Томский государственный университет систем управления
и радиоэлектроники

Дискретная математика

Методические указания к практическим занятиям
для студентов экономических направлений

Составитель: С.И. КОЛЕСНИКОВА

Томск 2012

А Н Н О Т А Ц И Я

Цели настоящих методических указаний: 1) освоение основных понятий и определений дискретной математики; 2) приобретение практических навыков в построении модели для текстовых задач и их анализ. В четырех частях указаний приведены примеры задач и методов их решения (анализа возможного решения) на следующие темы:

1. Множества и их спецификации. Реляционная алгебра.
2. Алгебра логики, логические функции.
3. Основы комбинаторики.
4. Основные понятия теории графов.

Теоретический материал приведен *только тот и в том объеме*, который необходим для решения предлагаемых задач. Задачи контрольных заданий являются весьма простыми, они предназначены для усвоения основных начальных понятий и основ теории массового обслуживания. Предполагается, что студенты знают математику в объеме, требуемом в техническом ВУЗе.

Методические указания предназначены для студентов экономического факультета.

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
по дисциплине «Дискретная математика» и руководство по выполнению (36 часов)

Краткое содержание тем и результатов их освоения. 4
Раздел 1. Практические работы 1-8. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ИЗВЕСТНЫХ ТОЖДЕСТВ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ. ОТНОШЕНИЯ И ФУНКЦИИ. СПЕЦИАЛЬНЫЕ БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ (16ч. (из них 4ч. *Интерактивные занятия*))..6
Интерактивные занятие №1.1-1.2 (№И1) по теме: «Множества и отношения. Реляционная алгебра» (4 часа)...8
Варианты домашних Заданий к разделу 1 10
Варианты контрольных Заданий к разделу 1...11
Контрольные вопросы к разделу 1 13
Раздел 2. Практические работы 9-12. ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ. ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ. РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. СОВЕРШЕННЫЕ ДНФ И КНФ. МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ. МЕТОДИКА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ В ВИДЕ ПОЛИНОМА ЖЕГАЛКИНА (8ч. (из них 4ч. *Интерактивные занятия*)) 13
Интерактивное занятие №2.1-2.2 (№И2) по теме: «Алгебра логики. Применение логических схем для решения практических задач» (4 часа) 15
Варианты домашних Заданий к разделу 2 17
Варианты контрольных Заданий к разделу 2...18
Контрольные вопросы к разделу 2 20
Раздел 3. Практические работы 13-14. ОБЩИЕ СХЕМЫ ВЫБОРА И ПРИНЦИПЫ КОМБИНАТОРИКИ. МЕТОДЫ КОМБИНАТОРИКИ. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ (4ч. (из них 4ч. *Интерактивные занятия*)) 20
Интерактивные занятия №3.1-3.2 (№И3) по теме: «Комбинаторика. Поиск закономерности при решении практической задачи» (4 часа).......................................22
Варианты домашних Заданий к разделу 3 24
Варианты контрольных Заданий к разделу 3...24
Контрольные вопросы к разделу 3 25
Раздел 4. Практические работы 15-18. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ГРАФОВ И СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ. АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПУТЕЙ И КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ В ГРАФАХ. ПРИНЦИП ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ (8ч. (из них 6ч. *Интерактивные занятия*))..25
Интерактивные занятия №4.1-4.3 (№И4) по теме: «Графы. Динамическое программирование» (6 часов)..26
Варианты домашних Заданий к разделу 4 29
Варианты контрольных Заданий к разделу 4...30
Контрольные вопросы к разделу 4 31

Обозначения: ИДЗ - индивидуальные домашние задания
СРС - самостоятельная работа студентов
ИнЗ - интерактивное занятие

З-Эл – знания элементарные (определения, понятия, умение приводить иллюстрирующие примеры);

З-Пр – знания продуктивные (умение применить знания элементарные для решения учебных задач);

У-Эл – «умения» элементарные (уметь пользоваться готовыми частными алгоритмами для решения типовых задач), умение решать задачи по шаблону (копировать);

У-Пр – «умения» продуктивные (применять положения и известные частные алгоритмы дисциплины для решения практических задач);

В-Эл – элементарное владение методами дисциплины и уверенное осуществление (построение) основных операций для решения типовых задач;

В-Пр – продуктивно распознавать проблемы, алгоритмизировать их анализ и применять методы дисциплины для решения практических задач;

Краткое содержание тем и результатов их освоения.

Тема практических занятий	Деятельность студента. Решая задачи, студент:	Отрабатываемые компетенции/ ожидаемый уровень освоения
1. Операции над множествами. Доказательство известных тождеств. Операции над множествами. Доказательство тождеств. Решение систем уравнения. Отношения и функции Специальные бинарные отношения	• *использует* определения операций над множествами; • *выбирает* способ доказательства тождеств. • *использует* знания, полученные ранее и самостоятельно доказывает тождества. • *учиться* решать системы уравнений относительно множеств; • совместно с преподавателем *разрабатывает* методику решения таких задач. • *использует* определения, отношения и функции; • *решает* совместно с преподавателем соответствующие задачи. • *использует* практически такие понятия как «эквивалентность», «частичный порядок на А», «линейный порядок на А», «монотонное отображение».	**ОК-1**/ З-Эл, У-Эл, В-Эл **ПК-32/** З-Пр, У-Пр, В-Пр
2. Алгебра логики и методика синтеза комбинационных схем. Методика представления функции в виде полинома Жегалкина Совершенные ДНФ и КНФ. Минимизация булевых функций.	• *учится* строить таблицы истинности; • *определяет* существенные и фиктивные переменные; • *определяет* двойственные функции. • *строит* СДНФ и СКНФ, используя таблицу истинности и эквивалентные преобразования; • *учится* переходить от одних форм к другим. • *использует* карту Карно для получения сокращенной ДНФ; • *использует* таблицу Квайна для получения МДНФ. • *строит* полином Жегалкина.	**ОК-1**/ З-Эл, У-Эл, В-Эл **ПК-32/** З-Пр, У-Пр, В-Пр

3. Общие схемы выбора и принципы комбинаторики. Методы комбинаторики. Производящие функции	• *учится* различать различные типы расстановок, их отличие друг от друга; • *решает* задачи на типы расстановок; • *устанавливает* роль правил суммы и произведения для анализа этих расстановок. • *использует* полученные ранее знания для решения конкретных задач. • *учится* прменять различные методы комбинаторики: геометрический, рекуррентных соотношений и производящих функций для решения одной задачи	**ОК-1**/ З-Эл, У-Эл, В-Эл **ПК-32/** З-Пр, У-Пр, В-Пр
4. Способы задания графов. Операции над графами. Алгоритмы определения путей и кратчайших путей в графах. Принцип динамического программирования и его применение для решения практических задач.	• *формирует* графы различных типов; • *производит* над ними соответствующие операции. • *излагает* сущность основных методов поиска кратчайших путей между парами вершин графа; • *разрабатывает* алгоритм метода Дейкстры и программу, реализующую данный алгоритм. • *приводит* примеры применения программы на графе.	**ОК-1**/ З-Эл, У-Эл, В-Эл **ПК-32/** З-Пр, У-Пр, В-Пр

ХОД ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

1. Ознакомиться со справочными интернет-сведениями (СРС)
2. Ознакомиться с *необходимой литературой* (возможно, дополнительной, не входящей в обязательный список):

    1) Яблонский С.В. Введение в дискретную математику : Учебное пособие для вузов / С. В. Яблонский. - 3-е изд., стереотип. - М. : Высшая школа, 2002 -2004. - 384 с
    2) Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов : Учебник для вузов / Ф. А. Новиков. - СПб. : Питер, 2002-2004.

3. Ознакомиться с принципом решения задач аудиторных.
4. Рекомендуется решить задачи домашние (в рамках СРС).
5. Ознакомиться с планом проведения интерактивных занятий в случае их проведения, прилагающегося к каждому разделу, и принципом подготовки к нему.
6. Составить и предоставить преподавателю отчет о работе, если он входит в форму отчетности по данному разделу знаний.

***Замечание.* В методических указаниях использовался материал вышеуказанной основной и дополнительной литературы:**

1) Шевелев Ю.П. Дискретная математика: учебное пособие для вузов - СПб. : Лань, 2008. – 591с.
2) Смыслова З.А. Дискретная математика: Учебное пособие. - Томск: ТМЦДО, 2000.
3) Зюзьков В.М. Дискретная математика. - Томск: ТМЦДО, 1999.
4) Жигалова Е.Ф. Дискретная математика. - Томск: ТМЦДО, 2000.
5) Липский В. Комбинаторика для программистов. - М.: Наука, 1989.

Раздел 1. Практические работы 1-8.
МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ИЗВЕСТНЫХ ТОЖДЕСТВ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ. ОТНОШЕНИЯ И ФУНКЦИИ. СПЕЦИАЛЬНЫЕ БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

(16ч. (из них 4ч. *Интерактивные занятия*))

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Определение множества, элемента множества, подмножества, способы задания множества. Операции объединения, пересечения, разности, дополнения. Свойства операций над множествами. Диаграммы Венна.

