Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

И.Э. Гриншпон, Я.С. Гриншпон

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ

(адаптационный курс)

Учебное пособие

Томск
Издательство ТУСУРа
2020

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Г856

Рецензенты:

Галанова Н.Ю., канд. физ.-мат. наук,
доцент кафедры общей математики ТГУ

Забарина А.И., канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математики,
теории и методики обучения математике ТГПУ

Гриншпон, Ирина Эдуардовна

Г856 Элементарная математика для студентов (адаптационный курс) : учеб. пособие / И.Э. Гриншпон, Я.С. Гриншпон. – Томск : Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2020. – 154 с.

ISBN 978-5-86889-897-6

Приведены основные факты элементарной математики, необходимые для освоения курса высшей математики. Все преобразования, уравнения, неравенства рассматриваются на множестве действительных чисел. Для комплексных чисел факты, не совпадающие с аналогичными фактами для действительных чисел, приведены в сносках. Теоретический материал иллюстрируется большим количеством примеров.

Пособие будет полезно студентам-первокурсникам, а также старшеклассникам при подготовке к вступительным экзаменам.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-86889-897-6

Оглавление

От авторов

Дорогие первокурсники и их преподаватели!

Основная цель данного пособия — это помощь тем студентам-первокурсникам, которые, посетив первые пары по математическим и специальным дисциплинам, отчетливо осознали, что у них имеются пробелы в базовой школьной математической подготовке, способные помешать их успешному обучению в университете на выбранной специальности.

Самостоятельно или проконсультировавшись с преподавателями такой студент должен определить проблемные зоны. Это проще всего сделать, ориентируясь на оглавление данного пособия.

Например, если у вас возникло затруднение при решении неравенства $\frac{2x+1}{x-4} < \frac{x+5}{x+1}$, то вы находите раздел «Решение неравенств», а в ней — подраздел «Дробно-рациональные неравенства». При этом, если вы чувствуете, что вам не хватает общих знаний о неравенствах и о преобразованиях алгебраических дробей, то вам также стоит изучить начало раздела о неравенствах и подраздел «Преобразование алгебраических выражений».

Реализуемый таким образом подход к обучению первокурсников со слабым уровнем школьной подготовки предоставляет студентам шанс успешно адаптироваться к требованиям образовательного процесса в высших учебных заведениях, а также стимулирует их познавательную активность путем одновременного закрепления школьных математических навыков и предметно-ориентированного изучения специальных дисциплин того профиля, который был выбран студентом при поступлении, и значит, вызывает у него неподдельный интерес.

В пособии приведены основные факты элементарной математики, необходимые для освоения курса высшей математики, а именно: преобразование алгебраических, логарифмических и тригонометрических выражений; решение уравнений и неравенств из этих классов; основы теории многочленов; построение графиков квадратичных функций и гармонических колебаний; правила вычисления производной и производные основных элементарных функций; исследование дифференцируемой функции на монотонность и экстремум; геометрические и физические приложения производной; понятие процента и свойства арифметической и геометрической прогрессий.

Все преобразования, уравнения и неравенства рассматриваются на множестве действительных чисел. Для комплексных чисел основные факты, не совпадающие с аналогичными фактами для действительных чисел, приведены в сносках.

В пособии используются следующие обозначения числовых множеств: **N** — множество натуральных чисел, **Z** — множество целых чисел, **R** — множество действительных чисел, **C** — множество комплексных чисел.

Теоретический материал иллюстрируется большим количеством примеров. Более сложные задания (второго уровня сложности) в тексте отмечены (*). Приведены задачи для самостоятельного решения. В упражнениях задачи второго уровня сложности отделены от задач первого уровня сложности чертой.

При написании пособия использовались материалы всех указанных в списке литературы учебников и сборников задач.

Отметим, что кроме адаптационной функции данное пособие одновременно может служить целям опережающего развивающего обучения, так как оно содержит многочисленные сведения о свойствах рассматриваемых математических объектов на множестве комплексных чисел.

Надеемся, что пособие поможет всем учащимся успешно преодолеть возникшие трудности и впоследствии стать дипломированными квалифицированными специалистами с достаточной для их будущей профессиональной деятельности математической базой!

Авторы благодарят сотрудников кафедры математики, принявших участие в обсуждении рукописи пособия. При этом особую благодарность выражаем доценту Терре А.И.

Желаем успехов!

Глава 1 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1 Преобразование алгебраических выражений

Алгебраическим выражением называется выражение, составленное из чисел и букв с помощью действий: сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения корня натуральной степени. Если алгебраическое выражение содержит только действия сложения, вычитания, умножения и возведения в натуральную степень, то его называют ***многочленом***. Если же выражение не содержит букв, то его называют ***числовым***.

Если в выражение с переменной подставить вместо переменной число, то получим число, которое называют ***значением выражения*** при заданном значении переменной. Однако при некоторых значениях переменной невозможно вычислить значение выражения, так как возникают невыполнимые операции:

а) деление числа на ноль;

б) возведение отрицательного числа в дробную степень;

в) извлечение корня четной степени из отрицательного числа[1].

При выполнении преобразований алгебраических выражений часто требуется раскрывать скобки, придерживаясь при этом следующих правил раскрытия скобок:

а) если выполняется сложение выражений, то есть перед открывающей скобкой стоит знак «+», то скобки можно опустить $a + (b + c) = a + b + c$;

б) если выполняется вычитание выражений, то есть перед открывающей скобкой стоит знак «–», то все слагаемые в скобках меняют знак на противоположный, то есть «–» на «+» и «+» на «–» $a - (b + c) = a - b - c$;

---

[1] ***Комплексным числом*** в алгебраической форме называется выражение вида $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, то есть символ, квадрат которого равен (–1) ($i^2 = -1$). Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел выполняются как операции над двучленами по правилам раскрытия скобок и приведения подобных, с учетом того, что $i^2 = -1$. Число $\overline{z} = a - bi$ называется комплексно сопряженным числу $z = a + bi$. Чтобы разделить одно комплексное число на другое, нужно числитель и знаменатель дроби умножить на число, сопряженное знаменателю. Комплексное число можно возводить и в целую и в дробную степень и извлекать из него корень любой степени.

в) если выполняется операция умножения некоторого выражения на алгебраическую сумму выражений, то есть перед открывающей скобкой стоит знак умножения, то каждое слагаемое в скобках умножается на выражение, стоящее перед скобками $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$.

При преобразованиях алгебраических выражений применяют следующие основные методы разложения многочлена на множители:

– вынесение общего множителя за скобки;

– группировку слагаемых;

– формулы сокращенного умножения;

– нахождение корней квадратного трехчлена и разложение его на множители.

Основные формулы сокращенного умножения:

а) квадрат суммы: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

б) квадрат разности: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

в) куб суммы: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

г) куб разности: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

д) разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;

е) разность кубов: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

ж) сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Выражение $a^2 + b^2$ — сумма квадратов чисел на множестве действительных чисел на линейные множители[2] не раскладывается. Заметим, что для любого натурального числа n выражение $a^{2n} + b^{2n}$ на множестве действительных чисел не имеет линейных множителей[3], но может быть разложено в произведение многочленов степеней выше первой.

Приведем еще две полезные при различных вычислениях формулы — возведение в натуральную степень алгебраической суммы двух чисел:

---

[2] Во множестве комплексных чисел выражение $a^2 + b^2$, где a и b – действительные числа, можно представить в виде разности квадратов $a^2 - b^2i^2$. Тогда $a^2 + b^2 = (a + bi)\,(a - bi)$, то есть сумма квадратов двух чисел раскладывается в произведение двух комплексно сопряженных чисел.

[3] Например, выражение $a^4 + b^4$ на множестве действительных чисел можно разложить в произведение многочленов второй степени. Действительно,

$$a^4 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2 = \left(a^2 + b^2 + \sqrt{2}\,ab)(a^2 + b^2 - \sqrt{2}\,ab\right).$$

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \quad \text{и} \quad \left(a-b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(-1\right)^k C_n^k a^{n-k} b^k .$$

Выражения $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ называют ***биномиальными коэффициентами***[4]. Первую из приведенных выше формул называют ***биномом Ньютона***.

При применении формул сокращенного умножения для преобразования выражений в них нужно видеть две формулы: при прочтении формулы слева-направо и справа-налево.

Отношение двух чисел называется ***дробью***. По способу записи дроби делятся на обыкновенные и десятичные. Обыкновенная дробь — это запись рационального числа в виде $\dfrac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число. ***Правильной*** называется дробь, у которой модуль числителя меньше знаменателя ($|m| < n$), в противном случае дробь называется ***неправильной***. Неправильную дробь можно представить в виде смешанного числа (т.е. суммы целой части и правильной дроби), поделив числитель на знаменатель. Тогда неполное частное является целой частью, а остаток – числителем правильной дроби.

Обратно, смешанное число можно перевести в неправильную дробь: $a\dfrac{b}{c} = \dfrac{ac+b}{c}$.

Целое число также можно считать обыкновенной дробью, знаменатель которой равен единице, т. е. $a = \dfrac{a}{1}$.

Дробь, знаменатель которой степень числа 10, называют ***десятичной***. Десятичную дробь записывают в виде $\pm a_1a_2\ldots a_n, b_1b_2\ldots b_m$, где a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_m — цифры, т.е. целые неотрицательные числа, не большие девяти.

Сформулируем **основное свойство дроби**: *дробь не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же неравное нулю число*: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot c}$ или $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$, где $c \neq 0$.

[4] $n!$ (n-факториал) равен произведению всех натуральных чисел от 1 до n, то есть $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$. Принято считать, что $0! = 1$.

Основное свойство дроби используется для приведения дробей к общему знаменателю и сокращения дроби.

Чтобы привести две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ к общему знаменателю, нужно числитель a первой дроби умножить на знаменатель d второй, числитель второй дроби c умножить на знаменатель первой дроби b и знаменатели обеих дробей заменить на их произведение bd. После приведения к общему знаменателю дроби примут вид $\frac{ad}{bd}$ и $\frac{cb}{db}$.

Две дроби имеют бесконечно много общих знаменателей, поэтому для упрощения вычислений можно искать наименьший общий знаменатель. Для этого знаменатели дробей предварительно раскладывают на множители и находят наименьшее общее кратное знаменателей.

Рассмотрим операции над дробями:

а) чтобы сложить или вычесть дроби, необходимо сначала привести их к общему знаменателю, а затем сложить или вычесть их числители, записав полученное выражение в числитель, а в знаменатель записать их общий знаменатель $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$;

б) чтобы умножить дроби, необходимо перемножить соответственно их числители и знаменатели $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$;

в) чтобы разделить дробь на дробь, необходимо делимое умножить на дробь, обратную делителю, то есть на дробь, в которой числитель и знаменатель поменялись местами $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$;

г) чтобы разделить дробь на число, нужно знаменатель дроби умножить на это число, а числитель дроби оставить без изменения $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$;

д) чтобы разделить число на дробь, нужно дробь перевернуть, числитель перевернутой дроби умножить на это число, а знаменатель оставить без изменения $a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$.

Свойства пп. «г» и «д» позволяют преобразовывать трехэтажные дроби по формулам: $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{c}=\dfrac{a}{b}:c=\dfrac{a}{bc}$, $\dfrac{a}{\left(\dfrac{b}{c}\right)}=\dfrac{a}{1}:\dfrac{b}{c}=\dfrac{ac}{b}$.

Аналогично, для четырехэтажной дроби по свойству п. «в»: $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\left(\dfrac{c}{d}\right)}=\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bc}$.

Отношение двух многочленов называется ***алгебраической дробью***.

Сформулируем **основное свойство дроби**: *дробь не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же выражение, неравное нулю ни в одной точке:* $\dfrac{f(x)}{g(x)}=$ $=\dfrac{f(x)\cdot h(x)}{g(x)\cdot h(x)}$ или $\dfrac{f(x)\cdot h(x)}{g(x)\cdot h(x)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где для всех значений x многочлен $h(x)\neq 0$.

Операции над алгебраическими дробями выполняют по тем же правилам, что и операции над числовыми дробями.

Правильной называют алгебраическую дробь, у которой степень числителя меньше степени знаменателя, в противном случае дробь называется ***неправильной***. Поделив числитель на знаменатель, неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби[5].

Пример 1. Найдите значение выражения $\left(2\dfrac{3}{4}+1\dfrac{1}{3}\right):\left(1\dfrac{11}{12}-1\dfrac{3}{16}\right)$.

Решение. Сначала выполним действия в скобках:

1) $2\dfrac{3}{4}+1\dfrac{1}{3}=\dfrac{11^{\backslash 3}}{4}+\dfrac{4^{\backslash 4}}{3}=\dfrac{33}{12}+\dfrac{16}{12}=\dfrac{49}{12}$;

[5] Деление многочленов будет рассмотрено в пятой главе.

2) $1\frac{11}{12}-1\frac{3}{16}=\frac{23^{\backslash 4}}{12}-\frac{19^{\backslash 3}}{16}=\frac{92}{48}-\frac{57}{48}=\frac{35}{48}$.

Выполним операцию деления дробей:

3) $\frac{49}{12}:\frac{35}{48}=\frac{49}{12}\cdot\frac{48}{35}=\frac{7\cdot 4}{5}=\frac{28}{5}=5{,}6$.

Ответ: 5,6.

Пример 2. Упростите выражение $\left(x-\frac{x^2-4}{x+3}\right):\frac{3x+4}{x^2-9}-x$.

Решение. Приведем выражение в скобках к общему знаменателю, а затем приведем подобные в числителе получившейся дроби:

1) $x^{\backslash x+3}-\frac{x^2-4}{x+3}=\frac{x^2+3x-x^2+4}{x+3}=\frac{3x+4}{x+3}$.

Выполним деление дроби на дробь, разложив знаменатель делителя по формуле разности квадратов:

2) $\frac{3x+4}{x+3}:\frac{3x+4}{x^2-9}=\frac{3x+4}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{3x+4}=\frac{\cancel{3x+4}}{\cancel{x+3}}\cdot\frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{3x+4}}=x-3$;

3) $x-3-x=-3$.

Ответ: –3.

Пример 3. Упростите выражение $\left(\frac{x+7}{x-7}-\frac{x-7}{x+7}\right):\frac{x}{49-x^2}$.

Решение. Приведем дроби в скобках к общему знаменателю и раскроем скобки в числителе получившейся дроби, применив формулы квадрата суммы и квадрата разности

1) $\frac{x+7^{\backslash x+7}}{x-7}-\frac{x-7^{\backslash x-7}}{x+7}=\frac{(x+7)^2-(x-7)^2}{(x-7)(x+7)}=$

$=\frac{x^2+14x+49-x^2+14x-49}{(x-7)(x+7)}=\frac{28x}{x^2-49}$.

Выполним деление дроби на дробь:

2) $\frac{28x}{x^2-49}:\frac{x}{49-x^2}=\frac{28x}{x^2-49}\cdot\frac{49-x^2}{x}=\frac{28\cancel{x}}{\cancel{x^2-49}}\cdot\frac{-\cancel{(x^2-49)}}{\cancel{x}}=-28$.

Ответ: –28.

Пример 4. Упростите выражение

$$\left(\frac{5}{a+2}-\frac{3}{a-2}+\frac{12}{a^2-4}\right)\cdot(a^2+4a+4).$$

Решение. Приведем дроби в скобках к общему знаменателю и приведем подобные в числителе получившейся дроби:

$$\frac{5}{a+2}-\frac{3}{a-2}+\frac{12}{a^2-4}=\frac{5^{\backslash a-2}}{a+2}-\frac{3^{\backslash a+2}}{a-2}+\frac{12^{\backslash 1}}{(a-2)(a+2)}=$$

$$=\frac{5a-10-3a-6+12}{(a-2)(a+2)}=\frac{2a-4}{(a-2)(a+2)}=\frac{2\,\cancel{(a-2)}}{\cancel{(a-2)}\,(a+2)}=\frac{2}{a+2}.$$

Второй сомножитель свернем по формуле квадрата суммы $a^2+4a+4=(a+2)^2$ и выполним умножение:

$$\frac{2}{a+2}\cdot(a+2)^2=\frac{2}{\cancel{a+2}}\cdot\frac{(a+2)^{\cancel{2}}}{1}=2(a+2)=2a+4.$$

Ответ: $2a+4$.

Пример 5(*). Упростите выражение $\left(\frac{x^3+y^3}{x+y}-xy\right)\cdot\left(\frac{x+y}{x^2-y^2}\right)^2$.

Решение. Преобразуем выражение в первых скобках, применив формулы суммы кубов, а затем квадрата разности:

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}-xy=\frac{\cancel{(x+y)}\,(x^2-xy+y^2)}{\cancel{x+y}}-xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2.$$

Преобразуем выражение, стоящее во вторых скобках, применив формулу разности квадратов:

$$\frac{x+y}{x^2-y^2}=\frac{\cancel{x+y}}{\cancel{(x+y)}\,(x-y)}=\frac{1}{x-y}.$$

Перемножив найденные выражения, получим в результате:

$$(x-y)^2\cdot\left(\frac{1}{x-y}\right)^2=\frac{\cancel{(x-y)^2}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{(x-y)^2}}=1.$$

Ответ: 1.

Часто при решении задач, в которых встречается квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$[6]), для упрощения вычислений удобно разложить его на множители:

а) если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 (дискриминант $D > 0$), то квадратный трехчлен представим в виде $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;

б) если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один действительный корень кратности два (два равных корня) x_0 (дискриминант $D = 0$), то $ax^2 + bx + c = a(x-x_0)^2$;

в) если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней (дискриминант $D < 0$), то квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ на множестве действительных чисел на линейные множители не раскладывается[7].

Пример 6(*). Упростите выражение

$$\frac{2a}{a^2-16}:\left(\frac{a+1}{3a^2-11a-4}-\frac{1}{a-4}\right)-\frac{11}{a+4}.$$

Решение. Выполним сложение дробей в скобках. Чтобы разложить на множители знаменатель первой дроби, нужно воспользоваться формулой разложения квадратного трехчлена на множители. Для этого найдем корни квадратного уравнения $3a^2-11a-4=0$: $a_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121+48}}{6}=\frac{11\pm 13}{6}\Rightarrow a_1=4, a_2=-\frac{1}{3}$ и разложим квадратный трехчлен в произведение линейных множителей:

$$3a^2-11a-4=3(a-4)\left(a+\frac{1}{3}\right)=(a-4)(3a+1).$$

Тогда $\frac{a+1}{3a^2-11a-4}-\frac{1}{a-4}=\frac{a+1}{(3a+1)(a-4)}-\frac{1^{\backslash 3a+1}}{a-4}=$

---

[6] В элементарной математике введены следующие обозначения числовых множеств: **N** – множество натуральных чисел, **Z** – множество целых чисел, **R** – множество действительных чисел, **C** – множество комплексных чисел.

[7] Если квадратное уравнение с действительными коэффициентами не имеет действительных корней, то оно имеет комплексно сопряженные корни $x_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ (α и β – действительные числа, $i^2 = -1$), и квадратный трехчлен раскладывается в произведение линейных множителей $ax^2 + bx + c = a(x - (\alpha - \beta i))(x - (\alpha + \beta i))$.

$$= \frac{a+1-3a-1}{(3a+1)(a-4)} = \frac{-2a}{(3a+1)(a-4)}.$$

Выполним деление и вычитание дробей:

$$\frac{2a}{a^2-16} : \frac{-2a}{(3a+1)(a-4)} - \frac{11}{a+4} = \frac{\cancel{2a}}{\cancel{(a-4)}\,(a+4)} \cdot \frac{(3a+1)\,\cancel{(a-4)}}{-\cancel{2a}} - \frac{11}{a+4} =$$

$$= -\frac{3a+1}{a+4} - \frac{11}{a+4} = \frac{-3a-1-11}{a+4} = \frac{-3\,\cancel{(a+4)}}{\cancel{a+4}} = -3.$$

Ответ: –3.

Существует достаточно широкий класс задач, при решении которых в квадратном трехчлене $ax^2 + bx + c$ необходимо выделить полный квадрат. Метод выделения полного квадрата основан на применении формул квадрата суммы или квадрата разности. Рассмотрим это преобразование. В приведенном квадратном трехчлене второе слагаемое представим в виде удвоенного произведения переменной x и некоторого числа, а затем прибавим и вычтем квадрат этого числа. Итак,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Пример 7. Выделите полный квадрат в выражениях

а) $x^2 + 4x - 7$;

б) $2x^2 - 8x + 11$;

в) $3 + 2x - x^2$;

г) $5x - x^2 - 4$.

Решение. Выполним преобразование, как указано выше.

а) $x^2 + 4x - 7 = x^2 + 2\cdot 2\cdot x + 4 - 4 - 7 = (x + 2)^2 - 11$;

б) $2x^2 - 8x + 11 = 2(x^2 - 4x + 5{,}5) = 2(x^2 - 2\cdot 2\cdot x + 4 - 4 + 5{,}5) =$
$= 2((x - 2)^2 + 1{,}5) = 2(x - 2)^2 + 3$;

в) $3 + 2x - x^2 = -(x^2 - 2x - 3) = -(x^2 - 2\cdot 1\cdot x + 1 - 1 - 3) =$
$= -((x - 1)^2 - 4) = -(x - 1)^2 + 4$;

г) $5x - x^2 - 4 = -(x^2 - 5x + 4) = -(x^2 - 2\cdot 2{,}5\cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 4) =$
$= -((x - 2{,}5)^2 - 2{,}25) = -(x - 2{,}5)^2 + 2{,}25$.

Выражение вида a^n называется n-й ***степенью*** числа a. Число a называется ***основанием степени***, n — ***показателем степени***. Если n натуральное число, то $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$.

Основные свойства степеней:

1) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$; 2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; 5) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; 6) $a^0 = 1$; 7) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Заметим, что из свойства п. 3 вытекает, что $\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m$.

Корнем степени n из числа a называется такое число $\sqrt[n]{a}$, n-я степень которого равна a, т.е. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Понятие корня определяют для натуральных показателей n, отличных от единицы. Если показатель n нечетный, то a — любое действительное число. Если же показатель n четный, то a — неотрицательное число, и значение выражения $\sqrt[n]{a}$ также считают неотрицательным (в этом случае выражение $\sqrt[n]{a}$ называют арифметическим корнем)[8].

Основные свойства корней:

1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; 2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; 3) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$;

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$; 5) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Для произвольных натуральных чисел m и n и положительного числа a степенью с рациональным показателем $\dfrac{m}{n}$ называется число $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

---

[8] Для любого комплексного числа z, отличного от нуля, корень степени n имеет n различных комплексных значений, т.е. существует n различных комплексных чисел w, удовлетворяющих равенству $w^n = z$.

Для степеней с дробными и отрицательными показателями также справедливы основные свойства степеней, причем, если показатель степени целый отрицательный, то основание степени считают отличным от нуля, а если показатель степени дробный, то основание степени считают положительным.

Наиболее удобными в технических расчетах являются степени, основанием которых служит число[9] e.

Пример 8. Вычислите значение выражения

$64^{1/6} - 0{,}2^3 \cdot 0{,}2^{-2} + 5^3 \cdot 5^{-4} + 6{,}5^0$.

Решение. $64^{1/6} - 0{,}2^3 \cdot 0{,}2^{-2} + 5^3 \cdot 5^{-4} + 6{,}5^0 = (2^6)^{1/6} - 0{,}2^{3-2} + 5^{3-4} +$
$+ 1 = 2 - 0{,}2 + + 5^{-1} + 1 = 2 - 0{,}2 + 0{,}2 + 1 = 3$.

Ответ: 3.

Пример 9. Вычислите значение выражения

$3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{27} \cdot \sqrt{75} : \sqrt{125}$.

Решение. Имеем $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{27} \cdot \sqrt{75} : \sqrt{125} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 \cdot \sqrt{9 \cdot 3} \cdot \sqrt{3 \cdot 25}}{\sqrt{5 \cdot 25}} =$

$$= \frac{6 \cdot \cancel{\sqrt{5}} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \cancel{5} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{5} \cdot \cancel{\sqrt{5}}} = 18 \cdot 3 = 54.$$

Ответ: 54.

Пример 10(*). Упростите выражение

$$\left(x^{5/4} y^{-8}\right)^{1/3} \cdot \frac{x^{2/3} \cdot y^{7/6} \cdot x^{-1/4}}{x^{-1/6} y^{-3/2}}, \text{ если } x > 0,\ y > 0.$$

Решение. По свойствам степеней

$$\left(x^{5/4} y^{-8}\right)^{1/3} \cdot \frac{x^{2/3} y^{7/6} x^{-1/4}}{x^{-1/6} y^{-3/2}} = x^{\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3}} \cdot y^{-8\cdot\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)} \cdot y^{\frac{7}{6}-\left(-\frac{3}{2}\right)} =$$

$$= x^{\frac{5}{12}} \cdot y^{-\frac{8}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{7}{6}+\frac{3}{2}} = x^{\frac{5}{12}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}} \cdot y^{-\frac{8}{3}+\frac{7}{6}+\frac{3}{2}} = x^1 y^0 = x.$$

---

[9] Число e определяется как предел последовательности $a_n = \left(1 + 1/n\right)^n$, то есть $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + 1/n\right)^n$. Число e – иррациональное. Иногда число e называют *числом Эйлера*. Значение числа e с первыми пятнадцатью знаками после запятой следующее: $e \approx 2{,}718281828459045$.

Показатели степеней:

у переменной x: $\frac{5}{12}+\frac{2^{\backslash 4}}{3}+\frac{1^{\backslash 2}}{6}-\frac{1^{\backslash 3}}{4}=\frac{5+8+2-3}{12}=1$,

у переменной y: $-\frac{8^{\backslash 2}}{3}+\frac{7^{\backslash 1}}{6}+\frac{3^{\backslash 3}}{2}=\frac{-16+7+9}{6}=0$.

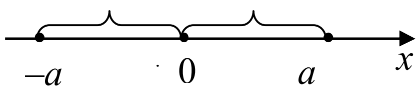
Ответ: x.

Рассмотрим правила преобразования выражений, содержащих знак модуля.

Модулем (***абсолютной величиной***) действительного числа $\boldsymbol{a}$ называется само это число, когда число $\boldsymbol{a}$ неотрицательно, и число, противоположное числу $\boldsymbol{a}$, когда число $\boldsymbol{a}$ отрицательно.

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geq 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

Геометрически модуль действительного числа равен расстоянию на числовой прямой от начала координат до точки, изображающей это число[10].



Основные свойства модуля:

1) $|a|\geq 0$; 2) $|a|\geq a, |a|\geq -a$; 3) $|a|=|-a|$;

4) $|a+b|\leq |a|+|b|$; 5) $|a-b|\geq \big||a|-|b|\big|$; 6) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$;

7) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$; 8) $\sqrt{a^2}=|a|$.

Пример 11. Упростите выражение $|2x-3|-3|x-12|+x$, если $2\leq x\leq 12$.

Решение. На отрезке $[2; 12]$ выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют постоянный знак, причем $2x-3>0$, $x-12\leq 0$.

[10] Между множеством комплексных чисел и множеством точек на плоскости можно установить взаимно-однозначное соответствие. Пусть на плоскости задана декартова система координат, тогда комплексному числу $z = x + yi$ ставится в соответствие точка $M(x; y)$. Модуль комплексного числа – это расстояние от точки M до начала координат.

Значит, $|2x-3|=2x-3$, $|x-12|=-(x-12)$. Тогда $|2x-3|-3|x-12|+$ $+x=2x-3+3(x-12)+x=6x-39$.

Ответ: $6x-39$.

В заключение приведем схему преобразования алгебраических выражений.

В большинстве случаев преобразование выражений можно проводить по следующему алгоритму:

а) избавиться от степеней с отрицательными показателями;

б) заменить, если это необходимо, буквенные величины так, чтобы избавиться от степеней с дробными показателями и от корней;

в) разложить числители и знаменатели дробей на множители и, если это возможно, сократить их;

г) привести дроби к общему знаменателю и выполнить сложение и вычитание дробей;

д) раскрыть скобки и привести подобные в числителе;

е) сократить полученную дробь и вернуться к исходной переменной.

Упражнения

Вычислите значения выражений

1. а) $(6{,}374+12{,}586):1{,}58$; б) $2+0{,}75(0{,}8\cdot 2{,}25-2{,}05)$.
2. а) $(0{,}1-0{,}32\cdot 1{,}25):1{,}5-1{,}8$; б) $(9{,}9-2{,}16:0{,}2)\cdot 2{,}5+1{,}25$.
3. а) $(129{,}28-93{,}46)\cdot\dfrac{5}{9}$; б) $(3{,}05-2{,}125\cdot 3{,}2):\dfrac{9}{4}-1\dfrac{1}{3}$.
4. а) $3\dfrac{3}{4}+2\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}$; б) $2\dfrac{5}{12}-1\dfrac{7}{16}$; в) $3{,}06:1{,}2-1{,}5^2\cdot 1\dfrac{2}{3}$.
5. а) $\left(\dfrac{5}{18}-\dfrac{7}{12}\cdot 0{,}5\right):\dfrac{5}{18}-\dfrac{19}{20}$; б) $\left(\dfrac{3}{16}-0{,}45\right)\cdot 0{,}8-0{,}21:0{,}2$.
6. а) $\left(2\dfrac{3}{4}-1\dfrac{4}{7}\right):3\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{14}$; б) $\left(2\dfrac{1}{3}+3\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(4\dfrac{1}{14}-3\dfrac{1}{7}\right)-3\dfrac{3}{4}$.
7. а) $\left(1\dfrac{8}{15}+0{,}25-3\dfrac{1}{30}-1\dfrac{3}{4}\right):2\dfrac{1}{7}$; б) $\left(1\dfrac{1}{5}\cdot 0{,}7-1{,}2^2\right):1\dfrac{1}{2}$.
8. а) $\dfrac{5{,}04:2{,}4}{\dfrac{2}{3}-(0{,}8-0{,}8\cdot 1{,}5)\cdot\dfrac{5}{6}}$; б) $\left(\dfrac{11}{15}-1\dfrac{9}{10}+\dfrac{5}{18}\right)\cdot 0{,}9+0{,}3$.

Раскройте скобки и приведите подобные

9. а) $4(4a + 3b) - 3(3a + 4b)$; б) $0{,}2(7x + 9) - 8{,}3(1 - 2x)$.

10. а) $(4x + 5y) - (7x - 2y) + (9x - 11y)$;

б) $4(5a^2b - 3ab^2) - 6(3a^2b - 2ab^2)$;

в) $3{,}4(1{,}2x + 2{,}4y) - 3{,}6(2{,}3x - 1{,}4y)$.

11. а) $2{,}6(2{,}3x + 3{,}8y) - 1{,}4(5{,}7x - 5{,}8y)$;

б) $2{,}3(5a^2 - 4a + 3) - 3{,}7(2a^2 - 3a + 1)$;

в) $4a^2b - (2a^2 - 5b^2)(a + 2b) - 5ab^2$.

12. а) $(3a - 2b)(a - b) - (a + b)(2a - 7b)$;

б) $2(x + y)(3x + 2y) - 4(x - y)(x + y) - 2x(x - y) - 4y(x + 2y)$;

в) $(2x + 3y)(4y - 3x) - 2(x + y)(y - 4x) - 2x^2 - 10y^2$.

Упростите выражения

13. а) $\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}$; б) $\dfrac{(2x+y)^2-(x+2y)^2}{x^2-y^2}$.

14. а) $\dfrac{a^2+a}{1+a}+\dfrac{a^2-1}{a-1}-2a$; б) $\dfrac{a^2+a}{1+a}+\dfrac{a^2-1}{1-a}$.

15. а) $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}-\dfrac{a^2-ab}{a-b}+b$; б) $\left(x+3+\dfrac{18}{x-3}\right)\cdot\dfrac{9-6x+x^2}{x^2+9}$.

16. а) $\left(a+\dfrac{6-a^2}{1+a}\right):\dfrac{a+6}{a^2-1}-a$; б) $\dfrac{a}{a+5}+\dfrac{10a}{a^2-25}-\dfrac{5}{a-5}$.

17. а) $\left(3x+\dfrac{12x-75}{x-4}\right):\left(x-\dfrac{6x-25}{x-4}\right)+\dfrac{30}{x+5}$; б) $\dfrac{x^2}{x+2}-\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

18. а) $\left(x+2+\dfrac{8}{x-2}\right):\dfrac{x^2+4}{4-4x+x^2}$; б) $\left(\dfrac{x-7}{x-2}-\dfrac{x+7}{x+2}\right)\cdot\dfrac{x^2-4}{x}$.

19. а) $\dfrac{a^2-9}{a+3}+\dfrac{a^2-3a}{3-a}$; б) $\dfrac{a^2-4}{a-1}\left(\dfrac{a+5}{3a-6}-\dfrac{2}{a-2}\right)-\dfrac{a-4}{3}$;

20. а) $\left(x+\dfrac{3-x^2}{x-2}\right):\dfrac{2x-3}{x^2-4x+4}+x$;

б) $\left(a+\dfrac{ab}{a-b}\right)\left(\dfrac{ab}{a+b}-a\right):\dfrac{a^4}{a^2-b^2}$.

21. Выделите полный квадрат в выражениях

а) $x^2 - 8x + 1$; б) $3x^2 - 12x + 2$;

в) $7 + 6x - x^2$; г) $9x - x^2 - 5$.

22. а) $|3x-11|-2|x+2|$ при $-2 \le x \le 3$;

б) $|7-4x|-|5+4x|$ при $x \le -2$;

в) $|9-2x|+2|x+3|$ при $x > 5$.

23. а) $2|x-2{,}5|-|17-2x|$ при $x < 0$;

б) $|3x-4|+|15+2x|$ при $-7 \le x \le 1$;

в) $|x+4|-|10-3x|$ при $x > 4$.

24. а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{24}$; б) $\left(\sqrt[5]{7}\right)^{10}\cdot\left(\sqrt[5]{3}\right)^{7}\cdot\sqrt[5]{27}$;

в) $\left(\sqrt{12}+\sqrt{75}+\sqrt{27}\right):\sqrt{3}$; г) $\sqrt{2}\left(2\sqrt{12}+2\sqrt{18}\right)-\sqrt{96}$.

25. а) $\dfrac{4ab^2}{15cdy^2}\cdot\dfrac{5axy}{8ab^3x}\cdot\dfrac{36b^2cdy}{3ab}$; б) $\dfrac{9a^3b^2}{5x^4y}\cdot\dfrac{20x^3y^2}{6a^2b^3}\cdot\dfrac{12xb}{8ay}$.

26. а) $\left(\dfrac{x^5}{y^3}\right)^{-2}:\left(\dfrac{2y^{-2}}{x^{-4}}\right)^{-3}$; б) $\left(\dfrac{x^3y^{-2}}{7y^2}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{x^2y^{-5}}{7x^{-4}}\right)^{2}$.

27. а) $x^{2/3}\cdot x^{-3/4}:x^{-7/12}$; б) $(a^{-2{,}5})^{-1{,}2}-(a^{3{,}4})^{1{,}5}:a^{2{,}1}$.

28. а) $(0{,}125x^{-6})^{-2/3}-(32x^{10})^{2/5}$; б) $a^{5/6}\cdot a^{-3/4}:a^{1/12}$;

в) $(64x^6)^{5/6}:(x^{-9})^{-2/3}\cdot x$; г) $\left(x^{-10}\right)^{-3/5}\cdot\left(27^{-1}x^6\right)^{-2/3}$.

Упростите выражения

29. а) $\dfrac{x^3-9x}{x^2+15}\cdot\left(\dfrac{x+5}{x^2-3x}+\dfrac{x-5}{x^2+3x}\right)$;

б) $\dfrac{9xy^2-x^3}{9y^2+x^2}\cdot\left(\dfrac{x+3y}{x^2-3xy}+\dfrac{x-3y}{3xy+x^2}\right)$.

30. а) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2-2xy}:\dfrac{xy+x^2}{x-y}-\dfrac{y^2}{x}$;

б) $\left(\dfrac{a+9}{4-2a}-\dfrac{9-a}{4+2a}\right)\cdot\dfrac{2a^2-8}{a}$.

31. а) $\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{8}{x^2+2x}\right)\frac{x^2-2x}{4-x}+\frac{7x+8}{x+2}$;

б) $\left(\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}-\frac{a^2+4}{4-a^2}\right)\cdot\frac{(a-2)^2}{a^2+2a}+\frac{2}{a}$.

32. а) $\left(x+\frac{x^2-3x+3}{x-2}\right):\frac{2x-3}{x^2-4x+4}-x^2+3x$;

б) $\frac{(a+2)^3+(a-2)^3}{a^2+12}-2a$.

33. а) $\frac{8-x^3}{x^2+2x+4}+\frac{8+x^3}{x^2-2x+4}$; б) $\frac{27-x^3}{x^2+3x+9}+\frac{x^3+64}{x^2-4x+16}$.

