot AB.$$

Очевидно, что эти скорости параллельны и направлены в разные стороны. Но тогда точка *C* – мгновенный центр скоростей, а ось *cc* – мгновенная ось вращения тела. Для угловой скорости вращения ω вокруг оси *cc* справедливо:

$$\omega = v_B/BC = v_A/AC.$$

Тогда на основании свойства пропорций (из равенства $a/A = =b/B$ следует, что $(a + b)/(A + B)$), можно записать

$$\omega = (v_A + v_B) / AB.$$

Это дает $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

Итак, если тело одновременно участвует в двух вращениях вокруг параллельных осей, направленных в одну сторону, результирующее движение будет вращением вокруг мгновенной оси, параллельной данным.

Т.к. ось *aa* перемещается, то ось мгновенного вращения *cc* описывает цилиндрическую поверхность.

2. **Вращения направлены в разные стороны**

Пусть для определенности $\omega_1 > \omega_2$; величины скоростей точек *A* и *B* определяются соотношениями (рисунок 2.35)

$$v_A = \omega_2 \cdot AB, \quad v_B = \omega_1 \cdot AB.$$

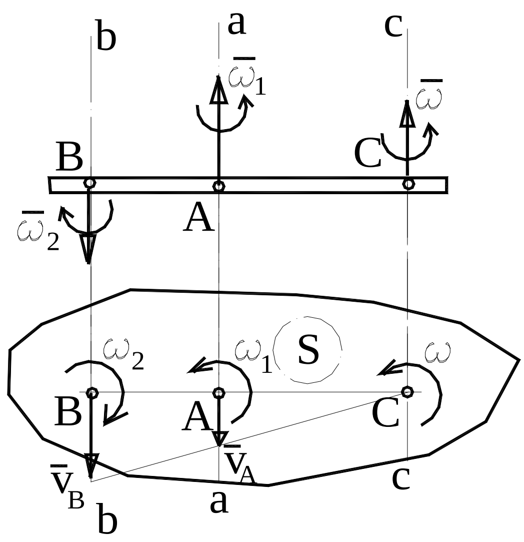



Рисунок 2.35 – Сложение разнонаправленных параллельных вращений

При этом скорости параллельны и направлены в одну сторону. Тогда центр вращения – в точке *C*, причем

$$\omega = v_B/BC = v_A/AC,$$

и

$$\omega = (v_B - v_A)/AB = \omega_1 - \omega_2.$$

Таким образом, в этом случае результирующее движение представляет собой мгновенное вращение вокруг оси *cc* со скоростью $\omega = \omega_1 - \omega_2$.

**3. Пара вращений**

В этом случае $\omega_1 = \omega_2$, и направлены эти вращения в разные стороны. Говорят, что $\omega_1$ и $\omega_2$ образуют пару угловых скоростей. При этом $v_A = v_B$, но это означает, что мгновенный центр скоростей находится на бесконечности и все точки тела в данный момент имеют одинаковые скорости

$$v = \omega_1 \cdot AB = \omega_2 \cdot AB.$$

Результирующее движение будет поступательным (мгновенно поступательным) со скоростью $\boldsymbol{v}$, направленной перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$.

Таким образом, пара вращений эквивалентна мгновенно поступательному движению со скоростью, равной моменту пары угловых скоростей этих вращений.

Примеры такого движения являют движения педали велосипеда, стеклоочистителя на больших автомобилях или автобусах, и т.д.

Верен и обратный вывод: поступательное движение твердого тела эквивалентно паре вращений, у которых момент угловых скоростей этих вращений равен поступательной скорости тела.

### 2.6.3 Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Пусть вокруг оси *aa* вращается тело, а сама эта ось вращается вокруг оси *bb*, пересекающейся с осью *aa* в точке *O* (рисунок 2.36).

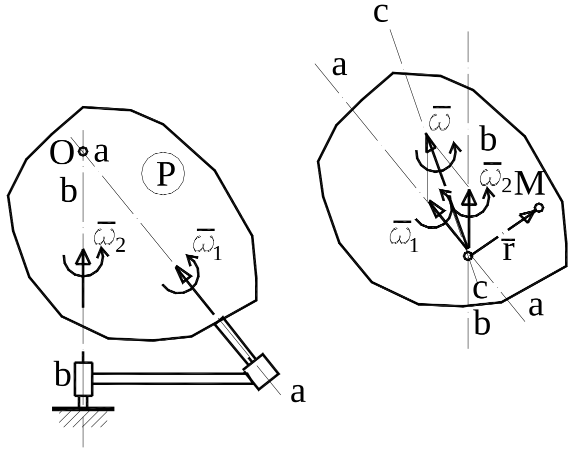



Рисунок 2.36 – Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

За счет вращения вокруг оси *bb* скорость

$$\overline{v}_r = \overline{\omega}_1 \times \overline{r},$$

за счет вращения вокруг оси *aa*

$$\overline{v}_e = \overline{\omega}_2 \times \overline{r},$$

тогда

$$\overline{v}_a = \overline{v}_e + \overline{v}_r = (\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2) \times \overline{r}.$$

В то же время результирующее движение должно быть мгновенным вращением вокруг оси, проходящей через точку *O* с некоторой угловой скоростью ω, так что

$$v_a = \omega \times r.$$

Поскольку *M* – любая точка, то эти равенства должны выполняться при любых $\boldsymbol{r}$, что означает $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

Итак, при сложении вращений вокруг пересекающихся осей результирующее движение будет вращением вокруг мгновенной оси, проходящей через ту же точку. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ определяется как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{\omega_1}$ и $\boldsymbol{\omega_2}$.

С течением времени мгновенная ось меняет свое положение, описывая коническую поверхность.

Этот результат можно обобщить в виде

$$\overline{\omega} = \sum \overline{\omega}_k$$

для случая вращений вокруг нескольких осей, пересекающихся в одной точке.

### 2.6.4 Сложение поступательного и вращательного движений. Винтовое движение

Пусть вокруг оси, проходящей через точку $A$ под углом $\alpha$ к горизонту, происходит вращательное относительное движение тела $P$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, а переносным будет поступательное движение со скоростью $\boldsymbol{v}$ (рисунок 2.37).

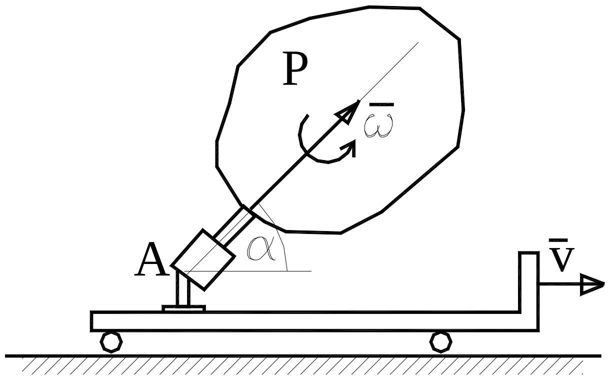



Рисунок 2.37 – Сложение поступательного и вращательного движения

В зависимости от величины угла $\alpha$ возможны три варианта.

1. $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{\omega}$ – векторы линейной скорости и угловой скорости взаимно перпендикулярны. Это случай плоскопараллельного движения, подробно рассмотренный выше. Если принять точку $A$ за полюс, то итоговое движение складывается из поступательного движения этого полюса со скоростью $\boldsymbol{v}_\mathbf{A} = \boldsymbol{v}$ и вращательного движения вокруг оси $Aa$.

Как показано выше, поступательное движение тела можно рассматривать как пару вращений, в данном случае вокруг осей, параллельных оси $Aa$. Подбирая расстояние $h$ между осями этих вращений таким, чтобы величина угловой скорости была равной скорости $\boldsymbol{\omega}$, а ось одного из вращений этой пары, противоположного заданному вращению вокруг оси $Aa$, совпадала с осью $Aa$, получим, что такое движение можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси $Pp$, параллельной $Aa$. Эта ось смещена от нее оси $Aa$ на расстояние $h$. Ось $Pp$ является осью мгновенного вращения, а точка $P$ – мгновенным центром скоростей для сечения тела S, перпендикулярного оси $Aa$.

2. $\boldsymbol{v} \,||\, \boldsymbol{\omega}$ – векторы линейной скорости и угловой скорости параллельны (рисунок 2.38).

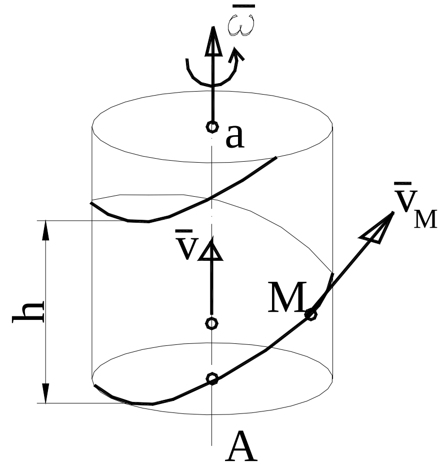



Рисунок 2.38 – Винтовое движение

В этом случае ось вращения *Aa* называется осью винта. Если векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ направлены в одну сторону, то это т.н. правый винт, иначе – левый. Шаг винта – расстояние, проходимое точкой тела на оси за время одного оборота:

$$h = 2 \cdot v \cdot \pi / \omega \,,$$

где ω – величина угловой скорости, *v* – поступательной.

При постоянном шаге любая точка *M* (не находящаяся на оси) описывает винтовую линию. Скорость ее

$$v_M = \sqrt{\omega^2 r^2 + v^2}.$$

Направлена скорость по касательной к траектории, в данном случае по касательной к винтовой линии. Если цилиндрическую поверхность, по которой движется точка M, развернуть, разрезав вдоль образующей, то винтовые линии обратятся в прямые линии, наклонные к основанию цилиндра под углом

$$\alpha = arctg(h / 2\pi r) = arctg(v / \omega r).$$

3. Угол между угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и поступательной скоростью $\boldsymbol{v}$ произволен и равен α.

В этом случае разложим вектор поступательной скорости на составляющие – вдоль $\boldsymbol{\omega}$ ($v^{/} = v \cdot \cos\alpha$) и перпендикулярно ей ($v^{//} = v \cdot \sin\alpha$). Тем самым движение тела сведется к сумме винтового и поступательного движений. Т.к. в общем случае $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\omega}$ и α все время меняются, движение тела можно рассматривать как серию мгновенных винтовых движений вокруг непрерывно меняющихся осей.

## Глава 3

# 3 ДИНАМИКА

## 3.1 Введение в динамику. Законы динамики

***Динамика*** *– раздел механики, изучающий движение тел под действием сил.*

В отличие от кинематики, при изучении движения тел в динамике принимаются во внимание как действующие на тело силы, так и инертность самих тел. Как силы, так и реакции связей в общем случае могут быть переменными. Все полученные в статике результаты для постоянных сил относятся и к переменным силам, так как условия постоянства сил ранее не оговаривались и не использовались.

Количественной мерой инертности является масса тела. В классической механике масса – величина скалярная, положительная и постоянная для данного тела.

Поскольку в общем случае движение тела зависит не только от массы, но и от его формы, на первом этапе рассматриваются материальные точки, т.е. точки с конечной массой.