Прямые произведения множеств. Определение прямого произведения. Примеры. Теорема о мощности множества, образованного декартовым произведением n множеств.

На конкретных примерах разобраться с конечными множествами и операциями над ними; научиться находить число всех k-элементных подмножеств множества из n элементов и число перестановок множества, состоящего из n элементов. Закрепить полученные знания по данной тематике при решении занимательных задач. Научиться использовать в своей работе компьютер как инструмент. Освоить методы дискретной математики для решения систем уравнений.

Освоить материал: Специальные бинарные отношения, свойства бинарных отношений: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, антитранзитивность. Отношение эквивалентности. Отношение порядка: понятие предпорядка на множестве А, частичного порядка, линейного порядка. Понятия наибольшего и наименьшего элемента частично упорядоченного множества.

Примеры аудиторных заданий

Задача 1.1. Доказать, что если конечное множество A содержит n элементов, то множество-степень P(A) (множество всех подмножеств A) содержит 2^n элементов.

Решение. Докажем с помощью математической индукции по числу элементов n. По базису индукции при n=0 множество A пустое и P(A)=1 и утверждение выполнено. По предположению индукции: пусть утверждение доказано для всех множеств с k элементами, докажем что оно выполнено и для множеств с k+1 элементами

Пусть $A = \{x_1, x_2,\ldots, x_k, x_{k+1}\}$ и $B = \{x_1, x_2,\ldots, x_k\}$. Множество всех подмножеств A, не содержащих элемент x_{k+1}, равно P(B). Любое подмножество A, содержащее x_{k+1}, можно получить из соответствующего подмножества B, добавив элемент x_{k+1}. Поэтому и таких подмножеств A столько же, сколько элементов P(B). Общее количество элементов в P(A) тогда равно $2^k + 2^k = 2^{k+1}$.

Задача 1.2. Доказать тождество: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (свойство дистрибутивности операций объединения и пересечения).

Решение. Чтобы доказать это тождество, надо показать, что каждый элемент первого множества является элементом второго множества, и наоборот.

1) Пусть $x \in (A \cup B) \cap C$. Следует доказать, что $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Так как x принадлежит пересечению множества $A \cup B$ с множеством C, то $x \in A\cup B$ и $x \in C$. Из того, что $x \in A \cup B$, следует, что или $x \in A$, или $x \in B$. Если $x \in A$, то $x \in A \cap C$, поскольку $x \in C$, а значит, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Если же $x \in B$, то $x \in B \cap C$, откуда $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
2) Пусть теперь $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Докажем, что $x \in (A \cup B) \cap C$. Так как x принадлежит объединению двух множеств $A \cap C$ и $B \cap C$, то $x \in A \cap C$, или $x \in B \cap C$. Если $x \in A \cap C$, то $x \in A$ и $x \in C$. Из того, что $x \in A$, следует, что $x \in A \cup B$, а так как $x \in C$, то $x \in (A \cup B) \cap C$. Если же $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Из того, что $x \in B$, следует, что $x \in A \cup B$, а так как $x \in C$, то $x \in (A \cup B) \cap C$, и тождество доказано.

Задача 1.3. Докажите, что M = {{1}, {2,5}, {3}, {4,6,7}} - разбиение множества A = {1,2,3,4,5,6,7}. Перечислите все элементы отношения эквивалентности R соответствующего разбиению M.

Решение. Каждый элемент из A принадлежит какому-то элементу из M, причем только одному, следовательно, M - разбиение A. R = {<1,1>, <2,2>, <5,5>, <2,5>, <5,2>, <3,3>, <4,4>, <6,6>, <7,7>, <4,7>, <7,4>, <4,6>, <6,4>, <6,7>, <7,6>}.

Задача 1.4. A – количество студентов; B – посещают математический кружок; C – физический; D – не посещают ни одного из кружков. Сколько студентов посещают и математический, и физический кружок? Сколько студентов посещают только математический кружок? |A|=37; |B|=20;

Решение:

$|C|=16;\ |D|=17.$ $\qquad |B\cup C|=|B|+|C|-|B\cap C|$

$|\overline{B\cup C}|=17$

$|\overline{B\cup C}|=|A|-|B\cup C|=37-17=20$ $\qquad 20=20+16-|B\cap C|$

$|B\cap C|=16$ $\qquad |B\setminus C|=|B|-|B\cap C|=20-16=4$

Ответ: 16; 4

Задача 1.5. Пусть заданы три числовых множества A={2,3,4,10}, B={1,2,10,12}, C={1,9,10}. Требуется указать элементы множества) $A\cap B\cup B\cap C=D$ б) $(A\cup C)\setminus(B\cap A)=E$

Решение. Множество D есть объединение двух множеств $A\cap B$ и $B\cap C$, что следует из порядка выполнения действий: $A\cap B=\{2,10\}$, $B\cap C=\{1,10\}$ и $D=\{1,2,10\}$

Множество E есть разность между объединением $A\cup C$ и пересечением $B\cap A$. $A\cup C=\{1,2,3,4,10,12\}$, $B\cap A=\{2,10\}$ и $E=\{1,3,4,12\}$

Задача 1.6. Какими свойствами обладает отношение $x\ R\ y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2+y$, определенное на множестве действительных чисел (рефлексивность, симметричность, транзитивность, антисимметричность)?

Решение. а) для любого x выполнено $x^2 + x = x^2 +x$ R рефлексивно;
б) если $x^2 + x = y^2 +y$, $y^2 +y = x^2 + x$, R симметрично;
в) $x^2 + x = y^2 +y$ и $y^2 + y = z^2 +z$, $x^2 + x = z^2 +z$, R транзитивно;
г) т.к. $2^2 +2 = (-3)^2 + (-3)$ и 2 не равно -3, то R - не антисимметрично.

Интерактивные занятие №1.1-1.2 (№И1) по теме: «Множества и отношения. Реляционная алгебра» (4 часа)

Цель занятия: активное воспроизведение ранее полученных знаний по разделу «Множества. Бинарные отношения» в «незнакомых» условиях (применение основных понятий темы раздела 1 для решения задачи: построение модели реляционной базы данных).

Замечание. Параллельная дисциплина ООП, логически связанная с дисциплиной «Дискретная математика»: базы данных; управление данными.

Форма текущего контроля освоения компетенций ОК-1, ПК-32, уровни З-Пр, У-Пр, В-Пр: *отчет* по решению реальной практической задачи:

Задача И1.1. (Начальный уровень) Преподаватели кафедры Прикладной математики преподают на трех факультетах: механическом, технологическом, экономическом. На технологическом факультете работает 22 преподавателя, на механическом – 23 преподавателя, на механическом и экономическом –36 преподавателей. Только на технологическом факультете работают 10 преподавателей. 2 –на трех факультетах. 5 преподавателей работают только на механическом и экономическом факультетах. Число преподавателей, работающих только на механическом и технологическом факультетах, равно числу преподавателей, работающих на экономическом и технологическом факультетах. Сколько преподавателей работает на кафедре? Сколько преподавателей работает только на одном факультете?

Задача И1.2. (Начальный уровень) В отчете об опросе 10000 покупателей было указано, что 5010 покупателям нравится шоколад, 3470 любят конфеты, и 4820 покупателей обожают леденцы. При этом в отчете также указано, что все три продукта любят 500 покупателей, шоколад и конфеты (и возможно также леденцы) – 1000 покупателей, шоколад и леденцы (и возможно также конфеты) – 840 покупателей, конфеты и леденцы (и возможно также шоколад) – 1410 покупателей. В действительности оказалось, что последнее число 1410 ошибочно. Обозначим его истинное значение через X. Найдите X, предположив, что каждому покупателю нравится хоть один из указанных продуктов.

Предположение оказалось неверным: было обнаружено, что некоторым покупателям не нравится ни один из перечисленных продуктов. Теперь однозначно найти X уже невозможно. Можно ли найти максимально возможное значение X? Минимально возможное значение X?

Задача И1.3. (Высокий уровень). Проектирование и анализ непротиворечивости реляционной базы данных с математическим обоснованием.

***Подготовка** занятия №1.* Выбор ведущего студента, ответственного за выбор и подачу необходимой информации и обсуждение с ним алгоритма занятия.

Таблица 1

№	№ задачи	Вид (совмещение нескольких видов) интерактивной работы	Трудоемкость (час.)	Отрабатываемые компетенции/ ожидаемый уровень освоения	Оценка личностных качеств	Контроль выполнения работы (участие в полемике, индивидуальные групповые задания (ИГЗ) и т.д)
1.	И1.1 И1.2	Работа в команде. Решение ситуационных задач.	2	ОК-1/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-32/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
2	И1.3	Работа в команде. Решение ситуационных задач. Исследовательский метод	2	ОК-1/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-32/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
Всего			4			

***Вступление.* С**ообщение темы и обоснование ее актуальности через вышеуказанные задачи.

Основная часть:

I. **С**ообщение в виде доклада-презентации ответственным (студентом) за проведение занятия 1, в котором излагается суть обсуждаемых положений:
   1) основные операции над отношениями, которые могут представлять интерес с точки зрения извлечения данных из реляционных таблиц: *объединение*, *пересечение*, *разность*, расширенное *декартово произведение* отношений**;**
   2) специальные операции над отношениями: *выборка*, *проекция* и *соединение*;
   3) иллюстрация *теоретико-множественных операций* над отношениями на основе введения абстрактных отношений (таблиц) с некоторыми атрибутами (полями), которую затем необходимо **с**проектировать участникам интерактивного занятия.

