

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Томский государственный университет систем управления
и радиоэлектроники

В.А. Бурдовицин

**ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
КОЛЕБАНИЙ**

Учебно-методическое пособие для студентов
технических направлений подготовки и специальностей

Томск
2020

УДК 537.86
ББК 22.3
Б912

Рецензент

Орловская Л. В., доцент кафедры физики ТУСУР, канд. физ.-мат. наук

Автор:

В.А. Бурдовицин

Бурдовицин, Виктор Алексеевич

Б 912 Изучение вынужденных электромагнитных колебаний: учебно-методическое пособие по физике / Бурдовицин В.А. – Томск: Томский гос. университет систем управления и радиоэлектроники, 2020. - 13 с.

Представлена краткая теория вынужденных колебаний в последовательном колебательном контуре. Показана связь параметров контура с основными характеристиками: резонансной частотой и добротностью. Описана экспериментальная установка, а также методика проведения измерений и обработки результатов.

Для студентов ТУСУРа, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям.

Одобрено на заседании каф. физики, протокол № 83 от 06.03.2020.

УДК 537.86
ББК 22.3

© Бурдовицин В. А., 2020
© Томск. гос. ун-т систем упр.
и радиоэлектроники, 2020

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 КРАТКАЯ ТЕОРИЯ	4
2 ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ.....	9
3 ЗАДАНИЕ	11
4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	11
5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	13
6 ЛИТЕРАТУРА	13

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является изучение вынужденных электромагнитных колебаний и явления резонанса в последовательном колебательном контуре.

1 КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. С этой целью в колебательный контур включают источник внешней периодически изменяющейся э.д.с. Колебания, возникающие под действием периодически изменяющейся э.д.с., называются *вынужденными* колебаниями.

Рассмотрим вынужденные колебания в последовательном контуре (Рис. 1.1), состоящем из R , L , C , возникающие под действием внешнего источника, э.д.с. которого изменяется по закону $E = E \cos \omega t$

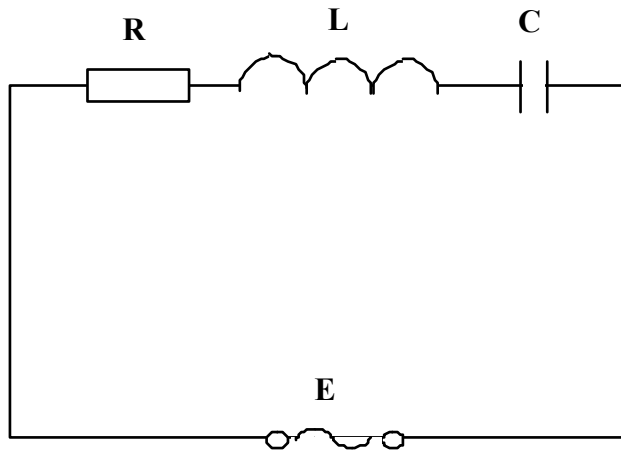


Рисунок 1.1 - Колебательный контур

По второму правилу Кирхгофа можно записать

$$U_L + U_C + U_R = E \quad (1.1)$$

Из уравнения (1.1) получаем:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{c} = E_m \cos \omega t \quad (1.2)$$

Используя соотношение $I = \frac{dq}{dt}$, уравнение (1.2) можно записать в виде:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = U_m \cos \omega t, \quad (1.3)$$

где $\delta = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания, (1.4)

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - собственная частота контура без затухания, (1.5)

$$U_m = \frac{E_m}{L} \cdot \quad (1.6)$$

Уравнение (1.3) является дифференциальным уравнением вынужденных электрических колебаний в контуре. Его решение будем искать в виде

$$q = q_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (1.7)$$

где ω - частота внешней э.д.с.;

φ - начальная фаза вынужденного колебания.