При решении конкретных задач тело можно рассматривать как материальную точку, если не принимать во внимание вращательную часть движения. Так, движение планеты вокруг Солнца или снаряда на траектории можно рассматривать как движение материальной точки.

Поступательно движущееся тело всегда можно рассматривать как движение материальной точки с такой же массой.

**Законы динамика (Ньютона)**

**1. Закон инерции**

*Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.*

Системы отсчета, в которых справедлив этот закон, называются инерциальными.

Для практических задач такой системой можно считать систему координат (отсчета), жестко связанную с Землей.

**2. Основной закон динамики**

*Произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением действия силы.*

$$m\bar{a} = \bar{F} \quad \text{и} \quad ma = F. \qquad (3.1)$$

При действии нескольких сил одновременно их можно заменить равнодействующей, и тогда

$$m\overline{a} = \overline{R} \quad \text{или} \quad m\overline{a} = \sum_k \overline{F}_k. \qquad (3.2)$$

Этот же результат можно получить из закона независимости действия сил: *при одновременном действии на точку нескольких сил каждая из них сообщает точке такое ускорение, какое бы она сообщила, действуя одна.*

**3. Закон равенства действия и противодействия**

*Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположно направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки.*

Этот закон постоянно использовался нами и в статике. При взаимодействии двух материальных точек они, в соответствии с законами 2 и 3, будут двигаться с ускорениями, обратно пропорциональными их массам.

---

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что система двух взаимодействующих тел порождает две равные по величине силы, действующие вдоль одной прямой в разные стороны, но, **в отличие рассмотренного выше в статике случая равновесия не возникает**. Причина здесь в том, что в статике речь шла о системе таких сил, приложенных к одному твердому телу, здесь же эти силы приложены к разным телам.

---

**Основные задачи динамики точки:**

1) зная закон движения точки, найти действующую на нее силу;
2) зная действующую на точку силу, найти закон ее движения – это т.н. вторая, или основная, задача динамики.

**Системы единиц**

Для измерения всех механических величин достаточно ввести 3 независимых размерных величины. Обычно две из них – единица длины и единица времени. В качестве третьей в разных системах выступают единица массы или единица силы.

В системе СИ такими величинами являются единица массы килограмм (кг), единица длины метр (м), единица времени секунда (с).

Следует отличать размерность (для скорости это, например, L/T) от единицы измерения (м/с, км/ч и т.д.).

**Основные силы**

1. **Сила тяжести**

$$P = mg.$$

В зависимости от положения точки на Земле вес (и ускорение $g$) могут меняться, но $m$ = const.

2. **Сила трения**.

Для трения скольжения

$$F = f \cdot N,$$

где $f$ – коэффициент трения, $N$ – нормальная реакция.

3. **Сила тяготения** – это сила, с которой два материальных тела притягиваются друг к другу (закон всемирного тяготения Ньютона):

$$F = f \cdot m_1 m_2 / r^2,$$

где $m_1$, $m_2$ – массы тел, $r$ – расстояние между ними, $f$ – гравитационная постоянная:

$$f = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ (\text{м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2).$$

4. **Силы упругости**.

Для пружины

$$F = c \cdot \lambda,$$

где $c$ – коэффициент жесткости пружины, $\lambda$ – деформация (удлинение или сжатие) пружины. Это удлинение (сжатие) отсчитывается от положения равновесия, когда пружина находится в естественном ненапряженном состоянии.

5. **Сила вязкого трения** (по Ньютону):

$$R = \mu \cdot v,$$

где $\mu$ – коэффициент сопротивления, $v$ – скорость тела в вязкой среде.

6. **Сила аэро- (гидро-) динамического сопротивления**:

$$R = \frac{1}{2} c_x \rho S v^2,$$

где $\rho$ – плотность среды, $S$ – площадь миделя, $v$ – скорость потока, обтекающего тело, $c_x$ – безразмерный коэффициент, зависящий от формы тела и его ориентации.

Масса тела входит и в закон инерции, и в закон всемирного тяготения. С теоретической точки зрения это могут быть различные понятия. На практике можно использовать экспериментально установленный факт, что инертная и гравитационная массы эквивалентны (с относительной точностью эксперимента 1971 г. в $10^{-12}$).

Далее эти понятия не различаем и используем единый термин «масса».

## 3.2 Дифференциальные уравнения движения точки. Решение задач динамики точки

### 3.2.1 Основные соотношения

В прямоугольных декартовых координатах движение точки задается уравнениями:

$$x = f_1\,(t), \quad y = f_2\,(t), \quad z = f_3\,(t). \tag{3.3}$$

Задача динамики – по этим уравнениям найти действующую на точку силу или по известной силе (системе сил) найти уравнения (3.3).

Это можно сделать с помощью второго закона динамики.

Проектируя все силы $\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}, \ldots, \boldsymbol{F_n}$ на оси $x, y, z$ и соответствующие ускорения на эти же оси, получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_k F_{kx}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_k F_{ky}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum_k F_{kz}, \tag{3.4}$$

Или

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \;\; m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \;\; m\ddot{z} = \sum F_{kz}. \tag{3.5}$$

Это и есть дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах. В общем случае правые части этих уравнений могут быть функциями времени $t$, координат $x, y, z$, скоростей $\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}$.

В осях естественного трехгранника проектируем обе части равенства $m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$ на оси Mτ – касательную к траектории точки, Mn – главную нормаль, Mb – бинормаль. Учтем, что

$$a_\tau = dv/dt, \; a_n = v^2/\rho, \;\; a_b = 0.$$

Тогда

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau}, \; m\frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \;\; 0 = \sum F_{kb}. \tag{3.6}$$

Эти уравнения, где $v = ds/dt$, – уравнения движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника.

Если ускорение точки известно, то действующие силы или реакции связей определяются сразу по соотношению $m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$ . Если известен закон движения в какой-либо форме, то силы определяются по соотношениям (3.5) или (3.6).

### 3.2.2 Основная задача динамики точки при прямолинейном движении

Если при прямолинейном движении ось $Ox$ направлена вдоль траектории (это в рассматриваемом случае прямая), то движение точки опишется уравнением

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum F_{kx},\ \ или\ \ \ m\ddot{x}=\sum F_{kx}. \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) – дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки. Его иногда заменяют системой двух уравнений

$$m\frac{dv_x}{dt}=\sum F_{kx},\ \ \frac{dx}{dt}=v_x. \tag{3.8}$$

Когда нужно найти зависимость $v_x(x)$ (а не $v_x(t)$ ), уравнения (3.8) преобразуют к переменной $x$. В первом уравнении

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{dv_x}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v_x\cdot\frac{dv_x}{dx},$$

и тогда

$$mv_x\frac{dv_x}{dx}=\sum F_{kx},\ \ \frac{dx}{dt}=v_x. \tag{3.9}$$

Решение первой задачи динамики сводится к определению закона $x = x(t)$. Поскольку в общем случае

$$F_{kx} = F_{kx}(x, dx/dt, t),$$

то (3.8) принимает вид

$$m\ddot{x}=F(t,x,\dot{x}). \tag{3.10}$$

Общий вид решения после интегрирования будет

$$x = f(t, C_1, C_2), \tag{3.11}$$

где $C_1$ и $C_2$ – постоянные интегрирования. Для их определения используются начальные условия, т.е. положение и скорость точки в момент $t = 0$.

В случае прямолинейного движения это условия:

$$\text{при}\quad t = 0:\qquad x = x_0,\qquad v = v_0. \tag{3.12}$$

Определив с помощью (3.12) постоянные $C_1$, $C_2$, можно записать частное решение в виде

$$x = f(t, x_0, v_0). \tag{3.13}$$

### 3.2.3 Последовательность и примеры решения задач

При решении задач динамики точки рекомендуется следующая последовательность действий.

1. Составляется уравнение движения. Для этого, в случае прямолинейного движения:

- выбираются начало отсчета, а координатная ось, как правило, направляется в сторону движения;

- точка изображается в произвольном положении при $x > 0$ и $v_x > 0$ (последнее существенно, если силы зависят от скорости); показываются все силы;

- сумма проекций всех сил на координатную ось подставляется в правую часть уравнения движения. Переменные силы выражаются через те величины, от которых они зависят ($x$, $dx/dt$, $t$).

2. Интегрируются уравнения движения. Если действующие силы являются функциями одной из переменных – координаты $x$, времени $t$ или скорости $v$, то есть

$$F = F(x), \text{ или } F = F(t), \text{ или } F = F(v),$$

то можно использовать метод разделения переменных.

3. Определяются постоянные интегрирования – это можно делать сразу после каждого интегрирования.

4. Находятся искомые величины и анализируются полученные результаты.

**Пример 1.**

Сила зависит от времени $F = kt$, где $k = const$.

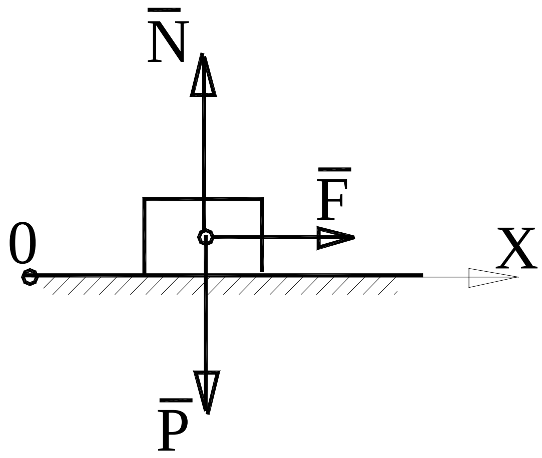



Рисунок 3.1 – Схема к примеру 1

Тело движется по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы $\overline{F}$ (рисунок 3.1). Уравнение движения в проекции на ось $x$:

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = kt \Rightarrow \frac{P}{g}v = \frac{kt^2}{2} + C_1.$$

Если в начальный момент времени тело было в покое ($t$ = 0, $v$ = 0), то $C_1$ = 0. Далее

$$\frac{P}{g}\frac{dx}{dt} = \frac{kt^2}{2}; \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{kg}{2P}t^2; \qquad x = \frac{kg}{2P}\frac{t^3}{3} + C_2.$$

Если в начальный момент времени $x$ = 0, то окончательно $x = kg/6P \cdot t^3$.

**Пример 2.**

Сила зависит от расстояния.