II. Выяснение позиций участников с зафиксированными точками зрения на решение основной задачи, решаемой на занятии: «Проектирование и анализ непротиворечивости реляционной базы данных с математической точки зрения».

Итог II-го этапа: формирование целевых групп по общности позиций каждой из групп.

III. Организация коммуникации между группами: 1) выяснение позиции-варианта решения выявленных групп и защита занятой позиции; 2) формирование нового набора вариантов решений на основании общего обсуждения; 3) выбор одного решения голосованием;

IV. Повторная защита позиций-вариантов групп после проведения расчетов с целью оценки отклонения от «истинного» решения.

Выводы: реализован самостоятельный поиск учащимися путей и вариантов решения поставленной учебной задачи (выбор одного из предложенных вариантов или нахождение собственного варианта и обоснование решения на базе коллективной интерактивной работы).
Итог занятия №И1: Оценивание уровней З-Пр, У-Пр, В-Пр освоения компетенций ОК-1, ПК-32 по результатам работы на занятиях (активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции) и своевременности сдачи отчета по решению реальной практической задачи И1.3.

ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 1

1. Даны множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{2, 4, 6, 7\}$, найдите $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$.
2. Пусть X – множество спортсменов в группе, Y – множество студентов группы. Найдите множества: $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$.
3. Что представляет собой пересечение множества всех прямоугольников с множеством всех ромбов?
4. Пусть $I = \{x_1, x_2, x_3\}$ – универсальное множество, а $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{x_2, x_3\}$, $Z = \{x_3\}$ – его подмножества. Определите перечислением множества: $X \times X$, $Z \times Z$, $X \times Y$, $Y \times X$, $X \times Y \cap Y \times X$, $X \times Y \cup Y \times X$.
5. Проиллюстрируйте графически тождества
$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$,
$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.
6. Пусть R – множество вещественных чисел, $X = \{x \in R \ / \ 0 \le x \le 1\}$, $Y = \{y \in R \ / \ 0 \le y \le 2\}$. Что представляют собой множества $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$?
7. Начертите фигуры, изображающие множества $A = \{(x, y) \in R^2 \ / \ x^2 + y^2 \le 1\}$, $B = \{(x, y) \in R^2 \ / \ x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$, где R^2 – вещественная плоскость. Какие фигуры изображают множества $A \cup B$, $A \cap B$, $R^2 \setminus A$?
8. Пусть $X = \{-1, -2, -3, 1, 2, 3, 0\}$ и Y – множество всех натуральных чисел. Каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие его квадрат. Выпишите все пары, принадлежащие этому соответствию.
9. Пусть X = {«ас», «сто», «мор», «мир»}, Y = {а, м, о, р, е}. Составьте декартово произведение $X \times Y$. Отметьте в нем пары, связанные соответствием «в слово x входит буква y».
10. Докажите, что $A = B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing$.
11. Для бинарного отношения $x\ R\ y \Leftrightarrow$ "y делится нацело на x", определенного на множестве положительных целых чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
12. Дано множество $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Элементы этого множества связаны отношением S: «число x на 2 больше числа y». Запишите множество пар, принадлежащих этому отношению.
13. Определите свойства следующих отношений:

а) «прямая x перпендикулярна прямой y» (на множестве прямых);
б) «число x больше числа y на 4» (на множестве натуральных чисел);
в) «число x кратно числу y» (на множестве натуральных чисел);
г) «x – брат y» (на множестве людей).

14. Отношение S на множестве $X = \{1, 2, 3\}$ состоит из пар: (1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 3). Является ли S отношением эквивалентности на множестве X?

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 1

I вариант

1. Пусть A={0, 1}. Перечислите элементы множеств A^3.
2. Какими свойствами обладает отношение $x\ R\ y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$, определенное на множестве действительных чисел?
3. Показать на кругах Эйлера выполнение тождества (доказать графически или аналитически):
   $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.
4. Дано множество B = {1, 3, 5, 7, 9}. Элементы этого множества связаны отношением R: «число x на 2 больше числа y». Запишите множество пар, принадлежащих этому отношению. Постройте таблицу отношения. Выясните, какими свойствами оно обладает.
5. Определите свойства следующего отношения:
   «прямая x пересекает прямую y под прямым углом» (на множестве прямых).
6. На множестве $X = \{x / x \in N, x < 12\}$ задано отношение R: «x и y имеют один и тот же остаток при делении на 5» ($x \in X$, $y \in X$). Покажите, что R – отношение эквивалентности. Запишите все классы эквивалентности, на которые разбивается множество данным отношением.
7. В классе 30 учащихся, 16 из них занимаются музыкой, 17 увлекаются теннисом, а 10 занимаются и музыкой, и теннисом. Есть ли в классе ученики, равнодушные и к музыке, и к теннису, и если есть, то сколько их?

II вариант

1. Пусть A={1, 2, 3}. Перечислите элементы множества A^2.
2. Для бинарного отношения $xRy \Leftrightarrow$ «число x больше числа y на 3» (на множестве натуральных чисел), определенного на множестве положительных целых чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность).
3. Показать на кругах Эйлера выполнение эквиваленции $A = B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing$.
4. Дано множество X = {1, 2, 3, 9, 8, 12}. Элементы этого множества связаны отношением R: «число x делится на число y нацело». Запишите множество пар, принадлежащих этому отношению.
5. Определите свойства следующего отношения:
   «x – сестра y» (на множестве людей).
6. Отношение R на множестве X = {1, 2, 3} состоит из пар: (1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 3). Является ли S отношением эквивалентности на множестве X?
7. Среди 100 деталей прошли обработку на первом станке 42 штуки, на втором - 30 штук, а на третьем - 28. Причем на первом и втором станках обработано 5 деталей, на первом и третьем - 10 деталей, на втором и третьем - 8 деталей, на всех трех станках обработано три детали. Сколько деталей обработано на первом станке и сколько деталей не обработано ни на одном из станков?

III вариант

1. Пусть A={a, b, c}. Перечислите элементы множества A^2.
2. Какие из нижеперечисленных отношений являются отношениями частичного порядка, порядка, строгого порядка?
   а) «отрезок x длиннее отрезка y»;
   б) «отрезок x короче отрезка y в 2 раза» – на множестве отрезков;

в) «x старше по возрасту, чем y»;

3. Докажите тождества: $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.
4. Для бинарного отношения $x \; y \Leftrightarrow y = |x|$, определенного на множестве вещественных чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
5. На множестве $X = \{x / x \in N, x < 12\}$ задано отношение R: «x и y имеют один и тот же остаток при делении на 5» ($x \in X$, $y \in X$). Покажите, что R – отношение эквивалентности. Запишите все классы эквивалентности, на которые разбивается множество данным отношением.
6. Отношение R на множестве $X = \{3, 4, 5\}$ состоит из пар: (3, 4), (3, 3), (4, 4), (4, 3), (5, 3), (5, 5). Является ли R отношением эквивалентности на множестве X?
7. В отделе института работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык, причем: 6 знают немецкий, 6 – английский, 7 – французский, 4 – английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – французский и английский, 1 – все три языка. Сколько всего человек работает в отделе? Сколько из них знают только английский?

IV вариант

1. Пусть A={0, 1}. Перечислите элементы множества A^2, A^3.
2. Для бинарного отношения $R = \{\langle x,y \rangle \mid x^2 + y^2 < 1\}$ найдите D_R и I_R.
3. Для бинарного отношения $xRy \Leftrightarrow$ "x перпендикулярна y", определенного на множестве всех прямых плоскости, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
4. Докажите, что если отношения R_1 и R_2 рефлексивны, то рефлексивны и отношения $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$.
5. Какие из нижеперечисленных отношений являются отношениями квазипорядка, порядка, строгого порядка?
   в) «x старше по возрасту, чем y»;
   г) «x является сестрой y»;
   д) «x живет в одном доме с y»;
6. Пусть $I = \{x_1, x_2, x_3\}$ – универсальное множество, а $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{x_2, x_3\}$, $Z = \{x_3\}$ – его подмножества. Определите перечислением множества: $X \times X$, $Z \times Z$, $X \times Y$, $Y \times X$, $X \times Y \cap Y \times X$, $X \times Y \cup Y \times X$.
7. Социологи опросили 45 учащихся девятых классов, среди которых 25 юношей. При этом выяснилось: 30 человек имеют за полугодие оценки 4 и 5, из них 16 юношей, спортом занимаются 28 учеников, среди них 18 юношей, и 17 учеников, успевающих только на хорошо и отлично, 15 юношей учатся на хорошо и отлично и занимаются спортом. Первый математик класса взглянул на результаты и заявил, что там есть ошибки. Как это ему удалось выяснить?