34. а) $\frac{25-x^{4/25}}{x^{2/25}-5}+x^{2/25}$; б) $\frac{x^{6/7}+27}{x^{2/7}+3}-x^{4/7}+3x^{2/7}$.

35. а) $\sqrt{x^2+12x+36}+\sqrt{x^2-22x+121}$ при $-6\le x\le 11$;[11]

б) $\sqrt{x^2+24x+144}+\sqrt{10x\left(\frac{x}{10}+\frac{10}{x}\right)-20x}$, если $x\in[1;10]$.

36. а) $8x-x\cdot\sqrt{(x+8)^2-32x}$, если $x=\sqrt{15}$;

б) $\sqrt{x^4-10x^2+25}+x\cdot\sqrt{(x-6)^2+4x-20}$, если $x=3$.

37. а) $\sqrt[3]{1\frac{1}{8}}:\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$; б) $0{,}2\sqrt{0{,}25}-2{,}5\sqrt[3]{0{,}027}+0{,}1\cdot\sqrt[4]{16}$;

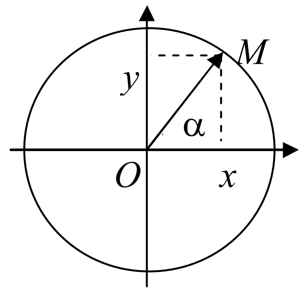
в) $0{,}5\sqrt{0{,}64}-0{,}8\sqrt[3]{0{,}064}+0{,}1\cdot\sqrt[4]{81}$.

38. а) $\left(\frac{16}{a}\right)^{1/3}\cdot\left(\frac{a^{-2}}{2}\right)^{2/15}:\left(2a^7\right)^{1/5}\cdot\left(a^{4/3}\right)^{3/2}$;

б) $(9b^6)^{1/5}:\left(\frac{1}{3b^3}\right)^{-3/20}\cdot\left(\frac{b^3}{3}\right)^{1/4}:\left(b^{-3/8}\right)^{-4}$.

[11] В задачах 35, 36 применить свойство модуля п. 8.

§ 2 Преобразование тригонометрических выражений



Пусть на плоскости задана декартова система координат Oxy. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Радиус OM образует с положительным направлением оси OX угол α. Если поворот вектора OM от положительного направления оси OX осуществляется против часовой стрелки, то говорят, что угол α положительный, а если по часовой стрелке, то угол α отрицательный. Углы в тригонометрии измеряются в градусах и радианах. Развернутый угол 180° равен π радиан. Каждой точке на окружности соответствует бесконечно много углов, отличающихся на 360° или 2π радиан. Перевод из градусов в радианы и из радианов в градусы осуществляется с помощью пропорции $\begin{array}{l} 180° - \pi(\text{rad}) \\ \alpha° \quad - x(\text{rad}). \end{array}$

Определения основных тригонометрических функций[12]

Синусом угла α называется отношение ординаты точки M к радиусу окружности $\sin\alpha = \dfrac{y}{R}$. Синус определен для всех углов α. В 1-й и 2-й четвертях синус принимает положительные значения, в 3-й и 4-й — отрицательные.

Косинусом угла α называется отношение абсциссы точки M к радиусу окружности $\cos\alpha = \dfrac{x}{R}$. Косинус определен для всех углов α. В 1-й и 4-й четвертях косинус принимает положительные значения, во 2-й и 3-й — отрицательные.

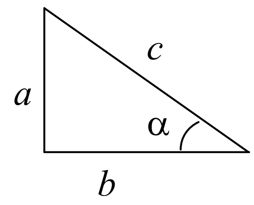
[12] В этом параграфе приведены определения и перечислены свойства тригонометрических выражений для действительных углов. Тригонометрические выражения для комплексного переменного определяются через показательные выражения, например $\sin z = -0{,}5i\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$, $\cos z = 0{,}5\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$.

Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки M к ее абсциссе $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$. Тангенс определен для всех углов α, отличных от $\dfrac{\pi}{2} + \pi n \ (n \in \mathbf{Z})$.

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки M к ее ординате $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$. Котангенс определен для всех углов α, отличных от $\pi n \ (n \in \mathbf{Z})$.

В 1-й и 3-й четвертях тангенс и котангенс принимают положительные значения, во 2-й и 4-й – отрицательные.

Тригонометрические функции острых углов ($0° < \alpha < 90°$) имеют следующий геометрический смысл: в произвольном прямоугольном треугольнике $\sin\alpha$ равен отношению противолежащего катета к гипотенузе, $\cos\alpha$ — отношению прилежащего катета к гипотенузе, $\operatorname{tg}\alpha$ — отношению противолежащего катета к прилежащему, $\operatorname{ctg}\alpha$ — отношению прилежащего катета к противолежащему: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$.



Если радиус окружности $R = 1$, то $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$.

Синус, тангенс и котангенс — нечетные функции, то есть $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$, косинус — четная функция, то есть $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Если $\alpha \in \mathbf{R}$ (угол α действительный), то синус и косинус функции ограниченные: $|\sin\alpha| \le 1$, $|\cos\alpha| \le 1$[13]. Все четыре функции периодические: $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha$ (период $T = 2\pi$), $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha$ (период $T = \pi$) $(n \in \mathbf{Z})$.

[13] Синус и косинус комплексного аргумента могут принимать любое действительное или комплексное значение.

Значения тригонометрических функций в стандартных углах

Функции	Углы, °/rad							
	0/0	$30/\frac{\pi}{6}$	$45/\frac{\pi}{4}$	$60/\frac{\pi}{3}$	$90/\frac{\pi}{2}$	$180/\pi$	$270/\frac{3\pi}{2}$	$360/2\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	–1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

2. а) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; б) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; в) $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$.

3. а) $1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; б) $1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Равенство п. 1 называется ***основным тригонометрическим тождеством***, а равенства п. 3 — следствиями из основного тождества.

Формулы сложения аргументов

4. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.
5. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$.
6. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.
7. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Формулы приведения

Формулы приведения позволяют выразить значение тригонометрической функции любого угла через значение тригонометрической функции острого угла.

β	$90° - \alpha$	$90° + \alpha$	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\beta$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\beta$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

β	$270° - \alpha$	$270° + \alpha$	$360° - \alpha$	$360° + \alpha$
$\sin\beta$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\beta$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\beta$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\beta$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

Анализируя формулы приведения, можно отметить следующее: если угол α откладывается от горизонтального диаметра ($\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$), то функция не меняется, если же угол α откладывается от вертикального диаметра $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha,\ \frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$, то функция меняется на кофункцию (синус $\Leftrightarrow$ косинус, тангенс $\Leftrightarrow$ котангенс). Знак в формуле совпадает со знаком исходной функции в той четверти, в которой лежит угол β.

Тригонометрические функции двойных и половинных углов, формулы понижения степени

8. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

9. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$.

10. $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$; $\quad \left(\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\right)$.

11. $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$; $\quad \left(\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\right)$.

12. а) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; б) $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Формулы пп. 10 и 11, записанные в виде $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ и $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, называют ***формулами понижения степени***, а формулы п. 12 применяют, выполняя ***универсальную тригонометрическую подстановку***.

Формулы преобразования произведения функций в сумму и суммы функций в произведение

13. $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$.

14. $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$.

15. $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$.

16. $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

17. $\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

18. $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

19. $\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Пример 12. Вычислите $9\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ и $\pi<\alpha<2\pi$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества получаем $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Так как $\pi<\alpha<2\pi$, то $\sin\alpha<0$. Таким образом, $9\sin\alpha = -9\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -9\cdot\sqrt{1-\dfrac{32}{81}} = -9\cdot\sqrt{\dfrac{49}{81}} = -9\cdot\dfrac{7}{9} = -7$.

Ответ: –7.

Пример 13. Вычислите $16\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{5}{\sqrt{39}}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. По следствию к основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. Так как $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\dfrac{\sqrt{39}}{5}$, то $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ (угол α из второй четверти, синус положителен).

Итак, $16\sin\alpha = 16 : \sqrt{1+\dfrac{39}{25}} = 16\cdot\sqrt{\dfrac{25}{64}} = \dfrac{16\cdot 5}{8} = 10$.

Ответ: 10.

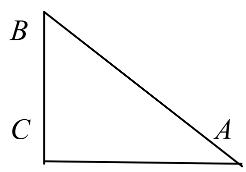
Пример 14. Вычислите $5\sin 150° + 3\sin 60°\cdot\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{ctg}45°$.

Решение. Применим формулу приведения и вычислим значения тригонометрических функций в стандартных углах:

$$5\sin 150° + 3\sin 60°\cdot\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{ctg}45° = 5\sin(180° - 30°) +$$
$$+3\sin 60°\cdot\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{ctg}45° = 5\sin 30° + 3\sin 60°\cdot\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{ctg}45° =$$
$$= 5\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1 = 2{,}5 + 1{,}5 = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 15. В треугольнике ABC угол C – прямой, $AB = 15$, $\sin A = \sqrt{0{,}51}$. Найдите AC.



Решение. В треугольнике ABC выполняются равенства $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$, $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$.

Из основного тригонометрического тождества выразим косинус угла A: $\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-0{,}51} = 0{,}7$ (угол A — острый, поэтому косинус угла A положителен). Теперь нетрудно найти AC: $AC = AB\cdot\cos A = 15\cdot 0{,}7 = 10{,}5$.

Ответ: 10,5.

Пример 16(*). Вычислите значение тригонометрического выражения $\dfrac{\cos 340°\sin 20° + \cos 20°\sin 20°}{\sin 155°\sin 65° + \cos 65°\cos 25°}\cdot\operatorname{ctg}220°$.

Решение. Применим формулы приведения:

$$\frac{\cos 340°\sin 20° + \cos 20°\sin 20°}{\sin 155°\sin 65° + \cos 65°\cos 25°}\cdot \operatorname{ctg} 220° =$$

$$= \frac{\cos(360° - 20°)\sin 20° + \cos 20°\sin 20°}{\sin(180° - 25°)\sin 65° + \cos 65°\cos 25°}\times$$

$$\times \operatorname{ctg}(180° + 40°) = \frac{\cos 20°\sin 20° + \cos 20°\sin 20°}{\sin 25°\sin 65° + \cos 65°\cos 25°}\cdot \operatorname{ctg} 40° .$$

Применим формулы синуса двойного угла и косинуса разности двух углов:

$$\frac{2\cos 20°\sin 20°}{\cos 65°\cos 25° + \sin 25°\sin 65°}\cdot \operatorname{ctg} 40° = \frac{\sin 40°\cdot \operatorname{ctg} 40°}{\cos(65° - 25°)} =$$

$$= \frac{\cancel{\sin 40°}}{\cancel{\cos 40°}}\cdot \frac{\cancel{\cos 40°}}{\cancel{\sin 40°}} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 17(*). Вычислите $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$.

Решение. Применим формулы понижения степени

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin^2\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin^2\frac{5\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin^2\frac{7\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значения косинусов нашли через формулы приведения:

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Итак, $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8} =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 .$$

Ответ: 2.

Пример 18(*). Вычислите $3\cos 2\alpha + 4\sin 2\alpha + 7$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$.

Решение. $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ (формулы 12), поэтому $\sin 2\alpha = \dfrac{2\cdot 0{,}5}{1+0{,}25} = 0{,}8$; $\cos 2\alpha = \dfrac{1-0{,}25}{1+0{,}25} = 0{,}6$ и $3\cos 2\alpha +$ $+4\sin 2\alpha + 7 = 3\cdot 0{,}6 + 4\cdot 0{,}8 + 7 = 12$.

Ответ: 12.

Пример 19(*). Упростите выражение $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

Решение. Для упрощения выражения применим формулы двойного и половинного углов и формулу преобразования суммы косинусов в произведение

$$\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1} = \frac{(1+\cos 2\alpha)+(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{\cos\alpha+(2\cos^2\alpha-1)} =$$

$$= \frac{2\cos^2\alpha+2\left(\cos\dfrac{3\alpha-\alpha}{2}+\cos\dfrac{3\alpha+\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha+\cos 2\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\cos\alpha\,\cancel{(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}}{\cancel{\cos\alpha+\cos 2\alpha}} = 2\cos\alpha.$$

Ответ: $2\cos\alpha$.

Упражнения

Вычислите

39. $8\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

40. $\sqrt{10}\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

41. $17\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{15}{17}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

42. $5\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{41}}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

43. $3\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

44. $7\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

45. $2\sin 150° + 3\sin 60° \cdot \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{ctg} 45°$.

46. $\sqrt{2}\sin 45° \cdot \cos 150° \cdot \operatorname{tg} 60° + \sin 150°$.

47. $\sqrt{2}\sin\dfrac{4\pi}{3} \cdot \cos\dfrac{5\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{6}$.

48. $10(\cos 14° \cos 46° - \sin 14° \sin 44°)$.

49. $\sqrt{8}(\cos 65° \sin 20° - \sin 65° \cos 20°)$.

50. $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \sqrt{0{,}1}$ и $90° < \alpha < 180°$.

51. $16\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

52. $5\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

53. $16\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}75$.

54. $\sqrt{6}\sin\alpha$, если $\cos 2\alpha = 0{,}25$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

55. $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Упростите выражение

56. а) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;

б) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha} + \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \dfrac{1}{\cos^4\alpha}$.

57. а) $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}$; б) $\dfrac{\cos 2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$;

в) $2(\sin 15° + \cos 15°)^2$; г) $2(\sin 22{,}5° - \cos 22{,}5°)^2 - 2$.

58. а) $\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha) + \cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$;

б) $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)}$.

59. $6\left(\dfrac{\sin 15\alpha}{\sin 5\alpha} - \dfrac{\cos 15\alpha}{\cos 5\alpha}\right)$.

60. а) В треугольнике ABC угол C — прямой, $AB = 14$, $\cos A = \frac{2\sqrt{6}}{7}$. Найдите BC.

б) В треугольнике ABC угол C — прямой, $AB = \sqrt{53}$, $\operatorname{tg} A = 3{,}5$. Найдите BC.

61. а) В треугольнике ABC $AB = BC = 1{,}8\sqrt{5}$, $\sin A = \frac{2}{3}$. Найдите AC.

б) Основания равнобокой трапеции равны 23 и 31, синус угла при нижнем основании трапеции равен $\frac{\sqrt{65}}{9}$. Найдите боковую сторону трапеции.

Вычислите значение выражения

62. $13\cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -2/3$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

63. $2\sqrt{6}\cdot\sin(300°)\cdot\cos(135°)\cdot\operatorname{tg}(210°)\cdot\operatorname{ctg}(120°)$.

64. $\dfrac{\operatorname{tg}240°}{\sin 20°\cos 220° + \sin 290°\sin 40°}$.

65. $\dfrac{\sin 150° - \cos 240°}{\operatorname{ctg}370°\operatorname{ctg}260° - \operatorname{tg}190°\operatorname{ctg}170°}$.

Упростите выражение

66. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cdot\sin(\pi + \alpha) + \cos^2\alpha$.

67. $\dfrac{\sin(270° + \alpha)\operatorname{ctg}(270° + \alpha)\cos(90° + \alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha - 180°)\cos(180° - \alpha)\operatorname{ctg}(90° + \alpha)}$.

68. $\sin^2\alpha(2 + \operatorname{ctg}\alpha)(2\operatorname{ctg}\alpha + 1) - 5\sin\alpha\cos\alpha$

69. $(\sin\alpha + \cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \sin\alpha\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha)\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha$.

Упростите выражение и вычислите его значение

70. $\dfrac{2\sin\alpha + 2\sin 2\alpha}{2\sin\alpha - 3\sin 2\alpha}$, если $\cos\alpha = 0{,}3$.

71. $\dfrac{4(4\sin\alpha+3\cos\alpha)}{5\sin\alpha-3\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

72. $\dfrac{2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha-3\sin 2\alpha}{5\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha-3}$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$.

§ 3 Преобразование логарифмических выражений

В § 1 были определены степени с целым и рациональным показателями $a^m, a^{m/n}$ $(m\in\mathbf{Z}; n\in\mathbf{N})$[14]. Можно рассматривать также степени с действительным показателем a^b $(b\in\mathbf{R})$[15]. Степени чисел с действительными показателями обладают теми же свойствами, что и степени чисел с рациональными показателями[16].

Найти значение показателя степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b, не всегда просто. Например, для выражения $2^x=4$ получаем, что $x=2$, а для выражения $2^x=3$ показатель степени x больше 1, но меньше 2 и является иррациональным числом.

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b. Логарифм[17] числа b по основанию a обозначают $\log_a b$.

Тождество $a^{\log_a b}=b$ называют ***основным логарифмическим тождеством***.

Логарифмы обладают свойствами, которые определили их широкое использование для существенного упрощения трудоемких вычислений[18].

---

[14] Во множестве действительных чисел, для того чтобы избежать невыполнимых или неоднозначных операций, считают, что $a>0$. Тогда $a^b>0$ для любого действительного числа b.

[15] Если для действительного числа b имеем $m/n\le b<p/q$ $(m,p\in\mathbf{Z}$, $n,q\in\mathbf{N})$, то число a^b заключено между числами $a^{m/n}$ и $a^{p/q}$.

[16] Степени с комплексным показателем, как правило, рассматривают только для основания e. Для произвольного комплексного числа z степень определяют равенством $e^z=\lim\limits_{n\to\infty}(1+z/n)^n$.

[17] В данном пособии мы будем рассматривать только логарифмы, аргументы и основания которых действительные числа.

Из определения логарифма следует, что если a и b — действительные числа, то основание логарифма больше 0 и не равно 1, аргумент логарифма больше 0 ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$)[19].

Из основного логарифмического тождества и свойств степени вытекают свойства логарифма (считаем, что все выражения определены):

1) $\log_a 1 = 0$; 2) $\log_a a = 1$; 3) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;

4) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; 5) $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$; 6) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$;

7) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$; 8) $\log_{a^r} x = \dfrac{1}{r} \cdot \log_a x$.

При вычислениях наиболее часто используются логарифмы с основаниями 10 и e.

Логарифм, основание которого равно 10, называют ***десятичным логарифмом*** и обозначают символом lg: $\log_{10} x = \lg x$.

Логарифм, основание которого равно числу e, называют ***натуральным логарифмом***. Натуральный логарифм обозначаются символом ln: $\log_e x = \ln x$. Натуральные логарифмы являются самыми удобными при проведении различного рода операций, связанных с анализом функций.

Логарифмы с различными основаниями связаны друг с другом по формуле п. 6. Запишем формулы перехода от десятичного к натуральному логарифму и наоборот: так как $\lg e = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343$, то $\lg x \approx 0{,}4343 \cdot \ln x$ и так как $\ln 10 = \dfrac{1}{\lg e} \approx 2{,}3026$, то $\ln x \approx 2{,}3026 \cdot \lg x$.

---

[18] Логарифмы используются во многих областях человеческой деятельности: например, в решении дифференциальных уравнений, классификации значений величин (например, частоты и интенсивности звука), теории информации, теории вероятностей и т. д.

[19] Во множестве комплексных чисел рассматривается только логарифм, основанием которого является число e. ***Логарифмом комплексного*** числа $z \neq 0$ называется число A такое, что справедливо равенство $e^A = z$, и обозначается $A = \mathrm{Ln}\, z$, причем для каждого комплексного числа z существует бесконечно много значений $\mathrm{Ln}\, z$.

Пример 20. Вычислите $\log_3\left(5+\log_2\left(1+5\cdot\log_2 8\right)\right)$.

Решение. Преобразуем выражение, применив свойства логарифмов (свойства пп. 2 и 5):

$$\log_3(5+\log_2(1+5\log_2 8))=\log_3(5+\log_2(1+5\cdot\log_2 2^3))=$$

$$=\log_3\left(5+\log_2\left(1+5\cdot 3\cdot\log_2 2\right)\right)=\log_3\left(5+\log_2\left(1+15\right)\right)=$$

$$=\log_3\left(5+\log_2 2^4\right)=\log_3\left(5+4\log_2 2\right)=\log_3(5+4)=\log_3 3^2=2\,.$$

Ответ: 2.

Пример 21. Вычислите $\log_3\sqrt[3]{243}\cdot\log_2\sqrt[5]{64}+\log_2\dfrac{1}{32}$.

Решение. Преобразуем выражение, применив свойства логарифмов (свойства пп. 2 и 5):

$$\log_3\sqrt[3]{243}\cdot\log_2\sqrt[5]{64}+\log_8\frac{1}{32}=\log_3(3^5)^{1/3}\cdot\log_2(2^6)^{1/5}+\log_2 2^{-5}=$$

$$=\log_3 3^{5/3}\cdot\log_2 2^{6/5}+\log_2 2^{-5}=\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\log_3 3\cdot\log_2 2-5\cdot\log_2 2=2-5=-3\,.$$

Ответ: –3.

Пример 22. Вычислите $8^{\log_7 49}-5^{1+\log_{25}9}$.

Решение. Применим основное логарифмическое тождество и свойства логарифмов (свойства пп. 2, 5 и 8):

$$8^{\log_7 49}-5^{1+\log_{25}9}=8^{\log_7 7^2}-5\cdot 5^{\log_{5^2}3^2}=8^{2\cdot\log_7 7}-5\cdot 5^{\log_{5^2}3^2}=$$

$$=8^2-5\cdot 5^{\log_5 3}=64-5\cdot 3=64-15=49\,.$$

Ответ: 49.

Пример 23. Вычислите $\left(1+9^{\log_3 8}\right)^{\log_{65}5}$.

Решение. Применяя основное логарифмическое тождество, получим $\left(1+9^{\log_3 8}\right)^{\log_{65}5}=\left(1+3^{2\cdot\log_3 8}\right)^{\log_{65}5}=\left(1+3^{\log_3 8^2}\right)^{\log_{65}5}=$

$$=\left(1+64\right)^{\log_{65}5}=65^{\log_{65}5}=5.$$

Ответ: 5.

Пример 24(*). Вычислите $\log_a a^2b^5$, если $\log_a b^2 = 2{,}6$.

Решение. Так как $\log_a b^2 = 2\cdot\log_a b = 2{,}6$, то $\log_a b = 1{,}3$. Тогда $\log_a a^2b^5 = \log_a a^2 + \log_a b^5 = 2 + 5\cdot\log_a b = 2 + 5\cdot 1{,}3 = 8{,}5$.

Ответ: 8,5.

Пример 25(*). Вычислите $\log_5\left(15 + \log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{81^5}\right)$.

Решение. Используя свойства логарифма (свойства пп. 2, 5 и 8), получим

$$\log_5\left(15 + \log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{81^5}\right) = \log_5\left(15 + \log_{\sqrt{3}}\left((3^4)^5\right)^{1/4}\right) =$$

$$= \log_5\left(15 + \log_{3^{1/2}} 3^5\right) = \log_5(15 + 5\cdot 2\cdot\log_3 3) = \log_5(15 + 10) =$$

$$= \log_5 25 = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 26(*). Вычислите $\log_{0,25}\left(16^{\frac{1}{\log_3 4}} + 9^{\frac{1}{\log_2 3}} + 3\right)$.

Решение. Так как $\dfrac{1}{\log_3 4} = \log_4 3$, $\dfrac{1}{\log_2 3} = \log_3 2$ (свойство п. 7), то $\log_{0,25}\left(16^{1/\log_3 4} + 9^{1/\log_2 3} + 3\right) = \log_{1/4}\left(4^{2\cdot\log_4 3} + 3^{2\cdot\log_3 2} + 3\right) =$

$$= \log_{1/4}\left(4^{\log_4 9} + 3^{\log_3 4} + 3\right) = \log_{1/4}(9 + 4 + 3) = \log_{1/4} 16 = \log_{1/4} 4^2 =$$

$$= \log_{1/4}(1/4)^{-2} = -2.$$

Ответ: –2.

Пример 27(*). Вычислите $\log_2 3\cdot\log_3 25\cdot\log_5 4$.

Решение. Используя свойства логарифма (формула п. 6), перейдем к логарифму по основанию 2 и получим

$$\log_2 3\cdot\log_3 25\cdot\log_5 4 = \log_2 3\cdot\frac{\log_2 25}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 5} =$$

$$= \frac{\cancel{\log_2 3}\cdot 2\cdot\cancel{\log_2 5}\cdot 2}{\cancel{\log_2 3}\cdot\cancel{\log_2 5}} = 4.$$

Ответ: 4.

Упражнения

Упростите выражения

73. а) $\log_2\left(\lg(7+\log_2 8)\right)$; б) $\dfrac{\log_2(7\cdot 16)-\log_2 7}{\log_{12}48-\log_{12}4}$.

74. а) $\lg_{9/4}\left(0,5\cdot\log_5 125\right)$; б) $81^{\log_9 5}:16^{0,25\log_2 5}$.

75. а) $\left(\log_3 81+16^{\log_2 3}\right)^{\log_{85}36}$; б) $81^{\log_9 5}+27^{\log_3 4}$.

76. а) $\log_2\left(14+\log_3(3+\log_2 64)\right)$; б) $\log_{3,5}\left(\log_3 27\sqrt{3}\right)$.

77. а) $5\cdot 3^{1+\log_9 4}:5^{\log_5 3}$; б) $\log_2\left(3\cdot\log_5\ \ 5^{1/6}\right)$.

---

78. а) $3^{-\log_3 4}\cdot 0,5^{\log_{0,5}36}$; б) $9^{3-\log_3 54}\cdot 2^{3+\log_2 5}$.

79. а) $\log_{1/3}\left(27\sqrt{3}\right)+\dfrac{\log_8 27}{\log_2 9}$; б) $3^{\log_3 225}\cdot 0,25^{\log_2 3}$.

80. а) $4^{1/(\log_5 2)}+8\cdot 3^{1/(\log_2 3)}-5^{\log_{25}144}$; б) $27^{\log_{81}16\cdot\log_4 9}$.

81. а) $\left(\log_6 2+\log_6 18\right)\left(\log_{1/3}3+\log_9 3\right)$; б) $81^{1/\log_5 9}+27^{\log_3 2}$.

82. а) $\log_2 7\cdot\log_7 9\cdot\log_{27}64$; б) $\log_3 8\cdot\log_5 3\cdot\log_2 5$.

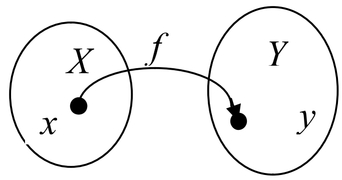
83. а) $\sqrt{81^{\frac{1}{\log_5 3}}+64^{\frac{1}{\log_3 4}}-76}$; б) $\sqrt{8^{\frac{1}{\log_5 2}}+4^{\frac{1}{\log_7 4}}+12}$.

Глава 2 ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

§ 4 Понятие функции. Свойства функций

Понятие функции является одним из основных понятий в математике.

Пусть даны два множества X и Y, и пусть указано правило, по которому каждому элементу x множества X поставлено в соответствие единственное значение y из множества Y. Это соответствие называется ***функцией*** (***отображением***) и обозначается $f\,X \to Y$ или $y = f(x)$. Функция считается заданной, если:



а) задана область определения функции $X = D(f)$;

б) задана область значений функции $Y = E(f)$;

в) известно правило (закон) соответствия, причем каждому значению аргумента $x \in X$ поставлено в соответствие **единственное** значение функции $y \in Y$.

Если $x_0 \in X$, то $f(x_0)$ называют ***значением*** функции $f(x)$ в точке x_0.

Наиболее распространенный способ задания функции — ***аналитический***, то есть с помощью формулы[20].

В данном параграфе будут приведены определения основных свойств числовых функций числового аргумента (скалярных функций скалярного аргумента), то есть будут рассматриваться функции $f(x)$, для которых область определения $D(f) \subset \mathbf{R}$ и множество значений $E(f) \subset \mathbf{R}$.

Если на плоскости задать декартову систему координат, то множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $(x, f(x))$, называется ***графиком*** функции $y = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на множестве X, входящем в область ее определения ($X \subset D(f)$), если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на множестве X,

[20] Существуют и другие способы задания функции: табличный, графический, словесный и т.д.

входящем в область ее определения ($X \subset D(f)$), если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Возрастающие и убывающие функции называют монотонными[21].

Точка x_0 называется точкой ***максимума*** функции $y = f(x)$, если существует окрестность[22] этой точки такая, что для всех точек x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Точка x_0 называется точкой ***минимума*** функции $y = f(x)$, если существует окрестность этой точки такая, что для всех точек x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$. Точки максимума и минимума называют точками ***экстремума*** функции. Функция может иметь несколько точек максимума и несколько точек минимума. Например, функция $y = \sin x$ имеет бесконечно много и точек максимума и точек минимума.

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** на множестве $X \subset D(f)$, если существует такое число M, что значение функции в любой точке не превосходит этого числа, то есть для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \le M$. Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной снизу*** на множестве $X \subset D(f)$, если существует такое число m, что значение функции в любой точке не меньше этого числа, то есть для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \ge m$.

Ограниченная сверху и снизу на множестве X функция называется ограниченной на этом множестве. Например, функция $y = x^2$ ограничена снизу и $x^2 \ge 0$, функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой прямой и $|\sin x| \le 1$.

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если для любого $x \in D(f)$ точка $-x \in D(f)$ и $f(-x) = f(x)$. Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если для любого $x \in D(f)$ точка $-x \in D(f)$ и

[21] Существуют также невозрастающие функции, т.е. функции, удовлетворяющие условию: для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \ge f(x_2)$, и неубывающие функции, т.е. функции, удовлетворяющие условию: для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \le f(x_2)$.

[22] Окрестностью точки $x_0 \in \mathbf{R}$ радиуса r называется множество точек прямой, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < r$.

$f(-x) = -f(x)$. Например, функция $y = x^2$ является четной, так как $(-x)^2 = x^2$, а функция $y = x^3$ нечетной, так как $(-x)^3 = -x^3$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число $T > 0$, что для любого $x \in D(f)$ точка $x + T \in D(f)$ и справедливо равенство $f(x + T) = f(x)$. Наименьшее из положительных чисел T в определении называют ***периодом***. Например, функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ — периодические и их период $T = 2\pi$.

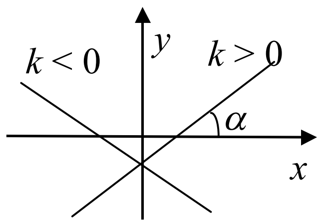
Пусть функция $z = \varphi(x)$ отображает множество X на множество Z, а функция $y = f(z)$ отображает множество Z на множество Y. Функция $y = f(\varphi(x))$, отображающая множество X на множество Y называется ***суперпозицией*** функций $z = \varphi(x)$ и $y = f(z)$ или ***сложной*** функцией. Например, функция $y = \sqrt{x^2 - 3x + 7}$ является суперпозицией функций $y = \sqrt{z}$ и $z = x^2 - 3x + 7$.

Пусть $x_0 \in D(f)$ — фиксированная точка, x — некоторая произвольная точка. ***Приращением аргумента*** в точке x_0 называется разность $x - x_0$. Обозначается приращение следующим образом: $\Delta x = x - x_0$. Из этой формулы следует: $x = x_0 + \Delta x$. В таких случаях говорят, что начальное значение переменной x_0 получило приращение Δx.

Если мы изменяем аргумент, то и значение функции тоже будет изменяться. ***Приращением функции*** $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, называется разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Приращение функции обозначается Δf. Таким образом, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции. Функция, непрерывная в каждой точке множества D, называется ***непрерывной на этом множестве***. Если функция $y = f(x)$ не является непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$, то x_0 — ***точка разрыва*** функции $y = f(x)$.

§ 5 Линейная и квадратичная функции



Линейная функция $y = kx + b$ определена на всей числовой прямой. Множество ее изменения — также множество всех действительных чисел, если $k \neq 0$. При $k > 0$ функция является возрастающей, при $k < 0$ — убывающей. При $k = 0$ функция является постоянной.

Графиком линейной функции является прямая.

Угловой коэффициент k прямой равен тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси абсцисс, $k = \operatorname{tg}\alpha$. Из аксиом геометрии известно, что если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости. Поэтому для построения графика линейной функции достаточно задать две точки.

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ определена на всей числовой прямой. Графиком квадратичной функции является парабола.

Вершина параболы находится в точке с координатами $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. График квадратичной функции симметричен относительно прямой $x = x_0$ — вертикальной прямой, проходящей через вершину параболы.

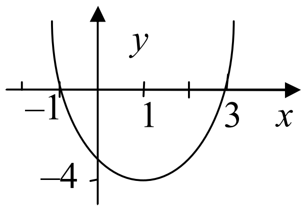
Симметрию параболы можно использовать для нахождения абсциссы вершины параболы: если парабола пересекает ось OX в двух точках, то эти точки равноудалены от вершины параболы. Таким образом, абсцисса вершины параболы — это середина отрезка, образованного точками пересечения параболы с осью OX.

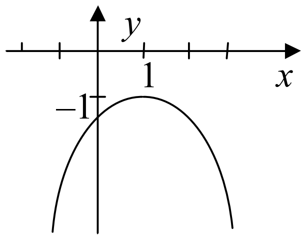
При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх. В этом случае функция ограничена снизу и в точке $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ принимает наименьшее значение $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз. В этом случае функция ограничена сверху и в точке $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ принимает наибольшее значение $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Если дискриминант соответствующего квадратного уравнения положителен, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках. Если дискриминант равен нулю, то парабола касается оси абсцисс. Если дискриминант отрицателен, то парабола ось абсцисс не пересекает и расположена выше оси абсцисс, если $a > 0$, и ниже оси абсцисс, если $a < 0$.

Пример 28. Постройте графики функций $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = 2x - x^2 - 2$.

Решение. Вершина параболы $y = x^2 - 2x - 3$ имеет координаты $x_0 = 1, y_0 = -4$. Так как старший коэффициент $a = 1$ положителен, то ветви параболы направлены вверх. График функции симметричен относительно прямой $x = 1$. Решив уравнение $y = x^2 - 2x - 3 = 0$, можно найти точки пересечения параболы с осью абсцисс: $x_1 = -1, x_2 = 3$.

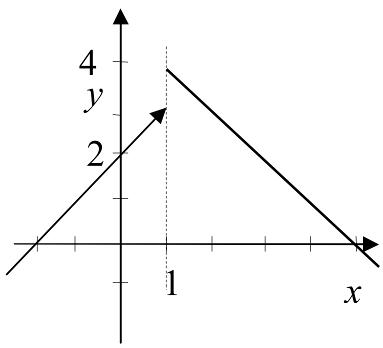




Для параболы $y = 2x - x^2 - 2$ получаем, что координаты вершины параболы $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, и ветви ее направлены вниз. Данная парабола не имеет точек пересечения с осью абсцисс, так как дискриминант соответствующего квадратного уравнения отрицателен.

Пример 29. Постройте график функции $y = \begin{cases} x+2, & x<1, \\ 5-x, & x \ge 1. \end{cases}$

Решение. Данная функция является кусочно-непрерывной. Ее график состоит из двух лучей. Проведем пунктиром вертикальную прямую $x = 1$. При $x < 1$ будем строить график прямой $y = x + 2$, а при $x \ge 1$ будем строить график прямой $y = 5 - x$. Для построения каждого из лучей возьмем по две точки $x = 0$, $y = 2$; $x = -2$, $y = 0$ и $x = 2$, $y = 3$; $x = 5$,



$y = 0$. На графике видно, что в точке $x = 1$ функция имеет разрыв, а в остальных точках функция непрерывна.

Упражнения

84. Найдите линейную функцию, которая при $x = 4$ принимает значение $y = 7$, а при $x = 1$ — значение $y = –5$.

85. Найдите значения коэффициентов k и b линейной функции $y = kx + b$, если известно, что ее график параллелен графику функции $y = –2x + 1$ и проходит через точку (1, 4):

86. а) вершина параболы $y = x^2 + bx + c$ находится в точке $A(4; –7)$. Найдите значения b и c;

б) вершина параболы $y = x^2 + bx + c$ находится в точке $A(–2; –1)$. Найдите значения b и c.

87. Точки $A(–1; 7)$ и $B(3; –1)$ принадлежат графику квадратичной функции $y = x^2 + bx + c$. Найдите b и c.

88. График какой функции получится, если параболу $y = x^2$ сначала сдвинуть по оси OX на 3 единицы вправо, а затем по оси OY на 4 единицы вниз?

89. Постройте графики функций:

а) $y = x^2 - 6x + 2$; б) $y = 2x^2 + 8x + 5$;

в) $y = -x^2 + 4x + 3$; г) $y = 0{,}5x^2 - 3x - 3$;

д) $y = -x^2 - 6x + 1$; е) $y = -0{,}5x^2 + 2x + 5$.