Какое время нужно телу массой $m$ для прохождения вдоль хорды Земли по каналу АВ (рисунок 3.2)? При этом считать, что сила $F$ притяжения к центру Земли пропорциональна расстоянию $r$ от тела до центра:

$$F = mgr/R,$$

тогда на поверхности это будет обычная сила тяжести. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Пусть начало отсчета – в точке О, ось $x$ направлена вправо. Длина АВ пусть $2a$. Тогда начальные условия:

$$t = 0: \quad x = a, \quad v = 0.$$

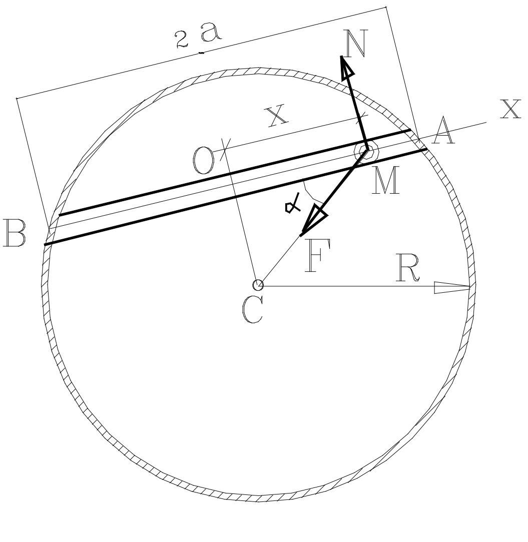



Рисунок 3.2 – Схема к задаче о движении материальной точки по каналу

Вдоль $x$ действует сила

$$-F\cos\alpha = -mgr\cos\alpha/R = -mgx/R.$$

$$m\frac{dv}{dt} = -m\frac{gx}{R}; \qquad v\frac{dv}{dx} = -k^2 x; \ (k^2 = \frac{g}{R}) \qquad vdv = -k^2 xdx;$$

Интегрируя последнее равенство, получим $\frac{v^2}{2} = -\frac{k^2x^2}{2} + C_1$.

Из начальных условий находим

$$C_1 = \frac{k^2a^2}{2};$$

тогда скорость определяется соотношением

$$v = \pm k\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Если для показанного на рисунке 3.2 положения скорость точки М направлена к точке О, то в этом выражении принимается знак минус.

$$\frac{dx}{dt} = -k\sqrt{a^2 - x^2}; \qquad \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -kdt;$$

и после интегрирования получаем

$$kt = \arccos(x/a) + C_2.$$

Учет начального условия (при $t = 0$ $x = 0$) дает $C_2 = 0$, и тогда

$$x = a \cdot \cos kt -$$

это закон гармонических колебаний с амплитудой $a$. Период этих колебаний $t_1$ определится из соотношения $kt_1 = 2\pi$, тогда $t_1 = 2\pi/k$, а время прохождения вдоль канала – половина периода $t_2 = \pi/k = \pi\sqrt{R/g}$. Это время составляет 42 мин 11 с и, что следует из полученных зависимостей, не зависит от длины хорды $a$. Таким образом, при движении под действием сил тяжести по любой хорде, соединяющей две точки поверхности Земли, время прохождения от одной точки до другой всегда одно и то же. Максимальная скорость такого движения – при $x = 0$, $v_{max} = ka$ – эта величина уже зависит от $a$. Если, например, туннель такого вида прорыть между Москвой и Санкт-Петербургом, то максимальная скорость будет ($2a$ = =637 км) 1422 км/час.

**Пример 3**

Сила зависит от скорости. Это типичный случай вязкого сопротивления.

Пусть лодку массой 40 кг толкнули со скоростью $v_0$ = 0,5 м/с (рисунок 3.3). Если сила сопротивления воды $R = \mu v$, а $\mu$ = 9,1 кг/с, то через какое время скорость станет вдвое меньше начальной и какой при этом будет пройден путь? Какой путь пройдет лодка до полной остановки?

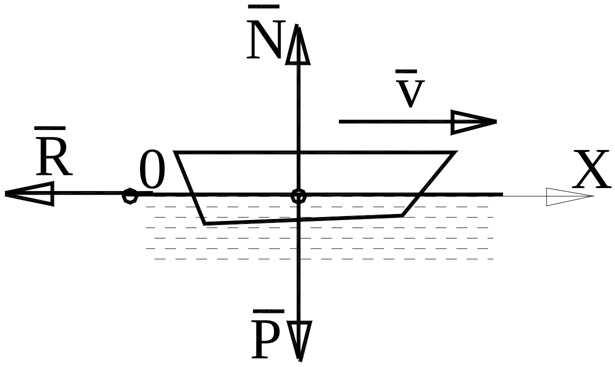



Рисунок 3.3 – Схема к задаче о движении лодки

В начальный момент $t = 0$: $x = 0, v = v_0$.

Сила вдоль $x$ – это величина $-R = -\mu v$.

Уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu v \Rightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \ln\frac{v}{v_0} = -\frac{\mu}{m}t,$$

$$t = \frac{m}{\mu}\ln\frac{v_0}{v}.$$

Если $v = v_0/2$, то $t = \dfrac{m}{\mu}\ln 2 = \dfrac{m}{\mu}0,61 \approx 3\ c$.

Чтобы найти пройденный лодкой путь, построим уравнение движения как зависимость $v(x)$; тогда

$$mv\frac{dv}{dx} = -\mu v \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = -\frac{\mu}{m}\int_0^x dx \Rightarrow v - v_0 = -\frac{\mu}{m}x \Rightarrow$$

$$x = \frac{m}{\mu}(v_0 - v) = \frac{m}{\mu}\frac{v_0}{2} \approx 1{,}1 \text{ м}.$$

До полной остановки, когда $v = 0$, $x = \dfrac{mv_0}{\mu} \approx 2{,}2$ м. Если теперь найти время до полной остановки, то $t \to \infty$.

### 3.2.4 Решение основной задачи динамики точки при криволинейном движении

Если решение строится в декартовых координатах, то начальные условия для (3.4) имеют вид:

$$\text{при} \quad t = 0: \; x = x_0, \; y = y_0, \; z = z_0,$$
$$v_x = v_{x0}, v_y = v_{y0}, v_z = v_{z0}. \qquad (3.14)$$

После интегрирования (3.4) нужно определить 6 постоянных интегрирования с помощью начальных условий (3.14).

**Пример 1.**

Описать движение тела, брошенного под углом α к горизонтальной плоскости со скоростью $v_0$, рассматривая его как материальную точку с массой m (рисунок 3.4).

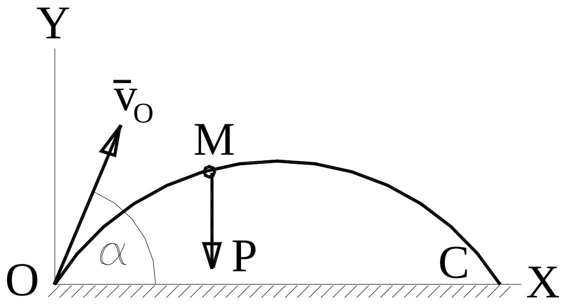



Рисунок 3.4 – К задаче о движении тела, брошенного под углом α к горизонту

Пренебрегаем сопротивлением воздуха, считаем силу тяжести P постоянной, поверхность Земли считаем плоской (т.е. считаем, что дальность полета много меньше радиуса Земли).

На точку M в произвольном ее положении на траектории действует единственная сила – сила тяжести P, направленная вертикально вниз. Проекции этой силы на оси системы координат (ось Z не показана, движение точки происходит в плоскости XY) будут

$$P_x = 0, P_z = 0, P_y = -P = -mg.$$

Подставим эти выражения в уравнения (3.4) с учетом того, что $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}$ и т.д., после сокращения на m получим

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = -g, \quad \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

После умножения уравнений на $dt$ и интегрирования найдем

$$v_x = C_1, \; v_y = -gt + C_2, \; v_z = C_3.$$

Начальные условия в задаче имеют вид:

При $t = 0$ точка M находится в начале координат:

$$x = 0, \; y = 0, \; z = 0,$$

а составляющие скорости вдоль координатных осей

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = v_0 \sin\alpha, \quad v_z = 0.$$

Подчиняя этим условиям полученные выше компоненты скоростей, получим

$$C_1 = v_0 \cos\alpha, \quad C_2 = v_0 \sin\alpha, \quad C_3 = 0.$$

Подставляя эти значения в выражения для скоростей и заменяя $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ и т.д., получим уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$x = v_0 t \cos\alpha + C_4, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} + C_5, \quad z = C_6.$$

Подстановка начальных данных дает $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, и окончательно уравнения движения точки М принимают вид

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad z = 0.$$

В частности, из последнего уравнения следует, что движение точки М происходит в плоскости XOY.

### 3.3 Общие теоремы динамики точки

Общие теоремы устанавливают наглядные зависимости между динамическими характеристиками движения тел. Кроме того, с помощью таких теорем осуществляются общие для многих задач операции интегрирования, что упрощает процесс их решения.

#### 3.3.1 Количество движения точки. Импульс силы

***Количеством движения материальной точки*** *называется векторная величина, равная произведению массы точки на ее скорость* $m\bar{v}$.

Размерность этой величины кг·м/с, а направлен вектор количества движения так же, как и скорость, т.е. по касательной к траектории движения точки. Это следует из того, в частности, что умножение вектора на скаляр может изменить только длину вектора, но не меняет его направления.

***Элементарным импульсом силы*** *называется векторная величина* $d\overline{S}$*, равная произведению силы* $\overline{F}$ *на элементарный промежуток времени* $dt$*:*

$$d\overline{S} = \overline{F}dt.$$

*Направлен импульс силы вдоль линии действия силы.*

Импульс силы за конечный промежуток времени $dt_1$ определяется интегралом

$$\overline{S} = \int_0^{t_1} \overline{F} \cdot dt.$$

Если сила постоянна по модулю и направлению, то $\overline{S} = \overline{F}t_1$. Размерность импульса силы такая же, как у количества движения:

кг·м/с = Н·с

### 3.3.2 Теорема об изменении количества движения точки

Для точки с постоянной массой основной закон динамики можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(m\overline{v}) = \sum \overline{F}_k \tag{3.15}$$

*производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на точку сил.*

Пусть точка в момент времени $t = 0$ имеет скорость $v_0$, а в момент $t_1$ – скорость $v_1$. Умножим обе части равенства (3.15) на $dt$ и проинтегрируем в пределах $v_0$, $v_1$ и 0, $t_1$. Тогда

$$m\overline{v}_1 - m\overline{v}_0 = \sum \int_0^{t_1} \overline{F}_k dt = \sum \overline{S}_k. \tag{3.16}$$

Это означает, что *изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех сил, действующих на точку, за тот же промежуток времени.*

Соотношение (3.16) можно переписать в проекциях на оси координат:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx},\ mv_{1y} - mv_{0y} = \sum S_{ky},\ mv_{1z} - mv_{0z} = \sum S_{kz}. \tag{3.17}$$

Соотношения (3.16) и (3.17) позволяют решать следующие задачи:

1) оценивать импульс сил по изменению скорости;
2) по импульсу сил определять изменение скорости.

**Пример 1.**

Телу массой $m$, лежащему на горизонтальной шероховатой поверхности, сообщена горизонтальная скорость $v_0$ (рисунок 3.5). Если сила сопротивления (трения скольжения) постоянна, то через какое время $t_1$ тело остановится?

Применяя первое из уравнений (3.17), получим

$$m(v_0 – 0) = F \cdot t_1 \ (\text{Т.к. } F = const);$$

откуда $t_1 = mv_0/F$.