V вариант

1. Какие из нижеперечисленных отношений являются отношениями квазипорядка, порядка, строгого порядка?
   е) «x – друг y» – на множестве людей;
   ж) «число x не меньше числа y» – на множестве R;
   з) «окружность x лежит внутри окружности y» – на множестве окружностей плоскости.
2. Даны отображения $R \rightarrow R$: $f: x \rightarrow \sin x$ и $g: x \rightarrow x^2$. Найдите D_R и I_R.
3. Докажите тождества: $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

4. Найдите все подмножества множеств Ø, {Ø}, {1, 2}, {a, b, c, d}.
5. Для бинарного отношения x y ⇔ "x + y делится нацело на 3", определенного на множестве Z целых чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
6. Перечислите всевозможные линейные порядки на множестве {1,2,3}.
7. Из 35 учащихся класса 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 – не посещают кружки. Сколько учеников посещают математический и физический кружки одновременно, сколько – только математический?

VI вариант

1. Пусть X = {«атом», «стол», «море», «мера»}, Y = {а, м, о, р, е}. Составьте декартово произведение X × Y.
2. Пусть f: $x \rightarrow x^2$ и g: $x \rightarrow x+1$ - отображения R в R. Найдите f g и g f.
3. Существуют ли такие множества A, B и C, что
$$A \cap B \neq \varnothing,\ A \cap C = \varnothing,\ (A \cap B) \setminus C = \varnothing?$$
4. Для бинарного отношения x y ⇔ "y делится нацело на x и x<y", определенного на множестве положительных целых чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
5. Докажите, что отношение $\langle a,b\rangle \quad \langle c,d\rangle \Leftrightarrow a^2+b^2 = c^2+d^2$ есть отношение эквивалентности R R (R - множество вещественных чисел). Найдите классы эквивалентности и изобразите их на координатной плоскости.
6. Проиллюстрируйте графически тождества.
$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$,
$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.
7. На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?

Контрольные вопросы к разделу 1

1. Дать формулы для операций объединения, пересечения, разности, дополнения.
2. Иллюстрировать операции на диаграммах Венна.
3. Указать свойства операций над множествами.
4. Дать определения свойствам бинарных отношений: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, антитранзитивность.
5. Отношение эквивалентности: определить и привести пример.

Раздел 2. Практические работы 9-12.
ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ. ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ. РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. СОВЕРШЕННЫЕ ДНФ И КНФ. МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ. МЕТОДИКА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ В ВИДЕ ПОЛИНОМА ЖЕГАЛКИНА

(8ч. (из них 4ч. *Интерактивные занятия*))

Цель работы: Изучение и закрепление материала:

Алгебра логики, логические функции (или переключательные функции (ПФ) и способы их задания.). Суперпозиции и формулы. Представление логических функций различными формулами. Эквивалентные (равносильные) функции. Существенные и фиктивные переменные. Двойственные функции.

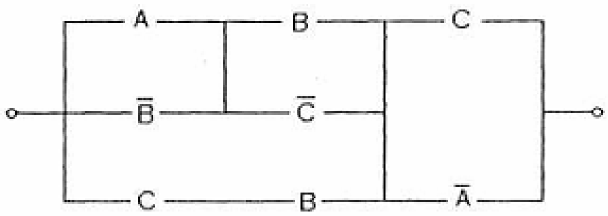
Булева алгебра функций и эквивалентные преобразования в ней. Определение булевой алгебры функций. Основные свойства (аксиомы) булевых операций: ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность, правила де Моргана и т.д. Правила подстановки и замены.

Работа элементарных булевых функций; освоить методики получения совершенной дизъюнктивной нормальной формы; методики представления функции в виде полинома Жегалкина. Научиться использовать аппарат булевых функций для наиболее компактного автоматного описания системы управления: методика синтеза комбинационной схемы с одним выходом, основанную на исходном представлении в виде совокупности таблиц истинности булевых функций.

Примеры аудиторных заданий

Задача 2.1. Дана схема. Построить структурную формулу.

Структурная формула для переключательной схемы



имеет вид

1) $(B \to A)(B \oplus C)$ 2) $(A \to B)(B \equiv C)$

3) $(B \to A)(B \equiv C)$ 4) $(A \to B)(B \oplus C)$

5) $ABC + \overline{A}(B \oplus C)$

Решение: При решении задач данного типа необходимо проводить аналогию с последовательным и параллельным соединением проводников (ключей): последовательное соединение соответствует логической операции конъюнкция, параллельное – дизъюнкция. Т.е. в данной схеме параллельно соединены: A + ¬B, B + ¬C, C + ¬A; последовательно: C·B. А также: (((A + ¬B) последовательно (B + ¬C)) параллельно CB) последовательно (C + ¬A).

Составим и упростим структурную формулу для переключательной схемы:

F = (((A + ¬B)·(B + ¬C)) + CB)·(C + ¬A) = (AB + A¬C + ¬B¬C + CB)·(C + ¬A) = ABC + CB + ¬A¬B¬C + ¬ACB = ¬A¬B¬C + CB

Упростим предложенные варианты ответов:

1. (B→A)(B ⊕ C) = (¬B + A)(B¬C + ¬BC) = AB¬C + ¬BC + A¬BC=AB¬C + ¬BC
2. (A→B)(B≡C) = (¬A + B)(BC + ¬B¬C) = ¬ABC + BC + ¬A¬B¬C = BC + ¬A¬B¬C – ответ

Задача 2.2 Три подразделения – A, B, C – торговой фирмы стремились получить по итогам года максимальную прибыль. Экономисты высказали следующие предположения:

1. A получит максимальную прибыль только тогда, когда получат максимальную прибыль B и C;
2. либо A и C получат максимальную прибыль одновременно, либо одновременно не получат;

3. для того, чтобы С получил максимальную прибыль, необходимо, чтобы и В получил максимальную прибыль.

По завершении года оказалось, что одно из трех предположений ложно. Какие из названных подразделений получили максимальную прибыль?

Алгоритм построения полинома Жегалкина.

- задана функция f;
- найти значения функции f и свести полученные результаты в таблицу
- используя полученную таблицу, построить таблицу для двойственной функции f*
- построить СДНФ для функции f
- выразить функцию f в виде полинома Жегалкина

Задача 2.3. Построить полинома Жегалкина для функции:

f=$[(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \oplus (x_4 \to x_1))]$

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1 \wedge x_2$	$x_4 \to x_1$	$x_3 \oplus (x_4 \to x_1)$	$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \oplus (x_4 \to x_1))$	f	f*
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0

СДНФ:

f=$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee$
$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$

ДНФ:

$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$

Полином Жегалкина:

$x_2 \oplus 1 \oplus x_2 x_4 \oplus x_1 x_2 x_4 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3$

Интерактивное занятие №2.1-2.2 (№И2) по теме: «Алгебра логики. Применение логических схем для решения практических задач» (4 часа)

Цель занятия: активное воспроизведение ранее полученных знаний по разделу «Алгебра логики, логические функции» в «незнакомых» условиях: применение основных понятий темы раздела 2 для решения задачи: *построение логической схемы в экономической задаче*.

Форма текущего контроля освоения компетенций ОК-1, ПК-32, уровни З-Пр, У-Пр, В-Пр: *отчет* по решению трех практических задач:

Задача И2.1. (Начальный уровень) Три подразделения – А, В, С – торговой фирмы стремились получить по итогам года максимальную прибыль. Экономисты высказали следующие предположения:

1. А получит максимальную прибыль только тогда, когда получат максимальную прибыль В и С;
2. либо А и С получат максимальную прибыль одновременно, либо одновременно не получат;
3. для того, чтобы С получил максимальную прибыль, необходимо, чтобы и В получил максимальную прибыль.

По завершении года оказалось, что одно из трех предположений ложно. Какие из названных подразделений получили максимальную прибыль?

Задача И2.2. (Высокий уровень).

Выпускник экономфака давно мечтал покорить полюс на снегоходе. В поселок на берегу Ледовитого океана он доставил большой запас бензина и мощный снегоход, который при полной заправке может проехать 50 километров. На Севере всегда имеются в неограниченном количестве пустые канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака и оставлять на хранение во льдах (канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.) На всякий случай перед путешествием, он спросил своего друга с мехмата, сможет ли он достичь полюса (предполагается, что лед достаточно прочный, но расстояние до полюса из-за движения льдов может быть любым). Математик ответил ему, что метод математической индукции показывает, что путешествие вполне возможно. Воспроизведите ход мыслей математика.

***Подготовка** занятия №И2.* Выбор ведущего студента, ответственного за выбор и подачу необходимой информации, и обсуждение с ним алгоритма занятия.

Таблица 2

№	№ задачи	Вид интерактивной работы (совмещение нескольких видов)	Трудоемкость (час.)	Отрабатываемые компетенции/ ожидаемый уровень освоения	Оценка личностных качеств	Контроль выполнения работы (участие в полемике, индивидуальные групповые задания (ИГЗ) на базе выбранного программного продукта и т.д)
1.	И2.1	Работа в команде. Решение ситуационных задач.	2	ОК-1/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-32/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
2	И2.2	Работа в команде. Решение ситуационных задач.Исследовательский метод.	2	ОК-1/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-32/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
Всего			4			

Вступление. **С**ообщение темы и обоснование ее актуальности через логические задачи в экономике.