Для нахождения значений q_m и φ найдем производные q' и q''

$$q' = -\omega q_m \sin(\omega t - \varphi) = \omega q_m \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}), \quad (1.8)$$

$$q'' = -\omega^2 q_m \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 q_m \cos(\omega t - \varphi + \pi) \quad (1.9)$$

Подставив (1.7), (1.8), (1.9) в (1.3), получим уравнение

$$\begin{aligned} \omega^2 q_m \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\delta\omega q_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \\ + \omega_0^2 q_m \cos(\omega t - \varphi) = U_m \cos \omega t \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из (1.10) следует, что постоянные q_m и φ должны иметь такие значения, чтобы гармоническая функция $U_m \cos \omega t$ была равна сумме трех гармонических функций, стоящих в левой части уравнения. Для нахождения значений q_m и φ воспользуемся методом векторных диаграмм, который заключается в том, что гармонически изменяющаяся величина изображается вектором, вращающимся с частотой ω вокруг своего начала против часовой стрелки. Длина этого вектора равна амплитуде колебаний соответствующей физической величины. Если изобразить функцию $\omega_0^2 q_m \cos(\omega t - \varphi)$ вектором, длина которого $\omega_0^2 q_m$, направленным вправо, то функция $2\delta\omega q_m \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$ изобразится вектором длиной $2\delta\omega q_m$ повернутым относительно вектора $\omega_0^2 q_m$ против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 1.2), а функция $\omega^2 q_m \cos(\omega t - \varphi + \pi)$ - вектором длиной $\omega^2 q_m$, повернутым относительно вектора $\omega_0^2 q_m$ на угол π . Чтобы уравнение (1.10) выполнялось, сумма трех перечисленных векторов должна совпадать с вектором, изображающим функцию $U_m \cos \omega t$.

Такое совпадение возможно, как видно из (рис. 1.2), если

$$U_m^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 q_m^2 + 4\delta^2 \omega^2 q_m^2 \cdot \quad (1.11)$$

Из (1.11) найдем амплитуды

$$q_m = \frac{U_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \cdot \quad (1.12)$$

Рис.1.2 позволяет получить значения φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (1.13)$$

Учитывая, что $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$; $\delta = \frac{R}{2L}$; $U_m = \frac{E_m}{L}$,

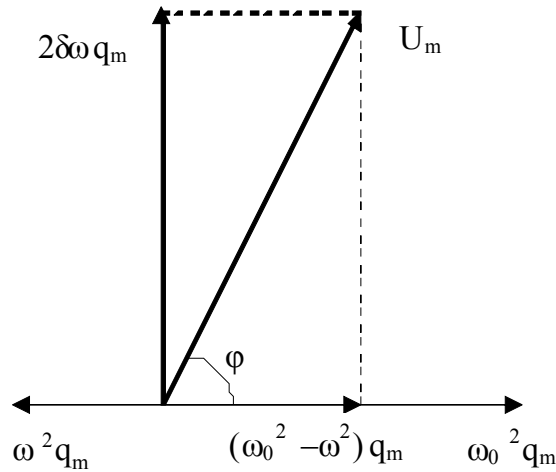


Рисунок 1.2 - Векторная диаграмма

Получаем
$$q_m = \frac{E_m}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (1.14)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{1/\omega C - \omega L} \quad (1.15)$$

Продифференцировав выражение (1.7) по t , найдем силу тока в контуре при установившихся колебаниях:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t - \varphi) = I_m \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}), \quad (1.16)$$

где I_m - амплитудное значение установившегося тока в контуре

$$I_m = \omega q_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (1.17)$$

В соответствии с (1.17) напряжение на резисторе

$$U_R = R I_m \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad (1.18)$$

Разделив выражение (1.7) на емкость, получим напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \varphi) = U_{Cm} \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.19)$$

Здесь

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{E_m}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{I_m}{\omega C} \quad (1.20)$$

Напряжение на катушке

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega LI \sin(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) = U_{Lm} \cos(\omega t - \varphi + \pi) \quad (1.21)$$

Сопоставляя выражения (1.16), (1.18), (1.19), (1.21) видим, что напряжение на конденсаторе отстает по фазе от силы тока на $\pi/2$, а напряжение на катушке опережает ток на $\pi/2$. Напряжение на резисторе изменяется в фазе с током. Таким образом, изменения I , q , U_C , U_L , U_R - представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте внешней э.д.с. Для данной колебательной системы **амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты ω вынуждающей э.д.с.** и при определенных ее значениях достигает максимальной величины. Это явление называется *резонансом*, а соответствующая частота *резонансной частотой*.