90. Постройте графики функций:

а) $y = \begin{cases} 2x+1, & x < 2; \\ 0{,}5x+4, & x \ge 2; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 2x-1, & x < 4; \\ 0{,}5x+1, & x \ge 4; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} 4-x, & x \le 1; \\ 4+x, & x > 1; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} x+3, & x < -1; \\ 2x-3, & x \ge -1. \end{cases}$

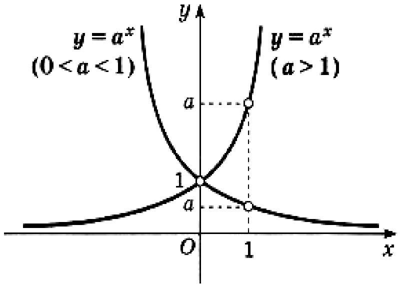
91. Постройте графики функций:

а) $y = \begin{cases} x-4, & x < 0; \\ x^2-4, & x \ge 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x+3, & x < -1; \\ x^2-2x-1, & x \ge -1; \end{cases}$

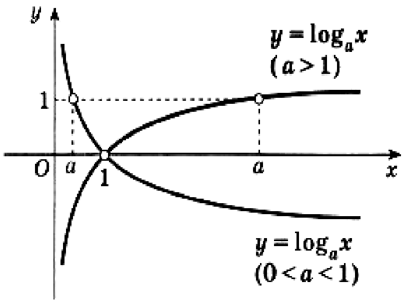
в) $y = \begin{cases} 2-x, & x < 2; \\ x^2-4x+3, & x \ge 2; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} 2-x^2, & x < 1; \\ x^2-4x+3, & x \ge 1; \end{cases}$

д) $y = \begin{cases} x+3, & x < -1; \\ x^2 - 2x - 1, & -1 \le x \le 3; \\ 5 - x, & x > 3; \end{cases}$ е) $y = \begin{cases} x+3, & x < -1; \\ x^2 - 4x, & -1 \le x \le 3; \\ 7 - 2x, & x > 3. \end{cases}$

§ 6 Показательные и логарифмические функции



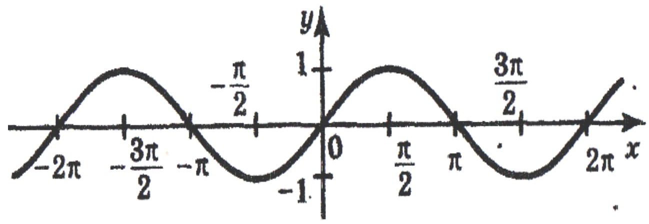
Показательная **функция** $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Область определения функции — все действительные числа, то есть $D(f) = \mathbf{R}$. Функция принимает только положительные значения, то есть $E(f) = (0; +\infty)$. Функция ограничена снизу и не ограничена сверху. График функции пересекает ось ординат в точке (0; 1), ось абсцисс он не пересекает. При $a > 1$ функция является возрастающей, а при $0 < a < 1$ — убывающей на всей области определения.



Логарифмическая **функция** $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Логарифмическая функция является обратной к показательной. Ее область определения – множество положительных чисел, то есть $D(f) = (0; +\infty)$, область изменения — множество действительных чисел, то есть $E(f) = \mathbf{R}$. Функция не ограничена ни сверху, ни снизу. График функции пересекает ось абсцисс в точке (1; 0), ось ординат график не пересекает. При $a > 1$ функция является возрастающей, а при $0 < a < 1$ — убывающей на всей области определения. График функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей.

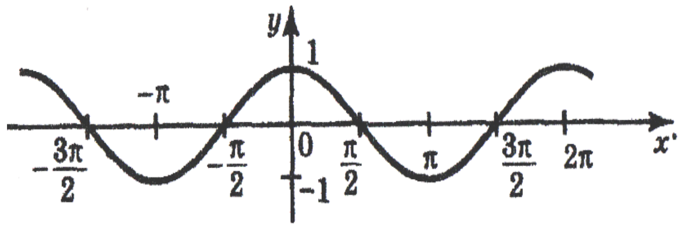
§ 7 Тригонометрические функции

Функция $y = \sin x$. Область определения функции — все действительные числа, то есть $D(f) = \mathbf{R}$. Она принимает значения, удовлетворяющие условию $|y| \le 1$, $(E(f) = [-1; 1])$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = -1$ функция принимает в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \ (n \in \mathbf{Z})$, и эти точки являются точками минимума. Наибольшее значение $y = 1$ функция принимает в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \ (m \in \mathbf{Z})$, и эти точки являются точками максимума. График функции $y = \sin x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \pi k \ (k \in \mathbf{Z})$.



Функция $y = \sin x$ является нечетной и периодической, ее период $T = 2\pi$. График этой функции называется ***синусоидой***. Учитывая периодичность, достаточно построить график на отрезке длиной 2π, а затем копировать его.

Функция $y = \cos x$. Область определения функции все действительные числа, то есть $D(f) = \mathbf{R}$. Она принимает значения, удовлетворяющие условию $|y| \le 1$, $(E(f) = [-1; 1])$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = -1$ функция принимает в точках $x = \pi + 2\pi n \ (n \in \mathbf{Z})$, и эти точки являются точками минимума. Наибольшее значение $y = 1$ функция принимает в точках $x = 2\pi m \ (m \in \mathbf{Z})$, и эти точки являются точками максимума. График функции $y = \cos x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k \ (k \in \mathbf{Z})$. Функция $y = \cos x$ является четной и периодической, ее период $T = 2\pi$. График этой функции называется ***косинусоидой***. Учитывая периодичность, достаточно построить график на отрезке длиной 2π, а затем копировать его.



§ 8 Гармонические колебания

Области применения тригонометрических функций чрезвычайно разнообразны: астрономия, физика, радиотехника, биология, музыка, медицина и многие другие.

Тригонометрические функции используются для описания различных колебательных процессов: колебания груза, подвешенного на пружине, вокруг положения равновесия; закона изменения переменного тока в цепи; колебания маятника; распространения звуковых и цветовых волн и т.д. Графическое изображение этой функции дает наглядное представление о протекании колебательного процесса во времени.

С помощью тригонометрических функций описываются соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике. Теоремы синусов и косинусов применяются в астрономии при решении произвольных треугольников для вычисления сторон и углов сферического треугольника по трем сторонам или по стороне и двум углам.

В виде суммы тригонометрических функций (ряда Фурье) можно представить любые периодические процессы.

Формулы $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ и $y = A\cos(\omega x + \varphi)$, с помощью которых описываются такие процессы, называются формулами ***гармонических колебаний***. Положительная величина A называется ***амплитудой*** колебания, положительная величина ω — ***частотой*** колебания, величина φ — ***начальной фазой*** колебания. Амплитуда характеризует размах колебания, частота — количество колебаний в единицу времени.

Построение графиков гармонических колебаний (гармоник) $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ производится в несколько этапов.

Рассмотрим алгоритм построения графика функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$:

а) строим график функции $y = \sin x$;

б) строим график функции $y = \sin \omega x$, сжимая его в ω раз к оси OY;

в) строим график функции $y = \sin(\omega x + \varphi)$, сдвигая график функции $y = \sin \omega x$ на $|\varphi|$ единиц по оси OX (если $\varphi > 0$, то сдвигаем влево, если $\varphi < 0$, то сдвигаем вправо);

г) строим график функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, растягивая его в A раз от оси OX.

Заметим, что функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ и $y = A\cos(\omega x + \varphi)$, описывающие гармонические колебания, являются периодическими с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Они ограничены сверху и снизу, их наибольшее и наименьшее значения равны A и $-A$ соответственно.

Пример 30. Найдите период и начальную фазу гармонического колебания, заданного функцией $y = 7\cos\left(4x + \frac{3\pi}{8}\right)$.

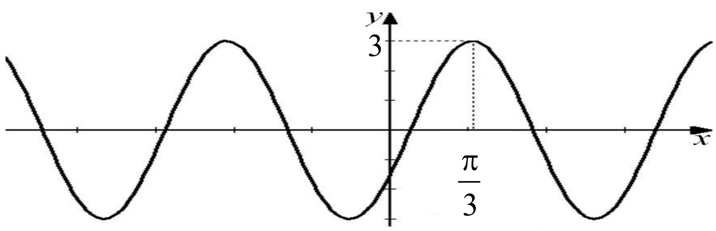
Решение. Для данного колебания $\omega = 4$, поэтому период $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$. Начальная фаза $\varphi = \frac{3\pi}{8}$.

Ответ: $T = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{3\pi}{8}$.

Пример 31. Постройте график гармонического колебания $y = 3\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

Решение. Для этой гармоники амплитуда $A = 3$, частота $\omega = 2$, начальная фаза $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$.

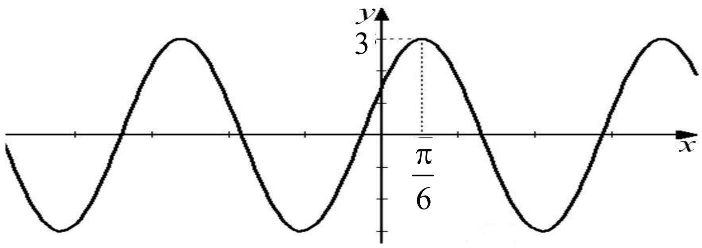
Строим график функции $y = \cos x$: сдвигаем на $\frac{2\pi}{3}$ единиц по оси OX вправо; сжимаем график к оси OY в 2 раза; растягиваем от оси OX в 3 раза.



Пример 32. Постройте график гармонического колебания $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Преобразуем формулу, раскрыв в аргументе косинуса скобки: $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Следовательно, для этой гармоники амплитуда $A = 3$, частота $\omega = 2$, начальная фаза $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

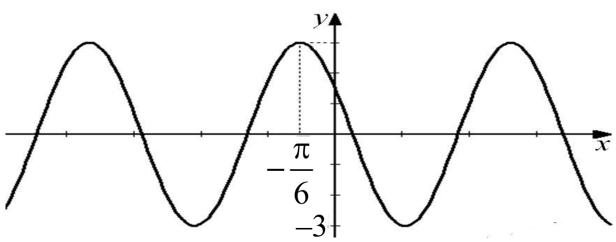
Строим график функции $y = \cos x$: сдвигаем график на $\frac{\pi}{3}$ единиц по оси OX вправо; сжимаем график к оси OY в 2 раза; растягиваем от оси OX в 3 раза.



Пример 33. Постройте график гармонического колебания $y = -3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. Эта формула не задает гармоническое колебание, так как $A = -3 < 0$. Применив формулу приведения $\cos(x + \pi) = -\cos x$, преобразуем формулу к виду: $y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Следовательно, для этой гармоники амплитуда $A = 3$, частота $\omega = 2$, начальная фаза $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Строим график функции $y = \cos x$: сдвигаем на $\frac{\pi}{3}$ единиц по оси OX влево; сжимаем график к оси OY в 2 раза; растягиваем от оси OX в 3 раза.



Упражнения

92. Найдите периоды функций:

а) $y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=5\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)$;

в) $y=2\sin\left(3x-\frac{5\pi}{12}\right)$; г) $y=\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

93. Постройте графики функций:

а) $y=3\cos\frac{x}{3}$; б) $y=-\sin 2x-1$; в) $y=3\sin\frac{x}{2}-2$;

г) $y=2\cos 3x+3$; д) $y=\cos^2\frac{x}{2}$; е) $y=2\sin^2 x+1$.

94. Постройте графики функций:

а) $y=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=-\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$;

в) $y=2\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$; г) $y=3\cos\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$;

д) $y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$; е) $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$;

ж) $y=1{,}5\cos\left(4x+\frac{5\pi}{3}\right)$; з) $y=4\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{8}\right)$.

Глава 3 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

§ 9 Общие понятия теории уравнений

Уравнением называется равенство двух математических выражений с одной или несколькими неизвестными. В общем случае уравнение с одной неизвестной имеет вид $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые выражения, содержащие неизвестную x. ***Решением*, или *корнем*,** уравнения с одной неизвестной называется такое число x_0, которое при подстановке вместо x в обе части уравнения превращает его в верное числовое равенство. Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что уравнение корней не имеет.

По характеру математических операций, выполняемых над неизвестным, различают алгебраические и трансцендентные уравнения. В ***алгебраических*** уравнениях выполняют операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечение корня. Мы будем рассматривать следующие алгебраические уравнения: целые и дробно-рациональные уравнения, уравнения с модулем и иррациональные уравнения. Если над неизвестной совершаются другие операции, например нахождение синуса или логарифма, то такие уравнения называют ***трансцендентными***.

Два уравнения называются ***равносильными***, если множества их корней совпадают, то есть каждый корень первого уравнения является корнем второго и каждый корень второго уравнения является корнем первого. В частности, равносильными считают уравнения, которые не имеют решений. При решении уравнений часто пользуются понятием равносильности уравнений на некотором множестве: два уравнения называются ***равносильными*** на множестве, если их корни, принадлежащие этому множеству, совпадают[23]. Уравнения могут не быть равносильными на всей области определения, но быть равносильными на некотором подмножестве, входящем в область определения.

---

[23] Например, уравнения $\dfrac{x^2-4}{x+2}=0$ и $(x-2)(x+2)=0$ равносильны при $x \neq -2$.

Основные утверждения о равносильности уравнений

1. К обеим частям уравнения можно прибавлять любое число: уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно уравнению $f(x)+a=g(x)+a$.

2. Слагаемое можно переносить из одной части уравнения в другую с противоположным знаком: уравнение $f(x)+a=g(x)$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)-a$ (уравнение $f(x)+h(x)=g(x)$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)-h(x)$).

3. Обе части уравнения можно умножать на любое отличное от нуля число: при $a\neq 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно уравнению $a\cdot f(x)=a\cdot g(x)$.

4. Если функция $h(x)$ определена для всех x, для которых определены функции $f(x)$ и $g(x)$, то ее можно прибавлять к обеим частям уравнения: уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно уравнению $f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$.

5. Если функция $h(x)$ определена для всех x, для которых определены функции $f(x)$ и $g(x)$ и не равна нулю ни в одной точке, то на нее можно умножать или делить обе части уравнения: уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно уравнениям $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ и $\dfrac{f(x)}{h(x)}=\dfrac{g(x)}{h(x)}$.

6. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны, то уравнение $f(x)=g(x)$ можно возводить в любую степень и извлекать из него корни любой степени: уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно уравнениям $\left(f(x)\right)^k=\left(g(x)\right)^k$ и $\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{g(x)}$ ($k\in\mathbf{N}$).

Если все корни уравнения $f(x)=g(x)$ являются корнями уравнения $f_1(x)=g_1(x)$, то второе уравнение называется ***следствием*** первого. Из определения следует, что уравнение-следствие может иметь решения, не являющиеся решениями исходного уравнения. Такие решения называют ***посторонними решениями*** (***корнями***) исходного уравнения. Так, к появлению посторонних корней может привести возведение обеих частей уравнения в квадрат[24], отбрасывание знаме-

[24] При возведении в квадрат уравнения $f(x)=g(x)$ посторонними корнями являются корни уравнения $f(x)=-g(x)$.

нателя[25] или деление на выражение, принимающее нулевые значения. Если при решении уравнения на каком-либо этапе получаем уравнение-следствие, то необходимо провести исследование корней, например сделать проверку, и отбросить те корни, которые не являются решениями исходного уравнения.

При решении уравнения, выполняя различные преобразования, стараются заменить это уравнение более простым равносильным ему уравнением. Но это удается не всегда. При переходе к неравносильному уравнению возможны случаи:

1) при преобразовании уравнения произошла потеря корней. Например, выполнено деление на множитель, содержащий неизвестную и принимающий в некоторой точке нулевое значение. Очевидно, что такие преобразования уравнения недопустимы;

2) новое уравнение имеет посторонние корни. Их можно выявить проверкой. Иногда удобнее накладывать на правую и левую части уравнения дополнительные условия (не путать с областью допустимых значений переменных), при выполнении которых полученное после преобразований уравнение будет равносильно исходному.

До сих пор мы рассматривали уравнение с одной неизвестной $f(x)=0$. Уравнение вида $f(x,y)=0$ называется уравнением с двумя неизвестными. Решением этого уравнения является упорядоченная пара чисел (x_0, y_0), при подстановке которых в уравнение вместо x и y соответственно получим верное числовое равенство. В большинстве случаев уравнение с двумя неизвестными имеет бесконечно много решений.

Множество решений уравнения с двумя неизвестными можно изобразить на плоскости как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $f(x,y)=0$. Это множество точек называется ***графиком*** уравнения.

Рассмотрим основные классы уравнений с одной неизвестной и методы их решений.

---

[25] Уравнение $f(x) = g(x)h(x)$ является следствием уравнения $\frac{f(x)}{h(x)} = g(x)$, при этом посторонние корни являются корнями уравнения $h(x) = 0$.

§ 10 Линейные, квадратные и дробно-рациональные уравнения

Линейным называется уравнение вида $ax = b$ или уравнение, приводящееся к такому виду. Если $a \neq 0$, то линейное уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{b}{a}$.

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ называется ***квадратным***. Число действительных корней квадратного уравнения определяется знаком дискриминанта $D = b^2 - 4ac$. Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Если $D = 0$, то уравнение имеет два равных действительных корня. Если же $D < 0$, то квадратное уравнение действительных корней не имеет[26].

Если второй коэффициент уравнения является четным, то формула нахождения корней упрощается: дано квадратное уравнение $ax^2 + 2kx + c = 0$, его корни $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Приведенное квадратное уравнение ($a = 1$) можно решать по ***теореме Виета***: *в приведенном квадратном уравнении* $x^2 + px + q = 0$ *сумма корней равна второму коэффициенту с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену, то есть*
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Если с помощью тождественных преобразований уравнение можно привести к виду $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые многочлены, то такое уравнение называют ***дробно-рациональным***. Решением этого уравнения являются все корни многочлена $f(x)$, не являющиеся корнями многочлена $g(x)$: $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$

[26] Квадратное уравнение с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом имеет два комплексно-сопряженных корня $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$.

Найти посторонние корни можно двумя способами: либо решить уравнение $g(x)=0$, либо подставить в знаменатель корни числителя и отбросить те, которые обращают знаменатель в ноль.

Пример 34. Решите уравнение

$2(5x-3)+7(1-x)= =4(2x-13)-5(2-x)+3$;

Решение. Данное уравнение является линейным. Раскроем скобки $10x-6+7-7x=8x-52-10+5x+3$ и приведем подобные $3x+1= =13x-59$. Соберем все выражения, содержащие x в левой части, а не содержащие x — в правой части: $3x-13x=-59-1 \Leftrightarrow -10\,x=-60$. Разделив обе части уравнения на (–10), найдем его решение $x = 6$.

Ответ: 6.

Пример 35. Решите уравнения

а) $\dfrac{x-3}{4}+\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x}{12}=x-1$;

б) $\dfrac{x-3}{4}+\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x}{12}=x-1$;

в) $\dfrac{x-3}{4}+\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x+1}{12}=x-2$.

Решение. Все три уравнения являются линейными. Приведем дроби к общему знаменателю и соберем слагаемые, содержащие x в левой части, а не содержащие x — в правой части.

а) $\dfrac{x-3^{\backslash 3}}{4}+\dfrac{x-2^{\backslash 4}}{3}+\dfrac{x-1^{\backslash 6}}{2}+\dfrac{x^{\backslash 1}}{12}=x-1\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3x-9+4x-8+6x-6+x}{12}=x-1\Rightarrow$

$\Rightarrow 14x-23=12x-12\Rightarrow 2x=11\Rightarrow x=5{,}5$ — уравнение имеет единственное решение;

б) $\dfrac{x-3^{\backslash 3}}{4}+\dfrac{x-2^{\backslash 4}}{3}+\dfrac{x-1^{\backslash 6}}{2}-\dfrac{x^{\backslash 1}}{12}=x-1\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3x-9+4x-8+6x-6-x}{12}=x-1\Rightarrow$

$\Rightarrow 12x-23=12x-12\Rightarrow 0x=11\Rightarrow x\in\varnothing$ — уравнение не имеет решений;

в) $\dfrac{x-3^{\backslash 3}}{4}+\dfrac{x-2^{\backslash 4}}{3}+\dfrac{x-1^{\backslash 6}}{2}-\dfrac{x+1^{\backslash 1}}{12}=x-2\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3x-9+4x-8+6x-6-x-1}{12}=x-2\Rightarrow$

$\Rightarrow 12x-24=12x-24\Rightarrow 0x=0\Rightarrow$ $x\in(-\infty;\infty)$ — решением уравнения является любое действительное число.

Ответ: а) 5,5; б) $\varnothing$; в) $(-\infty; +\infty)$.

Пример 36. Решите уравнение

$(2x-5)(3x+1)-(x+7)(2x+3)-8=0$.

Решение. Раскроем в уравнении скобки и приведем подобные

$(6x^2-15x+2x-5)-(2x^2+14x+3x+21)-8=$

$=0\Leftrightarrow 6x^2-13x-5-2x^2-17x-21-8=0\Leftrightarrow 4x^2-30x-34=0$.

Получили квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом.

Тогда $x_{1,2}=\dfrac{15\pm\sqrt{15^2+4\cdot 34}}{4}=\dfrac{15\pm\sqrt{361}}{4}=\dfrac{15\pm 19}{4}$ и $x_1=-1$, $x_2=8{,}5$.

Ответ: –1; 8,5.

Пример 37. Решите уравнение $\dfrac{2x^2-6x+4}{x-2}=x+3$.

Решение. Перенесем $x+3$ в левую часть уравнения и приведем выражения в левой части к общему знаменателю

$\dfrac{2x^2-6x+4}{x-2}-(x+3)^{\backslash x-2}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2x^2-6x+4-(x^2-2x+3x-6)}{x-2}\Rightarrow \dfrac{x^2-7x+10}{x-2}=0$.

Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля: $\begin{cases} x^2-7x+10 & = & 0, \\ x-2 & \neq & 0. \end{cases}$

Найдем корни квадратного уравнения $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 10}}{2}=$ $=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}$ и $x_1=2, x_2=5$. Получим, что $x = 5$ — корень уравнения, $x=2$ обращает знаменатель в ноль и не является корнем уравнения.

Ответ: 5.

Пример 38(*). Решите уравнение $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$.

Решение. Разложим знаменатели дробей на множители и приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{2^{\backslash x}}{(x-2)(x+2)}+\frac{x-4^{\backslash x-2}}{x(x+2)}-\frac{1^{\backslash x+2}}{x(x-2)}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2x+(x-4)(x-2)-(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2x+x^2-4x-2x+8-x-2}{x(x-2)(x+2)}=0\Rightarrow\frac{x^2-5x+6}{x(x-2)(x+2)}=0.$$

Полученное после преобразований уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ x(x-2)(x+2)\neq 0. \end{cases}$ Корни числителя найдем по теореме Виета $\begin{cases} x_1+x_2 = 5, \\ x_1\cdot x_2 = 6. \end{cases}$ Получим, что $x = 3$ — корень уравнения, $x=2$ обращает знаменатель в ноль и не является корнем уравнения.

Ответ: 3.

Упражнения

Решите уравнения:

95. а) $\frac{2x+3}{6}+\frac{x-7}{3}=\frac{x+11}{2}$; б) $\frac{3x+4}{5}-\frac{2x-1}{3}=\frac{7x+1}{15}$.

96. а) $\frac{2x+4}{5}=2-\frac{6-7x}{15}$; б) $\frac{3x-16}{12}+1=\frac{x+6}{4}-\frac{x+3}{6}$.

97. $(x+4)(3x-4)-(3x+2)(3x-2)=2x(1-3x)$;

98. $(x+5)(4x-1)-(2x+3)(x+2)=(2x-1)(x+5)$.

99. а) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=0$; б) $\dfrac{x^3-3x^2-4x+12}{x^2-8x+15}=0$.

100. а) $\dfrac{2x-3}{x-1}+1=\dfrac{6x-x^2-6}{x-1}$; б) $\dfrac{x^2-2x-4}{x}=\dfrac{x-2}{2}$.

101. а) $\dfrac{3x-1}{x-1}+1=\dfrac{7x+4}{x+2}$; б) $\dfrac{x^2-4x-8}{5x-x^2}=\dfrac{x^2-3x-7}{x(x-5)}$.

102. а) $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{4}{x^2-9}$; б) $\dfrac{7}{x+3}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{2}{x^2-6x+9}$;

103. а) $\dfrac{3}{x^2-2x+1}-\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{1}{x+1}$; б) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{4}{x+2}=2$.

---

104. а) $\dfrac{3x}{x-4}-\dfrac{16}{x+1}=5$; б) $\dfrac{x+5}{x+2}+\dfrac{3x+5}{x+3}=5$.

105. а) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{5}{x^2+x-2}=1$; б) $\dfrac{2x}{x-3}-\dfrac{x+7}{x^2-2x-3}=1$;

106. а) $\dfrac{3(x-1)}{2(x+1)}+\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{2(x^2+4)}{x^2-1}$; б) $\dfrac{5x}{x+1}-\dfrac{x+2}{x^2-3x-4}=3$;

107. а) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{5-x}{x^2-1}+\dfrac{8}{1-x}=0$; б) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{x+5}{x^2-1}=\dfrac{3}{1-x}$;

108. а) $\dfrac{x+1}{x+4}+\dfrac{4}{x-4}+\dfrac{18}{16-x^2}=0$; б) $\dfrac{x+1}{x+4}+\dfrac{4}{x-4}+\dfrac{24}{16-x^2}=0$.

§ 11 Уравнения, содержащие неизвестную под знаком модуля

Основным методом при решении уравнений, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины, является метод интервалов, который заключается в следующем: область допустимых значений уравнения разбиваем на части, в каждой части выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На каждом таком множестве уравнение записывается без знаков модуля, а затем решается. Обязательно проводится проверка полученных решений: проверяется, принадлежат ли полученные корни множеству, на котором рассматривалось уравнение. Множество решений исходного уравнения состоит из решений, принадлежащих всем частям области допустимых значений. Так, в частности, решаются уравнения вида $|f(x)| = g(x)$ и $|f(x)| + |h(x)| = g(x)$.

Однако в некоторых случаях уравнение с модулем можно решать и другими методами.

Уравнение $|f(x)| = g(x)$ равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases}$$

Уравнение $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Наглядное представление при решении уравнений с модулями дает графическое решение таких уравнений.

Пример 39. Решите уравнение $|2x-5| = 4x+17$.

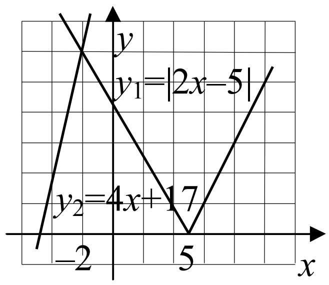
Решение. Найдем точку, в которой выражение, стоящее под знаком модуля, обращается в ноль. Для этого решим уравнение $2x - 5 = 0$. Получим $x = 2{,}5$. Эта точка делит числовую прямую на два промежутка. При этом, если $x \in (-\infty; 2{,}5)$, то $|2x-5| = -(2x-5)$, а если $x \in [2{,}5; +\infty)$, то $|2x-5| = 2x-5$. Выражение, содержащее модуль, можно записать в виде $|2x-5| = \begin{cases} 5-2x, & x \in (-\infty; 2{,}5), \\ 2x-5, & x \in [2{,}5; +\infty). \end{cases}$

На каждом из полученных промежутков решим уравнение.

1. Пусть $x \in (-\infty; 2{,}5)$. На этом промежутке уравнение примет вид $5-2x = 4x+17$. Приведем подобные и получим $x = -2$. Этот корень принадлежит рассматриваемому промежутку, то есть является решением.

2. Пусть $x \in [2{,}5; +\infty)$. На этом промежутке уравнение примет вид $2x-5 = 4x+17$. Приведем подобные и получим $x = -11$. Этот корень не принадлежит рассматриваемому промежутку, то есть является посторонним.

Решим уравнение графически. Построим графики функций $y_1 = |2x-5|$ и $y_2 = 4x+17$. Графики функций пересекаются в одной точке при $x = -2$. Уравнение имеет одно решение $x = -2$.



Графическое решение обязательно требует проверки, так как при построении графика решение не всегда находится точно. При $x = -2$ имеем $|2\cdot(-2)-5| = 4\cdot(-2)+17 \Rightarrow |-9| = 9$. Значит, решение найдено верно.

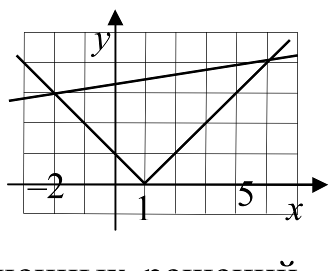
Ответ: – 2.

Пример 40. Решите уравнение $|x-1| = \dfrac{x+23}{7}$.

Решение. Найдем точку, в которой выражение, стоящее под знаком модуля, обращается в ноль. Для этого решим уравнение $x - 1 = 0$. Получим точку $x = 1$. Эта точка делит числовую прямую на два промежутка, на каждом из которых решаем уравнение. При этом, если $x \in (-\infty; 1)$, то $|x-1| = -(x-1)$, а если $x \in [1; +\infty)$, то $|x-1| = x-1$. Выражение, содержащее модуль, можно записать в виде $|x-1| = \begin{cases} 1-x, & x \in (-\infty; 1), \\ x-1, & x \in [1; +\infty). \end{cases}$

1. Пусть $x \in (-\infty; 1)$. Тогда уравнение примет вид $7(1-x) = x+23 \Rightarrow\ -8x = 16 \Rightarrow x = -2$. Так как $-2 \in (-\infty; 1)$, значит, $x = -2$ является решением уравнения.

2. Пусть $x \in [1; +\infty)$. Тогда уравнение примет вид $7(x-1) = x+23 \Rightarrow\ 6x = 30 \Rightarrow x = 5$. Так как $5 \in [1; +\infty)$, значит, $x = 5$ является решением уравнения.



Решим уравнение графически. Построим графики функций $y_1 = |x-1|$ и $y_2 = \dfrac{x+23}{7}$. Решением уравнения будут абсциссы точек пересечения графиков функций. Из рисунка видно, что искомые точки $x = -2$ и $x = 5$. Выполним проверку для полученных решений. При $x = -2$ имеем $|-2-1| = \dfrac{-2+23}{7} \Rightarrow 3 = 3$; при $x = 5$ имеем $|5-1| = \dfrac{5+23}{7} \Rightarrow 4 = 4$. Значит, оба корня уравнения найдены верно.

Ответ: –2; 5.

Пример 41. Решите уравнение $|x-2|=x^2+4x-4$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$1)\begin{cases} x-2\ge 0; \\ x-2=x^2+4x-4; \end{cases} \quad \text{и} \quad 2)\begin{cases} x-2<0; \\ -(x-2)=x^2+4x-4. \end{cases}$$

$$1)\begin{cases} x-2\ge 0; \\ x-2=x^2+4x-4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2\ge 0; \\ x^2+3x-2=0. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$ не принадлежат выбранному промежутку, то есть являются посторонними.

$$2)\begin{cases} x-2<0; \\ -(x-2)=x^2+4x-4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2<0; \\ x^2+5x-6=0. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения $x_1=-6, x_2=1$ принадлежат выбранному промежутку. Таким образом, уравнение имеет два решения $x_1=-6, x_2=1$.

Ответ: –6; 1.

Пример 42. Решите уравнение $x^2-|x|-6=0$.

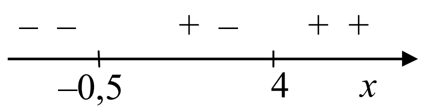
Решение. Пусть $x\ge 0$. Тогда уравнение примет вид $x^2-x-6=0$. Его корни $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{1\pm 5}{2}\Rightarrow x_1=3, x_2=-2$. Заданному промежутку удовлетворяет только один корень $x = 3$.

Пусть $x<0$. Тогда уравнение примет вид $x^2+x-6=0$. Его корни $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2}\Rightarrow x_1=2, x_2=-3$. Заданному промежутку удовлетворяет только один корень $x = -3$.

Итак, уравнение имеет два решения $x = 3$, $x = -3$.

Ответ: –3; 3.

Пример 43(*). Решите уравнение $|2x+1|-|x-4|=3$.



Решение. Найдем точки, в которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в ноль. Для этого решим уравнения $2x + 1 = 0$ и $x – 4 = 0$. Получим точки $x = – 0{,}5$; $x = 4$. Эти точки делят числовую прямую на три промежутка.

Если $x \in (-\infty; -0{,}5)$, то $|2x+1| = -(2x+1)$, $|x-4| = -(x-4)$ и $|2x+1| - |x-4| = -(2x+1) + (x-4) = -x-5$.

Если $x \in [-0{,}5; 4)$, то $|2x+1| = 2x+1$, $|x-4| = -(x-4)$ и $|2x+1| - |x-4| = (2x+1) + (x-4) = 3x-3$.

Если $x \in [4; +\infty)$, то $|2x+1| = 2x+1$, $|x-4| = x-4$ и $|2x+1| - |x-4| = (2x+1) - (x-4) = \; = x+5$.

Выражение, содержащее модули, можно записать в виде

$$|2x+1| - |x-4| = \begin{cases} -x-5, & x \in (-\infty; -0{,}5), \\ 3x-3, & x \in [-0{,}5; 4), \\ x+5, & x \in [4; +\infty). \end{cases}$$

На каждом из полученных промежутков решим уравнение.

1. Пусть $x \in (–\infty; – 0{,}5)$. На этом промежутке уравнение примет вид $-x-5=3$ и $x = –8$. Так как $–8 \in (–\infty; – 0{,}5)$, значит, $x = –8$ является решением уравнения.

2. Пусть $x \in [– 0{,}5; 4)$. На этом промежутке уравнение примет вид $3x-3=3$ и $x = 2$. Так как $2 \in [– 0{,}5; 4)$, то $x = 2$ является решением уравнения.

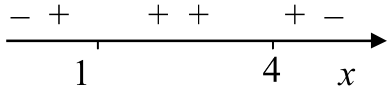
3. Пусть $x \in [4; +\infty)$. На этом промежутке уравнение примет вид $x+5=3$ и $x = –2$. Так как $–2 \notin [4; +\infty)$, то на этом промежутке уравнение решений не имеет.

Уравнение имеет два решения $x = – 8$, $x = 2$.

Ответ: –8; 2.

Пример 44(*). Решите уравнение $|x-1| + |4-x| = 2x-1$.

Решение. Найдем точки, в которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в ноль. Для этого решим уравнения $x – 1 = 0$ и $4 – x = 0$. Получим точки $x = 1$, $x = 4$.



Эти точки делят числовую прямую на три промежутка, на каждом из которых решаем уравнение.

Если $x \in (–\infty; 1)$, то $|x-1| = -(x-1)$, $|4-x| = 4-x$ и $|x-1| + |4-x| = 5-2x$, если $x \in [1; 4]$, то $|x-1| = x-1$, $|4-x| = 4-x$

и $|x-1|+|4-x|=3$, если $x \in (4; +\infty)$, то $|x-1|=x-1$, $|4-x|=-(4-x)$ и $|x-1|+|4-x|=2x-5$. Выражение, содержащее модули, можно записать в виде

$$|x-1|+|4-x|=\begin{cases} 5-2x, & x\in(-\infty;1), \\ 3, & x\in[1;4], \\ 2x-5, & x\in(4;+\infty). \end{cases}$$

1. Пусть $x \in (-\infty; 1)$.

Тогда уравнение примет вид $5-2x=2x-1 \Rightarrow x=1{,}5$. Так как $1{,}5 \notin (-\infty; 1)$, то на этом промежутке уравнение решений не имеет.

2. Пусть $x \in [1; 4]$.

Тогда уравнение примет вид $3=2x-1 \Rightarrow x=2$. Так как $2 \in [1; 4]$, значит, $x = 2$ является решением уравнения.

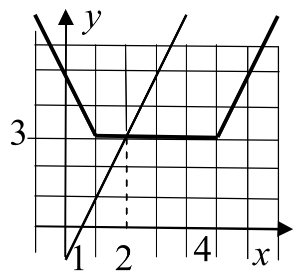
3. Пусть $x \in (4; +\infty)$.

Тогда уравнение примет вид $2x-5=2x-1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 0x=-4 \Rightarrow x\in\varnothing$. И на этом промежутке уравнение решений не имеет.

Таким образом, заданное уравнение имеет одно решение $x = 2$.

Решим уравнение графически. Построим графики функций $y_1 = 2x-1$ и $y_2 = |x-1|+|4-x|$. Эти графики пересекаются в одной точке $x = 2$.

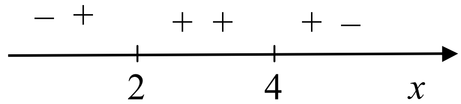
Ответ: 2.



Пример 45(*). Решите уравнение $|2x-4|-3|4-x|=5x-16$.

Решение. Найдем точки, в которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в ноль. Для этого решим уравнения $2x-4=0$ и $4-x=0$. Получим точки $x = 2$, $x = 4$.