Основная часть:

I. **С**ообщение в виде доклада-презентации ответственным (студентом) за проведение занятия 1, в котором излагается суть обсуждаемых положений:
   1) алгебра логики, логические функции;
   2) минимизация логических(переключательных) функций.;
   3) разрешимые и неразрешимые проблемы. Схемы алгоритмов. Схемы потоков данных.

II. Выяснение позиций участников с зафиксированными точками зрения на решение основной задачи И2.2, решаемой на занятии.

Итог II-го этапа: формирование целевых групп по общности позиций каждой из групп.

III. Организация коммуникации между группами: 1) выяснение позиции-варианта решения выявленных групп и защита занятой позиции; 2) формирование нового набора вариантов решений на основании общего обсуждения; 3) выбор одного решения голосованием;

IV. Повторная защита позиций-вариантов групп после проведения расчетов с целью оценки отклонения от «истинного» решения.

Выводы: реализован самостоятельный поиск учащимися путей и вариантов решения поставленной учебной задачи (выбор одного из предложенных вариантов или нахождение собственного варианта и обоснование решения на базе коллективной интерактивной работы).

Итог занятия №1: Оценивание уровней З-Пр, У-Пр, В-Пр освоения компетенций ОК-1, ПК-32 по результатам работы на занятиях (активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции) и своевременности сдачи отчета по решению реальной практической задачи.

ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 2

1. Дано высказывание А: «Существуют четные простые числа». Определите, истинно оно или ложно. Укажите среди следующих высказываний отрицание высказывания А: а) «Существуют нечетные простые числа»; б) «Неверно, что существуют четные простые числа»; в) «Любое простое число нечетно».
2. Для высказывания А: «Любые два треугольника подобны» сформулируйте отрицание и двойное отрицание. Какие из этих трех высказываний истинны?
3. Даны высказывания «Я купил велосипед» (А); «Я путешествовал по России» (В) и «Я участвовал в соревнованиях по велосипеду» (С). Сформулируйте высказывания, соответствующие формулам: $A \wedge B$, $A \wedge B \wedge C$, $A \wedge \overline{C}$, $A \wedge B$, $\overline{B} \wedge \overline{C}$.
4. Даны высказывания «Четырехугольник MNPQ – параллелограмм» (А) и «Диагонали четырехугольника MNPQ в точке пересечения делятся пополам» (В). Сформулируйте высказывания, соответствующие формулам $A \to B$, $B \to A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \to B$, $\overline{B} \to A$.
5. Составьте таблицы истинности для следующих формул: $X \to (Y \vee Z)$, $(X \to Y) \vee (X \to Z)$.
6. Покажите, что формулы $X \wedge Y \sim Y \wedge X$, $X \vee Y \sim Y \vee X$, $((X \to Y) \wedge X) \to Y$ являются тавтологиями.
7. Докажите равносильность формул: а) $X \wedge (Y \vee Z)$ и $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$; б) $X \vee (Y \wedge Z)$ и $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$; в) $X \vee Y$ и $\overline{X} \wedge \overline{Y}$; г) $X \wedge Y$ и $\overline{X} \vee \overline{Y}$; д) $X \to (Y \to Z)$ и $(X \wedge Y) \to Z$; е) $(X \to Y) \wedge (X \to Z)$ и $X \to (Y \wedge Z)$.
8. Постройте совершенные ДНФ и КНФ функций: $x_1 \oplus x_2$, $x_1 \downarrow x_2$, $x_1 \to x_2$, $x_1 \sim x_2$.

9. Запишите в совершенных ДНФ и КНФ булеву функцию f_1 (x_1, x_2, x_3), принимающую значение 1 на наборах с номерами 0, 3, 7. Определите, к каким классам функций относится эта функция.
10. Проверьте справедливость равенств: $x = \bar{x} \oplus 1$, $x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$.
11. Выразить функцию f в виде полинома Жегалкина f=[$(x_1 \oplus x_2) \vee (x_3 \wedge (x_4 \to x_1)) \wedge x_2$]

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 2

Вариант I

1. Какие предложения являются высказываниями, и какое значение они имеют?
   - **a)** *Всякий человек имеет брата.*
   - **b)** *Который час?*
   - **c)** *23 – четное число;*
   - **d)** *Собака – домашнее животное.*

2. Пусть А, В и С обозначают высказывания:

А — «*Аня получила оценку 5*»;
В — «*Вика получила оценку 5*»;
С — «*Сергей получил оценку 5*». Как будут звучать следующие высказывания:
а) $\bar{B} \cdot C \to A$; б) $\bar{A} \cdot B \leftrightarrow C$; в) $\overline{B \cdot C}\ \omega\ \bar{A}$; г) $A \to \bar{B} \cdot C$.

3. Записать высказывание на языке алгебры логики:
   - **a)** «*Если студент А не приходил на занятие, то студент В тоже не приходил, а также неверно, что если приходил студент А, то приходил хотя бы один из студентов С , Д*».
   - **b)** «*Неверно, что поедут Арбузов или Вишневский, а также верно то, что если поедет Грушков, то поедет кто-то один из двоих: Арбузов или Вишневский. Брюквин же поедет в любом случае*».

4. При каких значениях b приведенные ниже данные будут неверны?
   a) $a = 1$, $\bar{a} \wedge b = 1$;
   b) $a = 0$, $\overline{a \vee b} = 0$;

5. Определите логическое значение формулы, если a = 1, b = 0, c =1.

$$\overline{\bar{A} \cdot B} \wedge (\bar{B} \vee C) \vee \bar{A} \cdot C$$

6. Составить таблицу истинности для исходной формулы. Затем упростить формулу и проверить результат с помощью таблицы истинности.

$$((A \cdot \bar{B}) \to B) \cdot (\bar{A} \cdot B \cdot C)$$

Вариант II

1. Упростить логическое выражение:

$$F = (A \to B)\ (A\ C \vee B)\ A\ C$$

2. Решить задачу:

Истинность двух высказываний: «неверно, что если будет экскурсия в город В, то не будет экскурсии в город С» и «если будет экскурсия в город С, то не будет экскурсии в город А» означает проведение экскурсии в городах:

3. Решить задачу:

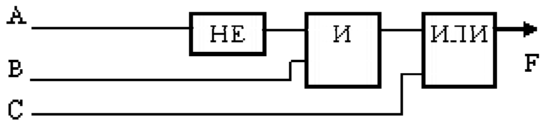
Кто из ребят A, B, C и D играет, а кто не играет в шахматы, если известно следующее:

а) если A или B играет, то C не играет;

б) если B не играет, то играют C и D;

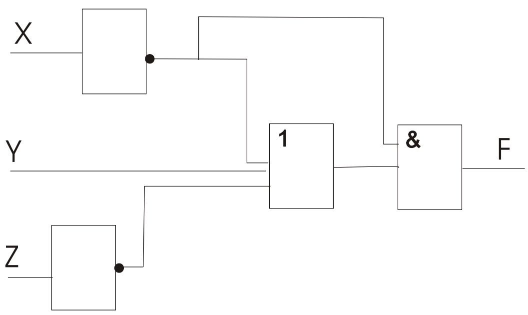
в) C играет.

4. Записать формулу для логической схемы:

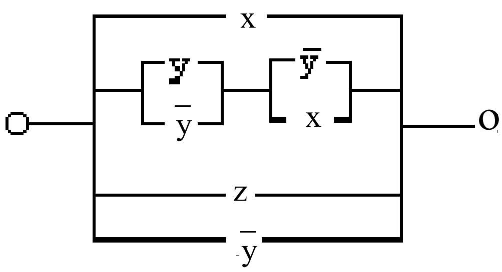


при F = 1 невозможна следующая комбинация сигналов (A, B, C):

5. Записать формулу для логической схемы:



6. Упростите переключательную схему



7. Начертите логическую схему для формулы F = A или B и не C и (B или не D).

Вариант III

1. Сделайте вывод из следующих посылок:

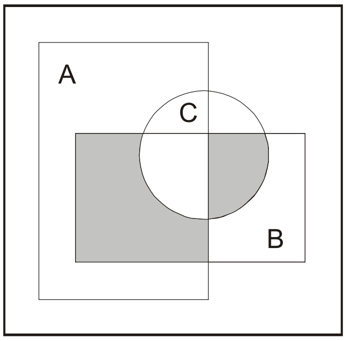
Все студенты любят копать картошку.

Каждый, кто любит копать картошку, мечтает стать фермером.

2. Сделайте вывод при помощи превращения:

Ни одна демократическая страна не одобряет терроризма.

3. Запишите логическое выражение, соответствующее заштрихованной области.



4. Решите задачу методом рассуждений
В поездке пятеро друзей — Антон, Борис, Вадим, Дима и Гриша, знакомились с попутчицей. Они предложили ей отгадать их фамилии, причём каждый из них высказал одно истинное и одно ложное утверждение:
Дима сказал: "Моя фамилия — Мышкин, а фамилия Бориса — Хомяков". Антон сказал: "Мышкин — это моя фамилия, а фамилия Вадима — Барсуков". Борис сказал: "Фамилия Вадима — Тихонов, а моя фамилия — Мышкин". Вадим сказал: "Моя фамилия — Барсуков, а фамилия Гриши — Чехов". Гриша сказал: "Да, моя фамилия Чехов, а фамилия Антона — Тихонов".
Какую фамилию носит каждый из друзей?