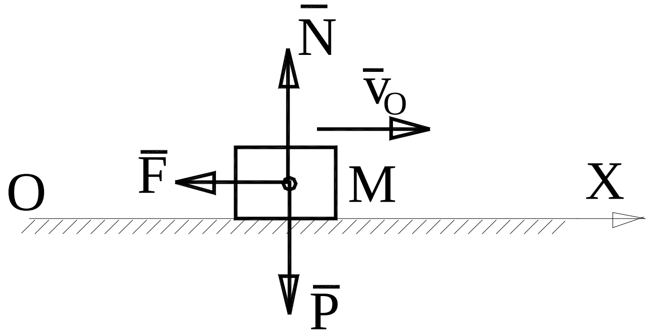



Рисунок 3.5 – К задаче о движении тела по шероховатой поверхности

### 3.3.3 Теорема об изменении момента количества движения точки (теорема моментов)

В качестве динамической характеристики движения точки часто выступает не вектор количества движения $m\boldsymbol{v}$, а его момент относительно некоторого центра или оси.

Моментом количества движения точки относительно некоторого центра О называется векторная величина $\boldsymbol{m}_O = \boldsymbol{m}_O(m\boldsymbol{v})$, определяемая равенством

$$\overline{m}_O = \overline{r} \times m\overline{v}, \tag{3.18}$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор точки относительно точки О (рисунок 3.6).

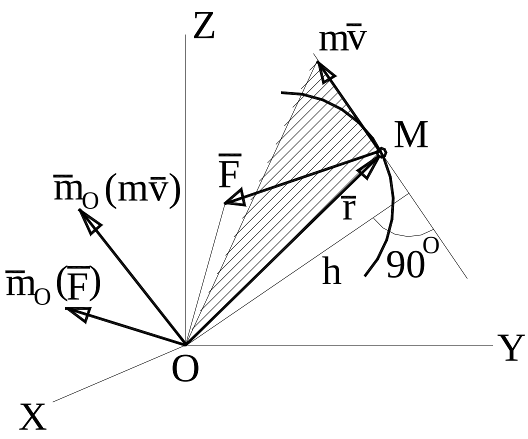


Рисунок 3.6 – К определению момента количества движения

Направление и величина $\boldsymbol{m}_O$ определяются правилами векторного произведения:

$$\left|\overline{m}_O\right| = mvh,$$

где $h$ – кратчайшее расстояние от точки O до линии вектора скорости (или $m\boldsymbol{v}$).

Момент количества движения точки относительно оси Oz равен проекции вектора $m_O$ на эту ось:

$$m_z = m_z(mv) = \left[\overline{m}_O\right]_z = \left|\overline{m}_O\right|\cos\gamma,$$

где $\gamma$ – угол между осью z и вектором $\boldsymbol{m}_O$.

Дифференцируя (3.18) по времени, получим:

$$\frac{d\overline{m}_O}{dt} = \left(\frac{d\overline{r}}{dt} \times m\overline{v}\right) + \left(\overline{r} \times m\frac{d\overline{v}}{dt}\right) = (\overline{v} \times m\overline{v}) + (\overline{r} \times m\overline{a}).$$

Первое слагаемое равно нулю по правилу векторного произведения, так как производная от радиуса вектора по определению есть скорость, следовательно, в первой скобке векторное произведение однонаправленных векторов равно нулю. Во втором величина $m\boldsymbol{a}$ = $\boldsymbol{F}$ (в случае действия нескольких сил $\overline{F} = \sum \overline{F}_k$ – сумма сил). Но произведение $(\overline{r} \times \overline{F})$ представляет собой момент силы относительно точки O, т.е. $\overline{m}_O(\overline{F})$.

Таким образом, доказана теорема моментов относительно центра:

$$\frac{d}{dt}\left[\overline{m}_O(m\overline{v})\right] = \overline{m}_O(\overline{F}), \tag{3.19}$$

Или *производная по времени от момента количества движения точки относительно некоторого центра равна моменту приложенной силы относительно того же центра.*

По существу, связь между $m\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{F}$ и их моментами относительно центра совершенно идентична.

Если теперь спроектируем (3.19) на ось Oz, получим теорему моментов относительно оси:

$$\frac{d}{dt}\left[m_z(m\overline{v})\right] = m_z(\overline{F}). \tag{3.20}$$

Из (3.19) следует, что если момент силы относительно центра равен нулю, то и момент количества движения точки – величина постоянная.

### 3.3.4 Движение под действием центральной силы. Закон площадей

***Сила называется центральной,*** *если линия действия ее всегда проходит через заданный центр.*

Примеры таких сил: сила притяжения планет к Солнцу; сила натяжения подвески вращающегося груза и т.д. Для таких сил всегда

$$\overline{m}_O(\overline{F}) \equiv 0.$$

Но тогда

$$\overline{r} \times m\overline{v} = const, \ \overline{r} \times \overline{v} = const.$$

Последний вектор (постоянство векторной величины означает, что ни длина, ни направление этого вектора не меняются) перпендикулярен плоскости, проходящей через векторы ***r*** и ***v***. Но это значит, что эти векторы всегда лежат в одной плоскости, а траектория точки – плоская кривая. Кроме того, $vh$ = const.

$$vh = h \cdot ds/dt,$$

но

$$h \cdot ds = 2dT -$$

удвоенная площадь элементарного треугольника $M_1OM$ (рисунок 3.7).

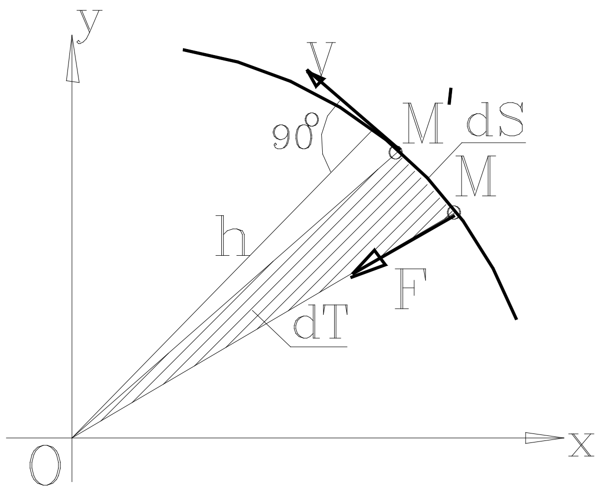



Рисунок 3.7 – К определению секторной скорости

Величина $dT/dt$ – скорость изменения площади, обметаемой радиусом-вектором OM при движении M, называемая секторной скоростью точки. В рассматриваемом случае именно это скорость постоянна.

Итак, при движении под действием центральной силы точка движется по плоской кривой с постоянной секторной скоростью, т.е. при этом радиус-вектор точки в любые равные промежутки времени описывает равные площади (закон площадей).

При описании движения планет это формулировка одного из законов Кеплера.

### 3.3.5 Работа сил. Мощность

Элементарной работой силы $\overline{F}$ называется скалярная величина

$$dA = \overline{F}_\tau d\overline{S},$$

где $F_\tau$ – проекция силы на касательную к траектории точки М, к которой приложена сила, $dS$ – величина элементарного перемещения точки (рисунок 3.8). Т.к. $F_\tau = F\cos\alpha$, где $\alpha$ – угол между $F$ и М$\tau$, то

$$dA = F{\cdot}dS{\cdot}\cos\alpha. \qquad (3.21)$$

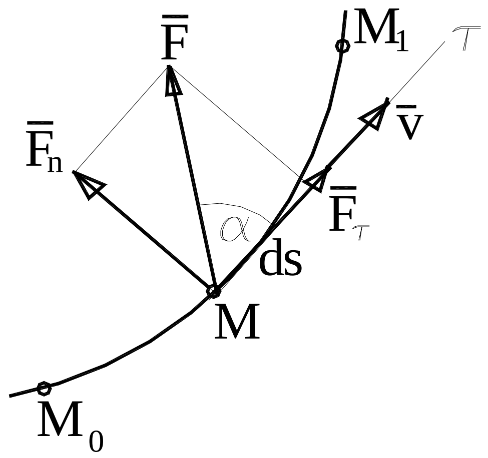



Рисунок 3.8 – К определению работы

В зависимости от значения угла $\alpha$ элементарная работа может быть положительной, отрицательной и равной нулю.

Поскольку $dS = |d\overline{r}|$, выражение (3.21) можно представить в виде скалярного произведения

$$dA = F{\cdot}dr \text{ –} \qquad (3.22)$$

элементарная работа равна скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения. В проекциях на оси координат (3.22) можно переписать как

$$dA = F_x{\cdot}dx + F_y{\cdot}dy + F_z{\cdot}dz. \qquad (3.23)$$

Здесь $x, y, z$ – координаты точки приложения силы.

Если точка прошла расстояние $MM_1$, то

$$A = \int_{M}^{M_1} F_\tau ds = \int_{M}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \qquad (3.24)$$

Интеграл берется вдоль кривой $MM_1$ и является криволинейным.

В частном случае, когда сила постоянна, а траектория прямолинейна, и сила направлена вдоль траектории:

$$A = FS. \qquad [\,A\,] = \text{Дж} = \text{Н·м} = \ldots$$

Геометрический смысл интеграла (3.24) – площадь σ под кривой зависимости силы от пути (рисунок 3.9).

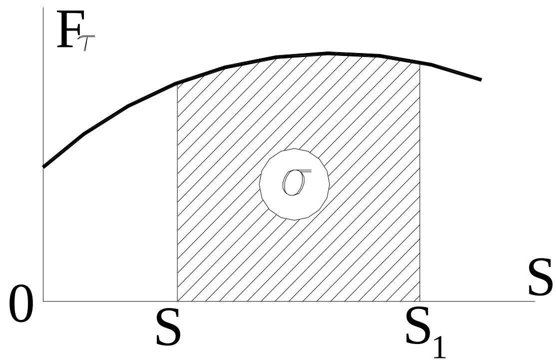



Рисунок 3.9 – Работа сил

Мощностью называется скалярная величина

$$N = \frac{dA}{dt} = F_\tau \frac{ds}{dt} = F_\tau \cdot v. \qquad (3.25)$$

Мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость точки приложения силы.

$$[\,N\,] = \text{Ватт} = \text{Дж/с} = \ldots$$

Из (3.25) ясно, что если мощность (например, двигателя) постоянна, то для выигрыша в силе нужно уменьшить скорость движения.

### 3.3.6 Примеры

**1. Работа силы тяжести**

Пусть точка M под действием силы тяжести **P** перемещается из положения $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в положение $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Направим ось Oz вертикально вверх (рисунок 3.10). Тогда

$$P_x = P_y = 0,\ P_z = -P.$$

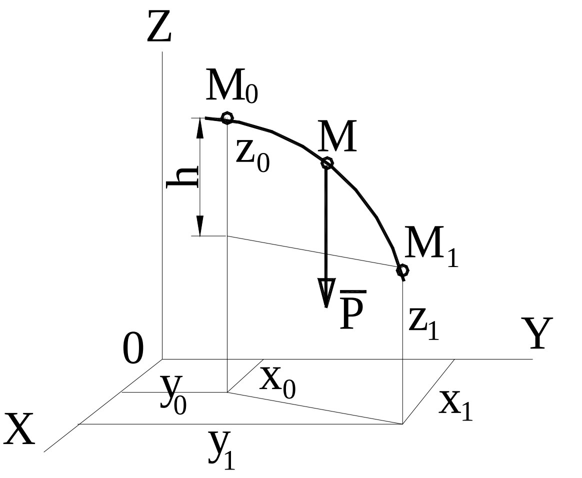



Рисунок 3.10 – К задаче о работе сил тяжести

Из (3.24) следует

$$A = \int_{z_0}^{z_1} (-P)dz = P(z_0 - z_1).$$

Обозначим $h = z_0 - z_1$, тогда $A = Ph$.