Эти точки делят числовую прямую на три интервала, на каждом из которых решаем уравнение.



Если $x \in (-\infty; 2)$, то $|2x-4|=-(2x-4)$, $|4-x|=4-x$ и $|2x-4|-3|4-x|=x-8$.

Если $x \in [2; 4]$, то $|2x-4| = 2x-4$, $|4-x| = 4-x$ и $|2x-4|-3|4-x| = 5x-16$, если $x \in (4; +\infty)$, то $|2x-4| = 2x-4$, $|4-x| = -(4-x)$ и $|2x-4|-3|4-x| = 8-x$.

Выражение, содержащее модули, можно записать в виде

$$|x-1|+|4-x| = \begin{cases} x-8, & x \in (-\infty; 2), \\ 5x-16, & x \in [2; 4], \\ 8-x, & x \in (4; +\infty). \end{cases}$$

1. Пусть $x \in (-\infty; 2)$. Тогда уравнение примет вид $x-8 = 5x-16$ или $x = 2$. Этот корень не принадлежит рассматриваемому промежутку, то есть является посторонним.

2. Пусть $x \in [2; 4]$. Тогда уравнение примет вид $5x-16 = 5x-16$ или $0x = 0$. Значит, любое значение переменной, принадлежащее этому отрезку, является решением уравнения, т.е. $x \in [2; 4]$.

3. Пусть $x \in (4; +\infty)$. Тогда уравнение примет вид $8-x = 5x-16$ или $x = 4$. Этот корень не принадлежит рассматриваемому промежутку, то есть является посторонним.

Таким образом, решением уравнения является отрезок $[2; 4]$.

Ответ: $[2; 4]$.

Упражнения

Решите уравнения:

109. а) $|9-x| = 2x-24$; б) $|3x+11| = 13-x$;

110. а) $|x|+3+2x = 0$; б) $|5-2x| = x-1$;

111. а) $|3x-30| = 7x+10$; б) $|x+1| = 2x+23$;

112. а) $2|x-3| = 3x+1$; б) $|4x+1| = 2x+5$;

113. а) $|4-x| = x^2-8x-4$; б) $|x-3| = x^2-6x+7$;

114. а) $|x-1| = x^2+4x+1$; б) $|x^2-5x+9| = |x-6|$.

---

115. а) $|x-18|+3|6-x| = 16$; б) $|12-x|-2|x-3| = 3$;

116. а) $|x-6|+|12-x| = x+12$; б) $|x-8|-2|x| = 4x-13$;

117. а) $|x^2-2{,}5x-12| = 1{,}5x$; б) $\big||x-2|-7\big| = 4$.

§ 12 Иррациональные уравнения

Уравнение, в котором неизвестное содержится под знаком корня или возводится в дробную степень, называется ***иррациональным***. Основная задача при решении иррациональных уравнений – освободиться от радикала или дробной степени.

Напомним основные свойства таких уравнений[27]:

1. Все корни четной степени, входящие в уравнение, определены только при неотрицательных значениях подкоренных выражений и являются арифметическими, то есть принимают только неотрицательные значения.

2. Корни нечетной степени, входящие в уравнение, определены при любых действительных значениях подкоренных выражений и могут принимать любые значения в зависимости от знака подкоренных выражений.

3. Иррациональное уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе
$$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Основные методы решения иррациональных уравнений – это возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень и замена переменной. Заметим, что при возведении в четную степень достаточно часто получаем уравнение не равносильное исходному. Поэтому встает задача выявить и отсеять посторонние корни, если они появились. Наиболее часто выполняют проверку, подставляя найденные значения в первоначальное уравнение.

Существует и другой метод отсеивания посторонних корней при решении иррационального уравнения. Он состоит в том, что на каждом этапе решения переходят от уравнения к системе, учитывающей область допустимых значений и неотрицательность обеих частей уравнения.

Для облегчения вычислений первым действием «уединяют» корень, то есть все слагаемые, кроме одного, содержащего радикал, переносят в правую часть.

[27] Уравнения рассматриваем на множестве действительных чисел: и независимая переменная и функция принимают действительные значения.

Так как при решении иррациональных уравнений вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ выполняется операция возведения в квадрат, которая часто приводит к появлению посторонних корней, даже принадлежащих области определения уравнения, то необходимо сделать проверку полученных решений, подставив их в **исходное**, а не в преобразованное уравнение.

Пример 46. Решите уравнение $\sqrt{3x+1} = x-3$.

Решение. Для решения уравнения возведем обе его части в квадрат $3x+1 = x^2-6x+9$, получим уравнение $x^2-9x+8=0$ и найдем его корни $x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} = \dfrac{9 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 8$.

Выполним проверку.

Пусть $x = 1$. Имеем $\sqrt{3 \cdot 1+1} = 1-3$. Так как $2 \neq -2$, то $x = 1$ — посторонний корень.

Пусть $x = 8$. Имеем $\sqrt{3 \cdot 8+1} = 8-3$ или $5 = 5$. Значит, $x = 8$ — корень уравнения.

Итак, уравнение имеет единственное решение $x = 8$.

Проверку можно заменить решением системы $\begin{cases} 3x+1 = (x-3)^2, \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$ (так как в уравнении $\sqrt{3x+1} = x-3$ корень является арифметическим и принимает неотрицательные значения, то правая часть тоже принимает неотрицательные значения), из которой сразу получаем, что корень $x = 1$ — посторонний.

Ответ: 8.

Пример 47. Решите уравнение $\sqrt{2x-1} + 2 = x$.

Решение. Для решения уравнения уединим корень $\sqrt{2x-1} = x-2$, возведем обе его части в квадрат $2x-1 = x^2-4x+4$ и получим уравнение $x^2-6x+5=0$, которое имеет два корня $x_1 = 1, x_2 = 5$.

Выполним проверку.

Пусть $x = 1$. Имеем $\sqrt{2 \cdot 1-1} + 2 = 1$. Так как $3 \neq 1$, то $x = 1$ – посторонний корень.

Пусть $x = 5$. Имеем $\sqrt{2\cdot 5-1}+2=5$ или $5 = 5$. Значит, $x = 5$ – корень уравнения.

Итак, уравнение имеет единственное решение $x = 5$.

Проверку можно заменить решением системы $\begin{cases} 2x-1=(x-2)^2, \\ x-2\ge 0 \end{cases}$

(так как в уравнении $\sqrt{2x-1}=x-2$ корень является арифметическим и принимает неотрицательные значения, то правая часть тоже принимает неотрицательные значения), из которой сразу получаем, что корень $x = 1$ — посторонний.

Ответ: 5.

Пример 48. Решите уравнение $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{3x+1}=x+3$.

Решение. В левой части уравнения выполним умножение радикалов $\sqrt{(x-1)(3x+1)}=x+3$ и возведем обе части уравнения в квадрат $3x^2-2x-1=x^2+6x+9$. Получим квадратное уравнение $x^2-4x-5=0$, корнями которого являются числа $x_1=-1, x_2=5$.

Сделаем проверку.

Пусть $x = –1$. Имеем $\sqrt{-1-1}\cdot\sqrt{3\cdot(-1)+1}=-1+3$. Так как $x = –1$ не принадлежит области допустимых значений уравнения, то $x = –1$ — посторонний корень.

Пусть $x = 5$. Имеем $\sqrt{5-1}\cdot\sqrt{3\cdot 5+1}=5+3$ или $2\cdot 4 = 8$. Значит, $x = 5$ — корень уравнения.

Уравнение $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{3x+1}=x+3$ имеет одно решение $x = 5$.

Ответ: 5.

Наиболее часто встречающаяся при решении подобного уравнения ошибка – это подстановка решений не в исходное, а в преобразованное уравнение.

Пример 49(*). Решите уравнение $x^2-6x+5\cdot\sqrt{x^2-6x+12}=2$.

Решение. Это уравнение можно решить, сделав замену переменной. Обозначим $y=x^2-6x$ и получим уравнение $y+5\cdot\sqrt{y+12}=2$. Такие уравнения мы уже научились решать. «Уединим» корень и возведем обе части уравнения в квадрат. Получим

$$5\sqrt{y+12}=2-y \Rightarrow y^2-4y+4=25y+300 \Rightarrow y^2-29y-296=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2}=\frac{29\pm\sqrt{2025}}{2}=\frac{29\pm 45}{2}.$$

Значит, $y_1=37, y_2=-8$. Выполнив проверку, убедимся, что корень $y=37$ является посторонним $\left(37+5\sqrt{49}\neq 2\right)$. Для нахождения значений переменной x решим уравнение $x^2-6x=-8$, которое имеет корни $x_1=2, x_2=4$ (корни нашли по теореме Виета).

Итак, уравнение имеет два корня $x_1=2, x_2=4$.

Это уравнение можно решить, сделав замены $t=x^2-6x+12$ или $z=\sqrt{x^2-6x+12}$ (решение проведите самостоятельно).

Ответ: 2, 4.

Упражнения

Решите уравнения:

118. а) $\sqrt{5x+21}=x+3$; б) $\sqrt{x+29}=1-x$.

119. а) $x-\sqrt{x-1}=3$; б) $\sqrt{4x+9}+9=x$.

120. а) $\sqrt{11x+3}+x=7$; б) $\sqrt{3x+4}+2=x$.

121. а) $\sqrt{2x^2+3x-5}=x+1$; б) $\sqrt{3x^2-x-8}=x+2$.

122. а) $\sqrt{2x^2+7x+1}=-2x-6$; б) $\sqrt{3x-5}\cdot\sqrt{x-1}=2x-5$.

123. а) $\sqrt{2x-7}\cdot\sqrt{x-4}=x-2$; б) $2(x+1)=\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{3x+1}$.

124. а) $\sqrt{2x+5}\cdot\sqrt{x-1}=x+5$; б) $x+9=\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{2x+3}$.

---

125. а) $x^2+2\sqrt{x^2-5x+3}=5x+12$;

б) $x^2-3x-7=\sqrt{2x^2-6x-11}$;

в) $(x+4)(x+1)-3\cdot\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

126. а) $\sqrt{\frac{9+4x}{2+x}}-3\sqrt{\frac{2+x}{9+4x}}=2$; б) $\sqrt{\frac{x+5}{x-1}}-10\sqrt{\frac{x-1}{x+5}}+3=0$.

127. а) $\sqrt{\frac{6x+1}{x-3}}+10\sqrt{\frac{x-3}{6x+1}}=7$; б) $\sqrt{\frac{x+11}{x-1}}+2\sqrt{\frac{x-1}{x+11}}-3=0$;

в) $\sqrt{x^2-10x+33}+\frac{3}{\sqrt{x^2-10x+33}}=4$.

§ 13 Показательные уравнения

Показательным называется уравнение, в котором неизвестная величина содержится в показателе степени.

Если x — действительное число, то показательное выражение $y = a^x$ имеет смысл только тогда, когда основание степени положительное ($a > 0$) и в этом случае y принимает только положительные значения ($y > 0$). При $a \neq 1$ из равенства степеней с одинаковыми основаниями следует равенство их показателей.

Основные типы и методы решений показательных уравнений

1. Простейшим показательным уравнением является уравнение вида $a^{g(x)} = a^b$. При $a \neq 1$ оно равносильно алгебраическому уравнению $g(x) = b$.

2. Уравнение вида $a^{g(x)} = b$ сводится к уравнению первого типа, а именно $a^{f(x)} = a^{\log_a b}$.

3. Уравнение вида $a^{2x} + b \cdot a^x + c = 0$ с помощью замены $t = a^x$ $(t > 0)$ сводится к квадратному уравнению относительно новой переменной.

Пример 50. Решите уравнение $9^{x-1} \cdot 3^{2x+7} = 81 \cdot 3^{5x-1}$.

Решение. Приведем степени к одному основанию и выполним умножение степеней $3^{2(x-1)} \cdot 3^{2x+7} = 3^4 \cdot 3^{5x-1} \Rightarrow 3^{2x-2+2x+7} = 3^{4+5x-1}$. Из равенства степеней следует равенство их показателей $4x + 5 = 5x + 3$, следовательно, $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 51(*). Решите уравнение $25^{x-0,5} - 4 \cdot 5^x = 25$.

Решение. Это уравнение решается с помощью замены переменной. Обозначим $t = 5^x$. По свойству показательной функции $t > 0$. Заметим, что $25^{x-0,5} = 25^x : 25^{1/2} = 0,2 \cdot 5^{2x}$ и уравнение примет вид $0,2t^2 - 4t - 25 = 0$ или $t^2 - 20t - 125 = 0$. Это уравнение имеет два корня ($t = 10 \pm \sqrt{100 + 125} = 10 \pm 15$) $t = 25$ и $t = –5$. Корень $t = –5$ является посторонним. Решая уравнение $5^x = 25$, получим, что исходное уравнение имеет одно решение $x = 2$.

Ответ: 2.

Упражнения

Решите уравнения:

128. а) $2 \cdot (0,5)^{x+8} = 4^{2x-1}$; б) $0,2^{x-1} = 25^{4x-13}$;

в) $0,25^{3x-5} = 16^{x-15}$; г) $64^{3-x} = 0,125^{x^2-x-34}$;

д) $25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+4x} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$.

129. а) $4 \cdot 0,5^{x^2+4x} = 8^{-x}$; б) $(0,5)^{x^2-9x+17,5} = 4\sqrt{2}$.

130. а) $3^{x+2} - 5 \cdot 3^{x+1} + 28 \cdot 3^x = 198$; б) $0,4^{x-3} = 6,25^{6x-5}$.

---

131. а) $25 \cdot (0,2)^{x^2+5x-1} = 5^{-3}$; б) $1,5^{2x} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-9} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-2}$.

132. а) $9^{x+1} + 8 \cdot 3^x = 1$; б) $25^{x-0,5} - 2 \cdot 5^{x-1} + 0,2 = 0$.

133. а) $4^{x+2} - 17 \cdot 2^x + 1 = 0$; б) $\frac{3^x + 1}{3^x} = \frac{3^{x+1} - 1}{3^x + 3}$.

§ 14 Логарифмические уравнения

Логарифмическим называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма. Из равенства логарифмов с одинаковыми основаниями следует равенство их аргументов, если аргументы положительны[28]. Выражение $\log_a x$ определено при $x > 0$, $a > 0, a \neq 1$, поэтому при переходе от логарифмического уравнения к алгебраическому в общем случае получается уравнение-следствие.

[28] Уравнения рассматриваем на множестве действительных чисел: и независимая переменная и функция принимают действительные значения. В комплексной области из равенства логарифмов не следует равенство их аргументов, так как логарифм комплексного числа принимает бесконечно много значений.

Решение любого логарифмического уравнения должно начинаться с записи **области допустимых значений** (ОДЗ) уравнения, причем не всегда ОДЗ нужно находить явно.

Основные типы логарифмических уравнений

1. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Область допустимых значений уравнения $f(x) > 0$. При выполнении этого условия можно перейти к алгебраическому уравнению $f(x) = g(x)$. Условие $g(x) > 0$ в этом случае выполняется автоматически.

2. Уравнение $\log_a f(x) = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Область допустимых значений уравнения $f(x) > 0$. Используя свойства логарифма, преобразуем уравнение к виду $\log_a f(x) = \log_a a^b$ и перейдем к алгебраическому уравнению $f(x) = a^b$.

3. Уравнения, которые после тождественных преобразований с применением свойств логарифмов приводятся к виду из пп. 1 или 2. Например, уравнение $\log_a f(x) + \log_a g(x) = b$. Отметим только, что область допустимых значений уравнения — это система неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

4. Уравнения, которые после замены переменной сводятся к квадратному уравнению. Например, уравнение вида

$$\log_a^2 x + b \cdot \log_a x + c = 0.$$

Пример 52. Решите уравнение $\lg(x-3) + \lg(x+9) = \lg 13$.

Решение. Запишем систему неравенств, задающих область допустимых значений уравнения $\begin{cases} x-3 > 0, \\ x+9 > 0. \end{cases}$ Применив формулу для суммы логарифмов, получим $\lg_3 (x-3)(x+9) = \lg_3 13$. Перейдем к алгебраическому уравнению $(x-3)(x+9) = 13 \Rightarrow x^2 + 6x - 40 = 0$ и найдем его корни $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9+40} = -3 \pm 7$. Корень $x = 4$ принадлежит ОДЗ, а корень $x = -10$ не принадлежит ОДЗ. Уравнение имеет одно решение $x = 4$.

Ответ: 4.

Пример 53. Решите уравнение

$\log_3(2x+1)+\log_3(x+2)=\log_3(x-2)+3$.

Решение. Запишем систему неравенств, задающих область допустимых значений уравнения $\begin{cases} 2x+1>0, \\ x+2>0, \\ x-2>0. \end{cases}$ Применив формулу для суммы логарифмов и учитывая, что $3=\log_3 27$, получим $\log_3(2x+1)(x+2)= =\log_3 27(x-2)$. Перейдем к алгебраическому уравнению $(2x+1)(x+2)=27(x-2)$ или $x^2-11x+28=0$. Найдем его корни $x=\dfrac{11\pm\sqrt{11^2-4\cdot 28}}{2}=\dfrac{11\pm\sqrt{121-112}}{2}=\dfrac{11\pm 3}{2}\Rightarrow x_1=4, x_2=7$. Оба корня уравнения принадлежат ОДЗ. Уравнение имеет два решения $x=4, x=7$.

Ответ: 4, 7.

Пример 54(*). Решите уравнение $\log_{x-2}(2x^2-11x+16)=2$.

Решение. Запишем систему неравенств, задающих область допустимых значений уравнения $\begin{cases} 2x^2-11x+16>0, \\ x-2>0,\ x-2\neq 1. \end{cases}$ Перепишем уравнение в виде $\log_{x-2}(2x^2-5x+5)=2\cdot\log_{x-2}(x-2)$ или $\log_{x-2}(2x^2-5x+5)=\log_{x-2}(x-2)^2$ и перейдем к алгебраическому уравнению $2x^2-11x+16=(x-2)^2$. Раскроем скобки и получим $2x^2-11x+16=x^2-4x+4$ или $x^2-7x+12=0$. Корни найдем по теореме Виета $\begin{cases} x_1+x_2=7, \\ x_1\cdot x_2=12. \end{cases}$ Значит, $x=3$ и $x=4$. Подставив корни в систему, задающую ОДЗ, получим, что корень $x=3$ — посторонний. Итак, уравнение имеет одно решение $x=4$.

Ответ: 4.

Пример 55(*). Решите уравнение $\lg^2 x - \lg 100x = 4$.

Решение. Область допустимых значений уравнения $x > 0$. Перепишем уравнение в виде $\lg^2 x - (\lg 100 + \lg x) = 4$ или $\lg^2 x - 2 - \lg x - 4 = 0$. Обозначим $y = \lg x$ и получим уравнение $y^2 - y - 6 = 0$, корни которого по теореме Виета равны $y = 3$ и $y = -2$. Вернемся к исходной переменной. Для этого решим уравнения $\lg x = -2 \Rightarrow \Rightarrow x = 10^{-2} = 0{,}01$ и $\lg x = 3 \Rightarrow x = 10^3 = 1000$. Оба корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: 0,01; 1000.

Упражнения

Решите уравнения:

134. а) $\log_4 x^2 = \log_4 x$; б) $\lg(2x^2 + x - 5) - 2\lg(x+1) = 0$.

135. а) $\log_3(x^2 - 4x + 3) = \log_3(x-1)$;

б) $\log_2(x^2 - 5x + 3) = \log_2(4x-5)$.

136. а) $\lg(2x-5) + \lg(x-4) = \lg 14$; б) $\lg x + \lg(x-3) = 1$.

137. а) $\log_2(x+1) + \log_2 x = 2 + \log_2 3$;

б) $\log_2(x-1) + \log_2(2x-5) = \log_2(3x-7)$.

---

138. а) $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1$; б) $\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2$.

139. а) $\log_2(x+14) - \log_{0,5}(x+2) = 6$; б) $2^{\log_2(x^2 - 9x + 16)} = 4 - x$.

140. а) $\log_2(8x) - \log_{0,5}\dfrac{x}{2} = 8$; б) $\log_2(2x) - \dfrac{3}{\log_2 x} = 3$.

141. а) $\lg(0{,}1x) - \log_{0,1}(x-4) = \lg 14$; б) $\log_3 x - \dfrac{2}{\log_3 x} = 1$;

142. а) $\log_4^2 x + 3\log_4 \dfrac{4}{x} = 1$; б) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} 2x = 1$.

§ 15 Тригонометрические уравнения

Для решения тригонометрических уравнений необходимо знать обратные тригонометрические функции. Напомним эти понятия.

Арксинусом числа a называется угол α такой, что $\sin\alpha = a$, причем $a \in [-1; 1]$ и $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Арккосинусом числа a называется угол α такой, что $\cos\alpha = a$, причем $a \in [-1; 1]$ и $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Арктангенсом числа a называется угол α такой, что $\mathrm{tg}\,\alpha = a$ и $\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\,a$.

Все тригонометрические уравнения сводятся к одному из трех простейших уравнений:

а) $\sin x = a \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ при $-1 \le a \le 1$. При $|a| > 1$ уравнение $\sin x = a$ действительных решений не имеет[29];

б) $\cos x = a \Rightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ при $-1 \le a \le 1$. При $|a| > 1$ уравнение $\cos x = a$ действительных решений не имеет;

в) $\mathrm{tg}\,x = a$, тогда $x = \mathrm{arctg}\,a + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Уравнение $\mathrm{ctg}\,x = a$ при $a \ne 0$ заменой $\mathrm{ctg}\,x = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}$ сводится к уравнению $\mathrm{tg}\,x = a^{-1}$.

Более простой вид имеют формулы для решения простейших тригонометрических уравнений в частных случаях:

г) $\sin x = 1$, тогда $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

д) $\sin x = -1$, тогда $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

е) $\sin x = 0$, тогда $x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

ж) $\cos x = 1$, тогда $x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

з) $\cos x = -1$, тогда $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

и) $\cos x = 0$, тогда $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

[29] На множестве комплексных чисел уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ имеют решение для любого числа a.

Основные приемы решения тригонометрических уравнений — с помощью тождественных преобразований привести уравнение к одному из простейших. Например, перенести все слагаемые в левую часть уравнения и с помощью различных преобразований разложить ее на множители. К таким преобразованиям относятся группировка слагаемых, вынесение за скобки общего множителя, применение различных тригонометрических формул.

Второй класс тригонометрических уравнений – это уравнения, сводящиеся к одной тригонометрической функции. Тогда, выполнив замену переменной и решив алгебраическое уравнение, получим совокупность простейших тригонометрических уравнений.

Пример 56. Решите уравнение $\sin 3x = -0{,}5$.

Решение. Это простейшее тригонометрическое уравнение. По формуле п. «а» $3x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, или $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Пример 57. Найдите:

а) общее решение уравнения $\cos 2x - 3\cos x - 1 = 0$;

б) решения уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Распишем косинус двойного угла и получим уравнение $2\cos^2 x - 1 - 3\cos x - 1 = 0$. Обозначим $t = \cos x$ и решим полученное после замены квадратное уравнение $2t^2 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$. Его корни $t = -0{,}5$ и $t = 2$.

Уравнение $\cos x = 2$ на множестве действительных чисел решений не имеет[30].

---

[30] На множестве комплексных чисел это уравнение имеет решение. Так как $\cos z = 0{,}5(e^{iz} + e^{-iz})$, то заменой $t = e^{iz}$ оно сводится к квадратному

Уравнение $\cos x = -0{,}5$ имеет решение $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n =$

$= \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Итак, общее решение уравнения $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Чтобы найти корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, будем придавать n различные значения.

$n = 0$, тогда $x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $x = -\frac{2\pi}{3} \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$n = -1$, тогда $x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $x = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi =$ $= -\frac{8\pi}{3} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Итак, заданному отрезку принадлежат два решения: $-\frac{2\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; б) $-\frac{2\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}$.

Упражнения

Найдите общее решение уравнений.

143. а) $\sin 2x = 1$; б) $\sin 4x = 0{,}5$;

в) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$.

144. а) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; б) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; г) $4\cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}$.

145. а) $\sin x + \sin 2x = 0$; б) $\sin 2x + 3\cos x = 0$;

в) $\cos 2x + 3\sin x = 1$.

уравнению $t^2 - 4t + 1 = 0$, которое имеет два различных корня, и решению показательных уравнений $e^{iz} = t_1, e^{iz} = t_2$.

146. а) $\cos x - \sin 2x = 0$; б) $4\cos x - \cos^3 x = 0$;
в) $\cos 2x + 1 = \cos x$.

147. а) $\sin 2x - \sqrt{3}\sin x = 0$; б) $\sin x + \cos^2 x = 1$.

---

148. а) $2\cos^2 x + 7\cos x - 4 = 0$; б) $3\sin^2 x + 7\cos x - 3 = 0$;
в) $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$; г) $2\sin^2 x + 5\cos x - 4 = 0$.

149. а) $(\sin x - \cos x)^2 = 1{,}5$; б) $0{,}5\sin 2x + \cos^2 x = 1$;
в) $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$; г) $\sin 2x = \cos x - \cos 3x$.

150. а) $\sqrt{3}\cdot\sin 2x = 2\sin^2 x$; б) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} = 2\sin x$.

§ 16 Системы и совокупности уравнений

Пусть даны два уравнения с двумя неизвестными $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$. Поставим задачу, найти все пары чисел, удовлетворяющие этим уравнениям. В этом случае мы получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases}$

Решить систему уравнений — это значит найти все пары чисел (x_0, y_0), которые являются решением каждого из уравнений, или доказать, что таких пар чисел нет. Система, не имеющая решений, называется ***несовместной***.

В общем случае ***система уравнений*** с n неизвестными — это множество уравнений с этими неизвестными[31]

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ f_2(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ \quad ... \quad ... \quad ... \\ f_m(x_1,x_2,...,x_n)=0. \end{cases}$$

Решением системы уравнений называется упорядоченный набор чисел (значений неизвестных) $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ... x_n^{(0)})$, при подстановке которых вместо неизвестных каждое из уравнений обращается в верное равенство.

[31] Число уравнений не обязано совпадать с числом неизвестных.

Решать систему можно аналитически, выполняя равносильные преобразования входящих в систему уравнений. Например, выражая одно из неизвестных и подставляя его в другие уравнения системы, получим более простую систему[32].

Наглядное представление о решении системы уравнений с двумя неизвестными дает ее графическое решение. Так как графиком каждого из уравнений является кривая, то решение системы уравнений — это множество точек пересечения заданных кривых.

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ причем коэффициенты в правой части каждого из уравнений не равны одновременно нулю. Рассмотрим основные методы решения такой системы.

1. **Метод подстановки**. Выражаем из первого уравнения одно из неизвестных и подставляем это выражение во второе уравнение. Решая полученное уравнение, находим одно неизвестное, а из формулы подстановки — второе неизвестное.

2. **Метод сложения**[33]. Умножим первое уравнение системы на $(-a_2)$, второе – на a_1 $(a_1 \neq 0, a_2 \neq 0)$ и сложим полученные уравнения

$$\begin{cases} -a_1a_2x - a_2b_1y = -a_2c_1, \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \end{cases} + \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \end{cases}$$

Если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$[34], то $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$. Подставив найденное значение y в первое уравнение, получим $x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$.

---

[32] Существуют различные методы решения системы уравнений. Подход зависит от типа системы. Так, решение системы линейных уравнений полностью исследовано. Общего аналитического метода решения системы нелинейных уравнений не найдено.

[33] В курсе математики для уравнений и систем линейных уравнений с произвольным числом переменных этот метод называют методом исключения неизвестных или ***методом Гаусса***.

[34] В линейной алгебре выражение $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ называют ***определителем*** 2-го порядка.

Итак, если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то система имеет единственное решение $x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$.

Если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, а $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$, т.е. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то система решений не имеет.

Если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, и $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$, т.е. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечно много решений.

3. **Графический метод**. Каждому уравнению на плоскости соответствует прямая. Две прямые на плоскости могут либо пересекаться в одной точке (система имеет единственное решение), либо не иметь общих точек (система не имеет решений), либо совпадать (система имеет бесконечно много решений).

4. **Метод определителей (метод Крамера)**. Этот метод в общем виде будет изучаться в разделе «Линейная алгебра».

Можно также рассматривать совокупность нескольких уравнений, например двух уравнений с двумя неизвестными

$$\left[\begin{array}{l} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{array}\right.$$

Решить эту совокупность уравнений — это значит найти все пары чисел (x_0, y_0), каждая из которых является решением хотя бы одного из уравнений, а другое уравнение при этом имеет смысл.

Аналогично определяется совокупность уравнений с n неизвестными и ее решение. Множество уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right.$$

образует совокупность, если требуется найти все такие упорядоченные наборы чисел $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)})$, при каждом из которых хотя бы одно из уравнений совокупности обращается в верное числовое равенство, а другие уравнения имеют смысл.

Заметим, что уравнение $f^2(x,y)+g^2(x,y)=0$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0, \end{cases}$ а уравнение $f(x,y)\cdot g(x,y)=0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{array}\right.$

Пример 58. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x+2y=4, \\ 2x-5y=9. \end{cases}$

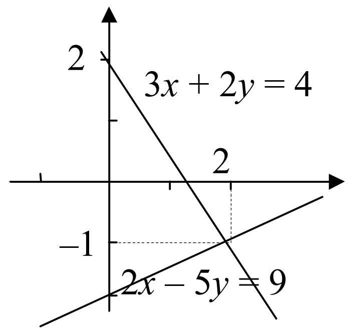
Решение. Решим систему несколькими способами.

1. Метод подстановки. Из первого уравнения выразим y и подставим во второе уравнение

$$\begin{cases} y=2-1{,}5x, \\ 2x-5(2-1{,}5x)=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-1{,}5x, \\ 9{,}5x=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1, \\ x=2. \end{cases}$$

Итак, решение системы $x = 2$, $y = -1$.

2. Метод исключения неизвестных. Умножим первое уравнение на 5, второе умножим на 2: $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ 2x-5y=9 \end{cases}\begin{vmatrix} \times 5 \\ \times 2 \end{vmatrix}$ и сложим уравнения $\begin{cases} 15x+10y=20, \\ 4x-10y=18. \end{cases}$ Из уравнения $19x = 38$ следует, что $x = 2$. Подставив значение x в первое уравнение, найдем, что $y = -1$.



3. Графический метод. График каждого из уравнений системы — прямая на плоскости. Решение системы — это точка пересечения прямых.

Ответ: (2; –1)

Можно рассматривать также системы нелинейных уравнений. Если одно из уравнений системы является линейным, то можно применять метод подстановки.

Пример 59. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ x^2 - 5xy + 3y^2 + 4x = 3. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения выразим y и подставим во второе:

$$\begin{cases} y = 2x - 4, \\ x^2 - 5x(2x-4) + 3(2x-4)^2 + 4x = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4, \\ 3x^2 - 24x + 45 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4, \\ x^2 - 8x + 15 = 0. \end{cases}$$

Решив квадратное уравнение, найдем значения x: $x_{1,2} = = 4 \pm \sqrt{16 - 15} \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 5$, а затем, подставив x в первое уравнение, найдем y: $y_1 = 6 - 4 = 2$, $y_2 = 10 - 4 = 6$.

Итак, $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 2, \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 6. \end{cases}$

Система имеет два решения.

Ответ: (3; 2), (5; 6).

Пример 60(*). Решите систему уравнений $\begin{cases} 7 - x + y - xy = 0, \\ 5 - y + x - xy = 0. \end{cases}$

Решение. Перепишем систему в виде $\begin{cases} (x - y) + xy = 7, \\ (x - y) - xy = -5. \end{cases}$

<u>1-й способ</u>. Сложим уравнения и получим $\begin{cases} (x - y) + xy = 7, \\ x - y = 1. \end{cases}$

Выразим y из второго уравнения и подставим в первое: $\begin{cases} y = x - 1, \\ 1 + x(x-1) = 7. \end{cases}$ Квадратное уравнение $x^2 - x - 6 = 0$ имеет два корня $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$ ($D = 25$). Тогда $y_1 = -3$ и $y_2 = 2$. Система имеет два решения (–2; –3) и (3; 2).

<u>2-й способ</u>. Сделаем в системе замену переменных: пусть $t = x - y, z = xy$. Система уравнений примет вид $\begin{cases} t + z = 7, \\ t - z = -5. \end{cases}$ Сложим уравнения системы и получим, что $t = 1$. Подставим найденное значения t в первое уравнение системы и получим, что $z = 6$. Следовательно, решение вспомогательной системы уравнений $t = 1$, $z = 6$.

Вернемся к исходным переменным и запишем систему: $\begin{cases} x-y=1, \\ xy=6. \end{cases}$ Выразим из первого уравнения y и подставим во второе $\begin{cases} y=x-1, \\ x(x-1)=6. \end{cases}$ Второе уравнение системы является квадратным и имеет два решения $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} \Rightarrow x_1=-2, x_2=3$. Из первого уравнения для каждого значения x найдем соответствующее значение y. Решения системы $\begin{cases} x_1=-2, \\ y_1=-3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2=3, \\ y_2=2. \end{cases}$ Система имеет два решения.

Ответ: (–2; –3), (3; 2).

Пример 61. Решите совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} x^2+5x+4=0, \\ x^2-x-2=0. \end{array}\right.$

Решение. Решением этой совокупности являются значения x, удовлетворяющие хотя бы одному уравнению. Каждое из уравнений является квадратным. Решим эти уравнения по теореме Виета. Корни первого уравнения $x_1=-1$, $x_2=-4$, корни второго уравнения $x_3=-1$, $x_4=2$. Совокупность имеет три решения $x_1=-4$, $x_2=-1$, $x_3=2$.

Ответ: –4; –1, 2.

Упражнения

Решите системы уравнений аналитически и графически.

151. а) $\begin{cases} x+3y=-3; \\ 3x-4y=17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y=6; \\ 5x-4y=44. \end{cases}$

152. а) $\begin{cases} 2x-5y=1; \\ 3x+2y=11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x+y=10; \\ 3x-5y=19. \end{cases}$

Решите системы уравнений

153. а) $\begin{cases} x+5y=8; \\ x^2+4xy=21; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=|x^2+6x+5|; \\ y-x=5. \end{cases}$

154. а) $\begin{cases} x+y=6; \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y=4; \\ x^2+5xy+y^2=15. \end{cases}$

155. а) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=4; \\ xy=15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+xy-y=13; \\ x^2y-xy^2=30. \end{cases}$

Глава 4 РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

§ 17 Общие понятия теории неравенств

Любые два действительных числа можно сравнить, то есть указать, какое из них больше, какое меньше, либо сказать, что они равны друг другу[35]. В этой главе будем рассматривать ***неравенства с одной неизвестной***, то есть выражения вида $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \le g(x)$ и $f(x) \ge g(x)$.

Решением неравенства с одной неизвестной называется такое значение неизвестной, при подстановке которого в неравенство оно становится верным. Решить неравенство — значит найти множество всех его решений. Решение неравенства обычно записывают в виде промежутка или объединения промежутков. Если в решение неравенства входят отдельные изолированные точки, то их принято записывать в фигурных скобках.

Если неравенство решений не имеет, то для записи ответа можно использовать знак пустого множества $\varnothing$, если же неравенству удовлетворяют все действительные числа, то в ответе пишут **R** или $(-\infty; +\infty)$.

Два неравенства называются ***равносильными***, если множества их решений совпадают. Если все решения одного неравенства являются решениями другого неравенства, то второе неравенство называется ***следствием*** первого.

Неравенства вида $f(x) < g(x)$ и $f(x) > g(x)$ называют ***строгими***, а неравенства вида $f(x) \le g(x)$ и $f(x) \ge g(x)$ называют ***нестрогими***. Знаки неравенств «$<$» и «$>$», так же как «$\le$» и «$\ge$», называют ***противоположными***.

Преобразования, которые приводят к равносильным неравенствам:

1) к обеим частям неравенства можно прибавлять любое число[36]; неравенство $f(x) > g(x)$ равносильно неравенству $f(x) + a > g(x) + a$;

---

[35] Во множестве комплексных чисел операция сравнения чисел не определена, то есть неравенства $z_1 < z_2$ или $z_1 > z_2$ для комплексных чисел не имеют смысла. Сравнивать можно только модули комплексных чисел.

[36] Все перечисленные преобразования неравенств справедливы и для неравенств противоположного знака. Например, неравенство $f(x) < g(x)$ равносильно неравенству $f(x) + a < g(x) + a$.