5. Решить задачу с помощью таблицы
Три подруги (Оля, Дина и Света) любят животных. У одной из них живет кошка, у другой – собака, а третья держит черепаху. Девочки учатся в 9, 10, и 11 классах. Известно также, что Оля учится не в 9 классе, а Дина – не в 10 классе. Девочка, которая учится в 9 классе не держит черепаху. 10-классница держит кошку, а у Дины нет собаки.
В каких классах учатся девочки, и какие животные у них живут?

Контрольные вопросы к разделу 2

1. Дать понятие переключательных функций (ПФ) и указать способы их задания.
2. Определить совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ) и совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ).
3. Иллюстрировать (графический) способ построения минимальную ДНФ.
4. Разрешимые и неразрешимые проблемы: привести примеры.

Раздел 3. Практические работы 13-14.
ОБЩИЕ СХЕМЫ ВЫБОРА И ПРИНЦИПЫ КОМБИНАТОРИКИ. МЕТОДЫ КОМБИНАТОРИКИ. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

(4ч. (из них 4ч. *Интерактивные занятия*))

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель настоящей работы – освоить основы комбинаторики. Общие правила комбинаторики. Формула включений и выключений. Правила суммы и произведения. Примеры решения задач. Круги Эйлера. Типы расстановок.
Размещения с повторениями и без них. Основные признаки расстановки типа «размещения с повторениями». Теорема о количестве таких расстановок. Основные признаки «размещения без повторений». Теорема о подсчете числа расстановок указанного типа.

Перестановки с повторениями и без них. Основные признаки перестановок без повторений. Теорема о подсчете числа расстановок указанного типа. Перестановки с повторениями. Теорема о подсчете количества таких перестановок.
Сочетания с повторениями и без них. Основные признаки сочетаний без повторений. Теорема о подсчете количества таких сочетаний. Основные признаки сочетаний с повторениями. Теорема о подсчете количества сочетаний с повторениями. Основные свойства сочетаний. Производящие функции.

Примеры аудиторных заданий. Ознакомить со следующей справочной информацией.

Основные правила комбинаторики.

Комбинаторика – это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов конечного множества в соответствии с заданными правилами. В теории вероятностей формулы комбинаторики широко используются для подсчета числа исходов опыта.

Основной принцип комбинаторики. Пусть требуется выполнить одно за другим k действий, причем первое действие можно выполнить n_1, способами, второе – n_2 способами и т.д., тогда все k действий можно выполнить следующим числом способов:

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Все приводимые ниже формулы комбинаторики выводятся как следствия из этого основного правила.

Сочетания. Пусть Ω – множество из n элементов. Произвольное (*неупорядоченное*) m–элементное подмножество множества из n элементов называется *сочетанием из n элементов по m.* Сочетаниями из трёх элементов по два являются следующие неупорядоченные подмножества множества $\{a, b, c\}$: $\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$.

Число сочетаний из n элементов по m

$$C_n^m == \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Определение 3.1. Множество называется *упорядоченным,* если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n (n – число элементов множества) так, что различным элементам соответствуют различные числа.

Перестановки. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов (т. е. могут быть получены из того же самого множества), называются *перестановками* этого множества. Например, перестановками множества $\{a, b, c\}$ являются упорядоченные множества (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Число перестановок из n элементов

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)\ n = n!$$

Размещения. *Упорядоченное* m–элементное подмножество множества из n элементов называется размещением из n элементов по m. Например, размещениями из трёх элементов по два являются следующие упорядоченные подмножества множества (a, b, c): (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b).

Число размещений из n элементов по m

$$A_n^m == \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример 3.1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набран правильный номер.

Решение. Воспользуемся классическим определением вероятности. Общее число исходов испытания (выбор в определенном порядке двух цифр из десяти) равно числу вариантов извлечения двух элементов из десяти с учетом порядка следования их, т.е. числу размещений из десяти элементов по два:

$$n == A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} = 9\cdot10 = 90.$$

Благоприятный исход испытания только один, m=1. Следовательно, искомая вероятность равна p=1|90.

Пример 3.2. В партии из десяти деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу изделий 4 стандартных.

Решение. Общее число исходов испытания равно числу вариантов извлечения шести деталей из десяти без учета порядка извлечения, т.е. равно числу сочетаний из десяти элементов по шесть:

$$n == C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!} = \frac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 7\cdot3\cdot10 = 210.$$

Число благоприятных исходов согласно основному правилу комбинаторики равно произведению числа вариантов извлечения четырех деталей из семи стандартных на число вариантов извлечения двух деталей из трех нестандартных:

$$m = C_7^4\cdot C_3^2 = \frac{7!}{4!\ \cdot\ 3!}\cdot\frac{3!}{2!\ \cdot\ 1!} = \frac{5\cdot6\cdot7}{2} = 105.$$

Искомая вероятность равна p= 105/210= 1/2.

Задача 3.1. Сколько существует двузначных чисел?

Задача 3.2. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, немецкого, французского, испанского - на любой другой из этих пяти языков?

Задача 3.3. В соревнованиях на первенство университета по волейболу участвуют 8 команд. Насколько более продолжительным будет турнир, организованный по круговой системе, чем по олимпийской?

В классической комбинаторике используются три основных метода: геометрический, рекуррентных соотношений и производящих функций.

Метод производящих функций является одним из наиболее развитых комбинаторных методов. Главные его идеи были впервые высказаны в конце XVIII века в работах Лапласа по теории вероятностей. Пояснить их на следующем примере.

Задача 3.4. Используя биномиальный ряд Ньютона, получить некоторые свойства для сочетаний.

Задача 3.5. Используя метод рекуррентных соотношений, получить формулу для числа перестановок элементов без повторений.

Задача 3.6. (числа Фибоначчи, 1202 год). Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?

Интерактивные занятия №3.1-3.2 (№И3) по теме: «Комбинаторика. Поиск закономерности при решении практической задачи» (4 часа)

Цель занятия: активное воспроизведение ранее полученных знаний в «незнакомых» условиях (применение знакомой модели для решения незнакомых задач).

Форма текущего контроля освоения компетенций ОК-1, ПК-32, уровни З-Пр, У-Пр, В-Пр: *отчет* по решению двух реальных практических задач (по выбору):

Задача ИЗ.1. Использование чисел Фибоначчи в моделировании тренда временного ряда экономических показателей.

Задача ИЗ.2. На выборах мера города X было зарегистрировано 2 кандидата. После обработки n% бюллетеней для голосования избирательная комиссия сообщила жителям, что кандидат A набрал 62% голосов, а кандидат B – 38% голосов. При каком минимальном целом n эти предварительные результаты выборов гарантируют победу кандидату A, если недействительных бюллетеней не будет? Мер избирается простым большинством.

***Подготовка** занятия №ИЗ.* Выбор ведущего студента, ответственного за выбор и подачу необходимой информации, и обсуждение с ним алгоритма занятия.

Таблица 3

№	№ задачи	Вид интерактивной работы (совмещение нескольких видов)	Трудоемкость (час.)	Отрабатываемые компетенции/ ожидаемый уровень освоения	Оценка личностных качеств	Контроль выполнения работы (участие в полемике, индивидуальные групповые задания (ИГЗ) на базе выбранного программного продукта и т.д)
1.	ИЗ.1	Работа в команде. Решение ситуационных задач.Исследовательский метод. Поисковый метод.	3	ОК-1/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-32/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
2	ИЗ.2	Работа в команде. Решение ситуационных задач.	0.5	ОК-1/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-32/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
3	ИЗ.3	Работа в команде. Решение ситуационных задач.	0.5	ОК-1/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-32/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
Всего			4			

Вступление. Сообщение темы (далее, на примере задачи 1) и обоснование ее актуальности через задачи анализа тренда.

Основная часть:

I. Сообщение в виде доклада-презентации ответственным (студентом) за проведение занятия 1, в котором излагается суть обсуждаемого явления:

1) связь последовательности Фибоначчи и «золотого сечения»;
2) пропорции при построении египетских пирамид;
3) закономерность и порядок в расстояниях между планетами солнечной системы;
4) тенденцию природы к спиральности, управляемой последовательностью Фибоначчи.

II. Выяснение позиций участников с зафиксированными точками зрения на решение основной задачи, решаемой на занятии: «Использование чисел Фибоначчи в моделировании тренда временного ряда экономических показателей».

Итог II-го этапа: формирование целевых групп по общности позиций каждой из групп.

III. Организация коммуникации между группами: 1) выяснение позиции-варианта решения выявленных групп и защита занятой позиции; 2) формирование нового набора вариантов решений на основании общего обсуждения; 3) выбор одного решения голосованием;

IV. Повторная защита позиций-вариантов групп после проведения расчетов с целью оценки отклонения от «истинного» решения.

Выводы: реализован самостоятельный поиск учащимися путей и вариантов решения поставленной учебной задачи (выбор одного из предложенных вариантов или нахождение собственного варианта и обоснование решения на базе коллективной интерактивной работы).