Если $z_0 > z_1$, $h > 0$, то $A > 0$, т.е. работа положительна.

Как видно из этих выкладок, работа силы тяжести зависит только от соотношения начальной и конечной высот и не связана с формой траектории перемещения.

*Силы, для которых работа не зависит от траектории, а определяется только начальным и конечным положением перемещаемого объекта, называются* ***потенциальными****.*

**2. Работа силы упругости**

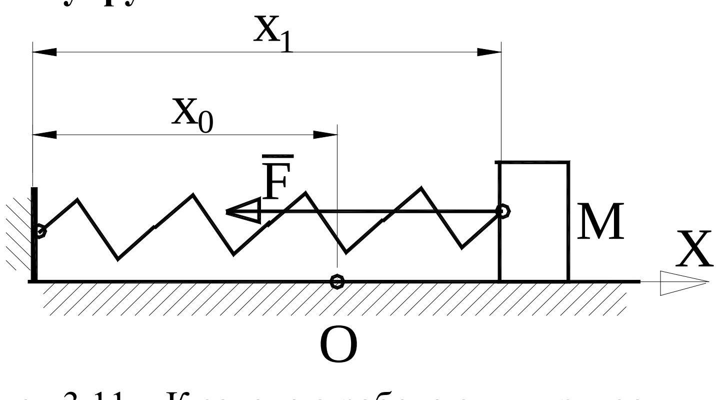



Рисунок 3.11 – К задаче о работе сил упругости

Рассмотрим груз М, лежащий на горизонтальной плоскости и прикрепленный к концу пружины (рисунок 3.11). В этом случае сила упругости пружины линейно связана с перемещением вдоль $x$: $F_x = -cx$; это равенство справедливо как при положительных значениях $x$, так и отрицательных. Знак минус свидетельствует о том, что пружина всегда стремится вернуть груз в положение равновесия. Что касается других составляющих силы, то

$$F_y = F_z = 0.$$

Работа сил упругости на перемещении из положения будет

$$A = \int_{x_0}^{x_1} (-cx)dx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2).$$

Работа будет положительной, если точка М движется к положению равновесия, т.е. когда $x_0 > x_1$.

**Силы упругости тоже относятся к классу потенциальных**.

**3. Работа сил трения**

Сила трения

$$F_x = -f \cdot N, F_y = F_z = 0; A = -\int_{M_0}^{M_1} f \cdot N \cdot ds.$$

Работа сил трения всегда отрицательна, и чем длиннее путь, тем эта работа больше. Таким образом, ***силы трения не потенциальны***.

### 3.3.7 Теорема об изменении кинетической энергии точки

***Кинетической энергией точки*** *называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.*

Размерность кинетической энергии такая же, как у работы. Поэтому рассмотрим связь кинетической энергии с работой. Для этого рассмотрим уравнение движения в проекции на касательную

$$ma_\tau = F_\tau \sum F_{k\tau}); \ a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{dv}{ds}; \ mv\frac{dv}{ds} = F_\tau;$$
$$d(\frac{mv^2}{2}) = \sum F_{k\tau}ds = \sum dA_k. \tag{3.26}$$

В (3.26) справа – элементарная работа сил F на пути ds. (3.26) представляет собой запись теоремы об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме.

Проинтегрировав (3.26) в соответствующих пределах, получим

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(M_0 M_1) \tag{3.27}$$

т. е. *изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех приложенных к точке сил на том же перемещении.*

Рассмотрим пример такого рода: материальная точка движется вдоль горизонтальной прямой влево со скоростью $v_0$, и под действием силы, направленной вправо, приобретает скорость $v_1$ вправо. Найти работу этой силы.

В зависимости от соотношения между величинами $v_0$ и $v_1$ по формуле (3.27) может получиться отрицательная ($v_1 < v_0$), положительная ($v_1 > v_0$) или нулевая ($v_1 = v_0$) работа. Это становится вполне понятным, если учесть определение работы – работа положительна, когда направление приложенной силы совпадает с направлением перемещения, и отрицательна при несовпадении.

Среди сил могут быть и реакции связей, но при движении, например, вдоль гладкой кривой или поверхности их реакция $\overline{N}$ направлена перпендикулярно касательной к траектории движения и $N_\tau = 0$. Таким образом, при движении вдоль гладкой кривой или поверхности изменение энергии определяется работой так называемых активных сил.

Если же поверхность не гладкая, нужно учитывать работу сил трения.

Если сама кривая или поверхность движутся (переносное движение), то абсолютное перемещение точки может быть неперпендикулярным направлению реакции, и тогда работа реакции может быть не равной нулю.

**Пример 1.**

Груз массой 2 кг брошен из точки А с высоты $h$ = 5 м со скоростью $v_0$ = 20 м/с, а в точке падения С имеет скорость $v_1$ = 16 м/с (рисунок 3.12). Найти работу сил сопротивления воздуха.

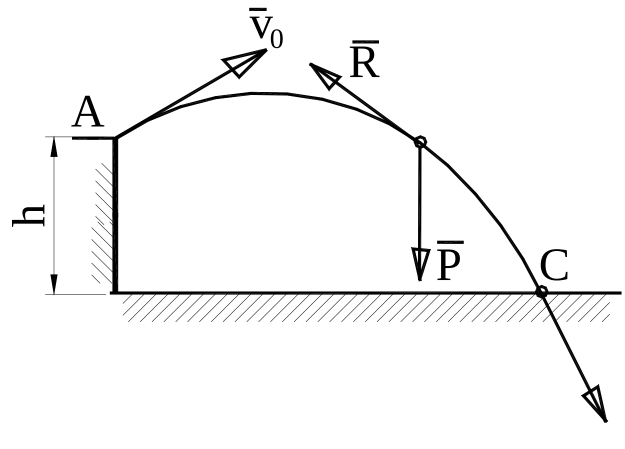



Рисунок 3.12 – К задаче о падении груза

Кинетическая энергия меняется за счет работы сил тяжести $\overline{P}$ и работы $A(\overline{R})$ силы сопротивления воздуха $\overline{R}$.

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgh + A(\overline{R}), \quad и$$

$$A = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} - mgh \approx -242,4 \ (Дж).$$

**Пример 2.**

Груз весом $P$ подвешен на нити длиной $l$. Его отклоняют на угол $\varphi_0$ и отпускают без начальной скорости (рисунок 3.13). Найти скорость груза в положении $\varphi$, если сила сопротивления воздуха постоянна и равна $R$.

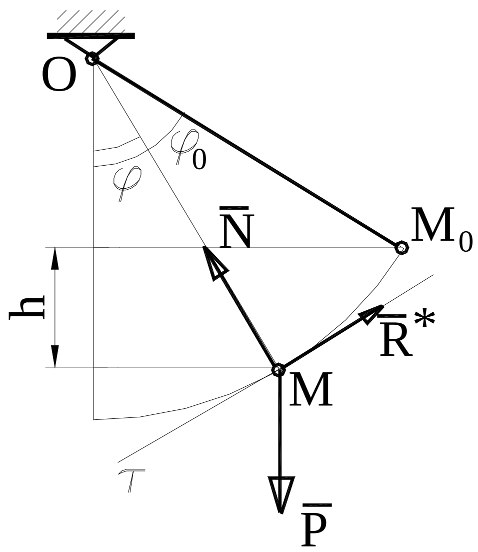



Рисунок 3.13 – Движение груза, подвешенного на нити

Сила натяжения нити $\overline{N}$ направления перпендикулярно направлению движения груза τ, и не совершает работы. Сила сопротивления $\overline{R}$ направлена против движения, и вклад ее работы в изменение кинетической энергии принимаем со знаком минус. В итоге из уравнения дли изменения кинетической энергии получим выражение скорости

$$P\frac{v^2}{2g} = Ph - R \cdot l \cdot (\phi_0 - \phi);$$

$$v = \sqrt{2gh - 2gl(\phi_0 - \phi) \cdot R / P}.$$

При $R = 0$ это известная формула Галилея.

**Пример 3.**

Под грузом весом $P$ упругая балка получает статический прогиб $a_{st}$. Чему равен динамический прогиб балки $a_{din}$ при падении того же груза с высоты $h$ (рисунок 3.14)?

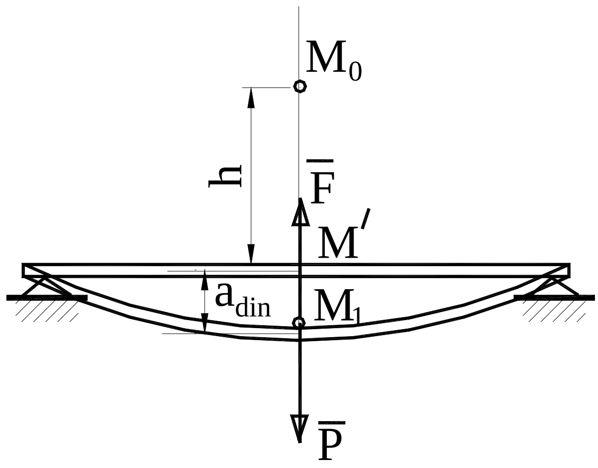



Рисунок 3.14 – К задаче о прогибе балки

Изменение кинетической энергии в данном случае равно нулю, так как и начальная скорость груза в точке $M_0$, и конечная в точке $M_1$ равны нулю. Работа сил тяжести при падении груза равна $P\cdot(h+a_{din})$, а запасаемая упругая энергия, работа сил упругости, равна $-c\cdot a^2_{din}/2$; при нулевом изменении кинетической энергии сумма этих работ равна нулю:

$$P\cdot(h+a_{din})-c\cdot a_{din}^2/2=0.$$

При статическом нагружении $P = c\cdot a_{st}$ , и тогда

$$a_{din}^2-2\cdot a_{st}\cdot a_{din}-2\cdot h\cdot a_{st}=0.$$

$$a_{din}=a_{st}\pm\sqrt{a_{st}^2+2\cdot h\cdot a_{st}}.$$

При $h = 0$ получается $a_{\mathrm{din}} = 2a_{st}$, т.е. динамическое приложение нагрузки вдвое увеличивает прогиб балки.