2) обе части неравенства можно умножать и делить на положительное число, знак неравенства при этом сохраняется: если $a > 0$, то неравенство $f(x) > g(x)$ равносильно неравенству $a \cdot f(x) > a \cdot g(x)$;

3) обе части неравенства можно умножать и делить на отрицательное число, знак неравенства при этом меняется на противоположный: если $a < 0$, то неравенство $f(x) > g(x)$ равносильно неравенству $a \cdot f(x) < a \cdot g(x)$;

4) слагаемое можно переносить из одной части неравенства в другую с противоположным знаком: неравенство $f(x) + h(x) > g(x)$ равносильно неравенству $f(x) > g(x) - h(x)$ (также неравенство $f(x) + a > g(x)$ равносильно неравенству $f(x) > g(x) - a$);

5) если функция $h(x)$ определена для всех x, для которых определены функции $f(x)$ и $g(x)$, то ее можно прибавлять к обеим частям неравенства: неравенство $f(x) > g(x)$ равносильно неравенству $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$;

6) если функция $h(x)$ определена и положительна для всех x, для которых определены функции $f(x)$ и $g(x)$, то на нее можно умножать или делить обе части неравенства: неравенство $f(x) > g(x)$ равносильно неравенствам $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ и $\dfrac{f(x)}{h(x)} > \dfrac{g(x)}{h(x)}$;

7) если функция $h(x)$ определена и отрицательна для всех x, для которых определены функции $f(x)$ и $g(x)$, то при умножении или делении на нее знак неравенства меняется на противоположный: неравенство $f(x) > g(x)$ равносильно неравенствам $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ и $\dfrac{f(x)}{h(x)} < \dfrac{g(x)}{h(x)}$;

8) если обе части неравенства положительны, то обе части неравенства можно возводить в натуральную степень: неравенство $f(x) > g(x)$ равносильно неравенству $\left(f(x)\right)^k > \left(g(x)\right)^k$ $(k \in \mathbf{N})$;

9) если обе части неравенства положительны, то из обеих частей неравенства можно извлекать корни: неравенство $f(x) > g(x)$ равносильно неравенству $\sqrt[k]{f(x)} > \sqrt[k]{g(x)}$ ($k \in \mathbf{N}$);

10) если обе части неравенства положительны или отрицательны, то возможен переход к неравенству между обратными величинами

с одновременной сменой знака неравенства на противоположный: неравенство $f(x) > g(x)$ равносильно неравенству $\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{g(x)}$.

§ 18 Линейные и квадратные неравенства

Простейшими неравенствами являются линейные неравенства. Их приводят к виду $ax < b$, $ax > b$, $ax \le b$ или $ax \ge b$ и при $a \ne 0$ делят обе части на a. При этом если $a > 0$, то при делении на коэффициент знак неравенства сохраняется, а если $a < 0$, то знак неравенства меняется на противоположный. При $a = 0$ неравенство становится числовым, и если оно неверно, то исходное неравенство решений не имеет, а если верно – то неравенство выполняется при всех значениях x.

Пример 62. Решите неравенство $8 – 3(x + 1) \le 11$.

Решение. Данное неравенство является линейным. Раскроем скобки, перенесем слагаемые, не содержащие x, в правую часть: $8-3x-3\le 11 \Rightarrow -3x\le 11-8+3 \Rightarrow -3x\le 6$. Разделим обе части неравенства на (–3): $x \ge –2$ (при делении неравенства на отрицательное число знак неравенства поменяли на противоположный). Решение неравенства — луч $[–2; +\infty)$.

Ответ: $[–2; +\infty)$.

Пример 63. Решите неравенство:

а) $\frac{x-1}{2}+\frac{2x+3}{6}<\frac{5x+2}{3}-x$; б) $\frac{x-1}{2}+\frac{x+8}{6}<\frac{5x+2}{3}-x$;

в) $\frac{x-1}{2}+\frac{x+6}{6}<\frac{5x+7}{3}-x$.

Решение. а) Умножим обе части неравенства на положительное число 6, знак неравенства при умножении не изменится: $3x-3+$ $+2x+3<10x+4-6x$. Перенесем слагаемые, содержащие x, в левую часть, а слагаемые, не содержащие x, — в правую часть: $3x+2x-10x+6x<4+3-3$. После приведения подобных получим неравенство $x < 4$. Решение неравенства — луч $(–\infty; 4)$;

б) умножим обе части неравенства на положительное число 6: $3x-3+x+8<10x+4-6x$. После упрощений получим числовое неравенство $0<-1$. Это неравенство решений не имеет;

в) умножим обе части неравенства на положительное число 6: $3x-3+x+6<10x+14-6x$. После упрощений получим числовое неравенство $0<11$. Это неравенство справедливо для всех действительных значений переменной, следовательно, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Ответ: а) $(-\infty; 4)$; б) $\varnothing$; в) $(-\infty; +\infty)$.

Пример 64. Решите неравенство $(4x+3)(x-2)<(4x+7)(x-1)$.

Решение. Раскроем скобки и перенесем все слагаемые, содержащие x, в левую часть: $4x^2+3x-8x-6<4x^2+7x-4x-7 \Rightarrow$ $\Rightarrow -8x<-1 \Rightarrow x>0{,}125$ (при делении на (–8) знак неравенства сменили на противоположный).

Ответ: $(0{,}125; +\infty)$.

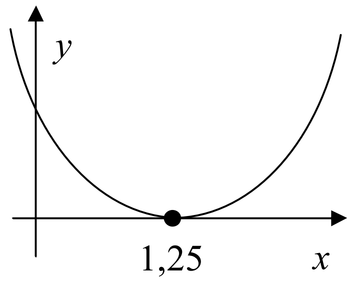
При решении квадратных неравенств можно применить график квадратичной функции — параболу.

Для квадратного трехчлена ax^2+bx+c в зависимости от знака старшего коэффициента и дискриминанта возможны следующие случаи решения неравенств.

Дискриминант	$a>0$ ветви направлены вверх	$a<0$ ветви направлены вниз
$D>0$ (два действительных корня $x_1<x_2$)	$ax^2+bx+c>0$ при $x \in (-\infty; x_1)\cup(x_2; +\infty)$	$ax^2+bx+c>0$ при $x \in (x_1; x_2)$
	$ax^2+bx+c<0$ при $x \in (x_1; x_2)$	$ax^2+bx+c<0$ при $x \in (-\infty; x_1)\cup(x_2; +\infty)$
$D=0$ (один действительный корень)	$ax^2+bx+c>0$ при $x \in (-\infty; x_1)\cup(x_1; +\infty)$	$ax^2+bx+c<0$ при $x \in (-\infty; x_1)\cup(x_1; +\infty)$
	$ax^2+bx+c<0$ при $x \in \varnothing$	$ax^2+bx+c>0$ при $x \in \varnothing$
$D<0$ (нет действительных корней)	$ax^2+bx+c>0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$	$ax^2+bx+c<0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$
	$ax^2+bx+c<0$ при $x \in \varnothing$	$ax^2+bx+c>0$ при $x \in \varnothing$

Пример 65. Решите неравенство $16x^2-40x+25\le 0$.

Решение. а) Найдем координаты вершины параболы $x=\dfrac{40}{32}=1{,}25;\ y=0$. Ветви параболы направлены вверх (a = 16 > 0), она находится в верхней полуплоскости и касается оси абсцисс. Неравенство имеет единственное решение x = 1,25;

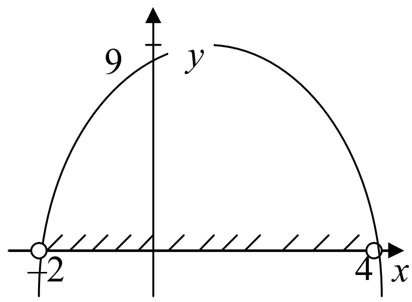


б) поскольку соответствующее квадратное уравнение имеет два равных корня $x_{1,2}=\dfrac{20\pm\sqrt{400-400}}{16}=1{,}25$, то применив формулу квадрата разности, преобразуем неравенство к виду $(4x-5)^2\le 0$, правая часть которого неотрицательна и равна нулю, когда $4x-5=0$.

Ответ: 1,25.

Пример 66. Решите неравенство $7-(x-1)^2>-2$.

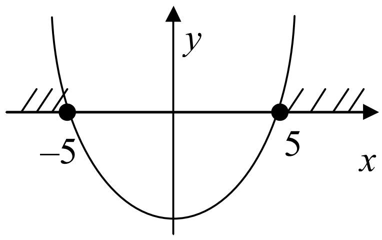
Решение. Перенесем (–2) в левую часть и преобразовав ее, получим $-x^2+2x+8>0$. Найдем корни соответствующего квадратного уравнения: $x_1=-2, x_2=4$. Ветви параболы направлены вниз ($a=-1<0$) и решением неравенства является интервал (–2; 4).



Ответ: (–2; 4).

Пример 67. Решите неравенство $x^2\ge 25$.

Решение. Перенесем 25 в левую часть $x^2-25\ge 0$. Уравнение $x^2-25=0$ имеет два корня $x_{1,2}=\pm 5$, ветви параболы направлены вверх (a = 1 > 0) и она пересекает ось абсцисс в точках $x=\pm 5$ и находится в верхней полуплоскости вне промежутка между нулями параболы. Поэтому решение неравенства — объединение двух промежутков: $(-\infty;-5]$ и $[5;+\infty)$.



Ответ: $(-\infty;-5]\cup[5;+\infty)$.

§ 19 Дробно-рациональные неравенства

Одним из методов, применяемых для решения алгебраических неравенств более высоких степеней и дробных неравенств, является ***метод интервалов.*** *Дробно-рациональная функция может менять знак только в тех точках, в которых она равна нулю или не существует*[37].

Данный метод осуществляется в несколько этапов:

а) приводим дробно-рациональное неравенство[38] к одному из видов $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \le 0$ или $\frac{f(x)}{g(x)} \ge 0$;

б) находим все корни уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$;

в) наносим полученные точки на числовую ось, причем точки, в которых дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ не определена (знаменатель дроби $g(x)$ обращается в ноль), всегда будут выколотыми (точки на графике не закрашены); если неравенство строгое $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ или $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, то корни числителя дроби $f(x)$ также будут выколотыми (точки не закрашены), а если неравенство нестрогое $\frac{f(x)}{g(x)} \le 0$ или $\frac{f(x)}{g(x)} \ge 0$, то корни числителя дроби являются решениями неравенства (точки закрашены);

г) на каждом из образовавшихся интервалов выбирается произвольная точка и определяется знак функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ в этой точке;

д) в ответ записываем интервалы, на которых дробь имеет заданный знак[39].

---

[37] Универсальность метода интервалов основана на свойстве непрерывных функций: «Если на интервале $(a;\, b)$ функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале она сохраняет знак».

[38] Целое неравенство $f(x) > 0$ является частным случаем дробно-рационального неравенства, если знаменатель $g(x) = 1$.

[39] Наиболее часто встречающаяся при решении дробных неравенств ошибка – это умножение неравенства на знаменатель. Такое умножение недопустимо, так как знак знаменателя не постоянен. На промежутке, на котором

При использовании метода интервалов числитель и знаменатель дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ можно разложить на множители: тогда для определения знака функции достаточно будет определить знак каждого из сомножителей. Если же в функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ присутствует в качестве множителя квадратный трехчлен, не имеющий действительных корней, и, следовательно, не раскладываемый на линейные множители, то его знак всегда постоянен и совпадает со знаком старшего коэффициента.

Для убыстрения расчетов также можно пользоваться ***правилом знакочередования***: *если все множители, на которые раскладываются числитель и знаменатель функции* $\frac{f(x)}{g(x)}$, *линейны и различны, то знаки дроби на интервалах будут чередоваться*.

Решение дробно-рациональных неравенств можно свести к рассмотрению нескольких систем неравенств. Например, решение неравенства $\frac{f(x)}{g(x)} \le 0$ сводится к решению совокупности двух систем неравенств $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x) \le 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

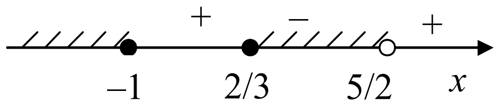
Пример 68. Решите неравенство $\frac{(x+1)(2-3x)}{5-2x} \le 0$.

Решение. Начнем с предостережения: умножать неравенство на выражение, стоящее в знаменателе неравенства, нельзя, так как неизвестно положительно или отрицательно это выражение и надо ли менять знак неравенства на противоположный.

Воспользуемся методом интервалов. Приравняв числитель и знаменатель к нулю, получим три точки: $x = -1$; $x = 2/3$; $x = 2{,}5$. Так как неравенство нестрогое, то корни числителя являются решениями неравенства (на чертеже они закрашены), а корень знаменателя нет

знаменатель положителен, знак неравенства не меняется, а на промежутке, на котором знаменатель отрицателен, знак неравенства меняется на противоположный. Чтобы получить целое неравенство, равносильное исходному, умножать нужно на квадрат знаменателя, учитывая при этом область его допустимых значений.

(на чертеже он не закрашен). В данном случае действует правило знакочередования, и достаточно определить знак только в одном из интервалов. Например, можно взять точку $4 \in (2{,}5; +\infty)$ и увидеть, что дробь $\frac{(4+1)(2-12)}{5-12} > 0$. Расставим знаки на каждом интервале числовой прямой и выберем интервалы, на которых дробь отрицательна.



Ответ: $(-\infty; -1] \cup [2/3; 5/2)$.

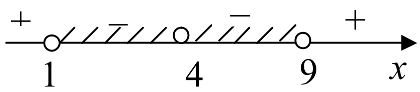
Пример 69. Решите неравенство $(x-4)^2(x^2-10x+9) < 0$.

Решение. Левая часть неравенства обращается в ноль при $x = 4$, $x = 1$, $x = 9$, и его можно записать в виде $(x-4)^2(x-1)(x-9) < 0$. В данном случае правило знакочередования неприменимо, и нужно определять знаки на каждом интервале:

$$(x-4)^2(x-1)(x-9)\Big|_{x=10} > 0,\quad (x-4)^2(x-1)(x-9)\Big|_{x=5} < 0;$$

$$(x-4)^2(x-1)(x-9)\Big|_{x=2} < 0,\quad (x-4)^2(x-1)(x-9)\Big|_{x=0} > 0.$$

Расставим знаки на каждом интервале числовой прямой и выберем интервалы, на которых произведение отрицательно. Следовательно, $x \in (1; 4) \cup (4; 9)$.



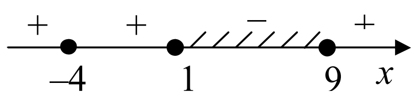
Замечание. Сокращение на неотрицательный сомножитель $(x-4)^2$ приводит к появлению постороннего решения неравенства.

Ответ: $(1; 4) \cup (4; 9)$.

Пример 70. Решите неравенство $(x+4)^2(x^2-10x+9) \le 0$.

Решение. Левая часть неравенства обращается в ноль при $x = 1$, $x = 9$, $x = -4$, и его можно записать в виде $(x+4)^2(x-1)(x-9) \le 0$.

Так как неравенство нестрогое, то все корни соответствующего уравнения являются решениями неравенства (на чертеже они закрашены).



В данном случае правило знакочередования неприменимо, и нужно определять знаки на каждом интервале:

$$(x+4)^2(x-1)(x-9)\Big|_{x=10} > 0, \quad (x+4)^2(x-1)(x-9)\Big|_{x=5} < 0;$$

$$(x+4)^2(x-1)(x-9)\Big|_{x=0} > 0, \quad (x+4)^2(x-1)(x-9)\Big|_{x=-5} > 0.$$

Расставим знаки на каждом интервале числовой прямой и выберем интервалы, на которых произведение отрицательно и точки, в которых произведение равно нулю (неравенство нестрогое). Следовательно, $x \in [1;9] \cup \{-4\}$.

Замечание. Сокращение на неотрицательный сомножитель $(x+4)^2$ приводит к потере решения неравенства.

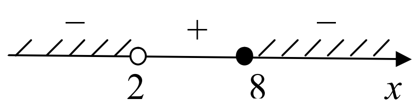
Ответ: $[1;9] \cup \{-4\}$.

Пример 71. Решите неравенство $\dfrac{3x}{x-2} \le 4$.

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть и приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{3x}{x-2} - 4^{\backslash x-2} \le 0 \Rightarrow \frac{3x-4(x-2)}{x-2} \le 0 \Rightarrow \frac{3x-4x+8}{x-2} \le 0 \Rightarrow \frac{-x+8}{x-2} \le 0.$$

Отметим корни числителя $x = 8$ и знаменателя $x = 2$ на числовой прямой и решим неравенство по правилу знакочередования. Так как неравенство нестрогое, то корень числителя является решением неравенства (на чертеже он закрашен), а корень знаменателя нет (на чертеже он не закрашен). Расставим знаки на каждом интервале числовой прямой и выберем интервалы, на которых дробь отрицательна.



Ответ: $(-\infty;-2) \cup [8;+\infty)$.

Пример 72(*). Решите неравенство $\dfrac{2x}{x-4} - \dfrac{1}{x-1} \le 1$.

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть и приведем дроби к общему знаменателю:

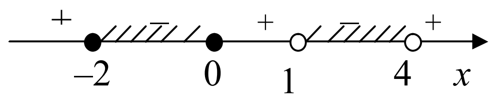
$$\frac{2x^{\backslash x-1}}{x-4}-\frac{1^{\backslash x-4}}{x-1}-1^{\backslash (x-4)(x-1)}\le 0 \Rightarrow \frac{2x(x-1)-(x-4)-(x-4)(x-1)}{(x-4)(x-1)}\le 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2x^2-2x-x+4-(x^2-4x-x+4)}{(x-4)(x-1)}\le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2-2x-x+4-x^2+4x+x-4}{(x-4)(x-1)}\le 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2+2x}{(x-4)(x-1)}\le 0 \Rightarrow \frac{x(x+2)}{(x-4)(x-1)}\le 0.$$

Отметим корни числителя $x = 0$, $x = -2$ и знаменателя $x = 1$, $x = 4$ на числовой прямой и решим неравенство по правилу знакочередования. Так как неравенство нестрогое, то корни числителя являются решениями неравенства (на чертеже они закрашены), а корни знаменателя нет (на чертеже они не закрашены).



Ответ: $[-2; 0]\cup(1; 4)$.

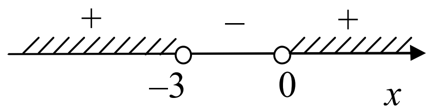
Пример 73(*). Решите неравенство $\frac{2}{x}-\frac{1}{x+3}\ge -1$.

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть и приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{2^{\backslash x+3}}{x}-\frac{1^{\backslash x}}{x+3}+1^{\backslash x(x+3)}\ge 0 \Rightarrow \frac{2(x+3)-x+x(x+3)}{x(x+3)}\ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x+6-x+x^2+3x}{x(x+3)}\ge 0 \Rightarrow \frac{x^2+4x+6}{x(x+3)}\ge 0.$$

Числитель на множители с действительными коэффициентами не раскладывается ($D_1 = 4-6<0$) и принимает только положительные значения. Корни знаменателя не являются решениями неравенства, поэтому на чертеже они не закрашены. Остается по правилу знакочередования определить знаки знаменателя на каждом из полученных интервалов.



Ответ: $(-\infty; -3)\cup(0; +\infty)$.

Упражнения

Решите неравенства

156. а) $2(9x-4)+3(1-x)>4(5x-12)-7(2-x)+9$;

б) $\dfrac{4-5x}{3}<\dfrac{7x+1}{12}-2x$; в) $\dfrac{4x+13}{10}-\dfrac{5+2x}{4}\ge\dfrac{6-7x}{20}-1$.

157. а) $x^2-4x-5>0$; б) $0,5x^2+3x-8\le 0$;

в) $-2x^2+7x-5>0$; г) $-2x^2+13x-18\le 0$;

д) $x^2-49<0$.

158. а) $3x^2-7x+2\le 0$; б) $-4x^2+11x-6\ge 0$;

в) $(x+4)(9-2x)\ge 0$; г) $(2x-7)(3x+6)(x-5)>0$;

д) $(x+2)(x^2+6x-7)>0$.

159. а) $\dfrac{3x-9}{2x+7}\ge 0$; б) $\dfrac{x-7}{x+9}\le 0$; в) $\dfrac{3-x}{4x+5}\ge 0$.

160. а) $\dfrac{3x-11}{2x-4}\ge 2$; б) $1-\dfrac{2x-5}{x+4}>0$; в) $2+\dfrac{1-3x}{3+x}\ge 0$.

161. а) $\dfrac{x-9}{x+5}\ge 3$; б) $1-\dfrac{2x-7}{2x-4}>0$; в) $\dfrac{9}{2+4x}\le -3$.

162. а) $\dfrac{(x+1)(2x-11)}{x-1}\le 0$; б) $\dfrac{x-7}{(x+3)(x-2)}\ge 0$;

в) $\dfrac{(x-2)(7-x)}{x+5}<0$; г) $\dfrac{(x-5)(x+2)}{(x-3)(x+5)}\le 0$.

163. а) $\dfrac{x^2-8x}{x+2}\ge 0$; б) $\dfrac{x^2-x-12}{x+9}\le 0$;

в) $\dfrac{(x-1)(x-8)}{(x+6)(x-12)}\le 0$; г) $\dfrac{(x+3)(9-x)}{(x-3)(x-6)}\ge 0$.

164. а) $\dfrac{x^2-3x-18}{x^2+x}\le 0$; б) $x+\dfrac{3x-25}{x-3}\le 0$;

в) $x-\dfrac{4x+1}{x+4}\ge 0$; г) $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x-6}\le 0$.

165. а) $(x+1)^2(x^2+4x-5)<0$; б) $(x-2)^2(x^2-4x)<0$;

в) $(x+1)^2(x^2-4x-5)<0$; г) $(x-7)^2(x^2-4x+3)\le 0$.

166. а) $(x-1)(x^2+4x+4)\ge 0$; б) $(x+3)^2(x^2-7x+6)\le 0$;

в) $\dfrac{x^2+x-14}{x^2-x-6}\le 1$; г) $\dfrac{3x^2+x+8}{x^2+3x+2}\le 2$; д) $\dfrac{2x^2+5x-2}{x^2-x-2}\le 1$.

167. а) $\dfrac{2x^2-9x+3}{x^2-4x+3}\le 1$; б) $\dfrac{x^2-7x+17}{x^2-2x-8}\le 1$; в) $\dfrac{x^2-4x-4}{x^2+3x-18}\le 1$;

г) $\dfrac{x^2-6x+6}{x^2-3x-18}\le 1$; д) $\dfrac{x^2-5x-4}{x^2-x-12}\ge 1$.

168. а) $\dfrac{(x-2)^2(x-4)}{x+1}<0$; б) $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-6x+9}\le 0$;

в) $\dfrac{x^2-9x+18}{x^2-3x}\le 0$; г) $\dfrac{2x^2-21x+10}{x^2-13x+30}\ge 1$;

д) $\dfrac{2x^2-5x-4}{x^2-8x+12}<0$.

169. а) $\dfrac{x+1}{x-1}\ge\dfrac{x+5}{x+1}$; б) $\dfrac{x+7}{x-5}+\dfrac{5x+1}{2}\le 1$; в) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{3}{x+5}\ge 2$;

г) $\dfrac{2x+3}{x+4}\le\dfrac{x-2}{x+2}$; д) $\dfrac{2x-3}{x-4}\le\dfrac{x+6}{x+5}$.

170. а) $\dfrac{2x}{x+2}+\dfrac{3}{x-6}<1$; б) $\dfrac{x-3}{x+1}+\dfrac{x-1}{x-2}<1$; в) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x-1}\le 1$;

г) $\dfrac{2x-3}{x}+\dfrac{1}{x-5}\le 1$; д) $\dfrac{3x-4}{x-1}+\dfrac{6}{x-5}\le 1$.

171. а) $\dfrac{2x}{x-6}-\dfrac{9}{x-3}<2$; б) $\dfrac{4}{x}-\dfrac{25}{x-7}>7$.

§ 20 Неравенства с модулем

Решение неравенств, содержащих модули, так же как и решение подобных уравнений, выполняется на каждом из промежутков, на которых выражения, стоящие под знаком модуля, имеют постоянный знак. При решении этих неравенств будем следовать алгоритму:

1) нанесем на числовую прямую точки, в которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в ноль;

2) на каждом из образовавшихся промежутков определяем знаки выражений, стоящих под знаком модуля, раскрываем модули и решаем получившееся неравенство;

3) находим пересечение решения неравенства с рассматриваемым промежутком;

4) объединяем найденные части решения.

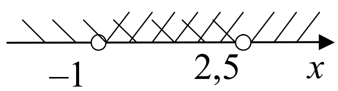
Пересечения и объединения решений осуществляются с помощью штриховок. При этом при пересечении ищут общую часть всех штриховок, а при объединении — часть, содержащую хотя бы одну штриховку.

Обратим внимание на то, что рассматриваемые промежутки должны целиком покрывать прямую и не налагаться друг на друга. Поэтому граничные точки этих промежутков должны принадлежать только одному из промежутков, либо лежащему справа от граничной точки, либо — слева.

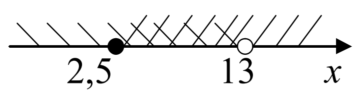
Пример 74. Решите неравенство: $|2x-5|<x+8$.

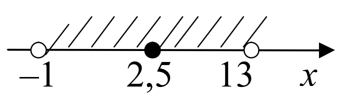
Решение. Найдем точку, в которой выражение, стоящее под знаком модуля, обращается в ноль: $2x-5=0$, значит, $x=2{,}5$. Эта точка делит числовую прямую на два промежутка. Так как при $x\ge 2{,}5$ имеем $2x-5>0$ и $|2x-5|=2x-5$, а при $x<2{,}5$ имеем $2x-5<0$ и $|2x-5|=-(2x-5)$, то выражение, содержащее модуль, можно записать в виде $|2x-5|=\begin{cases}5-2x, & x\in(-\infty;2{,}5),\\ 2x-5, & x\in[2{,}5;+\infty).\end{cases}$

1. Пусть $x\in(-\infty;2{,}5)$, тогда получим неравенство $5-2x<x+8$ или $x>-1$. С учетом рассматриваемого промежутка получим, что $-1<x<2{,}5$.



2. Пусть $x\in[2{,}5;+\infty)$, тогда получим неравенство $2x-5<x+8$ или $x<13$. С учетом рассматриваемого промежутка получим, что $2{,}5\le x<13$.





Объединяем найденные решения и получаем в результате, что $x\in(-1;13)$.

Ответ: $(-1;13)$.

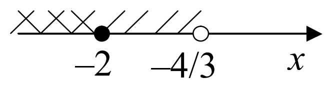
Пример 75(*). Решите неравенство: $|x+2|+|x-3|>x+5$.

Решение. Приравниваем выражения, стоящие под знаком модуля, нулю: $x + 2 = 0$ и $x – 3 = 0$, и получаем точки $x = – 2$ и $x = 3$.

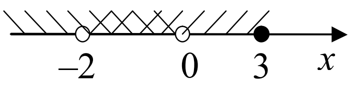
Выражение, содержащее модуль, можно записать в виде[40]

$$|x+2|+|x-3|=\begin{cases}1-2x, & x\in(-\infty;-2);\\ 5, & x\in[-2;3);\\ 2x-1, & x\in[3;+\infty).\end{cases}$$

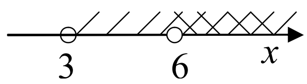
Пусть $x \in (–\infty; –2]$. Неравенство принимает вид $1 – 2x > x + 5$ или $–3x > 4$. Решение неравенства — интервал $(–\infty; –4/3)$. Пересекая полученное множество с рассматриваемым промежутком, на данном интервале получим решение $(–\infty; –2]$.

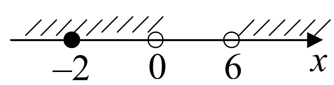


Пусть $x \in (–2; 3]$. Неравенство принимает вид $5 > x + 5$ или $x < 0$. Пересекая полученное множество с рассматриваемым промежутком, на данном промежутке имеем решение $(–2; 0)$.



Пусть $x \in (3; +\infty)$. Неравенство принимает вид $2x-1>x+5$ или $x > 6$. Пересекая полученное множество с рассматриваемым промежутком, на данном интервале получим решение $(6; +\infty)$.

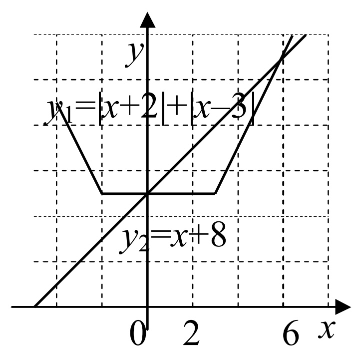




Для того чтобы дать окончательный ответ, необходимо нанести три полученных решения на одну ось и объединить их.

Решим данное неравенство графически.

Начертим графики функций $y_1=|x+2|+|x-3|$ и $y_2=x+5$. Решением неравенства являются те значения x, при которых график функции y_1 лежит выше графика функции y_2.



Ответ: $(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$.

[40] Раскройте модули на каждом интервале самостоятельно.

Некоторые неравенства с модулем можно решить более простым способом. В частности, при положительных значениях a неравенства вида $|f(x)|<a$ и $|f(x)|\le a$ равносильны системам $\begin{cases} f(x)<a, \\ f(x)>-a \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x)\le a; \\ f(x)\ge -a, \end{cases}$ соответственно, а неравенства вида $|f(x)|>a$ и $|f(x)|\ge a$ равносильны совокупностям $\left[\begin{array}{l} f(x)>a; \\ f(x)<-a \end{array}\right.$ и $\left[\begin{array}{l} f(x)\ge a, \\ f(x)\le -a \end{array}\right.$ соответственно.

Упражнения

Решите неравенства

172. а) $|x+1|<3$; б) $|2x-3|<7$;
в) $|2x-9|\ge 1$; г) $|x+2|<0,5(x+5)$.

173. а) $|2x+1|<0,5x+19$; б) $2|x-5|<3x-10$;
в) $|x-7|<4+2x$; г) $|x-8|<2+x$.

174. а) $3|x-2|>x+10$; б) $|3x-4|<x+10$.

---

175. а) $|x-4|-2|7-x|<2x$; б) $|x-4|+|2x-3|>x+3$.

176. а) $|x+4|+2<2|x|$; б) $|6-3x|+|x+6|<16$.

177. а) $|x^2-2x-36|<12$; б) $|x^2-5x|\le 6$.

178. а) $|x^2-4x-1|>4$; б) $3|x^2-6x|>20-x$.

179. а) $3|x^2-6x|\le x$; б) $|x-9|+2|x+1|\le 17+\dfrac{x}{3}$.

§ 21 Системы и совокупности неравенств

В § 16 были определены системы и совокупности уравнений. Введем понятия системы и совокупности неравенств.

Системой неравенств с одним неизвестным называется множество неравенств, для которых требуется найти значения неизвестного, удовлетворяющего <u>всем</u> неравенствам системы. Таким образом, ***решением системы*** неравенств называется такое значение неизвестного, при подстановке которого в неравенства вместо неизвестного все неравенства системы становятся верными.

Совокупностью неравенств называется множество неравенств, для которых требуется найти значения неизвестного, удовлетворяющего хотя бы одному неравенству. Таким образом, ***решением совокупности*** неравенств называется такое значение неизвестного, при подстановке которого в неравенства вместо неизвестного хотя бы одно из неравенств совокупности становится верным, а остальные имеют смысл.

При решении системы неравенств необходимо решить каждое из неравенств, нанести полученные решения на ось и определить, какие точки прямой принадлежат множествам решений всех неравенств системы. Обычно решения каждого из неравенств изображают в виде некоторой штриховки и ищут точки, которые помечены всеми имеющимися штриховками.

При решении же совокупности неравенств необходимо определить, какие точки прямой принадлежат множеству решений хотя бы одного неравенства совокупности, другими словами, ищут точки, которые помечены хотя бы одной из имеющихся штриховок.

Пример 76. Решите неравенство $|4x-3|>9$.

Решение. Запишем равносильную этому неравенству совокупность: $\left[\begin{array}{l} 4x-3>9; \\ 4x-3<-9, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x>12; \\ 4x<-6, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x>3; \\ x<-1{,}5. \end{array}\right.$ Решением совокупности является объединение найденных интервалов.

Ответ: $(-\infty;-1{,}5)\cup(3;+\infty)$.

Пример 77(*). Решите неравенство $|x^2-4x-1|<4$.

Решение. Запишем равносильную этому неравенству систему:

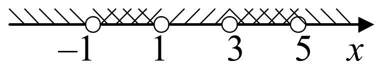
$$\begin{cases} x^2-4x-1<4; \\ x^2-4x-1>-4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2-4x-5<0; \\ x^2-4x+3>0. \end{cases}$$

Решим соответствующие квадратные уравнения

$$x^2-4x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=2\pm\sqrt{4+5}=2\pm 3 \quad \Rightarrow \quad x_1=-1, x_2=5,$$

$$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm 1 \Rightarrow x_1=1, x_2=3.$$

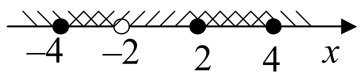
Решением первого неравенства будет интервал (–1; 5), а второго – объединение интервалов $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. Решение неравенств запишем в систему $\begin{cases} x \in (-1; 5), \\ x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty). \end{cases}$ Чтобы получить окончательный ответ, найдем пересечение полученных интервалов.



Ответ: $(-1; 1) \cup (3; 5)$.

Пример 78. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{3x-6}{x+2} \geq 0; \\ 16 - x^2 \geq 0. \end{cases}$.

Решение. Решим сначала методом интервалов первое неравенство: $(-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$ (у штриховки наклон влево). Для решения второго неравенства разложим квадратный трехчлен на множители: $(4-x)(4+x) \geq 0$ и тоже решим методом интервалов (у штриховки наклон вправо). Решение для этого неравенства имеет вид [–4; 4]. Нанесем полученные решения на одну ось и найдем общую часть для всех штриховок.



Ответ: [4; –2) ∪ [2; 4].

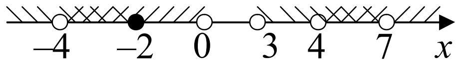
Пример 79(*). Найдите решение

а) системы неравенств $\begin{cases} x^5 > 16x^3; \\ \dfrac{x+2}{x^2 - 10x + 21} \leq 0; \end{cases}$

б) совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x^5 > 16x^3; \\ \dfrac{x+2}{x^2 - 10x + 21} \leq 0. \end{array} \right.$

Решение. В первом неравенстве перенесем все слагаемые в левую часть и разложим получившееся выражение на множители: $x^3(x-4)(x+4) > 0$. Методом интервалов получаем решение: $(-4; 0) \cup (4; +\infty)$(на чертеже у штриховки наклон вправо). Во втором неравенстве решим квадратное уравнение, стоящее в знаменателе: $x = 5 \pm \sqrt{25-21} = 5 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 7$, разложим знаменатель на множители и получим неравенство $\dfrac{x+2}{(x-3)(x-7)} \le 0$, решением которого является объединение интервалов $(-\infty; -2] \cup (3; 7)$ (на чертеже у штриховки наклон влево).

Нанесем полученные решения на одну ось.



а) чтобы найти решение системы неравенств, нужно выбрать все промежутки, заштрихованные дважды, то есть $x \in (-4; -2] \cup (4; 7)$.

б) чтобы найти решение совокупности неравенств, нужно выбрать все промежутки, содержащие какую-нибудь штриховку, то есть $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: а) $(-4; -2] \cup (4; 7)$,
б) $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Своеобразной формой записи систем неравенств являются ***двойные неравенства***, то есть неравенства вида

$$a < f(x) < b, a \le f(x) < b, a < f(x) \le b \text{ или } a \le f(x) \le b.$$

Данные неравенства эквивалентны системам вида $\begin{cases} f(x) < b; \\ f(x) > a, \end{cases}$

$\begin{cases} f(x) < b, f(x) \le b; \\ f(x) \ge a, f(x) > a \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \le b; \\ f(x) \ge a, \end{cases}$ соответственно.

Упражнения

Решите системы неравенств:

180. а) $\begin{cases} 3x - 2 < 4x - 5; \\ 5x + 3 > 3x - 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3(x+1) - 2(x-3) > 7 - x; \\ 5(x-4) + 2 > 7x - 36. \end{cases}$

181. а) $\begin{cases} 3(x-2) + 4(5-2x) < 4x + 5, \\ 5(x-1) - 3(2x-8) > 3x - 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4(1-x) - 5(3-x) > 7 - 8x; \\ 7(x-2) - 2x < 3x - 6. \end{cases}$

182. а) $\begin{cases} 2 - \dfrac{2x+3}{3} > 1 - \dfrac{x+6}{2}; \\ 5 - \dfrac{x}{4} \le x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+2)(2-x) < (x+3)(4-x); \\ \dfrac{x+3}{4} + \dfrac{1-2x}{6} \ge 1. \end{cases}$

183. а) $\begin{cases} x^2-8x+6\le 2x-3; \\ 3x+1>11-2x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-3x+8<5x-7; \\ 3x+1<21-2x. \end{cases}$

184. а) $\begin{cases} x^2-7x+1\le 2x-13; \\ 3(x+2)+1>27-2x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-x+2\le x+17; \\ x^2+3x+11>4-5x. \end{cases}$

185. а) $\begin{cases} x^2-3x+1\le 10-3x; \\ x+7<3x+5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2+8x-6\le x; \\ \dfrac{x+4}{2}-\dfrac{4-3x}{4}>\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

§ 22 Показательные неравенства

Показательным называется неравенство, в котором неизвестная содержится в показателе степени.