Итог занятия №И3: Оценивание уровней З-Пр, У-Пр, В-Пр освоения компетенций ОК-1, ПК-32 по результатам работы на занятиях (активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции) и своевременности сдачи отчета по решению реальной практической задачи согласно табл. 3.

ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 3

1. Доказать тождество: $C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$.

2. В классе, в котором учатся Петя и Ваня – 31 человек. Сколькими способами можно выбрать из класса футбольную команду (11 человек) так, чтобы Петя и Ваня не входили в команду одновременно?

3. Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

4. Поезду, в котором находится m пассажиров, предстоит сделать n остановок.

а) Составьте алгоритм для подсчета числа способов, которыми могут выйти пассажиры на этих остановках?

б) Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

5. План города имеет схему в виде прямоугольника 5х8. На всех улицах введено одностороннее движение: можно ехать только «вправо» или «вверх». Сколько есть разных маршрутов, ведущих из точки А в точку В? Составьте алгоритм для подсчета числа маршрутов, ведущих из точки А в точку В, если размерность соответствующей матрицы $m*n$.

6. 6 ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

7. Общество из n членов выбирает из своего состава одного представителя.

а) Сколькими способами может произойти открытое голосование, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)?

б) Решите ту же задачу, если голосование – тайное, т.е. учитывается лишь число голосов, поданных за каждого кандидата, и не учитывается, кто за кого голосовал персонально.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 3

Вариант I

1. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, немецкого, французского, испанского - на любой другой из этих пяти языков?

2. В соревнованиях на первенство университета по волейболу участвуют 8 команд. Насколько более продолжительным будет турнир, организованный по круговой системе, чем по олимпийской?

Вариант II

1. Лестница состоит из 7 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через некоторые ступеньки (можно даже через все 7). Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице? Составьте алгоритм для подсчета числа способов спуститься по этой лестнице, если ступеней n.

2. Сколько "слов" можно получить, переставляя буквы в слове МАТЕМАТИКА?

Вариант III

1. В кафе в продаже имеются 5 сортов пирожных. Сколькими способами 8 студенток могут заказать себе по одному пирожному?

2. Показать, что количество различных элементов множества A с мощностью $|A|=m$ содержит ровно 2^m элементов.

Вариант IV

1. Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?

2. Докажите свойство сочетаний: $C_{n,m} = C_{n,n-m}$

Контрольные вопросы к разделу 3

1. Указать общие правила комбинаторики.
2. Указать основные признаки расстановки типа «размещения с повторениями» и без них.
3. Указать основные признаки перестановок без повторений.
4. Указать основные признаки сочетаний без повторений. Теорема о подсчете количества таких сочетаний.
5. Производящие функции: принцип их использования.

Раздел 4. Практические работы 15-18.
ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ГРАФОВ И СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ. АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПУТЕЙ И КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ В ГРАФАХ. ПРИНЦИП ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

(8ч. (из них 6ч. *Интерактивные занятия*))

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель настоящей работы – освоить элементы теории графов. Основные определения, типы графов. Определение графа, вершины, ребра (дуги, петли, звена), отношение инцидентности, степень вершины. Основные типы графов (орграф, неорграф, униграф, мультиграф, полный граф). Маршруты, цепи, циклы. Связность. Граф типа «дерево», остов, разрез.

Планарные графы. Способы задания графов. Матрица инцидентности для ориентированного и неориентированного графа. Список ребер. Матрица смежности для ориентированного и неориентированного графа.
Определение путей и кратчайших путей в графах.

Справочные сведения. Ознакомиться с алгоритмом определения кратчайших путей в графе по лекции (см. также литературу основную).

Примеры аудиторных задач

Задача 4.1. Город Кенигсберг, располагавшийся в восточной Пруссии, был построен в месте слияния двух рек на их берегах и на двух островах. В городе было семь мостов, которые соединяли острова между собой и с береговыми частями города (см. рис.4.1). Необходимо ответить на вопрос: мог ли любой житель Кенигсберга, выйдя из дома, пройти по всем семи мостам города в точности по одному разу и вернуться домой?

Ответ на вопрос, поставленный в данной задаче, должен быть отрицательным. Эйлер дал этот ответ и нашел критерий существования маршрута, удовлетворяющего требованиям задачи.

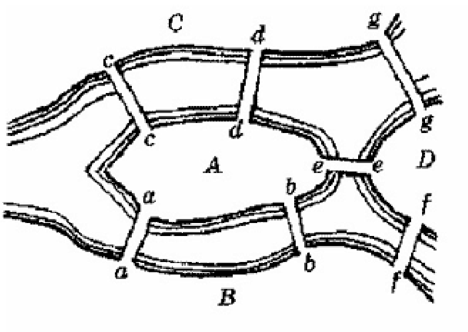


Рис. 4.1. Задача Эйлера: можно ли обойти все Кенигсбергские мосты, проходя только один раз через каждый из этих мостов?

Задача 4.2. Требуется найти маршрут, по которому житель, выйдя из дома, пройдет по каждому мосту хотя бы один раз и вернется домой, причем длина маршрута должна быть минимальной.

Задача 4.3. Представление графов в памяти ЭВМ. Составить матрицу смежности для заданных графов.

Задача 4.4. Представление графов в памяти ЭВМ. Составить матрицу инцидентности для заданных графов.

Задача 4.5. Определить число рёбер в полном графе порядка n. Нарисовать примеры полных графов порядка 2, 3, 4, 5.

Задача 4.6. Рассмотреть алгоритм построения покрывающего дерева, предложенный Дж. Краскалом. Определить число рёбер в покрывающем дереве графа порядка n.

Интерактивные занятия №4.1-4.3 (№И4) по теме: «Графы. Динамическое программирование» (6 часов)

Цель занятия: активное воспроизведение ранее полученных знаний в «незнакомых» условиях (применение знакомой модели для решения незнакомых задач); ознакомиться с максимально широким кругом понятий раздела дискретной математики и выявить основные методы теории графов, которые могут использоваться в экономике. Раскрыть взаимосвязь понятий, их внутреннюю логику. Научиться правильно формулировать экономические задачи.

Форма текущего контроля освоения компетенций ОК-1, ПК-32, уровни З-Пр, У-Пр, В-Пр: *отчет* по решению двух реальных практических задач (по выбору):

<u>Задача И4.1</u>. Оптимизация коммуникаций. На территории города N размещены заводы и магазины, в которые поставляется продукция с этих заводов. В результате разработки были определены возможные трассы для прокладки коммуникаций и оценена стоимость их создания для каждой трассы. Стоимость прокладки коммуникаций для трассы между заводом №1 и магазином удобрений составляет 15 у.е., между заводом №1 и заводом №3 – 85 у.е., между заводом №1 и хлебозаводом – 20 у.е. Между магазином №1 и заводом №2 составит 25 у.е., между магазином №1 и обувной фабрикой – 65 у.е. Стоимость прокладки коммуникаций для трассы, соединяющей хлебозавод и магазин №2 - 5 у.е., между хлебозаводом и кафе – 50 у.е., между заводом №2 и кафе - 20 у.е., между магазином №2 и продуктовым магазином - 20 у.е., между продуктовым магазином и обувной фабрикой - 25 у.е, между продуктовым магазином и кафе – 35 у.е., между обувной фабрикой и магазином №3 - 15 у.е, между обувной фабрикой и аптекой – 40 у.е., между кафе и аптекой - 10 у.е., между магазином №3 и торговым центром - 20 у.е., между аптекой и заводом №3 составит 30 у.е, между аптекой и торговым центром – 45 у.е., между заводом №3 и торговым центром, - 25 у.е. Необходимо, чтобы коммуникации связали все объекты, затраты на прокладку данных коммуникаций должны быть минимальны.

<u>Задача И4.2.</u> Кратчайший путь. Фирме, занимающейся перевозкой скоропортящихся товаров, необходимо доставить товар из Суйфэньхе в Хабаровск, причем маршрутов, по которым можно произвести доставку несколько. Расстояние между Суйфэньхе и городом 2 составляет 15 км, между Суйфэньхе и городом 3 – 20 км, между Суйфэньхе и городом 11 – 85 км. Между городом 2 и городом 4 - 25 км, между городом 2 и городом 7 - 65 км. Между городом 3 и городом 5 составляет 5 км, между городом 3 и городом 8 - 50 км. Между городом 4 и городом 8 - 20 км. Между городом 5 и городом 6 - 20 км. Между городом 6 и городом 7 - 25 км, между городом 6 и городом 8 - 35 км. Между городом 7 и городом 9 - 15 км, между городом 7 и городом 10 - 40 км. Между городом 9 и городом 12 - 20 км. Между городом 10 и городом 11 - 30 км, между городом 10 и городом 12 - 45 км. Между городом 11 и городом 12 - 25 км. Требуется найти кратчайший путь из Суйфэньхе в Хабаровск

<u>Задача И4.3.</u> Задача коммивояжера. Коммивояжер желает посетить 6 городов. Они соединены сетью дорог

Расстояние между городом 1 и городом 2 составляет 6 км, между городом 1 и городом 3 - 7 км, между городом 1 и городом 4 - 20 км, между городом 1 и городом 5 - 12 км, между городом 1 и городом 6 - 10 км. Расстояние между городом 2 и городом 3 составляет 5 км, между городом 2 и городом 4 - 7 км, между городом 2 и городом 5 - 9 км, между городом 2 и городом 6 - 16 км. Расстояние между городом 3 и городом 4 составляет 4 км, между городом 3 и городом 5 - 10 км, между городом 3 и городом 6 - 12 км. Расстояние между городом 4 и городом 5 составляет 3 км, между городом 4 и городом 6 - 15 км. Расстояние между городом 5 и городом 4 составляет 6 км, между городом 5 и городом 6 - 4 км, между городом 6 и городом 3 - 11 км, между городом 6 и городом 5 - 21 км. Коммивояжёр должен посетить все 6 городов по одному разу, вернувшись в тот, с которого начал. Требуется найти такой маршрут движения, при котором суммарное пройденное расстояние будет минимальным.