## 3.4 Несвободное и относительное движения точки

### 3.4.1 Несвободное движение точки

Рассмотрим движение точки М по гладкой заданной неподвижной кривой под действием активных сил $\bar{F}_1^a$, $\bar{F}_2^a$, ... , $\bar{F}_n^a$ и реакции связи $\overline{N}$. Положение точки относительно начала отсчета $O^1$ будем определять дуговой координатой *s*, отсчитываемой от точки $O^1$. Проведем из точки М оси Мτnb, так что ось Мτ направлена в сторону положительного направления отсчета *s*, М*n* – вдоль главной нормали к центру кривизны траектории, Mb – по бинормали (рисунок 3.15). Для гладкой кривой ее реакция направлена по нормали к ней и лежит в плоскости М*bn*. Поэтому $N_\tau = 0$. В результате дифференциальные уравнения движения точки вдоль заданной будут иметь вид:

$$m\frac{dv}{dt}=\sum F^a_{k\tau}, \quad или \quad \left(m\frac{d^2s}{dt^2}=F^a_{k\tau}\right);$$
$$\frac{mv^2}{\rho}=\sum F^a_{kn}+N_n, \quad 0=\sum F^a_{kb}+N_b. \tag{3.28}$$

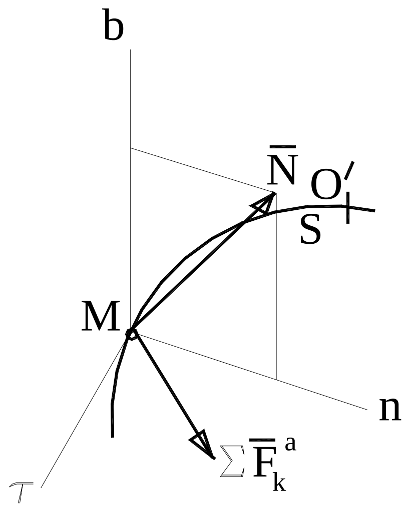



Рисунок 3.15 – Схема движения точки вдоль гладкой кривой

Из первого уравнения, где нет неизвестной реакции, можно определить закон движения точки вдоль кривой. Этим же уравнением можно пользоваться и при наличии трения, но тогда в первое уравнение войдет ила трения, выраженная через реакцию $N$. Два уравнения (оставшиеся) служат для определения реакции связи. Нужно отметить, что при криволинейном движении реакция связи зависит от скорости движения, в отличие от случая статики. Эту скорость, если она не задана, можно найти либо из уравнения (3.28), либо с помощью закона сохранения энергии, что обычно проще.

**Пример 1.**

Кольцу М массой $m$, нанизанному на горизонтально расположенную проволочную окружность, сообщается начальная скорость $v_0$, направленная вдоль касательной к этой окружности (рисунок 3.16); на кольцо действует сила сопротивления $F = kmv^{1/2}$, где $k$ – постоянный коэффициент. Найти время, по истечении которого кольцо остановится.

Примем начало отсчета в начальном положении кольца. Уравнение движения кольца составим с учетом того, что сила тяжести $\bar{P}$ в него не войдет (она перпендикулярна оси Mτ и на движение кольца не влияет). То же относится и к реакции связи $\bar{N}$.

$$m\frac{dv}{dt} = -km\sqrt{v}; \quad отсюда \quad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\sqrt{v}} = -k\int_0^t dt,$$

$$и \quad 2(\sqrt{v_0} - \sqrt{v}) = kt.$$

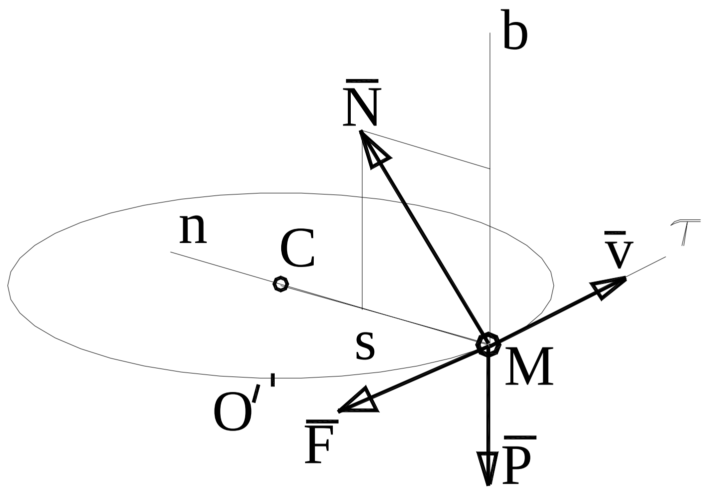



Рисунок 3.16 – Схема к задаче о движении кольца по проволоке

В момент остановки $t = t_1$, $v = 0$, тогда $t_1 = \frac{2\sqrt{v}}{k}$.

Время до остановки в этом примере является конечной величиной.

**Пример 2.**

Пусть в предыдущем примере сила сопротивления представляет собой силу трения $F = f{\cdot}N$. Для конкретности $R = 0{,}3$ м, $v_0 = 2$ м/с, $f = 0{,}3$. Какой путь до остановки пройдет кольцо?

Составляя уравнения (3.28), получим:

$$m\frac{dv}{dt} = -F, \quad \frac{mv^2}{R} = N_n, \quad N_b = P.$$

Сила трения

$$F = fN = f\sqrt{N_b^2 + N_n^2}.$$

Т.к. $N_b = P = mg$, то

$$F = fm\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}.$$

Таким образом, сила трения зависит от скорости кольца. После замены $dv/dt = v{\cdot}dv/ds$ и сокращения на $m$ получим уравнение движения в виде

$$v\frac{dv}{ds}=-\frac{f}{R}\sqrt{g^2R^2+v^4}$$

Разделяя переменные и беря в обеих частях равенства определенные интегралы, получим

$$\int\limits_{v_0}^{v}\frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2R^2+v^4}}=-2\frac{f}{R}\int\limits_0^s ds,$$

откуда

$$-2fs/R=\ln(v^2+\sqrt{g^2R^2+v^4})-\ln(v_0^2+\sqrt{g^2R^2+v_0^4})$$

Окончательно

$$s=\frac{R}{2f}\ln\frac{v_0^2+\sqrt{g^2R^2+v_0^4}}{v^2+\sqrt{g^2R^2+v^4}}.$$

В момент остановки $v = 0$, поэтому приближенно (считая $g = 10$ м/с$^2$) получаем $s \approx 0{,}55$ м.

**Пример 3.**

Груз весом Р висит на нитке длиной $b$. Его отклоняют на угол $\alpha$ и отпускают без начальной скорости. Определить натяжение нити в момент, когда груз будет в нижнем положении (рисунок 3.17).

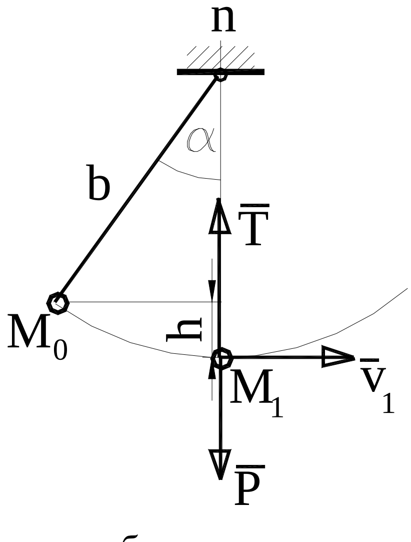



Рисунок 3.17 – К задаче об определении натяжения нити

Рассмотрим груз в нижнем положении. На него действуют сила натяжения нити $\overline{T}$ и вес $\overline{P}$. Радиус кривизны траектории определяется длиной нити b, и уравнение движения груза в проекции на нормаль к траектории n (в сторону вогнутости траектории)

$$mv_1^2/b=T-P\text{, или }T=P+mv_1^2/b,$$

где $v_1$ – скорость груза в нижнем положении. Для ее определения используем теорему об изменении кинетической энергии точки

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Ph = Pb(1 - \cos\alpha).$$

Поскольку $v_0 = 0$, то $mv_1^2 = 2Pl(1 - \cos\alpha)$, и окончательно получаем $T = P\cdot(3–2\cos\alpha)$.

В частном случае, если нить в начальном положении отклонена на 90°, натяжение нити в нижней точке будет равно утроенному весу груза.

**Пример 4.**

Груз М подвешен на нити длиной $b$ = ОМ (рисунок 3.18). Какую наименьшую скорость нужно сообщить грузу, чтобы он описал полную окружность в вертикальной плоскости?

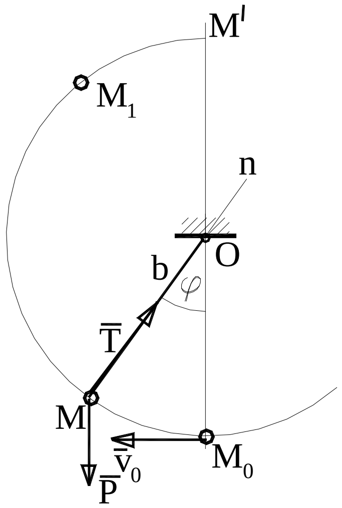



Рисунок 3.18 – К задаче о движении груза по полной окружности

Найдем натяжение нити в произвольном положении, определяемом углом φ, и будем исходить из того, чтобы при любом его значении натяжение нити было положительным. В положении М на груз действуют сила натяжения нити $\overline{T}$ и вес $\overline{P}$. Составим уравнение движения в проекции на главную нормаль Mn. Тогда

$$mv^2/b = T - P\cdot\cos\varphi, \tag{3.29}$$

где $v$ – скорость груза в положении М. Для ее определения применяем теорему об изменении кинетической энергии:

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = -Ph = -Pb\cdot(1-\cos\varphi).$$

Тогда

$$mv^2 = mv_0^2 - 2\cdot P\cdot b\cdot(1-\cos\varphi).$$

Подставим это значение $mv^2$ в (3.28) и вычислим $T$:

$$T = P(v_0^2/gb–2+3\cdot\cos\varphi).$$

Наименьшее значение величина T будет иметь при $\varphi=180^o$:

$$T_{min} = P(v_0^2/gb–5).$$

Отсюда, при условии $T_{min} > 0$ имеем

$$v_0 > (5gb)^{1/2}.$$

Если груз подвешен на невесомом стержне, который может работать и на сжатие, то груз опишет полную окружность при условии, что его скорость нигде (кроме верхней точки) не обращается в нуль. Но тогда изменение кинетической энергии от начального значения до нуля равно работе сил тяжести при перемещении груза из нижнего положения в верхнее:

$$mv_0^2/2 = 2mgb, \text{ откуда } v_{min} = (4gb)^{1/2}.$$

### 3.4.2 Относительное движение точки

Все законы динамики справедливы для абсолютного движения точки. Теперь рассмотрим движение точки по отношению к системе Oxyz, которая сама движется относительно неподвижной (инерциальной) системы $O_1x_1y_1z_1$. Для абсолютного движения справедливо:

$$m\bar{a}_a = \sum \bar{F}_k.$$

В то же время из кинематики известно, что

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_{kor}.$$

В дальнейшем обозначим $\bar{a} = \bar{a}_r$ (нас интересует в данном случае относительное движение точки), и тогда, введя переносную и кориолисову силы инерции, получим уравнение движения:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}_e^{in} + \bar{F}_{kor}^{in}. \qquad (3.30)$$

Здесь введены обозначения

$$\bar{F}_e^{in} = -m\bar{a}_e, \quad \bar{F}_{kor}^{in} = -m\bar{a}_{kor}$$

Полученные уравнения – не что иное, как запись основного закона динамики для относительного движения точки.