Чтобы определить резонансную частоту $\omega_{рез}$ любой из выше перечисленных гармонически изменяющихся величин, нужно исследовать функцию, определяющую данную величину, на максимум. Так из (1.12) видно, что максимальное значение q_m будет при минимальном значении подкоренного значения знаменателя. Продифференцировав подкоренное выражение по ω и приравняв нулю, получим условие, определяющее $\omega_{рез}$:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\delta^2\omega = 0$$

Имеющим смысл корнем этого уравнения является выражение:

$$\omega_{qрез} = \omega_{Uрез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0 \quad (1.22)$$

На (рис 1.3) приведены резонансные кривые для U_C . Отдельные кривые на графике соответствуют различным значениям коэффициента затухания δ . Чем меньше δ , тем выше и правее лежит максимум кривой. При большом затухании, когда $2\delta^2 > \omega_0^2$, резонанс не наблюдается, с увеличением частоты амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает (см. нижнюю кривую при δ_4). При стремлении ω к нулю резонансные кривые сходятся в одной точке с ординатой $U_{Cm} = U_m$. Величина U_m равна напряжению, которое возникает на конденсаторе при подключении его к источнику постоянного напряжения U_m . При малом затухании ($\delta^2 \ll \omega_0^2$) резонансную частоту можно принимать равной $\omega_{рез} \approx \omega_0$.

Резонансные кривые для силы тока приведены на (рис. 1.4) Как видно из выражения (1.17), амплитуда тока будет иметь максимальное значение при

$$\omega_{Iрез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.23)$$

При $\omega=0$, ток в цепи равен нулю, т.к. при постоянном напряжении ток в цепи с конденсатором протекать не может. С другой стороны, при условии $\omega_{рез} = \omega_0$, отношение амплитуды напряжения на конденсаторе к амплитуде вынуждающей э.д.с. равно

$$\frac{U_{Cрез}}{E_m} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \quad (1.24)$$

Величина Q называется добротность. Добротность показывает, во сколько раз амплитуда напряжения на конденсаторе превышает амплитуду вынуждающей э.д.с. при резонансе. Это свойство колебательного контура используется при выделении слабого сигнала из шума, например, в радиоприеме.

В резонансе согласно (1.15) $\operatorname{tg}\varphi=\infty$, следовательно $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда в соответствии с