***Подготовка** занятия №И4.* Выбор ведущих студентов, ответственного за выбор и подачу необходимой информации и разработка с ними алгоритма занятия.

Таблица 4

№	№ задачи	Вид интерактивной работы (совмещение нескольких видов)	Трудоемкость (час.)	Отрабатываемые компетенции/ ожидаемый уровень освоения	Оценка личностных качеств	Контроль выполнения работы (участие в полемике, индивидуальные групповые задания (ИГЗ) на базе выбранного программного продукта и т.д)
1.	И4.1	Работа в команде. Решение ситуационных задач.Поисковый метод.	3	ОК-1/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-32/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
2	И4.2	Работа в команде. Решение ситуационных задач.	1.5	ОК-1/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-32/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
3	И4.3	Работа в команде. Решение ситуационных задач. Исследовательский метод.	1.5	ОК-1/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-32/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
Всего			6			

Вступление. **С**ообщение темы (далее, на примере задачи И4.1) и обоснование ее актуальности через логику задач оптимизации.

Основная часть:

I. **С**ообщение в виде доклада-презентации ответственными (студентомами) за проведение занятия 4, в котором излагается суть обсуждаемого явления:
   1) методы теории графов:
      a. «жадный» алгоритм,
      b. алгоритм Дейкстры,
      c. венгерский метод решения задачи коммивояжера;
   2) Озвучивание задач И4.1.-И4.3 с выяснением их особенностей и возможных подходов к решению (необязательно, вошедших в вышеназванное сообщение).

II. Выяснение позиций участников с зафиксированными точками зрения на решение основной задачи И4.1, решаемой на занятии: «Оптимизация коммуникаций».

Итог II-го этапа: формирование целевых групп по общности позиций каждой из групп.

III. Организация коммуникации между группами: 1) выяснение позиции-варианта решения выявленных групп и защита занятой позиции; 2) формирование нового набора вариантов решений на основании общего обсуждения; 3) выбор одного решения голосованием;

IV. Повторная защита позиций-вариантов групп после проведения расчетов с целью оценки отклонения от «истинного» решения.

Выводы: реализован самостоятельный поиск учащимися путей и вариантов решения поставленной учебной задачи (выбор одного из предложенных вариантов или нахождение собственного варианта и обоснование решения на базе коллективной интерактивной работы).
Итог занятия №4: Оценивание уровней З-Пр, У-Пр, В-Пр освоения компетенций ОК-1, ПК-32 по результатам работы на занятиях (активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции) и своевременности сдачи отчета по решению реальной практической задачи согласно табл. 4.

ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 4

1. Довести аудиторный пример из лекции 17 до получения постоянных пометок для всех вершин графа.
2. Подготовиться к самостоятельной проверочной работе на примере (Эл. Ресурс, ПЗ Графы)
3. «Три дома и три колодца». Три поссорившихся соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?
4. Постройте граф отношения «$x + y \leq 7$» на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Определите его свойства.
5. Найти для сети, показанной на рисунке, кратчайшие пути между любыми двумя узлами. Расстояние между узлами этой сети проставлены на рисунке возле соответствующих ребер. Построить матрицу смежности по графу

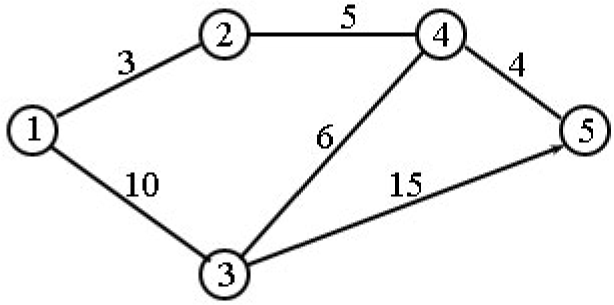


Рис.4.2. Пример сети

6. Точное определение графа L состоит в том, что задаются два множества X и U (первое из которых обязательно непустое), трехместный предикат P, указывающий, какую пару элементов первого множества соединяет тот или иной элемент второго:

$$L=(X,U,P)$$

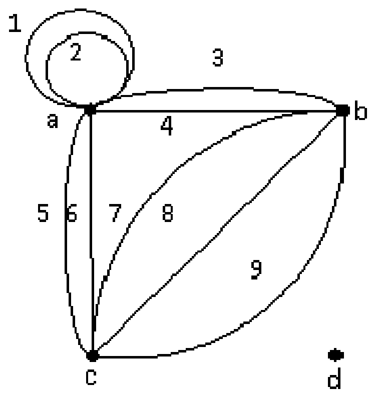


Рис.4.3. Пример графа

Элементы множества X называют ***вершинами***, элементы U – ***ребрами***, предикат P – ***инцидентором***. Высказывание P(x,u,y) читается так: “ребро u соединяет вершину x с вершиной y”. Для графа, приведенного на рисунке сформировать множества X, U, P.

7. В волейбольном турнире участвуют 19 команд. Докажите, что в любой момент найдется команда, сыгравшая четное число матчей.
8. Построить полный ориентированный граф, моделирующий все родственные отношения в семье, состоящей из отца-Ивана, матери-Марии, сына-Николая и деда Федора (отца отца-Ивана).
9. Построить ориентированный граф, моделирующий все возможные пути однократных обходов двух мостов через реку.
10. Построить полный неориентированный граф, моделирующий листание страниц книги, состоящей из четырех страниц. Определить полное число листаний такой книги.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 4

Вариант I

1. В волейбольном турнире участвуют 19 команд. Докажите, что в любой момент найдется команда, сыгравшая четное число матчей.
2. Пусть U – множество положительных целых чисел, на котором задано отношение «a есть делитель b». Постройте граф этого отношения для множества целых чисел от 1 до 20.

Вариант II

1. Имеются три листа бумаги; некоторые из них разрезаются на 3 части, несколько новых кусков - на три более мелкие части и т.д. Сколько всего получится листков, если всего разрезано было k листков?
2. «Три дома и три колодца». Три поссорившихся соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

Вариант III

1. Определите, какие из графов трех правильных многогранников (тетраэдр, куб, откаэдр) имеют эйлеровы циклы. В тех случаях, когда эйлерова цикла нет, определите, сколько требуется цепей, чтобы покрыть все ребра.
2. Найдется ли граф с пятью вершинами, степени которых все различны между собой, т.е. равны 0, 1, 2, 3, 4?

Вариант IV

1. Постройте граф отношения «$x + y \geq 7$» на множестве M = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Определите его свойства.
2. Участники областного студенческого лагеря актива, познакомившись, обменялись конвертами с адресами. Докажите, что:
   а) всего было передано четное число конвертов;
   б) число студентов, обменявшихся конвертами нечетное число раз, четное.

Вариант V

1. Девять школьников участвуют в шахматном турнире в один круг. В определенный момент выясняется, что в точности двое сыграли одинаковое число партий.

Докажите, что тогда либо в точности один школьник еще не сыграл ни одной партии, либо в точности один сыграл все партии.
2. Какие из графов правильных многогранников имеют гамильтоновы цепи и циклы?

Вариант VI

1. Рассматриваются всевозможные деревья с пятью вершинами, причем каждая из вершин имеет либо степень1, либо степень 2. Сколько таких деревьев существует?
2. Построить вероятностное дерево выпадения шести очков на игральной кости при трех ее подбрасываниях.

Вариант VII

1. Турнир проводится в один круг среди *n* команд. Сколько команд могут пройти:
   а) без единого поражения;
   б) без единой победы?
2. Извлекаем последовательно две карты с возвратом (без возврата) из колоды в 52 карты. Построить вероятностное дерево вынимания козырной карты.

Контрольные вопросы к разделу 4

1. Дать определения графа, вершины, ребра (дуги, петли, звена), отношение инцидентности, степень вершины.
2. Дать определения основным типам графов (орграф, неорграф, униграф, мультиграф, полный граф).
3. Указать способы задания матриц инцидентности для ориентированного и неориентированного графа.
4. Планарные графы. Дать примеры применения теоремы Эйлера.