Выражение a^x принимает только положительные значения, поэтому неравенство $a^x<b$, где $b\le 0$, не имеет решений, а неравенство $a^x>b$, где $b\le 0$, верно для всех действительных значений x. Согласно свойствам степени при $a>1$ неравенства $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ и $f(x)>g(x)$[41] равносильны, то есть при переходе от показательного неравенства к алгебраическому знак неравенства сохраняется. Если же $0<a<1$, то при переходе от показательного неравенства к алгебраическому знак неравенства меняется на противоположный, то есть если $a^{f(x)}>a^{g(x)}$, то $f(x)<g(x)$.

Наиболее удобным методом решения показательных неравенств является ***метод рационализации***: при $a>0$ неравенства $a^{f(x)}*a^{g(x)}$ и $(a-1)(f(x)-g(x))*0$ равносильны[42].

Основные типы показательных неравенств

1. Неравенство $a^{g(x)}>a^b$ или $a^{g(x)}<a^b$.

2. Неравенство $a^{g(x)}>b$ с помощью основного логарифмического тождества сводится к неравенству $a^{g(x)}<a^{\log_a b}$.

3. Неравенства вида $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ или $a^{f(x)}\ge a^{g(x)}$.

---

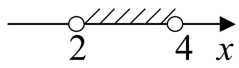
[41] Равносильны неравенства и с другими символами сравнения (<, ≥, ≤).

[42] * – это любой из символов >, <, ≥ или ≤.

4. Неравенства вида $a^{2x}+b\cdot a^{x}+c>0$. Эти неравенства с помощью замены переменных сводятся к решению квадратного неравенства и неравенств первого типа.

Пример 80. Решите неравенство $0{,}5^{x^2-4x+7}>0{,}5^{2x-1}$.

Решение. По свойству рационализации исходное неравенство равносильно неравенству $(0{,}5-1)(x^2-4x+7-2x+1)>0$ или $x^2-6x+8<0$ (при делении неравенства на –0,5 знак неравенства сменили на противоположный). По формуле корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом получаем, что $x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1\Rightarrow x_1=2,\, x_2=4$ и $x\in(2;\,4)$.



Ответ: (2; 4).

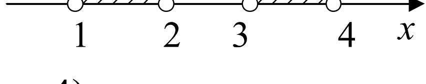
Пример 81(*). Решите неравенство $0{,}3^{1+\frac{2}{x-2}}>0{,}3^{\frac{6}{x-1}}$.

Решение. По свойству рационализации исходное неравенство равносильно неравенству $(0{,}3-1)\left(1+\frac{2}{x-2}-\frac{6}{x-1}\right)>0$. Так как $-0{,}7<0$, то $1+\frac{2}{x-2}-\frac{6}{x-1}<0$. Таким образом, решение показательного неравенства свелось к решению дробно-рационального неравенства. Приведем дроби к общему знаменателю

$$1^{\backslash(x-1)(x-2)}+\frac{2^{\backslash x-1}}{x-2}-\frac{6^{\backslash x-2}}{x-1}<0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2-3x+2+2x-2-6x+12}{(x-1)(x-2)}<0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x^2-7x+12}{(x-1)(x-2)}<0.$$ Это неравенство решим методом интервалов.

Корни числителя $x=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}$ и $x=3$, $x=4$, корни знаменателя $x=1$, $x=2$.



Неравенство принимает вид $\frac{(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-2)}<0$, и к нему можно применить правило знакочередования. Получим, что $x\in(1;\,2)\cup(3;\,4)$.

Ответ: $(1;\,2)\cup(3;\,4)$.

Пример 82(*). Решите неравенство $t^2 - 14t - 32 > 0$.

Решение. Это неравенство решается с помощью замены переменной. Обозначим $t = 0{,}5^x$. По свойству показательной функции $t > 0$. Заметим, что $0{,}25^{x+0{,}5} = 0{,}25^x \cdot 0{,}25^{0{,}5} = 0{,}5 \cdot 0{,}5^{2x}$, и неравенство примет вид $0{,}5t^2 - 7t - 16 < 0$ или $t^2 - 14t - 16 > 0$. Соответствующее уравнение имеет два корня $t = 7 \pm \sqrt{49+32} = 7 \pm 9$ и $t = 16$ и $t = –2$. Следовательно, квадратное неравенство верно при $t > 16$ и при $t < –2$. Возвращаясь к переменной x, получим совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} 0{,}5^x < -2 \\ 0{,}5^x > 16 \end{array}\right.$. Неравенство $0{,}5^x < -2$ не имеет решений. Решим неравенство $0{,}5^x > 16 \Rightarrow 2^{-x} > 2^4 \Rightarrow -x > 4 \Rightarrow x < -4$. Множество решений исходного неравенства $x \in (–\infty; –4)$.

Ответ: $(–\infty; –4)$.

Упражнения

Решите неравенства:

186. а) $25^{2x} > 125^{3x-2}$; б) $0{,}2^{2x} \cdot 0{,}2^{x^2-x-5} < 0{,}2^{-3}$.

187. а) $8^x > 2^{x^2+2} \cdot 32^{x-2}$; б) $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} > 0{,}25^{2x}$.

---

188. а) $10^{x^2-3} - 0{,}01 \cdot \left(10^{x+3}\right)^3 < 0$; б) $5^{2x} < 6 \cdot 5^x - 5$.

189. а) $0{,}8^{2x} \cdot \left(\frac{25}{16}\right)^{x^2-9} < \left(\frac{64}{125}\right)^{-2}$; б) $0{,}5^{2x} - 4 < 3 \cdot 0{,}5^x$.

190. а) $5^{2x+1} > 6 \cdot 5^x - 1$; б) $0{,}5^x + \frac{8}{0{,}5^x} \geq 9$.

§ 23 Логарифмические неравенства

Логарифмическим называется неравенство, содержащее неизвестную под знаком логарифма.

Решение любого логарифмического неравенства должно начинаться с записи области допустимых значений неравенства. Выражение $\log_a x$ определено при положительных значениях аргумента. Основание логарифма также положительно и отлично от 1.

Если основание логарифма $a > 1$, то при переходе от неравенства между логарифмами к неравенству между их аргументами получаем неравенство того же знака. То есть если $a > 1$ и $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, то $f(x) > g(x)$[43], причем $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. Если же $0 < a < 1$, то при переходе от неравенства между логарифмами к неравенству между их аргументами получаем неравенство противоположного знака. То есть если $0 < a < 1$ и $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, то $f(x) < g(x)$, причем $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

Наиболее удобным методом решения логарифмических неравенств является ***метод рационализации***: при любом $a > 0$ и $a \neq 1$ неравенства $\log_a f(x) * \log_a g(x)$ и $(a-1)(f(x)-g(x)) * 0$ равносильны[44].

При решении логарифмических неравенств будем использовать основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$.

Основные типы логарифмических неравенств

1. Неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Область допустимых значений неравенства $f(x) > 0, g(x) > 0$. При выполнении этих условий можно перейти к алгебраическому неравенству.

2. Неравенства $\log_a f(x) < b$ (или $\log_a f(x) > b$) приводятся к виду, рассмотренному в первом пункте, с помощью свойства $b = b \cdot \log_a a = \log_a a^b$.

3. Неравенства, которые после преобразований с применением свойств логарифмов приводятся к типу 1 или 2. Например, в левой части неравенства стоит сумма (разность) логарифмов.

Неравенства, которые после замены переменной сводятся к алгебраическому неравенству. Например, неравенства вида $\log_a^2 x + b \cdot \log_a x + c > 0$. Это неравенство заменой $y = \log_a x$ сводится к квадратному неравенству $ay^2 + by + c > 0$ и логарифмическому неравенству второго типа.

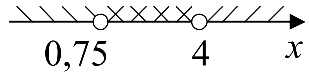
---

[43] Равносильны неравенства и с другими символами сравнения ($<$, $\geq$, $\leq$).

[44] * – это любой из символов $>$, $<$, $\geq$ или $\leq$.

Пример 83. Решите неравенство $\log_{0,1}(x+9)<\log_{0,1}(4x-3)$.

Решение. Область допустимых значений неравенства $\begin{cases} x+9>0; \\ 4x-3>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-9; \\ x>0,75, \end{cases}$ т.е. ОДЗ неравенства $x>0{,}75$. Применив метод рационализации, получим $(0{,}1-1)(x+9-4x+3)<0\Rightarrow$ $\Rightarrow -0{,}9(12-3x)<0\Rightarrow 12-3x>0$ (при делении неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный)[45]. Следовательно, $x<4$. С учетом ОДЗ получаем, что $0{,}75<x<4$.

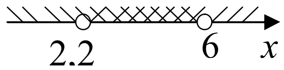


Ответ: (0,75; 4).

Пример 84. Решите неравенство $\log_{1/4}(2x+7)+\log_4(5x-11)<0$.

Решение. Область допустимых значений неравенства $\begin{cases} 5x-11>0; \\ 2x+7>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2{,}2; \\ x>-3{,}5, \end{cases}$ т.е. ОДЗ неравенства $x>2{,}2$. Перейдем к логарифмам по одному основанию $\log_4(5x-11)-\log_4(2x+7)<0$ (применили свойство $\log_{1/a}x=-\log_a x$), то есть $\log_4(5x-11)<$ $<\log_4(2x+7)$. Применив метод рационализации[46], получим $(4-1)(5x-11-2x-7)<0\Rightarrow 3(3x-18)<0$.

Откуда $x<6$. С учетом ОДЗ получаем, что $2{,}2<x<6$.



Ответ: (2,2; 6).

---

[45] Так как основание логарифма 0,1 < 1, то при переходе от логарифмического неравенства к алгебраическому знак неравенства меняется на противоположный и $x+9>4x-3$ или $12-3x>0$, то есть $x<4$. Методом рационализации это же неравенство получили быстрее.

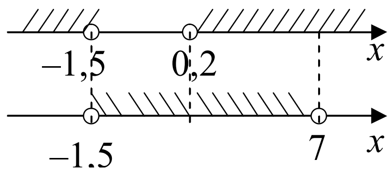
[46] Так как основание логарифма 4 > 1, то при переходе от логарифмического неравенства к алгебраическому знак неравенства сохраняется и получим $5x-11<2x-7$ или $3x<18$, то есть $x<6$.

Пример 85(*). Решите неравенство $\log_{0,5}\dfrac{5x-1}{2x+3} > -1$.

Решение. Область допустимых значений неравенства $\dfrac{5x-1}{2x+3} > 0$, т.е. ОДЗ имеет вид $x \in (-\infty;\, -1,5) \cup (0,2;\, +\infty)$.

Перепишем неравенство в виде $\log_{0,5}\dfrac{5x-1}{2x+3} > \log_{0,5}(0,5)^{-1}$.

Применив метод рационализации, получим $(0,5-1)\left(\dfrac{5x-1}{2x+3}-2\right) > 0$. Тогда $\dfrac{5x-1}{2x+3}-2<0$ (при делении неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный) $\Rightarrow \dfrac{5x-1-4x-6}{2x+3}<0 \Rightarrow \dfrac{x-7}{2x+3}<0$. Найдем нули числителя и знаменателя $x=7$, $x=-1,5$ и определим знаки на каждом из интервалов. Получим, что $-1,5<x<7$. С учетом ОДЗ окончательно имеем $0,2<x<7$.



Ответ: (0,2; 7).

Пример 86(*). Решите неравенство $\log_4^2 x - 2\cdot\log_4\dfrac{x}{16} - 4 > 0$.

Решение. Область допустимых значений неравенства $x>0$. Применив свойство логарифма частного, получим $\log_4^2 x - 2\cdot\log_4\dfrac{x}{16} - 4 > 0 \quad\Rightarrow\quad \log_4^2 x - 2(\log_4 x - \log_4 16) - 4 > 0 \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad \log_4^2 x - 2(\log_4 x - 2) - 4 > 0 \quad\Rightarrow\quad \log_4^2 x - 2\log_4 x > 0$.

Обозначим $\log_4 x = y$ и получим квадратное неравенство относительно переменной y: $y^2 - 2y > 0$. Неравенство справедливо при $y<0$ и при $y>2$. Возвратимся к переменной x и решим неравенства

$\log_4 x < 0 \quad\Rightarrow\quad \log_4 x < \log_4 1$, откуда с учетом ОДЗ $0<x<1$;

$\log_4 x > 2 \quad\Rightarrow\quad \log_4 x > \log_4 16$, откуда $x>16$.

Объединяя полученные интервалы, запишем ответ.

Ответ: (0; 1) $\cup$ (16; $+\infty$).

Пример 87(*). Решите неравенство $\frac{3}{\log_2 x-1}-\frac{1}{\log_2 x-4}<2$.

Решение. Область допустимых значений неравенства

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x \neq 1, \\ \log_2 x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0; \\ x \neq 2; \\ x \neq 16. \end{cases} \Rightarrow \quad x \in (1;2)\cup(2;16)\cup(16;+\infty);$$

Обозначим $\log_2 x = y$ и получим дробно-рациональное неравенство относительно переменной y: $\frac{3^{\backslash y-4}}{y-1}-\frac{1^{\backslash y-1}}{y-4}-2^{\backslash (y-1)(y-4)}<0$.

Приведем дроби к общему знаменателю $\frac{3y-12-y+1-2y^2+10y-8}{(y-1)(y-4)}<0 \Rightarrow \frac{2y^2-12y+19}{(y-1)(y-4)}>0$ (при умножении неравенства на (–1) знак меняется на противоположный). Числитель дроби всегда положителен, так как квадратный трехчлен не имеет действительных корней ($D_1 = 36-38<0$), следовательно, знак дроби определяется знаком знаменателя. Знаменатель положителен при $y < 1$ и при $y > 4$. Возвратимся к переменной x и решим неравенства

$\log_2 x<1 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x<\log_2 2$, откуда с учетом ОДЗ $0 < x < 2$;

$\log_2 x>4 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x>\log_2 16$, откуда $x > 16$.

Объединяя полученные интервалы, запишем ответ.

Ответ: $(0; 2) \cup (16; +\infty)$.

Пример 88(*). Решите неравенство $\log_{x+1}(5-x)<1$.

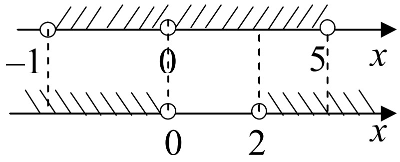
Решение. В этом неравенстве неизвестная содержится и в основании и в аргументе логарифма.

Область допустимых значений неравенства $\begin{cases} 5-x>0; \\ x+1>0, x+1\neq 1, \end{cases}$ то есть $x\in(-1;0)\cup(0;5)$.

Запишем неравенство в виде $\log_{x+1}(5-x)<\log_{x+1}(x+1)$ и, применив метод рационализации[47], получим $(x+1-1)(5-x-x-1)<0 \Rightarrow$

[47] Если не применять метод рационализации, то приходится рассматривать два случая, когда основание логарифма меньше 1 ($0 < x + 1 < 1$) и когда основание логарифма больше 1 ($x + 1 > 1$), что существенно затрудняет решение.

$\Rightarrow x(4-2x)<0$. Применив метод интервалов, получим, что $x<0$ и $x>2$. С учетом ОДЗ решением исходного неравенства является объединение интервалов $(-1;0)\cup(2;5)$.



Ответ: (–1; 0)∪(2; 5).

Упражнения

Решите неравенства.

191. а) $\log_5(2x+7)<1$; б) $\log_{0,5}(4x-3)>-2$.

192. а) $\log_2(x^2-2x)<3$; б) $\log_{0,5}(x^2-5x+6)>-1$.

193. $\log_2(x+1)>1+\log_2(x-2)$.

194. $\log_2(x^2-4x+3)<\log_2(11-2x)$.

195. $\log_{1/6}(x+2)+\log_{1/6}(x+4)<\log_{1/6}(1-2x)$.

196. $\log_{1/2}(x+2)+\log_{1/2}(x+4)>\log_{1/2}(14-x)-1$.

197. $\log_{0,3}(2x+7)<2\cdot\log_{0,3}(x+2)$.

198. $\log_2(x+2)-\log_2(6-x)\le 1$.

---

199. а) $\log_{1/7}\dfrac{4x-5}{x+1}<-1$; б) $\log_{1/2}\dfrac{5-x}{3+x}>\log_{1/2}3$.

200. а) $\log_{1/3}\dfrac{x+5}{x-3}>1$; б) $\log_{1/3}\dfrac{x-5}{x-13}<\log_3(x+2)$.

201. а) $\lg^2 x+\lg(100x)>2$; б) $\log_{1/2}^2 x+\log_{1/2}(4x)>-2$.

202. а) $\log_3^2 x-\log_3(3x^2)>2$; б) $\log_2^2 x-\log_2(x^4)>\log_{1/2}8$.

Глава 5 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОГОЧЛЕНОВ

§ 24 Элементы теории многочленов

Многочленом (от одной переменной) называется выражение вида $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$, где n — целое неотрицательное число, $a_0,a_1,...,a_{n-1},a_n$ — действительные числа, причем $a_0\neq 0$. Число n называется ***степенью многочлена*** $f(x)$ и обозначается $\deg f(x)$, a_0 — ***старший коэффициент***, a_n — ***свободный член*** многочлена $f(x)$. Многочлен, старший коэффициент которого равен 1, называется ***приведенным***. Многочлены можно складывать, вычитать и умножать по обычным правилам раскрытия скобок.

Если $f(x)$ и $g(x)$ — два многочлена, то степень произведения этих многочленов равна сумме степеней сомножителей, а степень суммы не превосходит большей из степеней слагаемых:

$$\deg\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\deg\big(f(x)\big)+\deg\big(g(x)\big);$$

$$\deg\big(f(x)+g(x)\big)\le\max\Big\{\deg\big(f(x)\big),\deg\big(g(x)\big)\Big\}.$$

Пример 89. Даны два многочлена $f(x)=x^4-5x^3-x^2+x-3$ и $g(x)=2x^2-3x+1$. Найдите их сумму и произведение.

Решение. Сложение и умножение многочленов выполним в столбик по тем же правилам, как в школе выполняли сложение и умножение многозначных чисел:

$$\begin{array}{r} {}_{+}x^4-5x^3-x^2+x-3 \\ 2x^2-3x+1 \\ \hline x^4-5x^3+x^2-2x-2 \end{array}\qquad \text{и} \qquad \begin{array}{r} {}_{\times}\ x^4-5x^3-x^2+x-3 \\ 2x^2-3x+1 \\ \hline x^4-5x^3-x^2+\ x-3 \\ -3x^5+15x^4+3x^3-3x^2+9x \\ 2x^6-10x^5-2x^4+2x^3-6x^2 \\ \hline 2x^6-13x^5+14x^4\quad\ -10x^2+10x-3. \end{array}$$

Ответ: $f(x)+g(x)=x^4-5x^3+x^2-2x-2$,

$f(x)\cdot g(x)=2x^6-13x^5+14x^4-10x^2+10x-3$.

Вместо переменной x в многочлен $f(x)$ можно подставить любое число c. В результате получится некоторое число. Это число называется ***значением многочлена*** $f(x)$ в точке c и обозначается через $f(c)$: $f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + ... + a_{n-1}c + a_n$.

Число x_0 называется ***корнем многочлена*** $f(x)$, если значение многочлена в точке x_0 равно нулю, т.е. $f(x_0) = 0$.

Понятие корня является центральным в теории многочленов. С этим понятием тесно связаны теория делимости многочленов, разложение многочленов на множители, решение различных алгебраических уравнений.

Рассмотрим понятие равенства многочленов.

Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ называются ***равными***, если их степени совпадают и коэффициенты при одинаковых степенях переменной равны.

Если

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n,$$

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m$$

и $f(x) = g(x)$, то $m = n$ и $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_n = b_n$. Такое равенство многочленов называется ***равенством в алгебраическом смысле***.

Однако многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ можно рассматривать как функцию. Но тогда можно говорить о равенстве двух многочленов как о равенстве двух функций. Известно, что две функции называются равными, если они имеют одну и ту же область определения и каждому числу из области определения обе функции ставят в соответствие одно число. Равенство многочленов, понимаемое в этом смысле, будем называть ***равенством в функциональном смысле***. Если $f(x) = g(x)$, то для любого действительного числа c имеем $f(c) = g(c)$.

Можно показать, что данные выше определения равенства многочленов эквивалентны, то есть если два многочлена равны в алгебраическом смысле, то они равны и в функциональном смысле, и наоборот.

Пример 90. При каких значениях неизвестных коэффициентов справедливо равенство

$$(x^2+2x+a)(x^2+bx+2)=x^4+cx^3-9x^2+dx-10.$$

Решение. Применим равенство многочленов в алгебраическом смысле. Для этого раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x^4+(2+b)x^3+(a+2b+2)x^2+(ab+4)x+2a=x^4+cx^3-9x^2+dx-10.$$

Следовательно, $\begin{cases} 2+b & = & c; \\ a+2b+2 & = & -9; \\ ab+4 & = & d; \\ 2a & = & -10. \end{cases}$

Решая эту систему, получим $\begin{cases} a & = & -5; \\ b & = & -3; \\ c & = & -1; \\ d & = & 19. \end{cases}$

Заданное в условии равенство имеет вид

$$(x^2+2x-5)(x^2-3x+2)=x^4-x^3-9x^2+19x-10.$$

Ответ: $a=-5$, $b=-3$, $c=-1$, $d=19$.

Пример 91. При каких значениях неизвестных коэффициентов справедливо равенство

$$(x^2+x+a)(x^2+bx+4)=x^4-2x^3-2x^2+cx-12.$$

Решение. Применим равенство многочленов в функциональном смысле. Чтобы найти три неизвестных коэффициента придадим x три различных значения:

Пусть $x=0$, тогда $(0+0+a)(0+0b+4)=0-0-0+0c-12$ или $4a=-12$.

Пусть $x=1$, тогда $(1+1+a)(1+b+4)=1-2-2+c-12$ или $(a+2)(b+5)=c-15$.

Пусть $x=-1$, тогда $(1-1+a)(1-b+4)=1+2-2-c-12$ или $a(5-b)=-c-11$.

Для определения коэффициентов решим систему

$$\begin{cases} 4a = -12; \\ (a+2)(b+5) = c-15; \\ a(5-b) = -c-11, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3; \\ -b-5 = c-15; \\ 3b-15 = -c-11, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -3; \\ b = 10-c; \\ 30-3c-15 = -c-11, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3; \\ b = -3; \\ c = 13. \end{cases}$$

Заданное в условии равенство имеет вид

$(x^2+x-3)(x^2-3x+4) = x^4-2x^3-2x^2+13x-12$.

Ответ: $a = -3$, $b = -3$, $c = 13$.

Введем операцию деления многочленов.

Многочлен $f(x)$ делится (нацело) на многочлен $g(x) \neq 0$, если существует такой многочлен $q(x)$, что выполняется равенство $f(x) = g(x) \cdot q(x)$.

Например, из равенства $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ следует, что $(x^4 - 1)$ делится на $(x - 1)$ и на $(x^2 + 1)$.

Многочлен $q(x)$ называется ***частным*** от деления $f(x)$ на $g(x)$ и определяется однозначно.

Делимость многочленов обладает многими свойствами, которыми обладает делимость целых чисел.

Как и деление чисел, деление многочлена на многочлен нацело возможно не всегда. В этом случае говорят о делении с остатком. *Для любого многочлена $f(x)$ и любого ненулевого многочлена $g(x)$ существует единственная пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$, для которой выполняется равенство $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, где многочлен $r(x)$ либо нулевой, либо имеет степень меньшую, чем степень $g(x)$.*

Многочлен $q(x)$ называют ***частным***, $r(x)$ — ***остатком***.

Существует несколько способов вычисления частного и остатка. Наиболее удобный метод вычисления, который чаще всего применяется на практике для нахождения частного и остатка, — это метод «деления уголком».

Пример 92. Найдите частное и остаток при делении $f(x)=4x^5+7x^4+6x^3+3x+1$ на $g(x)=x^3+x^2+3$.

Решение. Выполним деление «уголком»

$$
\begin{array}{l|l}
\_\,4x^5+7x^4+6x^3+0x^2+3x+1 & x^3+x^2+3 \\ \cline{2-2}
\underline{4x^5+4x^4\qquad\quad+12x^2} & 4x^2+3x+3 \\
\qquad\_\,3x^4+6x^3-12x^2+3x & \\
\qquad\underline{3x^4+3x^3\qquad\quad+9x} & \\
\qquad\qquad\_\,3x^3-12x^2-6x+1 & \\
\qquad\qquad\underline{3x^3+3x^2\qquad\quad+9} & \\
\qquad\qquad\qquad-15x^2-6x-8 &
\end{array}
$$

Ответ: $q(x)=4x^2+3x+3,\ r(x)=-15x^2-6x-8$.

Очевидно, что $f(x)$ делится на $g(x)$ тогда и только тогда, когда остаток $r(x)$ от деления $f(x)$ на $g(x)$ равен нулю.

Важную роль в теории многочленов и ее приложениях имеет теорема, показывающая связь между значениями многочленов в точке и остатком при делении этого многочлена на линейный двучлен.

Теорема (Безу). *Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x-x_0$ равен значению многочлена $f(x)$ в точке x_0*, то есть $f(x)=(x-x_0)q(x)+f(x_0)$.

Основные следствия из этой теоремы:

1. *Многочлен $f(x)$ делится на $x-x_0$ тогда и только тогда, когда число x_0 является его корнем.*

2. *Если $x_1, x_2, ..., x_k$ — различные корни многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на произведение $(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_k)$.*

Таким образом, $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_k)q(x)$, где через $q(x)$ обозначено частное от деления.

3. *Число различных корней многочлена, отличного от нуля, не больше чем его степень.*

4. *Если значения двух многочленов, степени которых не больше n, совпадают в (n + 1)-й точке, то эти многочлены равны.*

Теорема Безу позволяет найти остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x-x_0$. Но при решении некоторых задач необходимо знать не только остаток, но и частное. При делении многочлена на двучлен $x-x_0$ для отыскания частного и остатка применяют более простой, чем «деление уголком», метод, называемый «схемой Горнера».

Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ — многочлен степени n. Частное от деления $f(x)$ на двучлен $x-x_0$ будем искать в виде $q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}$.

Применив определение равенства многочленов в алгебраической форме для определения коэффициентов частного $q(x)$ и остатка r, получим систему

$$b_0=a_0,\ b_1=a_1+x_0b_0,\ b_2=a_2+x_0b_1,\ldots,b_{n-1}=a_{n-1}+x_0b_{n-2},$$
$$r=a_n+x_0b_{n-1}.$$

Удобно схему Горнера записывать в виде таблицы.

<table>
<tr><td rowspan="2">Корень много-члена</td><td colspan="5">Коэффициенты делимого</td></tr>
<tr><td>a_0</td><td>a_1</td><td>…</td><td>a_{n-1}</td><td>a_n</td></tr>
<tr><td>x_0</td><td>$b_0=a_0$</td><td>$b_1=a_1+x_0b_0$</td><td>…</td><td>$b_{n-1}=a_{n-1}+x_0b_{n-2}$</td><td>$r=a_n+x_0b_{n-1}$</td></tr>
<tr><td colspan="5">Коэффициенты частного</td><td>Остаток</td></tr>
</table>

Пример 93. Найдите частное и остаток при делении многочлена $x^4+2x^3-4x^2+7x+9$ на двучлен $x-2$.

Решение. Составим таблицу, записывая коэффициенты многочлена в первую строку таблицы.

<table>
<tr><td rowspan="2">Корень много-члена</td><td colspan="5">Коэффициенты делимого</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>– 4</td><td>7</td><td>9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>$2\cdot1+2=4$</td><td>$2\cdot4-4=4$</td><td>$2\cdot4+7=15$</td><td>$2\cdot15+9=39$</td></tr>
<tr><td colspan="5">Коэффициенты частного</td><td>Остаток</td></tr>
</table>

Ответ: $q(x)=x^3+4x^2+4x+15,\ r=39$.

При решении алгебраических уравнений и неравенств нужно находить нули (корни) выражений. Если выражение является многочленом с целыми коэффициентами, то всегда можно отыскать все его рациональные, в частности, целые корни, если, конечно, они существуют. Способ отыскания рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами дается следующей теоремой.

Теорема. *Если несократимая дробь* $\dfrac{p}{q}$ *является корнем многочлена* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ *с целыми коэффициентами, то его свободный член делится на p, а старший коэффициент делится на* q, т.е. $a_0 \vdots q$, $a_n \vdots p$.

Из этой теоремы вытекает важное следствие. *Если старший коэффициент многочлена с целыми коэффициентами равен* 1, *то все рациональные корни многочлена — целые и являются делителями свободного члена*.

Из теоремы следует, что для нахождения рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами нужно выписать все делители свободного члена, все положительные делители старшего коэффициента, составить из этих чисел несократимые дроби и проверить, какие из этих дробей являются корнями многочлена.

Пример 94. Решите уравнение $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Разложите многочлен, стоящий в правой части, на множители.

Решение. Многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ имеет целые коэффициенты, рациональные корни этого многочлена, если они есть, являются целыми и находятся среди делителей свободного члена. Поэтому искать рациональные корни следует среди чисел ± 1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12, ±24. Проверкой убеждаемся, что число 2 является корнем многочлена ($f(2) = 8 - 6 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 12 = 0$). По теореме Безу многочлен делится на $x - 2$. Выполнив деление, получим $(x-2)(x^2 - x - 12) = 0$. Решая квадратное уравнение $x^2 - x - 12 = 0$, найдем его корни $x_2 = 4, x_3 = -3$. Итак, исходное уравнение имеет три действительных корня $x = -3$, $x = 2$, $x = 4$. Заданный в условии многочлен представим в виде произведения линейных множителей

$$x^3 - 6x^2 + 2x + 12 = (x+3)(x-2)(x-4).$$

Ответ: –3; 2; 4.

Упражнения

203. При каких значениях неизвестных коэффициентов справедливы равенства

а) $(x^2 + 4x - 3)(x^2 + ax + d) = x^4 + 6x^3 + bx^2 + cx + 15$;

б) $(x^3 + ax^2 + bx - 3)(3x + c) = 3x^4 + dx^3 - 6x^2 - x - 12$.

204. Найдите частное от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, если

а) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4,\ g(x) = x - 2$;

б) $f(x) = 3x^4 + 7x^3 + 10x - 24,\ g(x) = x + 3$;

в) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 21x + 36,\ g(x) = x + 4$.

205. Найдите частное от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, если

а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 29x + 4,\ g(x) = x^2 + 7x - 1$;

б) $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - 7x + 4,\ g(x) = x^2 + 2x - 1$;

в) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2,\ g(x) = x^2 - x - 2$.

206. Используя схему Горнера, выполните деление многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$, если

а) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 7x + 2, a = -4$;

б) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 7x - 11, a = 2$;

в) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 23x + 14, a = -4$.

В ответе укажите частное $q(x)$ и остаток r от деления.

207. Не выполняя операции деления, найдите остаток от деления многочлена $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 11x - 32$ на двучлен $x - 1$.

208. Найдите целые корни многочлена. Разложите многочлен на множители с целыми коэффициентами:

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$;

б) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 16x - 12$;

в) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 12x + 8$;

г) $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$.

209. Найдите целые корни многочлена. Разложите многочлен на множители с целыми коэффициентами:

а) $f(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$;

б) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$;

в) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 8x + 8$;

г) $f(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 2$.

Глава 6 ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 25 Понятие производной

Центральные понятия дифференциального исчисления, производная и дифференциал, возникли при рассмотрении задач естествознания и математики, приводивших к вычислению пределов одного и того же типа. Важнейшие среди них – физическая задача определения скорости неравномерного движения и геометрическая задача построения касательной к кривой.

Используя понятия приращения аргумента $\Delta x = x - x_0$ и приращения функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, соотношение $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ запишем в виде $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

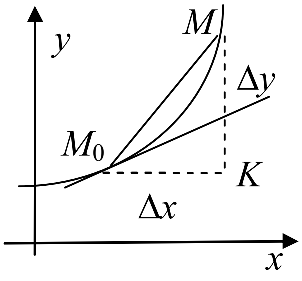
Задача о движении точки. Пусть точка M движется прямолинейно. К моменту времени t_0 она прошла путь S_0, а к моменту времени t она прошла путь S. Тогда за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ точка M прошла путь $\Delta S = S - S_0$. Средняя скорость точки на этом участке равна $v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. При уменьшении Δt средняя скорость будет меняться, характеризуя движение на все меньшем промежутке. Поэтому за скорость точки в момент времени t_0 принимают предел[48] $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

Задача о касательной к кривой. Пусть на плоскости XOY задана непрерывная кривая $y = f(x)$. Найдем уравнение касательной к кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$.

---

[48] Точка A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для каждого аргумента x, удовлетворяющего условию $0 < |x - x_0| < \delta$, (Δx – бесконечно малая) следует $|f(x) - A| < \varepsilon$ (разность $f(x) - A$ также бесконечно малая). Передел функции $f(x)$ в точке x_0 обозначается $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Возьмем на кривой произвольную точку $M(x, y)$. Обозначим разности $x - x_0 = \Delta x$ ($\Delta x = M_0K$), $y - y_0 = \Delta y$ ($\Delta y = MK$). Тогда $x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$. Проведем секущую M_0M.



Касательной к кривой называется предельное положение секущей M_0M, когда точка M, двигаясь по кривой, приближается к точке M_0, то есть $\Delta x \to 0$. Уравнение секущей M_0M имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где k — угловой коэффициент прямой. Из прямоугольного треугольника M_0MK получаем, что $k = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{MK}{M_0K} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Угловой коэффициент касательной

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Дадим определение производной для произвольной функции $y = f(x)$, где $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$. Такая функция называется ***скалярной функцией скалярного аргумента***. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке $[a; b]$ и точки x_0 и $x_0 + \Delta x$ принадлежат этому промежутку.

Производная функции — это отношение приращения функции к приращению аргумента при бесконечно малом приращение аргумента.

Приведем строгое определение производной функции.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к 0.

Обозначается производная $y'(x_0)$, $f'(x_0)$ или $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Вычисление производной функции называется ***дифференцированием***. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого множества, то ее называют ***дифференцируемой*** на этом множестве[49].

Геометрически существование производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 означает, что в этой точке можно провести касательную к графику функции. Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен значению производной функции в этой точке, а уравнение касательной имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Физический смысл производной — это мгновенная скорость точки. Если точка движется прямолинейно и путь, пройденный к моменту t, вычисляется по формуле $S = f(t)$, то скорость точки в момент t_0 равна значению производной функции в точке t_0: $v(t_0) = f'(t_0)$.

Основные правила дифференцирования

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные на интервале $(a; b)$.

1. Производная суммы равна сумме производных: $(u + v)' = u' + v'$.

2. Производная разности равна разности производных: $(u - v)' = u' - v'$.

3. Производная произведения равна сумме произведения производной первого сомножителя на второй и произведения производной второго сомножителя на первый: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.

5. Производная отношения равна разности произведения производной числителя на знаменатель и произведения производной знаменателя на числитель, деленной на квадрат знаменателя: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

---

[49] Для функции нескольких переменных (функции векторного аргумента) из условия существования производной не следует ее дифференцируемость.

6. Пусть задана сложная функция (суперпозиция функций) $y = f(\varphi(x))$, причем функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ имеют производные, тогда функция $y = f(\varphi(x))$ также имеет производную. Производная сложной функции равна произведению производных элементарных функции, суперпозицией которых является данная функция: $y' = f'_u(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

7. Производная функции $y = f(kx+b)$ вычисляется по формуле[50] $y' = k \cdot f'(kx+b)$.

Таблица производных

1. $(c)' = 0$;
2. $(x^p)' = px^{p-1}$;
3. $(\sin x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(e^x)' = e^x$;
8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

В частности, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пример 95. Найдите производную функции $y = \dfrac{3x-1}{x^2+1}$ и вычислите ее значение при $x = 3$.

Решение. Воспользуемся формулой производной дроби:

$$y' = \left(\frac{3x-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(3x-1)'(x^2+1)-(3x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{3(x^2+1)-2x(3x-1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{3x^2+3-6x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3+2x-3x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Тогда $y'(3) = \dfrac{3+2\cdot 3-3\cdot 3^2}{(3^2+1)^2} = -0{,}18$.