(1.16) фаза тока совпадает с фазой вынуждающей э.д.с.,

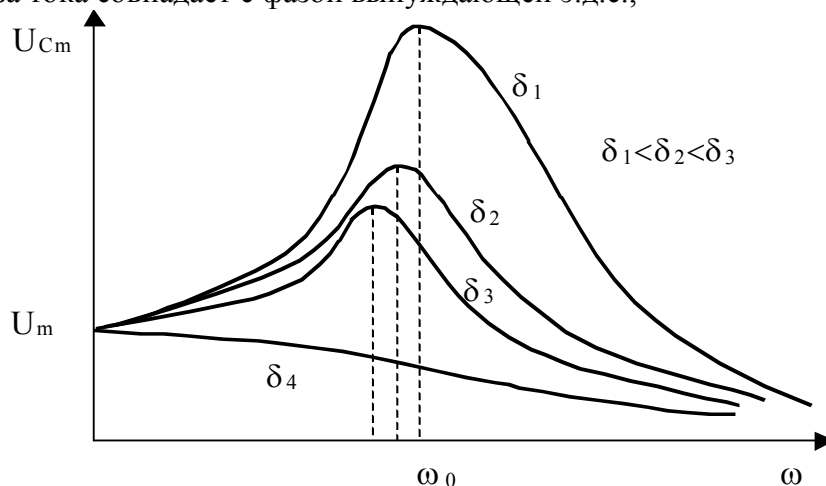


Рисунок 1.3 - Резонансные кривые для напряжения U_C

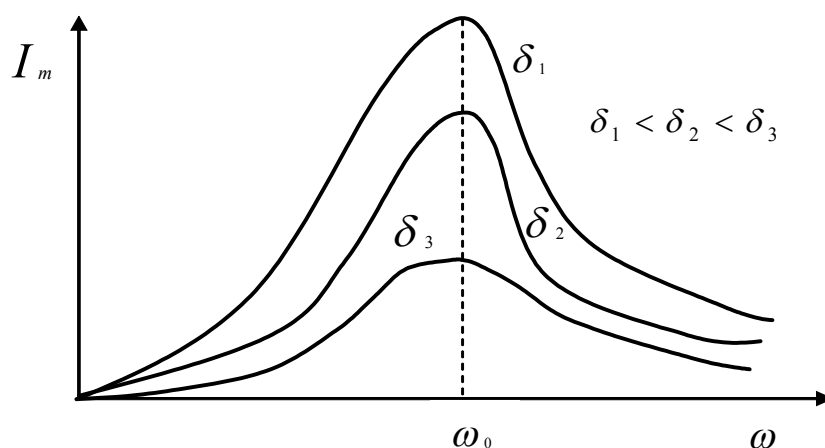


Рисунок 1.4 - Резонансные кривые для силы тока

т.е. в цепи как бы нет ни емкости, ни индуктивности. Иначе говоря, при этой частоте напряжения на конденсаторе и катушке полностью компенсируют друг друга, будучи равными по величине и противоположными по фазе. При этом напряжения U_L и U_C могут значительно превышать напряжение E_m , приложенное к цепи. Резонанс, наблюдаемый в цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные L , C , R и источник э.д.с., называют *резонансом напряжений*.

При вынужденных колебаниях весь процесс характеризуют несколькими параметрами: собственной частотой ω_0 , логарифмическим декрементом затухания:

$$\Theta = \delta T = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi R}{L\omega_0} \quad (1.25)$$

и добротностью Q . Добротность с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной в колебательной системе в данный момент $W_{зап}$ к убыли этой энергии ΔW за период колебаний

$$Q = 2\pi \frac{W_{зап}}{\Delta W} \quad (1.26)$$

Добротность контура определяет также остроту резонансных кривых. Чем больше Q , тем уже резонансная кривая.

Поставим задачу линеаризовать резонансную кривую для тока. Для этого введем обозначение $\sigma = \frac{I_m}{I_{мпез}}$ и вспомним, что

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad \text{и} \quad I_{мпез} = \frac{E_m}{R} \quad (1.27)$$

Тогда

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}(\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (1.28)$$

Для удобства использования соотношения (1.28) возведем левую и правую части уравнения в квадрат

$$\sigma^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{R^2}(\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (1.29)$$

Соотношение (1.32) есть уравнение резонансной кривой в безразмерной форме. С учетом $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_{рез}$ из (1.32) получаем после небольших преобразований

$$\sigma^2 = \frac{1}{1 + \frac{L}{R^2 C} \left(\frac{\omega}{\omega_{рез}} - \frac{\omega_{рез}}{\omega} \right)^2} \quad (1.30)$$

Введя обозначение $\gamma = \frac{\omega_{рез}}{\omega}$, получаем

$$\frac{1}{\sigma^2} = 1 + Q^2 \left(\frac{1 - \gamma^2}{\gamma} \right)^2 \quad (1.31)$$

Для данной лабораторной работы выражение (1.31) является рабочей формулой. Оно позволяет представить резонансную кривую в виде линеаризованной зависимости.

2 ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Принципиальная схема устройства приведена на (рис. 2.1). Здесь G и N генератор и осциллограф, соответственно. Переменный резистор RP сопротивлением 1 кОм служит для

изменения добротности контура. Резистор r сопротивлением 1 Ом играет роль сигнального, т.е. элемента, с которого снимается сигнал, пропорциональный току в контуре. Конструктивно установка оформлена в виде настольного лабораторного стенда (рис. 2.2). Генератор встроен в экспериментальную установку, а в качестве осциллографа используется компьютер. Органы управления скомпонованы на панели (рис. 2.3).