Следовательно, *все уравнения и теоремы механики для относительного движения точки составляются точно так же, как уравнения абсолютного движения, если при этом к действующим на точку силам прибавить переносную и кориолисову силы инерции.*

**Частные случаи:**

1. Если подвижные оси движутся поступательно, то в (3.30) исчезает справа последнее слагаемое (отсутствует кориолисово ускорение), и закон относительного движения принимает вид

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}_e^{in}.$$

2. Если подвижные оси движутся поступательно, равномерно и прямолинейно, то в (3.30) справа останется лишь первое слагаемое, т.е. закон движения будет иметь точно такой же вид, как и в неподвижной системе координат. Следовательно, такая система отсчета будет инерциальной.

Отсюда вытекает *следствие*: **никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить, находится данная система отсчета в покое или в состоянии равномерного прямолинейного движения.**

В этом заключается так называемый **принцип относительности классической механики**, открытый еще Галилеем.

3. Если точка неподвижна относительно подвижных осей, то $\bar{F}_{kor}^{in} = 0$, относительное ускорение точки тоже равно нулю. Тогда (3.30) принимает вид

$$\sum \bar{F}_k + \bar{F}_e^{in} = 0.$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение относительного равновесия (покоя) точки. Из него следует, что уравнения относительного равновесия составляются точно так же, как уравнения в неподвижных осях, если при этом к действующим на точку силам добавить переносную силу инерции.

## 3.5 Прямолинейные колебания точки

### 3.5.1 Свободные колебания без учета сил сопротивления

Колебания можно классифицировать по физическим признакам: механические, акустические, радиотехнические и т.д. Далее рассматриваются механические колебания, но многие законы, справедливые для них, справедливы и для других. Преимущество изучения механических колебаний заключается в их наглядности.

Рассмотрим движение точки вдоль прямой при действии силы, которая всегда направлена к некоторому центру (точке) О и пропорциональна расстоянию от этого центра, проекция которой на ось Ox (рисунок 3.19): $F_x = -cx$.

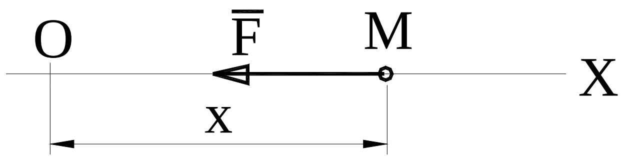



Рисунок 3.19 – К задаче о движении точки под действием восстанавливающей силы

Такая сила иногда называется восстанавливающей. Примеры таких сил – силы упругости, сила тяжести.

Дифференциальное уравнение движения точки массы m в проекции на ось Ox прямой будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -cx, \quad или \qquad \ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{3.31}$$

где $k^2 = c/m.$

Это дифференциальное уравнение описывает свободные колебания точки при отсутствии сил сопротивления.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \tag{3.32}$$

или в другой форме

$$x = A \sin(kt+\alpha)). \tag{3.33}$$

В этих соотношениях $C_1$, $C_2$ $(A, k)$ – постоянные интегрирования. Не следует понимать, что уравнение колебаний имеет два различных решения. Речь идет именно о форме представления решения, и всегда возможны преобразования этих форм решения из одной в другую.

Последняя форма представления решения удобнее для общих исследований, и иногда называется канонической (образцовой). При ее использовании сразу очевидны такие параметры движения, как амплитуда A, круговая частота k, начальная фаза колебаний $\alpha$.

Скорость точки

$$v_x = \dot{x} = Ak\cos(kt + \alpha). \tag{3.34}$$

Колебания, совершаемые точкой по закону (3.32), называются гармоническими. $A$ – амплитуда колебаний, $\varphi = kt+\alpha$ – фаза колебаний, причем фазы, отличающиеся на $2\pi$, считаются одинаковыми. Фаза, в отличие от координаты $x$, определяет не только положение точки, но и направление ее дальнейшего движения.

Величина $\alpha$ определяет начальную фазу колебаний.

Величина $k$ называется круговой частотой колебаний; она определяет, сколько полных колебаний происходит за $2\pi$ секунд.

Промежуток времени $T$, в течение которого точка совершает полное колебание, называется периодом. По определению $kT = 2\pi$, откуда $T = 2\pi/k$.

Величина $\nu$, обратная периоду, называется частотой; она определяет число колебаний, совершаемых в одну секунду:

$$\nu = 1/T = k/2\pi.$$

Таким образом, обычная и круговая частоты отличаются друг от друга множителем $2\pi$. Для обычной частоты используется размерность Герц (Гц), например, переменный ток в бытовых сетях характеризуется частотой 50 Гц.

Для определения постоянных интегрирования можно использовать начальные условия.

Так, при $t = 0$: $x = x_0$, $v = v_0$.

Тогда из (3.32) и (3.33) получаем

$$x0 = A \sin\alpha, \; v_0/k = A \cos\alpha,$$

и

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / k^2}, \quad tg\alpha = kx_0 / v_0.$$

---

**Свойства свободных колебаний**

1. Амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий (или краевых условий).

2. Частота и период колебаний от начальных (краевых) условий не зависят.

---

Колебания, рассмотренные выше, называются линейными.

Если к точке приложить постоянную по модулю и направлению силу, то характер колебаний не изменится, только центр колебаний смещается в сторону действия силы на величину соответствующего статического отклонения точки.

### 3.5.2 Свободные колебания при вязком сопротивлении

Если помимо восстанавливающей силы к телу приложена сила вязкого сопротивления

$$R = -\mu v,$$

то дифференциальное уравнение движения будет

$$\begin{gathered} m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}, или \\ \ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0 \end{gathered} \tag{3.35}$$

Здесь $c/m = k^2, \mu/m = 2b.$

Это уравнение свободных колебаний точки при наличии силы вязкого сопротивления, пропорциональной скорости. Ищем его решение в виде $x = e^{nt}$. Подставляя это решение в (3.35), получим характеристическое уравнение

$$n^2 + 2bn + k^2 = 0,$$

корни которого

$$n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}. \qquad (3.36)$$

1. Пусть $k > b$, т.е. сопротивление мало по сравнению с восстанавливающей силой. Обозначим $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$, тогда $n_{1,2} = -b \pm ik$, и корни характеристического уравнения – комплексные. Тогда решение имеет вид

$$x = e^{-bt}\,(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t),\ \text{или}$$
$$x = Ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha). \qquad (3.37)$$

Постоянные в этих выражениях, например, в последнем соотношении $A$ и $\alpha$, определяются по начальным условиям.

Решение (3.37) описывает так называемые затухающие колебания. Величина $T_1$ = $=2\pi/k_1$ – период затухающих колебаний. Ее можно представить в виде

$$T_1 = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - b^2/k^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - b^2/k^2}} \approx T(1 + \frac{b^2}{2k^2}). \qquad (3.38)$$

В этом выражении $T$ – период свободных колебаний без учета вязкого сопротивления. Отсюда видно, что при наличии вязкого сопротивления период колебаний немного возрастает. При малом сопротивлении этим изменением можно пренебречь и считать, что период не меняется, т.е. $T_1 \approx T$. Если первое максимальное отклонение вправо $x_1$ происходит в момент $t_1$, то второе – в момент $(t_1 + T_1)$ и т.д. Тогда по (3.37) с учетом $k_1 T_1 = 2\pi$ получим

$$x_1 = Ae^{-bt_1} \sin(k_1 t_1 + \alpha),$$
$$x_2 = Ae^{-b(t_1 + T_1)} \sin(k_1 t_1 + k_1 T_1 + \alpha) = x_1 e^{-bT_1}.$$

Этот результат (рисунок 3.20) в более общем случае можно представить в виде

$$x_{n+1} = x_n e^{-bT_1}.$$

Это означает, что размах колебаний убывает по геометрической прогрессии со знаменателем $\exp(-bT_1)$, который называется **декрементом колебаний**, а модуль его логарифма – величина $bT_1$ – **называется**

**логарифмическим декрементом**. Чем больше логарифмический декремент, тем быстрее идет затухание колебаний.

2. Пусть $b > k$ , т.е. сопротивление велико по сравнению с восстанавливающей силой. Обозначим величину $b^2 - k^2 = r^2$, тогда корни характеристического уравнения будут $n_{1,2} = -b \pm r$ – они оба действительны и отрицательны (т.к. $r < b$). Следовательно, решение уравнения (3.35) в этом случае имеет вид

$$x = C_1 e^{-(b+r)t} + C_2 e^{-(b-r)t}.$$

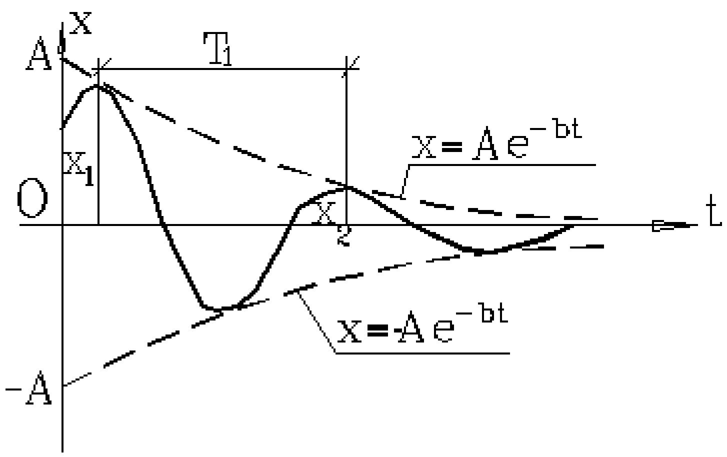



Рисунок 3.20 – Затухающие колебания

Движение точки будет уже не колебательным. Аналогичный вывод справедлив и для случая $b = k$. Графики движения – зависимости $x$ от времени – приведены на рисунке 3.21. Кривая 1 соответствует случаю, когда из начального положения систему подталкивают в сторону, противоположную положению равновесия. Кривая 3 – подталкивание в сторону равновесия. Наконец, кривая 2 отвечает нулевой начальной скорости.

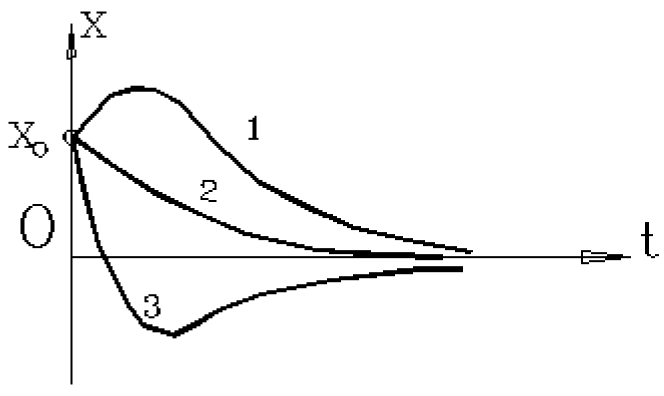



Рисунок 3.21 – Апериодическое движение при большом вязком сопротивлении

### 3.5.3 Вынужденные колебания. Резонанс

Пусть к точке, помимо восстанавливающей силы, приложена еще периодическая сила, проекция которой на ось $Ox$:

$$Q = Q_0 \cdot \sin pt.$$

Эта силу называется возмущающей. Колебания при наличии такой силы называются вынужденными.