Ответ: $y' = \dfrac{3+2x-3x^2}{(x^2+1)^2}$, $y'(3) = -0{,}18$.

---

[50] Производная функции $y = f(kx+b)$ – частный случай производной сложной функции, когда $u = kx + b$ и $u' = k$.

Пример 96. Вычислите производную функции $y = (x^2 - 4x)^5$.

Решение. Данная функция является суперпозицией двух функций: $y = u^5$ и $u = x^2 - 4x$. Вычислять производную будем по формуле п. 6 таблицы производных, зная, что $(u^5)' = 5u^4$ и $(x^2 - 4x)' = 2x - 4$. Следовательно,

$$y' = (u^5)' \cdot (x^2 - 4x)' = 5u^4 \cdot (2x - 4) = 5(x^2 - 4x)^4 \cdot (2x - 4).$$

Ответ: $y' = 10(x^2 - 4x)^4 \cdot (x - 2)$.

Пример 97. Вычислите производную функции $y = x^2 \cdot e^{3x}$.

Решение. Воспользуемся формулой производной произведения двух функций

$$y' = (x^2 \cdot e^{3x})' = (x^2)' \cdot e^{3x} + x^2 \cdot (e^{3x})' =$$
$$= 2x \cdot e^{3x} + x^2 \cdot e^{3x} \cdot 3 = (3x^2 + 2x)e^{3x}$$

(при вычислении производной второго сомножителя воспользовались формулой п. 7).

Ответ: $y' = (3x^2 + 2x)e^{3x}$.

Пример 98. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 7x - 5$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение. Чтобы записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, нужно вычислить значения функции и ее производной в точке $x_0 = 1$:

$f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 5 = -1$; $\quad f'(x) = 3x^2 - 8x + 7$;

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 7 = 2$.

Уравнение касательной имеет вид $y - (-1) = 2(x - 1)$ или $y = 2x - 3$.

Ответ: $y = 2x - 3$.

Пример 99. В каких точках касательная к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 7x - 5$ параллельна прямой $y = 2x - 5$. В ответе укажите абсциссы точек касания.

Решение. Две прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны. Следовательно, угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 7x - 5$ должен равняться 2. Так как $y' = 3x^2 + 6x - 7$, то для нахождения абсцисс точек касания нужно решить уравнение $3x^2 + 6x - 7 = 2$ или $x^2 + 2x - 3 = 0$. Искомые точки $x = -3$, $x = 1$.

Ответ: –3; 1.

Рассмотрим приложения дифференциального исчисления к решению некоторых физических задач.

Пример 100. Найдите скорость тела через 2 секунды после начала движения, если оно движется по закону $S(t) = 0{,}125t^6 + 1{,}25t^4 - 6t^2 + 9t + 1$ (путь — в метрах [м], время — в секундах [с]).

Решение. Воспользуемся механическим смыслом производной — скорость тела равна значению производной в заданный момент времени:

$$v(t) = S'(t) = (0{,}125t^6 + 1{,}25t^4 - 6t^2 - 9t + 1)' = 0{,}75t^5 + 5t^3 - 12t - 9.$$

Следовательно, $v(2) = (0{,}75t^5 + 5t^3 - 12t - 9)|_{t=2} = 0{,}75 \cdot 32 + 5 \cdot 8 - -24 - 9 = 24 + 40 - 24 - 9 = 31$(м/с).

Ответ: 31 м/с.

Пример 101. Работа по перемещению материальной точки под действием силы F выражается формулой $A(t) = 0{,}2t^3 + t^2 - 12t + 5$. Найдите мощность силы[51], совершающей эту работу в момент времени $t = 5$.

---

[51] Мощность – это отношение работы, выполненной за определенный промежуток времени, к величине этого промежутка: $N(t) = \dfrac{\Delta A}{\Delta t}$. Поэтому величину мощности в данный момент времени t_0 можно вычислить как производную работы по времени $N(t) = A'(t)$ в момент $t = t_0$.

Решение. Мощность силы в заданный момент времени находится по формуле $N(t) = A'(t) = (0,2t^3 + t^2 - 12t + 5)' = 0,6t^2 + 2t - 12$ и $N(5) = (0,6t^2 + 2t - 12)|_{t=5} = = 0,6 \cdot 25 + 2 \cdot 5 - 12 = 15 + 10 - 12 = 13$.

Ответ: 13.

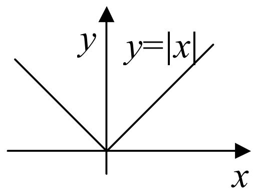
Пример 102. Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента $t = 0$, выражается формулой $q(t) = 3t^2 - 5t + 1$. Вычислите силу тока в конце шестой секунды[52].

Решение. Сила тока находится по формуле $I(t) = q'(t) = = (3t^2 - 5t + 1)' = 6t - 5$ и $I(6) = 6 \cdot 6 - 5 = 31$.

Ответ: 31.

Отметим, что если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то она непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение неверно. Существуют непрерывные функции, не имеющие производных. Например, функция $y = |x|$ непрерывна на всей числовой прямой, но в точке $x = 0$ не имеет производной. На графике видно, что в начале координат касательную к графику функции провести нельзя.



Существуют еще более удивительные функции. Они непрерывны, но не имеют производной ни в одной точке.

§ 26 Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках промежутка $(a; b)$. Эта производная сама является функцией от x. Если функция $f'(x)$ имеет производную, то эту производную называют ***второй производной*** от функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$.

---

[52] Сила тока в данный момент времени – это физическая величина, равная пределу отношения электрического заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника, к промежутку времени его прохождения $I(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$, и в момент $t = t_0$ имеем $I(t_0) = q'(t_0)$.

Вторая производная — это скорость изменения первой производной. С физической точки зрения скорость изменения скорости — это ускорение. Если материальная точка движется прямолинейно по закону $x = x(t)$, то второй закон Ньютона в дифференциальной форме можно записать в виде $F = m \cdot x''(t)$, так как ускорение находится по правилу $a = v'(t) = (x'(t))' = x''(t)$.

Для функции $y = f(x)$ можно определить производные любого порядка, если они существуют.

Производной порядка n от функции $y = f(x)$ называют производную от производной порядка $n-1$. Обозначают производную порядка n через $f^{(n)}(x)$, т.е. $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Пример 103. Вычислите производную 3-го порядка от функции $y = (x^2 - x + 1) \cdot e^{-x}$.

Решение. Вычисление производим последовательно.

$$y' = ((x^2 - x + 1) \cdot e^{-x})' = (x^2 - x + 1)' e^{-x} + (x^2 - x + 1)(e^{-x})' =$$
$$= (2x - 1) \cdot e^{-x} + (x^2 - x + 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = (-x^2 + 3x - 2) \cdot e^{-x};$$
$$y'' = ((3x - x^2 - 2)e^{-x})' = (3x - x^2 - 2)' e^{-x} + (3x - x^2 - 2)(e^{-x})' =$$
$$= (-2x + 3) \cdot e^{-x} - (-x^2 + 3x - 2) \cdot e^{-x} = (x^2 - 5x + 5) \cdot e^{-x};$$
$$y''' = ((x^2 - 5x + 5) \cdot e^{-x})' = (x^2 - x + 5)' \cdot e^{-x} + (x^2 - 5x + 5) \cdot (e^{-x})' =$$
$$= (2x - 5) \cdot e^{-x} - (x^2 - 5x + 5) \cdot e^{-x} = (-x^2 + 7x - 10) \cdot e^{-x}.$$

Ответ: $y''' = (-x^2 + 7x - 10) \cdot e^{-x}$.

Упражнения

210. Найдите производную и вычислите ее значение в точке:

а) $y = \dfrac{10x}{x^2 + 1}$, $x_0 = 2$; б) $y = 3x \cdot \sqrt{4x + 5}$, $x_0 = 1$;

в) $y = x^2 \cos \pi x$, $x_0 = 0{,}5$; г) $y = x \cdot e^{2x}$, $x_0 = 0{,}5$;

д) $y = \sqrt{2x + 1} \cdot \ln x$, $x_0 = 1$.

Вычислите производные функций

211. а) $y = (x^3 - 4x - 8)\sqrt{x + 1}$; б) $y = (x^4 + x^2 + x)\sqrt[3]{x}$;

в) $y=(x^2+10x-1)\sqrt[4]{x}$; г) $y=(x^6-20x)\sqrt{x-4}$;

д) $y=\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{3}{x}\right)$; е) $y=(0,25x-7)^8-(1-2x)^4$.

212. а) $y=\sqrt{x^8-6x^3+4x}$; б) $y=\sqrt[4]{x^8-10x^4+36}$;

в) $y=\sqrt[3]{x^9-3x^4+12x}$; г) $y=\sqrt[3]{x^6-3x^2+6x}$;

д) $y=\sqrt[4]{x^8-3x^4+12x-1}$.

213. а) $y=(x^2-4x+1)e^{2x+7}$; б) $y=(x-5)e^{x^2}$;

в) $y=(x^4-2x^3+4)e^{3x-1}$; г) $y=\sqrt{x}\cdot\ln(2x+1)$;

д) $y=2\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}$.

214. а) $y=\dfrac{\sin x}{2x+4}$; б) $y=(x^2+4)\cos 2x$;

в) $y=(2x^3-5x)\ln(2x+5)$; г) $y=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$;

д) $y=\mathrm{tg}^2 x$.

215. а) $y=\sin x^2$; б) $y=\ln(1+2\sqrt{x})$;

в) $y=\ln\sin x$; г) $y=\cos^5 x$.

216. Напишите уравнение касательной к графику функции $y(x)$ в точке с абсциссой x_0, если

а) $y=0,5(x^4-7x^2+10)$, $x_0=2$; б) $y=\dfrac{x^2+x-10}{2x-3}$, $x_0=4$.

217. Укажите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y(x)$ параллельна заданной прямой, если

а) $y=\dfrac{x^3}{3}-5x^2+19x+7$ и прямая $y=3x-5$;

б) $y=\dfrac{x^3}{3}-3x^2-12x+1$ и прямая $y=3-5x$.

218. Прямая $y=3x-8$ является касательной к графику функции $y=10x^2+23x+c$. Найдите c.

219. К графику функции $y=\sqrt{3}x^3-4x^2+5$ в точке с абсциссой $x=\sqrt{3}$ проведена касательная. Найдите угол между касательной и положительным направлением оси OX.

220. Тело движется по закону $S(t)=0{,}1t^5+0{,}5t^4-12t+7$ (путь — в метрах, время — в секундах). Найдите скорость и ускорение тела в момент $t = 2$.

221. Тело движется по закону $S(t)=t^4-11t^3+46t^2-60t+3$ (путь — в метрах, время — в секундах). Найдите скорость и ускорение тела в момент $t=3$.

§ 27 Приложение первой производной к исследованию функций

С помощью производных можно находить промежутки, на которых функция возрастает или убывает; находить точки, в которых функция принимает наибольшее или наименьшее значение.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором промежутке $(a;\ b)$ и имеет на этом промежутке производную.

1. *Для того чтобы* $y=f(x)$ *была постоянной на* $[a;\ b]$*, необходимо и достаточно, чтобы для всех* $x \in (a;b)$ производная $f'(x)=0$.

2. *Если во всех точках интервала* $(a;b)$ *производная* $f'(x)$ *неотрицательна, то функция* $y=f(x)$ *возрастает на этом промежутке*.

3. *Если во всех точках интервала* $(a;b)$ *производная* $f'(x)$ *неположительна, то функция* $y=f(x)$ *убывает на этом промежутке.*

Чтобы найти промежутки возрастания и убывания функции, нужно вычислить производную функции, найти точки, в которых производная обращается в ноль или не существует (например, точки разрыва функции). Эти точки разбивают числовую прямую на промежутки, на каждом из которых производная сохраняет знак. Определяем знак производной на каждом промежутке и находим промежутки возрастания или убывания функции.

Замечание. Если функция имеет несколько промежутков возрастания (убывания), то их нельзя объединять. Каждый промежуток записывается отдельно.

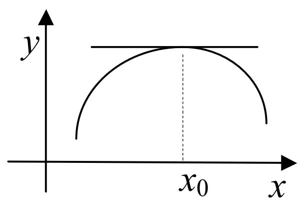
Точка x_0 называется точкой ***максимума*** функции $y=f(x)$, если существует окрестность этой точки такая, что для всех точек x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$. Точка x_0 называется точкой ***минимума*** функции $y=f(x)$, если существует окрест-

ность этой точки такая, что для всех точек x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$. Точки максимума и минимума называют точками ***экстремума*** функции.

Сформулируем необходимые и достаточные условия экстремума функции.

Теорема Ферма. *Если в точке* x_0 *функция* $y = f(x)$ *имеет экстремум и в некоторой окрестности точки* x_0 *существует производная* $f'(x)$, *то* $f'(x_0) = 0$ *(производная в точке* x_0 *равна нулю).*

Геометрически равенство производной нулю означает, что в точке x_0 можно провести горизонтальную касательную к графику функции.



Функция может иметь экстремум также в точках, в которых производная не существует. Например, функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ имеет минимум, а производной в этой точке не имеет.

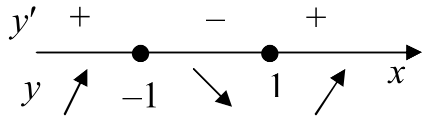
Точки, в которых функция может иметь экстремум, называют ***критическими***. Теорема Ферма дает необходимые условия экстремума. Но эти условия не являются достаточными.

Теорема (**достаточные условия экстремума**). *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку* x_0, *и имеет производную во всех точках этого интервала, кроме, может быть, самой точки* x_0. *Пусть производная в точке* x_0 *равна нулю или не существует. Если при переходе через точку* x_0 *производная меняет знак с «плюса» на «минус», то в этой точке функция имеет максимум, а если при переходе через точку* x_0 *производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то в этой точке функция имеет минимум.*

Пример 104. Найдите промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функции $y = x^3 - 3x$.

Решение. Область определения функции — все действительные числа. Производная функции $y' = 3x^2 - 3$. Приравняем производную к нулю $3x^2 - 3 = 0$. Корни этого уравнения $x = \pm 1$. Точки –1 и 1 разбивают числовую прямую на три промежутка. Чтобы определить интервалы монотонности, найдем знаки производной на каждом промежутке: $y'(2) = y'(-2) = 9 > 0$, $y'(0) = -3 < 0$.

Итак, функция убывает, если $x \in [-1;1]$. Функция возрастает, если $x \in (-\infty;-1]$ и $x \in [1;+\infty)$.



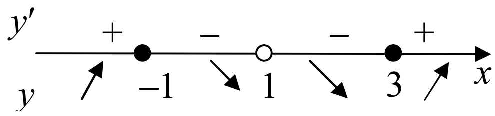
При переходе через точку $x = -1$ производная меняет знак с «+» на «–», следовательно, в этой точке функция имеет максимум. При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с «–» на «+», следовательно, в этой точке функция имеет минимум.

Ответ: $y \uparrow$, если $x \in (-\infty;-1]$ и $x \in [1;+\infty)$; $y \downarrow$, если $x \in [-1;1]$;
$x = -1$ — точка максимума; $x = 1$ — точка минимума.

Пример 105. Найдите промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функции $y = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$.

Решение. Область определения функции — объединение интервалов $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. Найдем производную функции $y' = \dfrac{(2x-1)(x-1) - 1(x^2 - x + 4)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$. Производная равна нулю при $x = -1$, $x = 3$ и не существует в точке $x = 1$. Точки –1, 1, 3 разбивают числовую прямую на четыре промежутка. Чтобы определить интервалы монотонности, найдем знаки производной на каждом промежутке: $y'(-2) = 11/9 > 0$, $y'(0) = y'(2) = -3 < 0$, $y'(4) = 5/9 > 0$.

Итак, функция убывает, если $x \in [-1;1)$ и $x \in (1;3]$. Функция возрастает, если $x \in (-\infty;-1]$ и $x \in [3;+\infty)$.



При переходе через точку $x = -1$ производная меняет знак с «+» на «–», следовательно, в этой точке функция имеет максимум. При переходе через точку $x = 3$ производная меняет знак с «–» на «+», следовательно, в этой точке функция имеет минимум.

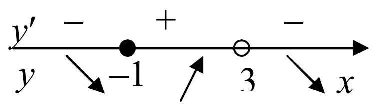
Ответ: $y \uparrow$, если $x \in (-\infty;-1]$ и $x \in [3;+\infty)$;
$y \downarrow$, если $x \in [-1;1)$ и $x \in (1;3]$;
$x = -1$ — точка максимума; $x = 3$ — точка минимума.

Пример 106. Найдите промежутки возрастания, убывания, точки экстремума и минимум функции $y = \dfrac{16(x-1)}{(x-3)^2}$.

Решение. Область определения функции — объединение интервалов $x \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$. Найдем производную функции

$$y' = 16 \cdot \frac{1(x-3)^2 - 2(x-3)(x-1)}{(x-3)^4} = 16 \cdot \frac{(x-3) - 2(x-1)}{(x-3)^3} = \frac{-16(x+1)}{(x-3)^3}.$$

Производная равна нулю в точке $x = -1$ и не существует в точке $x = 3$. Точки –1 и 3 разбивают числовую прямую на три промежутка. Чтобы определить интервалы монотонности, найдем знаки производной на каждом промежутке: $y'(-2) = -16/125$, $y'(2) = 48 > 0$, $y'(4) = -80 < 0$.



Итак, функция возрастает, если $x \in [-1;3)$ и убывает, если $x \in (-\infty;-1]$ и $x \in (3;+\infty)$.

В точке $x = -1$ функция имеет минимум, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «–» на «+».

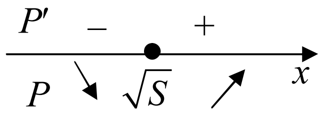
Чтобы найти минимум функции, нужно вычислить значение функции в точке минимума. Итак, $y_{\min} = y(-1) = -2$.

Ответ: $y \uparrow$, если $x \in [-1;3)$;
$y \downarrow$, если $x \in (-\infty;-1]$ и $x \in (3;+\infty)$;
$x = -1$ — точка минимума;
минимум функции — $y = -2$.

Пример 107. Каковы должны быть размеры прямоугольного участка площадью S м^2, имеющего наименьший периметр.

Решение. Пусть x — длина участка, y — его ширина. Тогда площадь $S = xy$ и $y = \dfrac{S}{x}$. Периметр участка $P = 2(x+y) = 2x + \dfrac{2S}{x}$. Исследуем эту функцию на экстремум. Вычислив производную $P' = 2 - \dfrac{2S}{x^2} = \dfrac{2(x^2 - S)}{x^2}$ и приравняв ее к нулю, получим, что функция имеет одну критическую точку $x = \sqrt{S}$ (по условию задачи $x > 0$).

Так как при $x < \sqrt{S}$ производная P' отрицательна, а при $x > \sqrt{S}$ производная P' положительна, то в точке $x = \sqrt{S}$ функция $P(x)$ имеет минимум, и $P_{\min} = P\left(\sqrt{S}\right) = 4\sqrt{S}$.

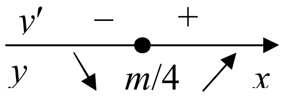


Из этой задачи вытекает, что при заданной площади наименьший периметр имеет квадрат.

Ответ: размер участка $\sqrt{S} \times \sqrt{S}$ [м^2].

Пример 108. (задача Дидоны). Из имеющихся досок можно сделать забор длиной *m* метров [м]. Как этим забором огородить участок наибольшей площади, используя в качестве одной стороны стену прилегающего дома.

Решение. Пусть стороны прямоугольника, не прилегающие к дому, равны x ($0 < x < 0{,}5m$), третья сторона равна $y = m - 2x$. Площадь участка $S(x) = x(m - 2x) = mx - 2x^2$. Вычислив производную $S' = l - 4x$ и приравняв ее к нулю, найдем критическую точку $x = 0{,}25m$. При переходе через точку $x = 0{,}25m$ производная меняет знак с «+» на «–», поэтому в точке $x = 0{,}25m$ функция $S(x)$ имеет максимум и $S_{\max} =$ $= S(0{,}25m) = 0{,}25m(m - 0{,}5m) = 0{,}125m^2$.



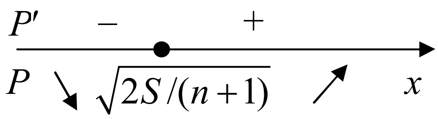
Ответ: $S = 0{,}125m^2$ [м^2].

Пример 109. Требуется огородить прямоугольный участок площадью S(м^2), а затем разделить его на n частей $n - 1$ перегородками, параллельными меньшей стороне участка. Каковы должны быть размеры участка (x — длина, y — ширина), чтобы на постройку пошло наименьшее количество материала?

Решение. Пусть x — длина участка, y — его ширина и $x < y$. Тогда его площадь $S = xy$, следовательно, $y = \dfrac{S}{x}$. Длина всех перегородок и ограды $P = (n+1)x + 2y = (n+1)x + \dfrac{2S}{x}$. Вычислив производную

$P' = n + 1 - \dfrac{2S}{x^2}$ и приравняв ее к нулю, найдем критическую точку $x = \sqrt{\dfrac{2S}{n+1}}$ (по условию $x > 0$).

При переходе через точку $x = \sqrt{\dfrac{2S}{n+1}}$ производная меняет знак с «+» на «–», поэтому в точке $x = \sqrt{\dfrac{2S}{n+1}}$ функция $P(x)$ имеет минимум, $P_{\min} = 2\sqrt{2(n+1)S}$.



Ответ: $P = 2\sqrt{2(n+1)S}$.

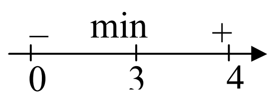
Рассмотрим еще один класс задач – нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке. Согласно второй теореме Вейерштрасса[53] функция, непрерывная на отрезке, принимает на этом отрезке свое наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются либо в точках экстремума функции, либо на концах отрезка.

Пример 110. Найдите наименьшее и наибольшее[54] значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 22$ на отрезке [0; 4].

Решение. Вычислим производную и найдем ее корни: $y' = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.

Корни производной $x = -1$, $x = 3$. Заданному в примере отрезку принадлежит только корень $x = 3$. Поэтому корень $x = -1$ для нашей задачи является посторонним. Исследовав функцию на экстремум, заметим, что в точке $x = 3$ функция имеет минимум, причем это единственная точка экстремума на заданном отрезке. Во всех остальных точка значения функции будут больше, чем $y(3) = 3^3 - 3\cdot 3^2 - 9\cdot 3 + 22 = 27 - 27 - 27 + 22 = -5$.

Следовательно, наименьшее значение функции на данном отрезке равно $y_{\text{small}} = -5$.



[53]***Вторая теорема Вейерштрасса***. Всякая непрерывная на отрезке функция принимает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения.

[54] Будем наименьшее значение функции (smallest) записывать как small, а наибольшее (largest) — как large.

Наибольшее значение функция принимает на одном из концов отрезка. Имеем $y(4) = 64 - 48 - 36 + 22 = 2$, $y(0) = 22$. Итак, наибольшее значение функции на данном отрезке равно $y_{\text{large}} = 22$.

Ответ: –5; 22.

Пример 111. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 2x - 3\cos\pi x$ на отрезке [2; 3].

Решение. Вычислим производную $y' = 2x - 2 + 3\pi\sin\pi x$. На отрезке [2; 3] производная положительна $\left(2(x-1) > 0,\ \sin\pi x \ge 0\right)$, и наименьшее значение функция принимает на левом конце промежутка, то есть при $x = 2$. Следовательно, $y_{\text{small}} = 4 - 4 - 3 = -3$.

Ответ: –3.

Пример 112. Найдите множество значений функции $y = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 2$ на отрезке [–2; 4].

Решение. Вычислим производную и найдем ее корни: $y' = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$. Корни производной $x = -1$, $x = 2$ принадлежат заданному в примере отрезку. Наибольшее или наименьшее значение функция может принимать либо в критических точках, либо на концах отрезка. Вычислим значения функции в этих точках.

$$y(-1) = (-1)^3 - 1{,}5\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) + 2 = -1 - 1{,}5 + 6 + 2 = 5{,}5;$$

$$y(2) = 2^3 - 1{,}5\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + 2 = 8 - 6 - 12 + 2 = -8;$$

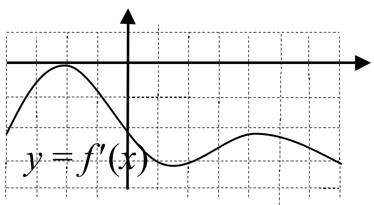
$$y(-2) = (-2)^3 - 1{,}5\cdot(-2)^2 - 6\cdot(-2) + 2 = -8 - 6 + 12 + 2 = 0;$$

$$y(4) = 4^3 - 1{,}5\cdot 4^2 - 6\cdot 4 + 2 = 64 - 24 - 24 + 2 = 18.$$

Итак $y_{\text{small}} = y(2) = -8$, $y_{\text{large}} = y(4) = 18$. Значит, множество значений функции на заданном отрезке [–8; 18].

Ответ: [–8; 18].

Пример 113. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке [–4;–7]. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку, в которой функция принимает наибольшее значение, и угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $x_0 = 2$.



Решение. На всем промежутке функция убывает, так как ее производная неположительная ($f'(x) \le 0$). Поэтому наибольшее значение функция принимает в точке $x = -4$. Так как $f'(2) = -3$, то угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке $k = -3$.

Ответ: $x = -4$; $k = -3$.

Упражнения

222. Найдите интервалы возрастания и убывания функций:

а) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$; б) $y = \dfrac{x^4}{4} - 4{,}5x^2$;

в) $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 2$; г) $y = \dfrac{x^4}{4} + 2x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 3$.

223. Найдите интервалы возрастания и убывания функций:

а) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 20x - 3$; б) $y = -\dfrac{x^4}{4} + 8x^2 + 3$;

в) $y = \dfrac{2x-3}{(x-3)^2}$; г) $y = x^2 e^{-x}$; д) $y = (x^2 - 4x)e^{2x}$.

224. Найдите интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функций:

а) $y = x^2 + \dfrac{16}{x^2}$; б) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{8}{x}$; в) $y = x + \dfrac{27}{x^3}$;

г) $y = 8\ln x - x^2$; д) $y = \ln x + \dfrac{2}{x^2}$; е) $y = x\ln x$.

225. Найдите точки экстремума функции и подсчитайте ее значение в точке максимума, если

а) $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 5$; б) $y = (x^2 - 2x + 6)e^{x-1}$.

226. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на заданном отрезке:

а) $y = 0{,}2x^5 - 4x^2 + 2$ на $[-1;2]$;

б) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$ на $[-2;3]$;

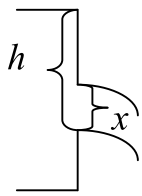
в) $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$ на $[-1;1]$; г) $y = x\sin x + \cos x$ на $[0;\pi]$.

227. На отрезке $[0; 4]$ найдите наибольшее значение функции $y=(x^2+x-5)e^{3-x}$.

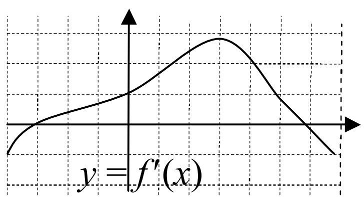
228. Найдите максимальную скорость тела, если оно движется по закону $S(t)=-0,25t^4-1,5t^3+6t^2+3t-4,25$ (путь — в метрах, время — в секундах).

229. Определите размеры открытого бассейна с квадратным дном и объемом 108 м^3 так, чтобы на облицовку стен и дна пошло наименьшее количество материала.

230. Батарея с электродвижущей силой E и внутренним сопротивлением R замкнута проводником с сопротивлением r. Мощность получающегося тока W задается формулой $W=\dfrac{E^2r}{(R+r)^2}$. При каком значении r мощность тока будет наибольшей?



231. Суммарный расход воды, вытекающей через отверстие в стене, определяется по формуле $y=cx\sqrt{h-x}$, где x — диаметр отверстия, h — глубина его нижней точки, c — постоянная. При каком диаметре отверстия расход воды будет наибольшим?



232. Функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[-4; 7]$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точки минимума и максимума функции $y=f(x)$, промежутки возрастания и убывания функции, угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $x_0=4$ и точки, в которых касательная параллельна оси абсцисс.

Глава 7 ПРОЦЕНТЫ И ПРОГРЕССИИ

§ 28 Понятие процента и его приложения

Процент — одно из математических понятий, которое часто встречается в повседневной жизни. Проценты находят применение в денежных отношениях (банковские счета, налоги, снижение и повышение цены), в оценке соотношений между различными величинами (успеваемость и посещаемость занятий студентами, уровень инфляции) и т.д. Умение применять проценты на практике приобретает особую актуальность в условиях перехода к рыночной экономике.

Процент — это сотая часть какой-либо величины; используется для обозначения доли чего-либо по отношению к целому. Отметим, что процент величина относительная.

Основные задачи на проценты — это задачи на нахождение:

1) процентов от заданной величины;

2) величины по ее процентам.

Чтобы найти процент от какой-либо величины, нужно эту величину разделить на 100 и полученную величину умножить на нужный процент или, что то же самое, умножить данную величину на число процентов, записанное в виде десятичной дроби: если a — заданное число, а число b составляет p процентов от числа a, то $b = a \cdot 0{,}01p$.

Чтобы найти некоторую величину по ее проценту, нужно заданную часть величины разделить на данный процент и полученный результат умножить на 100 или, что то же самое, разделить заданную часть величины на число процентов, записанное в виде десятичной дроби: если число b составляет p процентов от числа a, то $a = \dfrac{b}{0{,}01p}$.

Часто при решении задач на проценты применяют пропорции. Некоторая величина a принимается за 100 %, ее часть — величина b за p %. Тогда соответствие между ними выражается пропорцией $\begin{matrix} a - 100\% \\ b\ -\ p\% \end{matrix}$ или $\dfrac{a}{b} = \dfrac{100}{p}$. Используя эту пропорцию, можно получить формулы для решения основных типов задач на проценты.

Пример 114. Подоходный налог составляет 13 % зарплаты. Какова сумма подоходного налога с зарплаты 35 000 рублей.

Решение. Пусть сумма начисленного налога x рублей.

Из пропорции $\begin{matrix} 35000 - 100\% \\ x \ - \ 13\% \end{matrix}$ получим, что $x = \dfrac{35000 \cdot 13}{100} =$ $= 4550$ (руб.).

Ответ: 4550 руб.

Пример 115. Подоходный налог составляет 13 % зарплаты. С какой зарплаты был начислен налог 5 850 рублей.

Решение. Пусть зарплата, с которой берется налог, составляет x рублей. Из пропорции $\begin{matrix} x - 100\% \\ 5850 - \ 13\% \end{matrix}$ получим, что $x = \dfrac{5850 \cdot 100}{13} =$ $= 45000$ (руб.).

Ответ: 45 000 руб.

Пример 116. Зарплата ведущего научного сотрудника на 60 % больше зарплаты инженера. На сколько процентов зарплата инженера меньше зарплаты научного сотрудника?

Решение. Примем зарплату инженера в a рублей за 100 %, тогда зарплата ведущего научного сотрудника составит 160 % зарплаты инженера. Из пропорции $\begin{matrix} 1{,}6a - 100\% \\ a - \ x\% \end{matrix}$ получим, что $x = \dfrac{100a}{1{,}6a} = 62{,}5\,\%$. Таким образом, зарплата инженера составляет 62,5 % зарплаты ведущего научного сотрудника, т.е. меньше на 37,5 %.

Ответ: 37,5.

Пример 117. Перед праздничной распродажей магазин повысил цену на парфюмерию на 45 %, а затем объявил скидку 30 %. На сколько процентов больше первоначальной цены пришлось заплатить покупателям после объявления скидки?

Решение. Пусть цена флакона духов до повышения была a рублей. Тогда после повышения цена духов будет $a_1 = 1{,}45a$, а после снижения цена станет — $a_2 = 0{,}7a_1 = 1{,}015a$. Следовательно, цена возрастет, но всего на 1,5 %.

Ответ: 1,5 %.

Пример 118. С 1 июля тариф на электроэнергию возрастает на 12 %. В мае 2019 года за 1 кВт/ч нужно было платить 2,15 рубля. Пусть средний расход электроэнергии в месяц равен 120 кВт. Сколько придется заплатить за электроэнергию в сентябре 2019 года? В сентябре 2020 года? В сентябре 2021 года?

Решение. В первой половине 2019 года плата за электроэнергию составляла 2,15 рубля за 1 кВт/ч. С июля 2019 года за 1 кВт/ч электроэнергии нужно будет платить $2{,}15 \cdot 1{,}12 = 2{,}408 \approx 2{,}41$ (руб.). В сентябре 2019 года за 1 кВт электроэнергии нужно будет заплатить 2,41 (руб.), то есть плата увеличилась на 26 рублей. С 1 июля 2020 года стоимость 1 кВт/ч. составила уже $2{,}41 \cdot 1{,}12 = 2{,}70$ (руб.). В сентябре 2020 года за 1 кВт электроэнергии нужно будет заплатить 2,70 рубля, то есть плата увеличилась на 29 рублей. С 1 июля 2021 года стоимость 1 кВт/ч. составила $2{,}70 \cdot 1{,}12 = 3{,}024 \approx 3{,}02$ (руб.). В сентябре 2021 года за 1 кВт электроэнергии нужно будет заплатить 3,02 (руб.), то есть плата увеличилась на 32 рубля.

Итак, плата за электроэнергию составит

в сентябре 2019 г. $2{,}15 \cdot 120 = 228$ (руб.),

в сентябре 2020 г. — $2{,}41 \cdot 120 = 289{,}2$ (руб.),

в сентябре 2021 г. — $3{,}02 \cdot 120 = 362{,}4$ (руб.).

Замечание. Рост тарифа на одно и то же число процентов не означает, что тариф будет повышаться на одну и ту величину. Этот пример показывает, что в рублях каждое следующее повышение будет больше предыдущего.

Упражнения

223. Торговая надбавка в аптеке составляет 20 %. По какой цене аптека продает витамины «Алфавит», если она приобретает их по цене 235 рублей за упаковку?

224. Торговая надбавка в аптеке составляет 20 %. По какой цене аптека приобретает на базе витамины «Алфавит», если она продает их по цене 300 рублей за упаковку?

225. Торговая надбавка в аптеке составляет 20 %. Аптека приобретает витамины «Алфавит» по цене 235 рублей за стандарт. По какой цене аптека продает витамины в субботу, если в этот день действует скидка в 5 %?

226. В 2019 году руководство РЖД повысило цены на железнодорожные билеты сначала на 20 %, а потом еще на 30 %. На сколько процентов повысилась цена на билеты? На сколько процентов должна была повыситься цена при втором повышении, чтобы общее повышение цены составило 50 %?

§ 29 Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, каждый член которой, начиная со второго, отличается от предыдущего на одно и то же число[55], то есть a_1, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d, \ldots, a_n = a_{n-1} + d, \ldots$

Число d называется ***разностью*** прогрессии, a_n — общим (n-м) членом арифметической прогрессии.

Примером арифметической прогрессии является ряд натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5,… В этой прогрессии $a_1 = 1$ и разность $d = 1$.

Любой член арифметической прогрессии может быть вычислен по формуле общего члена: $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Арифметическая прогрессия, членами которой являются действительные числа, является монотонной последовательностью. При $d > 0$ она является возрастающей, а при $d < 0$ — убывающей. Если $d = 0$, то последовательность будет стационарной.

Из определения арифметической прогрессии вытекают ее свойства:

1) *разность любых соседних членов прогрессии постоянна и равна разности прогрессии*, то есть $a_{n+1} - a_n = d$;

2) *каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен полусумме (среднему арифметическому) соседних с ним членов прогрессии*, то есть $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ (характеристическое свойство арифметической прогрессии);

3) *сумма членов арифметической прогрессии, равноудаленных от концов прогрессии, равна сумме крайних членов прогрессии*, то есть $a_k + a_{n-k} = a_1 + a_n$;

[55] Способ задания последовательности, когда каждый ее член, начиная со второго, определяется через предыдущий член последовательности, называется ***реккурентным***.

4) *сумма первых n членов арифметической прогрессии* $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ *или* $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Пример 119. Найдите девятнадцатый член арифметической прогрессии, если ее первый член равен (–3), а разность равна 0,25.

Решение. По формуле общего члена арифметической прогрессии имеем $a_{19} = a_1 + 18d$. Следовательно, $a_{19} = -3 + 18 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

Пример 120. Найдите сумму сорока членов арифметической прогрессии, если ее первый член равен 11, а разность равна 0,2.

Решение. По формуле суммы членов арифметической прогрессии $S_{40} = \frac{2a_1 + 39d}{2} \cdot 40$.

Значит, $S_{40} = \frac{22 + 39 \cdot 0{,}2}{2} \cdot 40 = 596$.