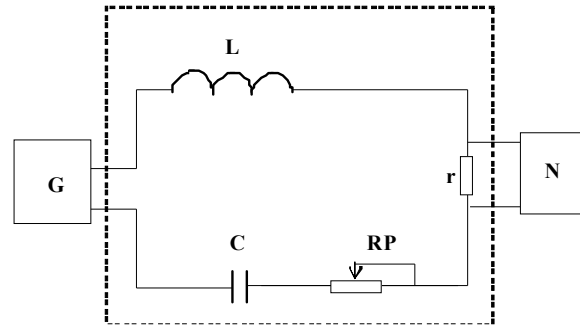


Рисунок 2.1 – Принципиальная схема установки

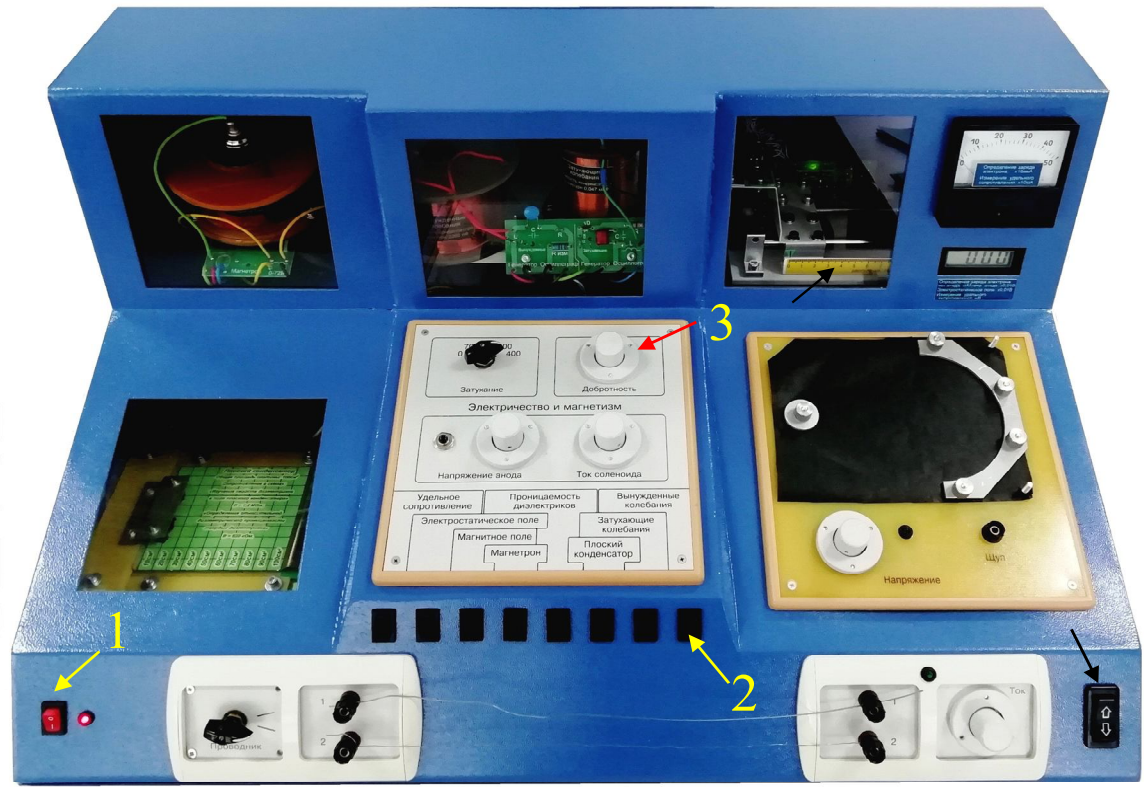


Рисунок 2.2 – Внешний вид установки



Рисунок 2.3 – Панель управления

3 ЗАДАНИЕ

3.1 Изучить теорию вынужденных колебаний и явления резонанса в последовательном колебательном контуре.

3.2 Осуществить экспериментальное наблюдение явления резонанса, для чего исследовать зависимость амплитуды колебаний от частоты генератора.

3.3 Экспериментально исследовать влияние величины активного сопротивления в контуре на вид резонансных кривых.

3.4 Экспериментальным путем проверить применимость уравнения (1.31) для описания резонансной кривой. Для этого экспериментальные точки нанести на график в координатах

$$\frac{1}{\sigma^2}, \left(\frac{1 - \gamma^2}{\gamma} \right)^2.$$

3.5 Используя данные эксперимента, рассчитать индуктивность L и емкость C контура, а также активное сопротивление катушки.

4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

4.1 Включить компьютер и лабораторный стенд кнопкой 1 (рис. 2.2).

4.2. На экране монитора найти папку «Лаборатория», открыть ее, установить указатель мыши на значок «Вынужденные колебания» и нажать дважды на левую кнопку «мыши». На экране появятся экран осциллографа, рукоятка регулировки частоты генератора, таблица для записи результатов измерений, а также кнопки «записать», «удалить».

4.3 На лабораторном стенде кнопкой 2 включить работу «Вынужденные колебания». При этом в окне стенда загорится зеленый сигнал светодиода, а на экране появится синусоидальный сигнал.

4.4 Вращением против часовой стрелки рукоятки 3 управления резистором RP (Добротность) установить $RP=0$.