1. Рассмотрим движение точки при наличии возмущающей силы и при отсутствии сопротивления.

Дифференциальное уравнение движения будет

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin pt. \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt, \quad \textit{где} \tag{3.39}$$

$$(k^2 = c / m, P_0 = Q_0 / m).$$

Здесь $P_0$ имеет размерность ускорения.

Решение этого неоднородного уравнения складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения уравнения (3.39). Общее решение однородного уравнения известно – оно получено ранее и имеет вид, определяемый формулой (3.32). Частное решение неоднородного уравнения для случая $p \neq k$ ищем в виде

$$x_2 = B \sin pt, \tag{3.40}$$

где $B$ нужно выбирать из условия, чтобы равенство (3.39) обратилось в тождество. Подставим это значение $x_2$ и его вторую производную в (3.39), тогда

$$-p^2 B \sin pt + k^2 B \sin pt = P_0 \sin pt.$$

Откуда $B = \dfrac{P_0}{k^2 - p^2}$, а частное решение будет

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt,$$

а общее принимает вид

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{3.41}$$

Как и ранее, постоянные интегрирования $A$ и $\alpha$ должны определяться из начальных условий.

Из (3.41) следует, что колебания точки складываются из:

1) колебаний с амплитудой $A$, зависящей от начальных условий, и с частотой $k$; (это собственные колебания);

2) колебаний с амплитудой $B$, не зависящей от начальных условий, и частотой $p$ вынуждающей силы; это вынужденные колебания.

В реальных условиях свободные колебания всегда затухают, и движение будет вынужденными колебаниями с частотой вынуждающей силы. Амплитуда этих колебаний

$$B = \frac{P_0}{(k^2 - p^2)} = \frac{\lambda_0}{\left|1 - p^2 / k^2\right|},$$

где $\lambda_0$ – величина статического отклонения точки под действием вынуждающей силы:

$$\lambda_0 = P_0 / k^2 = Q_0 / c.$$

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от соотношения частот собственных колебаний и вынуждающей силы. При $p \approx k$ она теоретически становится бесконечной.

*Явление, при котором частота собственных колебаний и частота периодической вынуждающей силы совпадают (p = k), носит название* ***резонанса.***

### 3.5.4 Вынужденные колебания при вязком сопротивлении

Пусть точка движется под действием:

- восстанавливающей силы $F$;
- силы вязкого сопротивления $R$;
- возмущающей силы $Q = Q_0 \sin pt$.

В этом случае дифференциальное уравнение движения будет иметь вид

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt. \tag{3.42}$$

Полученное неоднородное линейное дифференциальное уравнение имеет решение вида $x = x_1 + x_2$, где $x_1$ – общее решение однородного уравнения, соответствующего (3.42), когда правая часть равна нулю (при $b < k$ это решение представлено формулой (3.37)), а $x_2$ – частное решение (3.42).

Частное решение ищется в виде:

$$x_2 = B \sin (pt - \beta). \tag{3.43}$$

Постоянные $B$ и $\beta$ подбираются так, чтобы уравнение (3.42) выполнялось тождественно. Подставим это значение $x_2$ и его производных в уравнение (3.42). Обозначив $\psi = pt - \beta$,получим

$$B(-p^2 + k^2)\sin\psi + 2bpB\cos\psi = P_0(\cos\beta\sin\psi + \sin\beta\cos\psi).$$

Чтобы это равенство выполнялось при любых значениях $\psi = pt - \beta$, коэффициенты при $\sin\psi$, $\cos\psi$ в левой и правой частях порознь должны быть равны друг другу:

$$B(k^2 - p^2) = P_0\cos\beta,\ 2bpB = P_0 \sin\beta.$$

Отсюда

$$B = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}},\ tg\beta = \frac{2bp}{k^2 - p^2}. \tag{3.44}$$

Таким образом, решение уравнения (3.42) будет иметь вид

$$x = Ae^{-bt}\sin(k_1t + \alpha) + B\sin(pt - \beta), \tag{3.45}$$

где $A$ и $\alpha$ определяются из начальных условий, а величины $B$ и $\beta$ определяются формулами (3.44) и от начальных условий не зависят. При $b = 0$ получается рассмотренный ранее случай отсутствия сопротивления.

Первое слагаемое справа в выражении (3.45) отвечает собственным колебаниям, затухающим со временем. Второе слагаемое представляет собой решение, отвечающее вынужденным колебаниям. По истечении периода времени установления первое слагаемое становится малым и остаются лишь вынужденные колебания.

Введем обозначения:

- отношение частот $z = p/k$;
- характеристика сопротивления $h = b/k$;
- величина статического отклонения точки под действием силы $Q_0$, равная $\lambda_0 = P_0/k^2 = Q_0/c$.

Тогда выражение (3.46) можно переписать как

$$B = \frac{\lambda_0}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4h^2z^2}},\quad tg\beta = \frac{2hz}{1 - z^2}. \tag{3.46}$$

Таким образом, величины $B$ и $\beta$ зависят от двух безразмерных параметров $z$, $h$. Вид этой зависимости приведен на рисунке 3.22, где введено обозначение $\eta = B/\lambda_0$ для величины, показывающей, во сколько раз амплитуда $B$ больше статического отклонения $\lambda_0$, от отношения частот $z$. Эта величина называется коэффициентом динамичности.

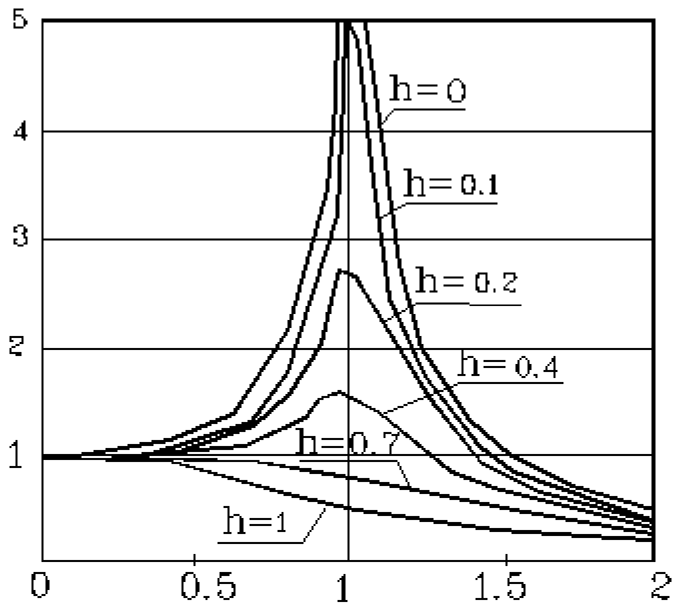



Рисунок 3.22 – Амплитудно-частотная характеристика

Итак, вынужденные колебания точки, в отличие от собственных колебаний, имеют следующие свойства.

1. Амплитуда вынужденных колебаний от начальных условий не зависит.

2. Вынужденные колебания при наличии сопротивления не затухают.

3. Частота вынужденных колебаний равна частоте возмущающей силы и от характеристик колеблющейся системы не зависит.

4. Даже при малой величине возмущающей силы можно получить интенсивные вынужденные колебания за счет резонанса.

5. Даже при большой возмущающей силе можно получить сколь угодно малые колебания системы, если частота вынуждающей силы $p$ много меньше частоты $k$ собственных колебаний системы.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Читатель, слушавший курс теоретической механики в классическом университете по специальностям механико-математического профиля или в техническом вузе по инженерным специальностям, возможно, будет разочарован лаконизмом изложения материала в данном учебном пособии. Как отмечалось во Введении, студентам для получения более полного представления о теоретической механике можно рекомендовать другие пособия для самостоятельной проработки, в частности, указанные в списке литературы ниже. Причины краткости изложения связаны с ограниченным объемом часов, отведенных стандартами образования на данную дисциплину.

Предусмотрен самоконтроль знаний студентов, для этого каждый раздел пособия снабжен соответствующими вопросами. Вопросы соответствуют изложенному в разделе материалу и не требуют обращения к другим источникам.

Представляется, что при жестких ограничениях на объем пособия автору все же удалось отразить основные вопросы, традиционно излагаемые в курсах теоретической механики. Читатель может составить ясное представление о структуре механики в целом и о месте и содержании той ее части, что составляет предмет теоретической механики.

Хочется пожелать, чтобы по прочтении этого пособия у читателя возникнет как интерес к вопросам, изучаемым теоретической механикой, так и потребность углубленного изучения этих вопросов по другим источникам, поскольку именно теоретическая механика является основой для целого спектра инженерных дисциплин, таких, например, как сопротивление материалов, материаловедение, теория упругости, теория оболочек и т.д. и т.п.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учебное пособие для втузов. – 11-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 1995. – 416 с.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2 т. / Под ред. Г.Ю. Джанелидзе. – М., 1966. – Т.1, 2.
3. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. Изд. 35 (36). – М., 1981.
4. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Учебное пособие для ВУЗов, в 2-х т. – М.: Наука, 1983.
5. Томилов Е.Д. Теоретическая механика. Курс лекций в 2 ч. – Томск: Изд-во унив-та, 1966. – Ч.1 – 302 с.; Ч.2. – 1970. – 317 с.
6. Люкшин Б.А. Теоретическая механика: учебное пособие / Томск: Томский гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2007, 170 с.

## ГЛОССАРИЙ

**Модель** – упрощенное представление об объекте и/или явлении, в котором отражены их характерные главные черты.

**Материальная точка** – математическая точка, обладающая массой.

**Абсолютно твердое тело** – недеформируемый объект.

**Статика** – раздел механики, изучающий условия равновесия сил и тел под действием этих сил.

**Кинематика** – раздел механики, изучающий движение тел.

**Динамика** – раздел механики, изучающий движение тел с учетом приложенных активных и реактивных сил.

**Связи** – объекты, ограничивающие перемещение тел в пространстве.

**Реакции связей** – силы, действующие со стороны связей на тела.

**Главный вектор системы сил** – геометрическая сумма сил.

**Равнодействующая сила** – одна сила, вызывающая такое же действие, как система сил.

**Момент силы** – причина стремления тела к повороту или его вращательного движения.

**Стержень** – часть конструкции, работающая лишь на растяжение или сжатие.

**Ферма** – конструкция, состоящая из стержней.

**Трение** – сопротивление относительному движению соприкасающихся тел.

**Центр тяжести** – точка, через которую проходит равнодействующая сил тяжести.

**Траектория** – линия, вдоль которой перемещается точка при движении.

**Скорость** – характеристика изменения положения точки за определенный промежуток времени.

**Ускорение** – характеристика изменения скорости за определенный промежуток времени.

**Степень свободы** – параметр, определяющий состояние системы.

**Число степеней свободы** – число независимых параметров, определяющих состояние системы.

**Свободное тело** – тело, способное свободно перемещаться в пространстве без ограничений и/или связей.

**Свободные колебания** – колебания, зависящие лишь от начальных условий.

**Резонанс** – явление неограниченного роста амплитуды колебаний при совпадении частот собственных колебаний и частоты вынуждающей силы.