Ответ: 596.

Пример 121. В арифметической прогрессии пятый член равен 2, а двадцать первый равен 17. Найдите сумму двадцати пяти членов этой прогрессии.

Решение. Члены прогрессии с номерами 5 и 21 равноудалены от концов прогрессии, поэтому по свойству п. 2: $a_5 + a_{21} = a_1 + a_{25}$ и по формуле суммы членов арифметической прогрессии

$$S_{25} = \frac{a_1 + a_{25}}{2} \cdot 25 = \frac{a_5 + a_{21}}{2} \cdot 25 = \frac{19}{2} \cdot 25 = 237{,}5.$$

Ответ: 237,5.

Пример 122(*). Сумма четвертого и восьмого членов арифметической прогрессии равна 20, а произведение третьего и пятого равно 7. Найдите десятый член этой прогрессии, если известно, что разность прогрессии целое число.

Решение. По условию задачи $a_4 + a_8 = 20$ и $a_3 a_5 = 7$. Применим формулу общего члена арифметической прогрессии и получим систему $\begin{cases} (a_1 + 3d) + (a_1 + 7d) = 20; \\ (a_1 + 2d)(a_1 + 4d) = 7. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $a_1 = 10 - 5d$, подставим во второе уравнение, раскроем скобки и запишем

$$(10 - 5d + 2d)(10 - 5d + 4d) = 7 \;\; \Rightarrow \;(10 - 3d)(10 - d) = 7$$

или $3d^2 - 40d + 93 = 0$. По формуле корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом имеем:

$$d_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 3 \cdot 93}}{3} = \frac{20 \pm \sqrt{121}}{3} = \frac{20 \pm 11}{3} \;\Rightarrow\; d_1 = 3,\;\; d_2 = \frac{31}{3}$$ (d_2 — посторонний корень, так как по условию d — целое число). Тогда $a_1 = 10 - 5d = -5$ и $a_{10} = a_1 + 9d = -5 + 27 = 22$.

Ответ: 22.

Введем понятие арифметической прогрессии второго порядка. ***Арифметической прогрессией второго порядка*** называется такая последовательность чисел, при которой последовательность их разностей сама образует простую арифметическую прогрессию. Примером может служить последовательность квадратов натуральных чисел: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, …, разности которых образуют простую арифметическую прогрессию с разностью 2: 1, 3, 5, 7, 9, 11, …

Упражнения

237. В арифметической прогрессии пятый член равен 31, семнадцатый равен 49. Найдите формулу общего члена прогрессии.

268. Первый член арифметической прогрессии равен 4,5, а разность равна 2,5. Найдите номер члена прогрессии, равного 42.

239. В арифметической прогрессии третий член равен 8, а десятый равен (–10). Найдите сумму двенадцати членов этой прогрессии.

240. Сколько членов арифметической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма равнялась 99, если ее первый член равен (–4), а последний равен 26.

---

241. Найдите число членов арифметической прогрессии, у которой сумма всех членов равна 112, произведение второго члена на разность прогрессии равна 30, а сумма третьего и пятого членов равна 32.

242. При свободном падении тело прошло в первую секунду 1 м, а в каждую следующую на 10 м больше. Найдите глубину шахты,

если свободно падающее тело достигло ее дна через 6 с после начала падения.

243. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 5700 м?

244. Лесорубы при хранении бревен укладывают их таким образом, что каждый следующий слой содержит на одно бревно меньше, чем предыдущий. Сколько бревен было у лесорубов, если основанием кладки служат 25 бревен, а в верхнем слое находится всего 1 бревно?

245. Ежедневно спортсмен пробегает на 30 м больше, чем в предыдущий день. Сколько всего километров он пробежит за 3 недели, если в первый день он пробежал 400 м?

246. Велосипедист проезжает каждый день на 1,5 км больше, чем в предыдущий. В первый день он проехал 16 км. За сколько дней он проедет 227,5 км? Сколько километров он проедет за последний день?

§ 30 Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$, в которой каждое последующее число, начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на определённое число q, где $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$, то есть b_1, $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_2 q, \ldots, b_n = b_{n-1} q, \ldots$

Число q называется ***знаменателем*** прогрессии, b_n — общим членом геометрической прогрессии.

Любой член геометрической прогрессии может быть вычислен по формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Если членами геометрической прогрессии являются действительные числа и $b_1 > 0$, $q > 1$, прогрессия является ***возрастающей*** последовательностью, если $0 < q < 1$ — ***убывающей*** последовательностью, а при $q < 0$ — ***знакочередующейся***.

Из определения геометрической прогрессии вытекают ее свойства:

1) *отношение двух соседних членов геометрической прогрессии постоянно и равно знаменателю прогрессии*, то есть $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = q$;

2) *квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению (среднему геометрическому) соседних с ним членов прогрессии*, то есть $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$ (характеристическое свойство геометрической прогрессии). Для положительной прогрессии это свойство можно записать следующим образом $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$;

3) *произведение членов геометрической прогрессии, равноудаленных от концов прогрессии, равно произведению крайних членов прогрессии*, то есть $b_k \cdot b_{n-k} = b_1 \cdot b_n$;

4) *логарифмы членов положительной геометрической прогрессии образуют арифметическую прогрессию*;

5) *произведение первых n членов геометрической прогрессии можно вычислить по формуле*: $P_n = \left(b_1 b_n\right)^{n/2}$;

6) *сумма первых n членов геометрической прогрессии* $S_n = \dfrac{b_{n+1} - b_1}{q-1}$ *или* $S_n = b_1 \dfrac{q^{n-1} - 1}{q-1}$.

Если знаменатель геометрической прогрессии $|q| < 1$ (прогрессия является бесконечно убывающей), то можно вычислить сумму всей прогрессии $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Пример 123. Первый член геометрической прогрессии равен 486, а ее знаменатель равен $\dfrac{2}{3}$. Найдите шестой член этой прогрессии.

Решение. По формуле общего члена геометрической прогрессии $b_6 = b_1 \cdot q^5$, следовательно, $b_6 = 486 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^5 = \dfrac{486 \cdot 32}{243} = 64$.

Ответ: 64.

Пример 124. Первый член геометрической прогрессии равен 0,3, а ее знаменатель равен (–2). Найдите сумму десяти членов этой прогрессии.

Решение. По формуле суммы члена геометрической прогрессии $S_{10} = b_1 \frac{q^{10}-1}{q-1}$, следовательно, $S_{10} = 0,3\frac{(-2)^{10}-1}{-2-1} = 0,3\frac{1024-1}{-3} =$
$= -\frac{1023}{10} = 102,3$.

Ответ: –102,3.

Пример 125. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен 50, а ее знаменатель равен 0,5. Найдите сумму этой прогрессии.

Решение. По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{50}{1-0,5} = 100$.

Ответ: 100.

Пример 126. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 46, а ее знаменатель равен (– 0,5). Найдите первый член этой прогрессии.

Решение. По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем $S = \frac{b_1}{1-q}$, следовательно, $b_1 = S(1-q) =$
$= 46(1+0,5) = 69$.

Ответ: 69.

Пример 127(*). Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если он на 2 меньше первого члена, а сумма прогрессии равна 5.

Решение. По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем $S = \frac{b_1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{q+2}{1-q}$, следовательно,
$5 = \frac{q+2}{1-q} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

Пример 128(*). Найдите сумму, заданную выражением: $27-18+12-8+\frac{16}{3}-\ldots$

Решение. Данное выражение представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Действительно, отношение любого члена последовательности $27;\ -18;\ 12;\ -8;\ \frac{16}{3};\ \ldots$ к предыдущему постоянно и равно $\frac{-18}{27}=\frac{12}{-18}=\frac{-8}{12}=-\frac{2}{3}$. Следовательно, знаменатель прогрессии $q=-\frac{2}{3}$, а первый член — $b_1=27$.

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем $S=\frac{b_1}{1-q}\ \Rightarrow\ S=\frac{27}{1+\frac{2}{3}}=\frac{27\cdot 3}{5}=16{,}2$.

Ответ: 16,2.

В заключение параграфа приведем экономический пример. В банках вклады увеличиваются по схемам простых и сложных процентов: простые проценты — увеличение первоначального вклада в арифметической прогрессии, сложные проценты — увеличение вклада в геометрической прогрессии.

Вкладчик положил в банк некоторую сумму на некоторых условия. Какая сумма будет на его счете в конце n-го года, если он в течение всего срока хранения вклада не снимал с него деньги?

Простые проценты начисляются один раз в конце каждого года только на сумму основного вклада. Если положить S рублей в банк под p% годовых, то к концу первого года сумма вклада составит $S(1 + 0{,}01p)$ руб., к концу второго года — $S(1 + 2 \cdot 0{,}01p)$ руб., к концу n-го года — $S(1 + 0{,}01p\,n)$ руб.

При начислении дохода по схеме сложных процентов происходит капитализация процентов, т.е. их причисляют к сумме вклада и последующий доход рассчитывается не от первоначальной, а от накопленной суммы вклада. Капитализация происходит не постоянно, а с некоторой периодичностью. Как правило, один раз в месяц, квартал или год.

Пусть мы положили в банк S рублей под p% годовых с капитализацией процентов, и проценты начисляются раз в год. Тогда к концу первого года сумма вклада составит $S(1 + 0{,}01p)$ руб., к концу второго года — $S(1 + 0{,}01p)^2$ руб., к концу n-го года — $S(1 + 0{,}01p)^n$ руб.

Упражнения

247. В положительной геометрической прогрессии первый член равен 160, а четвертый равен 67,5. Найдите ее знаменатель.

248. Сумма пяти членов геометрической прогрессии со знаменателем 0,5 равна 93. Найдите первый член прогрессии.

249. Найдите число членов конечной геометрической прогрессии, у которой первый, второй и последний члены равны соответственно 3, 12 и 3072.

250. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой равен 27, а знаменатель равен 0,25.

251. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой равен 15 и сумма всех ее членов равна а) $S = 45$; б) $S = 9$.

---

252. Четвертый член геометрической прогрессии, все члены которой отрицательны, равен –54, а сумма пятого и шестого ее членов равна –648. Найдите сумму второго и третьего ее членов.

253. Найдите четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

254. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, каждый член которой относится к сумме всех последующих членов прогрессии, как 2 к 3.

Ответы

1(а) 12; **1(б)** –1; **2(а)** –2; **2(б)** –1; **3(а)** 19,9; **3(б)** –3; **4(а)** 6; **4(б)** $\frac{47}{48}$; **4(в)** $-1,2$; **5(а)** –1; **5(б)** –1,26; **6(а)** 0,25; **6(б)** $\frac{5}{3}$; **7(а)** –1,4; **7(б)** –0,4; **8(а)** 2,1; **8(б)** –0,5; **9(а)** $7a$; **9(б)** $18x – 6,5$; **10(а)** $6x – 4y$; **10(б)** $2a^2b$; **10(в)** $-4,2x+13,2y$; **11(а)** $–2x + 18y$; **11(б)** $4,1a^2+1,9a+3,2$; **11(в)** $10b^3-2a^3$; **12(а)** a^2+9b^2; **12(б)** $8xy$; **12(в)** $5xy$; **12(а)** 4; **12(б)** 3; **14(а)** 1; **14(б)** -1; **15(а)** 0; **15(б)** $x – 3$; **16(а)** –1; **16(б)** 1; **17(а)** 3; **17(б)** –2; **18(а)** $x – 2$; **18(б)** -10; **19(а)** –3; **19(б)** 2; **20(а)** 2; **20(б)** –1; **21(а)** $(x-4)^2-15$; **21(б)** $3(x-2)^2-10$; **21(в)** $16-(x-4)^2$; **21(г)** $15,25-(x-4,5)^2$; **22(а)** $7-5x$; **22(б)** 12; **22(в)** $4x – 3$; **23(а)** –12; **23(б)** $19 – x$; **23(в)** $14 – 2x$; **24(а)** 36; **24(б)** 441; **24(в)** 10; **24(г)** 12; **25(а)** 2; **25(б)** 9; **26(а)** $8x^2$; **26(б)** $7x^3y^2$; **27(а)** $\sqrt{x}$; **27(б)** 0; **28(а)** 0; **28(б)** 1; **28(в)** 32; **28(г)** $9x^2$; **29(а)** 2; **29(б)** -2; **30(а)** x; **30(б)** –22; **31(а)** 6; **31(б)** 1; **32(а)** 2; **32(б)** 0; **33(а)** 4; **33(б)** 7; **34(а)** -5; **34(б)** 9; **35(а)** 17; **35(б)** 22; **36(а)** 15; **36(б)** 7; **37(а)** 0,75; **37(б)** $-0,45$; **37(в)** 0,38; **38(а)** 2; **38(б)** 1; **39** 6; **40** –3; **41** –8; **42** 4; **43** 2; **44** –6; **45** 2,5; **46** –1; **47** –0,5; **48** 5; **49** –2; **50** –0,6; **51** –6; **52** –3,8; **53** -2; **54** 1,5; **55** 0,6; 0,8; **56(а)** 1; **56(б)** 0; **57(а)** –2; **57(б)** –1; **57(в)** 3; **57(г)** $-\sqrt{2}$; **58(а)** 2; **58(б)** 1; **59** 12; **60(а)** 10; **60(б)** 7; **61(а)** 6; **61(б)** 9; **62** –12; **63** -1; **64** -2; **65** 0,5; **66** 2; **67** $\cos\alpha$; **68** 2; **69** $\sin\alpha$; **70** 16; **71** 5; **72** –1; **73(а)** 1; **71(б)** 4; **74(а)** 0,5; **74(б)** 5; **75(а)** 36; **75(б)** 89; **76(а)** 4; **76(б)** 1; **77(а)** 10; **77(б)** –1; **78(а)** 9; **78(б)** 10; **79(а)** –3; **79(б)** 25; **80(а)** 29; **80(б)** 29; **81(а)** -1; **81(б)** 33; **82(а)** 4; **82(б)** 3; **83(а)** 24; **83(б)** 12; **84** $y = 4x – 9$; **85** $y=-2x+6$; **86(а)** $b=-8, c=9$; **86(б)** $b = 4$; $c = 2$; **87** $b = –4$; $c = 2$; **88** $y=x^2-6x+5$; **92(а)** $T = \pi$; **92(б)** $T = 4\pi$; **92(в)** $T=\frac{2\pi}{3}$; **92(г)** $T=\frac{\pi}{2}$; **95(а)** 44; **95(б)** 2; **96(а)** -12; **96(б)** 8; **97** 2; **98** 2; **99(а)** 2; **99(б)** $-2; 2$; **100(а)** 2; **100(б)** $-2; 4$; **101(а)** 0; 3; **101(б)** –1,5; 5; **102(а)** 19; **102(б)** 1,5; 4; **103(а)** 4; **103(б)** $-4; 0$; **104(а)** $-6; 7$; **104(б)** $-5; -1$; **105(а)** –3; 3; **105(б)** –4, 1; **106(а)** 9; **106(б)** 1; 5; **107(а)** $-3; -0,25$; **107(б)** –0,6; **108(а)** –3; 2; **108(б)** 3; **109(а)** 15; **109(б)** $-12; 0,5$; **110(а)** –3; **110(б)** 2; 4; **111(а)** 2; **111(б)** –7; **112(а)** 1; **112(б)** $-1; 9$; **113(а)** –1; 9; **113(б)** 1; 5; **114(а)** –5; 0; **114(б)** 1; 3; **115(а)** 5; 8; **115(б)** 5; **116(а)** 2; 30;

116(б) 3; **117(а)** 4; 6; **117(б)** –9; –1; 5; 13; **118(а)** 3; **118(б)** 5; **119(а)** 5; **119(б)** 9; **120(а)** 2; **120(б)** 7; **121(а)** 2; **121(б)** $-1{,}5; 4$; **122(а)** $-5; -3{,}5$; **122(б)** 10; **123(а)** 8 **123(б)** 0; 5 **124(а)** 10; **124(б)** 11; **125(а)** $-1; 6$; **125(б)** –2; 5; **125(в)** –7; 2; **126(а)** –1,8; **126(б)** 3; **127(а)** $-6{,}5; 4$; **127(б)** 5; **127(в)** 4; 6; **128(а)** –1; **128(б)** 3; **128(в)** 7; **128(г)** –4; 7; **128(д)** $-2; 1$; **129(а)** $-2; 1$; **129(б)** 4; 5; **130(а)** –6; 1; **130(б)** –3; 4; **131(а)** –6; 1; **131(б)** $-3; 4$; **132(а)** -2; **132(б)** –1; **133(а)** –4; 0; **133(б)** 1; **134(а)** 1; **134(б)** 3; **135(а)** 4; **135(б)** 8; **136(а)** 6; **136(б)** 5; **137(а)** 3; **137(б)** 3; **138(а)** 4; **138(б)** 4; **139(а)** 2; **139(б)** 2; **140(а)** 8; **140(б)** 0,5; 8; **141(а)** 14; **141(б)** $\frac{1}{3}; 9$; **142(а)** 4; 16; **142(б)** 0,5; 4; **143(а)** $\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in \mathbf{Z}$;

143(б) $(-1)^k \frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}, k \in \mathbf{Z}$; **143(в)** $\pm\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$;

143(г) $\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi n, n \in \mathbf{Z}$; **144(а)** $\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;

144(б) $2\pi n, -\frac{\pi}{2}+2\pi m, n,m \in \mathbf{Z}$; **144(в)** $\frac{2\pi}{3}+2\pi n, 2\pi m, n,m \in \mathbf{Z}$;

144(г) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}$; **145(а)** $\pi n, \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi m, n,m \in \mathbf{Z}$;

145(б) $\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$; **145(в)** $\pi n, n \in \mathbf{Z}$;

146(а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, (-1)^k \frac{\pi}{6}+\pi k, n,k \in \mathbf{Z}$; **146(б)** $\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$;

146(в) $\frac{\pi}{2}+\pi n, \pm\frac{\pi}{3}+2\pi m, n,m \in \mathbf{Z}$; **147(а)** $\pi n, \pm\frac{\pi}{6}+2\pi m, n,m \in \mathbf{Z}$;

147(б) $\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi m, n,m \in \mathbf{Z}$; **148(а)** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;

148(б) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbf{Z}$; **148(в)** $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6}+\pi k, k \in \mathbf{Z}$;

148(г) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; **149(а)** $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6}+\pi k, k \in \mathbf{Z}$;

149(б) $\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi m, n,m \in \mathbf{Z}$; **149(в)** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, (-1)^k \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k, n,k \in \mathbf{Z}$;

149(г) $\frac{\pi}{2}n, \quad (-1)^k \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k, n,k \in \mathbf{Z}$; **150(а)** $\pi n, \frac{\pi}{3}+\pi k, n,k \in \mathbf{Z}$;

150(б) $2\pi n$, $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, n, k \in \mathbf{Z}$; **151(а)** (3; –2); **151(б)** (8; –1);
152(а) (3; 1); **152(б)** (3; –2); **153(а)** (3; 1); (–35; 8,6); **153(б)** (0; 5); (–5; 0); (–2; 3); **154(а)** (2; 4); (4; 2); **154(б)** (–2; 1); (–4,4; 4,2);
155(а) (5; 3); (3; 5); (–5; –3); (–3; –5);
155(б) $(-2;-5), (5;2), (5 \pm \sqrt{28}; 5 \mp \sqrt{28})$; **156(а)** (–∞; 4); **156(б)** (5; +∞);
156(в) $[-3; +\infty)$; **157(а)** $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; **157(б)** $[-8; 2]$;
157(в) $(1; 2{,}5)$; **157(г)** $(-\infty; 2] \cup [4{,}5; +\infty)$; **157(д)** (–7; 7);
158(а) $[1/3; 2]$; **158(б)** [0,75; 2]; **158(в)** [–4; 4,5];
158(г) (–2; 3,5)∪(5; +∞); **159(а)** $(-\infty; -3{,}5) \cup [3; \infty)$; **159(б)** $(-9; 7]$;
159(в) $(-1{,}25; 3]$; **160(а)** [–3; 2); **160(б)** (–4; 9); **160(в)** (–3; 7];
161(а) [–12; –5); **161(б)** (2; +∞); **161(в)** $(-1{,}25; -0{,}5]$;
162(а) $(-\infty; -1] \cup$ $(1; 5{,}5]$; **162(б)** $(-3; 2) \cup [7; +\infty)$;
162(в) (–5; 2)∪[7; +∞); **162(г)** $(-5; -2](3; 5]$; **163(а)** (–2; 0]∪[8; +∞);
163(б) $(-\infty; -9) \cup [-3; 4]$; **163(в)** (–2; 1]∪[8; 12); **163(г)** $[-3; 3) \cup (6; 9]$;
164(а) $[-3; -1) \cup (0; 6]$; **164(б)** $(-\infty; -5] \cup (3; 5]$;
164(в) $(-4; -1] \cup [1; +\infty)$; **164(г)** $(-6; -3] \cup (1; 4]$;
165(а) $(-5; -1) \cup (-1; 1)$; **165(б)** (0; 2)∪(2; 4); **165(в)** (–1; 5);
165(г) $[1; 3] \cup \{7\}$; **166(а)** [1; +∞)∪{–2}; **166(б)** [1; 6]∪{3};
166(в) $(-\infty; -10] \cup (-2; 3)$; **166(г)** $(-2; -1) \cup [1; 4]$;
166(д) $[-6; -1) \cup [0; 2)$; **167(а)** $[0; 1) \cup (3; 5]$; **167(б)** $(-2; 4) \cup [5; +\infty)$;
167(в) $(-6; 2] \cup (3; +\infty)$; **167(г)** $(-3; 6) \cup [8; +\infty)$;
167(д) $(-\infty; -3) \cup [2; 4)$ **168(а)** $(-1; 2) \cup (2; 4)$; **168(б)** $(-2; 3) \cup (3; 5)$;
168(в) $(0; 3) \cup (3; 6]$; **168(г)** $(-\infty; -2) \cup (3; 10) \cup (10; +\infty)$;
168(д) $(-9; 2) \cup (2; 6)$ **169(а)** $(-\infty; -1) \cup (1; 3]$; **169(б)** $(-\infty; 1] \cup [3{,}8; 5)$;
169(в) $(-5; -4] \cup (-3; -2]$; **169(г)** $(-4; -2)$; **169(д)** $(-5; 4)$;
170(а) $(-2; 6)$; **170(б)** $(-1; 2)$; **170(в)** $(0; 5)$; **170(г)** $(-3; -1) \cup (-1; 1)$;
170(д) $(1; 5)$; **171(а)** $(-6; 6) \cup (3; +\infty)$; **171(б)** $(0; 2) \cup (2; 7]$;
172(а) $(-4; 2)$; **172(б)** $(-2; 5)$; **172(в)** $(-\infty; 4) \cup (5; +\infty)$; **172(г)** $(-3; 1)$;
173(а) $(-8; 12)$; **173(б)** $(4; +\infty)$; **173(в)** $(1; +\infty)$; **173(г)** $(4; +\infty)$;
174(а) $(-\infty; -1) \cup (8; \infty)$; **174(б)** $(-1{,}5; 7)$; **175(а)** $(-10; +\infty)$;
175(б) $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$; **176(а)** $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$; **176(б)** $(-2; 4)$;
177(а) $(-6; -4) \cup (6; 8)$; **177(б)** $[-1; 2] \cup [3; 6]$;
178(а) $(-\infty; -1) \cup (1; 3) \cup (5; +\infty)$;

178(б) $(-\infty;-1)\cup(4/3;5)\cup(20/3;+\infty)$; **179(а)** $[5;7]\cup\{0\}$;
179(б) $[-3;9]$; **180(а)** $(3;+\infty)$; **180(б)** $(-1;9)$; **181(а)** $(1;6{,}5)$;
181(б) $(2;4)$; **182(а)** $[4;18)$; **182(б)** $(-8;-0{,}5]$; **183(а)** $(2;9]$;
183(б) $(3;4)$; **184(а)** $(4;7]$; **184(б)** $(-1;5]$; **185а)** $(1;3]$; **185(б)** $\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$;
186(а) $(-\infty;1{,}2)$; **186(б)** $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$; **187(а)** $(-4;2)$;
187(б) $(-1;2)$; **188(а)** $(-2;5)$; **188(б)** $(0;1)$; **189(а)** $(-2;3)$;
189(б) $(-2;+\infty)$; **1901(а)** $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$;
190(б) $(-\infty;-3]\cup[0;+\infty)$; **191(а)** $(-3{,}5;-1)$; **191(б)** $(0{,}75;1{,}75)$;
192(а) $(-2;0)\cup(2;4)$; **192(б)** $(1;2)\cup(3;4)$; **193** $(2;5)$;
194 $(-2;1)\cup(3;4)$; **195** $(-2;-1)$; **196** $(-2;2)$; **197** $(-2;1)$; **198** $(-2;4]$;
199(а) $(-4;-1)$; **199(б)** $(-1;5)$; **200(а)** $(-9;-5)$; **200(б)** $(1;3)\cup(13;+\infty)$;
201(а) $(0;0{,}1)\cup(1;+\infty)$; **201(б)** $(0;0{,}5)\cup(4;+\infty)$;
202(а) $(0;1/3)\cup(27;+\infty)$; **202(б)** $(0;2)\cup(8;+\infty)$;
203(а) $a=2, b=0, c=-26, d=-5$; **203(б)** $a=-3, b=2, c=4, d=-5$;
204(а) $q(x)=x^3-3x^2+x+2$; **204(б)** $q(x)=3x^3-2x^2+6x-8$;
204(в) $q(x)=x^3+3x+9$; **205(а)** $q(x)=x-4$; **205(б)** $q(x)=x^2-x-4$;
205(в) $q(x)=x^2+2x+1$; **206(а)** $q(x)=x^3-7x^2+4x-9$, $r=38$;
206(б) $q(x)=x^3+2x^2-2x+3, r=-5$; **206(в)** $q(x)=x^3+2x^2-11x-12$, $r=26$; **207** $f(x)=-31$ **208(а)** $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$;
208(б) $f(x)=(x-2)^2(x^2+x-3)$;
208(в) $f(x)=(x-2)(x+2)(x^2-3x-2)$;
208(г) $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x+3)$;
209(а) $f(x)=(x-1)(x+1)(x-4)(x+3)$;
209(б) $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x+3)$;
209(в) $f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x-4)$;
209(г) $f(x)=(x-1)^2(x+2)(x^2-x-1)$;
210(а) $y'(2)=\left.\frac{10(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\right|_{x=2}=-2$; **210(б)** $y'(1)=\left.\frac{3(6x+5)}{\sqrt{4x+5}}\right|_{x=1}=11$;
210(в) $y'(0{,}5)=\left.(2x\cos\pi x-\pi x^2\sin\pi x)\right|_{x=0{,}5}=-1$;
210(г) $y'(0{,}5)=\left.(2x+1)e^{2x}\right|_{x=0{,}5}=2e$;

210(г) $y'(1)=\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{2x+7}}+\dfrac{\sqrt{2x+7}}{x}\right)\Bigg|_{x=1}=3$; **211(а)** $y'=\dfrac{7x^3+6x^2-12x}{2\sqrt{x+1}}$;

211(б) $y'=\dfrac{13x^4+7x^2+4x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$; **211(в)** $y'=\dfrac{9x^2+50x-1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}$;

211(г) $y'=\dfrac{13x^6-48x^5-6x+16}{2\sqrt{x-4}}$; **211(д)** $y'=\dfrac{7\sqrt[3]{x}-9}{6\sqrt{x^3}}$;

211(е) $y'=4(0,25x-7)^7+8(1-2x)^3$; **212(а)** $y'=\dfrac{4x^7-9x^2+2}{\sqrt{x^8-6x^3+4x}}$;

212(б) $y'=\dfrac{2x^7-10x^3}{\sqrt[4]{(x^8-10x^4+36)^3}}$; **212(в)** $y'=\dfrac{3x^8-4x^3+4}{\sqrt[3]{(x^9-3x^4+12x)^2}}$;

212(г) $y'=\dfrac{2x^5-2x+2}{\sqrt[3]{(x^6-3x^2+6x)^2}}$; **212(г)** $y'=\dfrac{2x^7-3x^3+3}{\sqrt[4]{(x^8-3x^4+12x-1)^2}}$;

213(а) $y'=(2x^2-6x-2)e^{2x+7}$; **213(б)** $y'=(2x^2-10x+1)e^{x^2}$;

213(в) $y'=\dfrac{\ln(2x+1)}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2\sqrt{x}}{2x+1}$; **213(г)** $y'=(3x^4-2x^3-6x^2+12)e^{3x-1}$;

213(д) $y'=\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}$; **214(а)** $y'=\dfrac{\cos x}{2x+4}-$ $-\dfrac{2\sin x}{(2x+4)^2}$;

214(б) $y'=2x\cos 2x-(2x^2+8)\sin 2x$;

214(в) $y'=(6x^2-5)\ln(2x+5)+\dfrac{4x^3-10x}{2x+5}$;

214(г) $y'=\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$; **214(г)** $y'=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$; **215(а)** $y'=2x\cos x^2$;

215(б) $y'=\dfrac{1}{2x+\sqrt{x}}$; **215(в)** $y'=\operatorname{ctg} x$; **215(г)** $y'=-5\sin x\cos^4 x$;

216(а) $y=2x-5$; **216(б)** $y=x-2$; **217(а)** 2; 8; **217(б)** –1; 7;

218 $c=-2$; **219** 60°; **220** $v=12$; $a=40$; **221** $v=27$; $a=2$;

222(а) $y\uparrow$, если $x\in(-\infty;-1], x\in[3;+\infty)$, $y\downarrow$, если $x\in[-1;3]$;

222(б) $y\uparrow$, если $x\in[-3;0], x\in[3;+\infty)$, $y\downarrow$, если $x\in(-\infty;-3], x\in[0;3]$;

222(в) $y\uparrow$, если $x\in(-\infty;-1]$, $x\in[5;+\infty)$, $y\downarrow$, если $x\in[-1;5]$;

222(г) $y\uparrow$, если $x\in[-5;-1], x\in[0;+\infty)$, $y\downarrow$, если $x\in(-\infty;-5], x\in[-1;0]$;

223(а) $y\uparrow$, если $x\in[-2;2], x\in[5;+\infty)$, $y\downarrow$, если $x\in(-\infty;-2], x\in[2;5]$; **223(б)** $y\uparrow$, если $x\in(-\infty;-4], x\in[0;4]$, $y\downarrow$, если $x\in[-4;0], x\in[4;+\infty)$; **223(в)** $y\uparrow$, если $x\in[0;3)$, $y\downarrow$, если $x\in(-\infty;0], x\in(3;+\infty)$; **223(г)** $y\uparrow$, если $x\in[0;2]$, $y\downarrow$, если $x\in(-\infty;0], x\in[2;+\infty)$; **223(д)** $y\uparrow$, если $x\in(-\infty;-1], x\in[2;+\infty)$, $y\downarrow$, если $x\in[-1;2]$; **224(а)** $y\uparrow$, если $x\in[-2;0), x\in[2;+\infty)$, $y\downarrow$, если $x\in(-\infty;-2], x\in(0;2]$, точки min $x=-2, x=2$; **224(б)** $y\uparrow$, если $x\in(-\infty;-4], x\in[4;+\infty)$, $y\downarrow$, если $x\in[-4;0), x\in(0;4]$, точка max $x=-4$, точка min $x=4$; **224(в)** $y\uparrow$, если $x\in(-\infty;-3], x\in[3;+\infty)$, $y\downarrow$, если $x\in[-3;0), x\in(0;3]$, точка max $x=-3$, точка min $x=3$; **224(г)** $y\uparrow$, если $x\in(0;2]$, $y\downarrow$, если $x\in[2;+\infty)$, точка max min $x=2$; **224(д)** $y\uparrow$, если $x\in[2;+\infty)$, $y\downarrow$, если $x\in(0;2]$, точка min $x=2$; **224(е)** $y\uparrow$, если $x\in[e^{-1};+\infty)$, $y\downarrow$, если $x\in(0;e^{-1}]$, точка min $x=e^{-1}$; **225(а)** точка max $x=0$, точки min $x=-2, x=1$, $y_{\max}=5$; **225(б)** точка max $x=1$, точка min $x=3$, $y_{\max}=5$; **226(а)** $y_{\text{large}}=2, y_{\text{small}}=-7{,}6$; **226(б)** $y_{\text{large}}=10, y_{\text{small}}=-17$; **226(в)** $y_{\text{large}}=4, y_{\text{small}}=3$; **226(г)** $y_{\text{large}}=0{,}5\pi, y_{\text{small}}=-1$; **227** $y_{\text{large}}=7$; **228** $v_{\text{large}}=9{,}5$; **229** 6×6×3; **230** $r=0{,}5R$; **231** $x=\frac{2h}{3}$; **232** $x_{\min}=-3, x_{\max}=6$, $y\uparrow$, если $x\in[-3;6]$, $y\downarrow$, если $x\in[-4;-3],[6;7]$, $k=3$, касательная параллельна OX в точках $x=-3, x=6$; **233** 273,7; **234** 260; **235** 267,9; **236** 56%, 25%; **237** $a_n=23{,}5+1{,}5n$; **238** $n=16$; **239** $S=-12$; **240** $n=9$; **241** $n=7$ (рассмотреть 2 прогрессии); **242** $h=156$; **243** $t=8$; **244** 325 **245** 14,7 **246** $S_{10}=29{,}5$, **247** $q=0{,}75$; **248** $b_1=48$; **249** $n=6$; **250** $S=36$; **251(а)** $q=\frac{2}{3}$; **251(б)** $q=-\frac{2}{3}$; **252** $b_2+b_3=-24$; **253** 3; –6; 12; –24; **254** $q=0{,}6$.

Литература

1. Болтянский И. Г. Лекции и задачи по элементарной математике / И. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1974.

2. Дорофеев Г. В. Пособие по математике для поступающих в вузы / Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. – М. : Наука, 1972.

3. Туманов С. И. Элементарная алгебра / С. И. Туманов. – М. : Просвещение, 1970.

4. Потапов М. К. Алгебра и анализ элементарных функций / М. К. Потапов, В. В. Александров, П. И. Пасиченко. – М. : Наука, 1980.

5. Шклярский Д. О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики / Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. – М. : Наука, 1976.

6. Потапов М. К. Конкурсные задачи по математике / М. К. Потапов, С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко. – М. : Наука, 1992.

7. Кутасов А. Д. Математика. Пособие для поступающих в вузы / А. Д. Кутасов, Т. С. Пиголкина, Т. Х. Яковлева. – М. : Наука, 1988.

8. Сканави М. И. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы : учеб. пособие / под ред. М. И. Сканави. – М. : Высшая школа, 1992.

9. Горгеладзе Ш. Г. Сборник конкурсных задач по математике / Ш. Г. Горгеладзе, М. М. Кухарчук, Ф. П. Яремчук. – Киев : Вища школа, 1988.

10. Избранные вопросы математики. 10 класс / Н. Я. Виленкин [и др.]. – М. : Просвещение, 1980.

11. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. – СПб. : Профессия, 2001. – 432 с.

12. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М. : Физматлит, 2006. – 336 с.

13. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразовательных организаций / С. М. Никольский [и др.]. – М. : Просвещение, 2014. – 336 с.

14. Алгебра и начала анализа. 10 класс : учеб. для общеобразовательных организаций / С. М. Никольский [и др.]. – М. : Просвещение, 2002. – 382 с.

15. Алгебра и начала анализа. 11 класс : учеб. для общеобразовательных организаций / С. М. Никольский [и др.]. – М. : Просвещение, 2002. – 448 с.

16. Гриншпон И. Э. Математика. Раздел 1 : учеб. пособие / И. Э. Гриншпон, Я. С. Гриншпон. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2007. – 219 с.

17. Гриншпон И. Э. Многочлены от одной переменной (теория и приложения) : учеб. пособие [Электронный ресурс] / И. Э. Гриншпон, С. Я. Гриншпон. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2016. – 97 с. – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/7097.

18. Гриншпон И. Э. Элементарные функции и их графики : учеб. пособие [Электронный ресурс] / И. Э. Гриншпон, Я. С. Гриншпон. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2017. – 91 с. – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/7037.

19. Математика в понятиях, определениях и терминах. Ч. 1 / О. В. Мантуров [и др.]. – М. : Просвещение, 1978. – 320 с.

20. Математика в понятиях, определениях и терминах. Ч. 2 / О. В. Мантуров [и др.]. – М. : Просвещение, 1982. – 352 с.

Учебное издание

Ирина Эдуардовна **Гриншпон**
Яков Самуилович **Гриншпон**

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА
ДЛЯ СТУДЕНТОВ
(адаптационный курс)

Учебное пособие

Подписано в печать 27.10.2020.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 9,07.
Тираж 100 экз. Заказ 250.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. (3822) 533018.