4.5 Вращая мышью рукоятку «Частота» на экране монитора, убедиться в наличии резонанса. Снять зависимость амплитуды I_m сигнала от частоты в интервале частот больших и меньших резонансной. Для этого, установив частоту, взять мышью измерительные скобки, находящиеся в левых верхнем и нижнем углах экрана осциллографа, и подвести их к верхнему и нижнему максимумам синусоиды. После этого нажать мышью кнопку для передачи данных в таблицу. Обязательно зафиксировать резонансную частоту $\nu_{рез}$ и соответствующую амплитуду $I_{mрез}$ сигнала. Данные из таблицы либо занести в рабочую тетрадь, либо кнопкой переслать в *Libre Office Calc* (аналог Excel).

4.6 Рукоятку «Добротность» на стенде повернуть по часовой стрелке, установив тем самым $RP=1$ кОм, и повторить измерения по п. 4.4.

4.7 По измеренным данным рассчитать значения $\sigma=I_m/I_{mрез}$ и $\gamma=\nu_{рез}/\nu$. Результаты расчета занести в таблицу 4.1.

4.8 Нанести рассчитанные значения на график в координатах σ , ν и построить резонансные кривые.

4.9 Для сравнения полученных зависимостей с теоретическими с использованием метода линеаризации рассчитать и занести в таблицу 4.1 величины $1/\sigma^2$ и $\left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma}\right)^2$.

Нанести полученные значения на график в этих же координатах и убедиться в наличии линейной зависимости между величинами.

4.10 По угловым коэффициентам определить добротности Q_1 , Q_2 . При несовпадении прямых, соответствующих левой и правой ветвям резонансной кривой, выбрать одну из них.

Таблица 4.1 Результаты измерений

Но- мер опы- та	RP = 0						RP = 1 кОм					
	ν , Гц	I_m , дел.	σ	$1/\sigma^2$	γ	$\left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma}\right)^2$	ν , Гц	I_m , дел.	σ	$1/\sigma^2$	γ	$\left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma}\right)^2$
1												
2												
.												

4.11 Рассчитать индуктивность L и емкость C контура, а также активное сопротивление $R_{кат}$ катушки, используя выражения (1.5) и (1.24), а также учитывая, что в (1.24) величина R представляет собой сумму сопротивлений RP и активного сопротивления $R_{кат}$ катушки (рис. 2.1).

4.12 Кнопками на стенде выключить лабораторную работу и сам стенд. Закрывать лабораторную работу на мониторе.

5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 5.1 В чем состоит цель работы?
- 5.2 Какие колебания называются вынужденными?
- 5.3 Какова частота вынужденных колебаний?
- 5.4 Какими параметрами характеризуются вынужденные колебания?
- 5.5 Как определяется добротность контура в настоящей работе?
- 5.6 Из чего складывается полное активное сопротивление контура?
- 5.7 Из чего складывается полное сопротивление контура?
- 5.8 Изобразите резонансные кривые тока для разных добротностей контура.
- 5.9 Изобразите резонансные кривые напряжения на конденсаторе для разных добротностей контура.
- 5.10 Возможно ли получение на отдельных элементах контура напряжения, во много раз большего приложенного напряжения?
- 5.11 Чем определяется разность фаз между током и приложенным напряжением?
- 5.12 В чем физический смысл добротности?
- 5.13 Что происходит на частоте резонанса в контуре, если R стремится к нулю?
- 5.14 Известно, что в цепи переменного тока, состоящей из L , R , C , полное сопротивление имеет активную и реактивную составляющие. В каком случае ток в цепи определяется только активной составляющей сопротивления?
- 5.15 В чем состоит физическая причина возникновения разности фаз между I и U_L . Почему U_L имеет максимальное значение, когда ток I равен нулю?

6 ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И. В. Курс общей физики: учебник в 3-х т. Т. 2 : Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. / И. В. Савельев. - 14-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2018. – 500 с.
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники / Л. А. Бессонов. – М. : Высшая школа, 1978.
3. Мухачёв В. А. Оценка погрешности измерений : метод. указания для студентов всех специальностей / В. А. Мухачёв, А. Л. Магазинников. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2009.
4. Зенин А. А. Общие требования и правила оформления отчета о лабораторной работе по физике: Методические указания [Электронный ресурс] / А. А. Зенин. — Томск: ТУСУР, 2019. — 20 с. — Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/8957> (дата обращения: 03.06.2020.)