

Томский государственный университет систем управления  
и радиоэлектроники

**ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**  
*Методические указания к практическим занятиям*  
Составитель: С.И. КОЛЕСНИКОВА

Томск 2012

Составитель: Колесникова С.И., каф.ЭМИС

## АННОТАЦИЯ

Цели настоящих методических указаний: 1) освоение основных понятий и определений теории массового обслуживания; 2) приобретение практических навыков в построении модели для текстовых задач и их анализ. В четырех частях указаний приведены примеры задач и методов их решения (анализа возможного решения) на следующие темы:

1. Математические основы теории массового обслуживания.
2. Классические модели систем массового обслуживания.
3. Сети систем массового обслуживания.
4. Немарковские системы массового обслуживания.

Теоретический материал приведен *только тот и в том объеме*, который необходим для решения предлагаемых задач. Задачи контрольных заданий являются весьма простыми, они предназначены для усвоения основных начальных понятий и основ теории массового обслуживания. Предполагается, что студенты знают математику в объеме, требуемом в техническом ВУЗе.

Методические указания предназначены для студентов экономического факультета.

# СОДЕРЖАНИЕ

по дисциплине «Теория массового обслуживания»  
и руководство по выполнению  
для студентов направления 230100.68 – Информатика и вычислительная техника.  
Профиль - Информационное и программное обеспечение автоматизированных систем

Краткое содержание тем и планируемых результатов их освоения .....	4
ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ Практических работ .....	5
ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ Интерактивных занятий .....	5
<b>Раздел 1. Математические основы теории массового обслуживания .....</b>	<b>6</b>
ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ АУДИТОРНЫХ ЗАДАНИЙ .....	6
Варианты домашних Заданий к разделу 1 .....	8
Варианты контрольных Заданий к разделу 1 .....	9
Контрольные вопросы к разделу 1 .....	10
<b>Раздел 2. Классические модели систем массового обслуживания .....</b>	<b>10</b>
<b>Интерактивные занятия №3, 4 по теме: Характеристики систем массового обслуживания с отказами. Характеристики систем массового обслуживания с очередями .....</b>	<b>10</b>
ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ АУДИТОРНЫХ ЗАДАНИЙ .....	10
<b>Интерактивные занятия №5, 6 по теме: Модель замкнутой системы. Модели систем с различными дисциплинами подключения каналов к обслуживанию .....</b>	<b>12</b>
ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ АУДИТОРНЫХ ЗАДАНИЙ .....	12
Варианты домашних Заданий к разделу 2 .....	14
Варианты контрольных Заданий к разделу 2 .....	15
Контрольные вопросы к разделу 2 .....	16
<b>Раздел 3. Сети систем массового обслуживания .....</b>	<b>16</b>
ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ АУДИТОРНЫХ ЗАДАНИЙ .....	16
<b>Интерактивные занятия №7, 8 по теме: Модели многофазных систем. Модели сетей массового обслуживания .....</b>	<b>16</b>
ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ АУДИТОРНЫХ ЗАДАНИЙ .....	16
Варианты домашних Заданий к разделу 3 .....	18
Варианты контрольных Заданий к разделу 3 .....	18
Контрольные вопросы к разделу 3 .....	19
<b>Раздел 4. Немарковские системы массового обслуживания .....</b>	<b>19</b>
<b>Интерактивные занятия №9, 10 по теме: Статистическое моделирование. Имитационное моделирование .....</b>	<b>19</b>
ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ АУДИТОРНЫХ ЗАДАНИЙ .....	19
Варианты домашних Заданий к разделу 4 .....	23
Варианты контрольных Заданий к разделу 4 .....	24
Контрольные вопросы к разделу 4 .....	24
Использованная литература .....	25

**Обозначения:** ИДЗ - индивидуальные домашние задания  
ИГЗ - индивидуальные групповые задания  
СРС - самостоятельная работа студентов  
ИнЗ - интерактивное занятие

З-Эл – знания элементарные (определения, понятия, умение приводить иллюстрирующие примеры);

З-Пр – знания продуктивные (умение применить знания элементарные для решения учебных задач);

У-Эл – «умения» элементарные (уметь пользоваться готовыми частными алгоритмами для решения типовых задач), умение решать задачи по шаблону (копировать);

У-Пр – «умения» продуктивные (применять положения и известные частные алгоритмы дисциплины для решения практических задач);

В-Эл – элементарное владение методами дисциплины и уверенное осуществление (построение) основных операций для решения типовых задач;

В-Пр – продуктивно распознавать проблемы, алгоритмизировать их анализ и применять методы дисциплины для решения практических задач;

С.в. - случайная величина.

### Краткое содержание тем и планируемых результатов их освоения

Тема практических занятий	Деятельность студента. Решая задачи, студент:	Отрабатываемые компетенции/ожидаемый уровень освоения
1. Математические основы теории массового обслуживания	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>знакомится</i> с принципами теории массового обслуживания;</li> <li>• <i>изучает</i> свойства случайных пуассоновских потоков;</li> <li>• <i>использует</i> определения и понятия теории массового обслуживания;</li> <li>• <i>использует</i> знания, полученные ранее в курсе теории вероятностей и математической статистики;</li> <li>• <i>строит</i> граф (отражения состояний СМО и потоков между ними) для процесса «гибели-размножения»;</li> <li>• <i>строит</i> уравнения Колмогорова по графу;</li> </ul>	<b>ОК-1, ОК-2,</b> / 3-Эл, У-Эл, В-Эл <b>ПК-5/</b> 3-Пр, У-Пр, В-Пр
2. Классические модели систем массового обслуживания	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>выбирает</i> тип СМО для текстовой задачи;</li> <li>• <i>определяет</i> основные числовые характеристики типовых СМО;</li> <li>• <i>определяет</i> факт существования стационарного режима для СМО.</li> <li>• <i>строит</i> графы типовых СМО;</li> <li>• <i>учится</i> различать различные типы СМО, их предметное отличие друг от друга;</li> <li>• <i>находит</i> распределения вероятностей состояний типовых СМО.</li> <li>• <i>учится</i> применять критерии эффективности СМО для ее оптимизации;</li> </ul>	<b>ОК-1, ОК-2,</b> / 3-Эл, У-Эл, В-Эл <b>ПК-5/</b> 3-Пр, У-Пр, В-Пр
3. Сети систем массового обслуживания	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>решает</i> совместно с преподавателем задачи, связанные с сетями СМО;</li> <li>• <i>учится</i> применять критерии эффективности СМО для ее оптимизации;</li> <li>• <i>изучает</i> модели законов распределения вероятностей, наиболее употребляемые в социально-экономических приложениях.</li> </ul>	<b>ОК-1, ОК-2,</b> / 3-Эл, У-Эл, В-Эл <b>ПК-5/</b> 3-Пр, У-Пр, В-Пр

4. Немарковские системы массового обслуживания	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>разрабатывает</i> совместно с преподавателем методику решения «немарковских» задач.</li> <li>• <i>изображает</i> модель работы заданной СМО с помощью временных диаграмм.;</li> <li>• <i>применяет</i> метод обратных функций для генерирования с.в. с показательным законом;</li> <li>• <i>применяет</i> статистические методы оценивания;</li> </ul>	<b>ОК-1, ОК-2,</b> / 3-Эл, У-Эл, В-Эл <b>ПК-5/</b> 3-Пр, У-Пр, В-Пр
--	--	---

## ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

1. Ознакомиться с нижеуказанной темой в основной и дополнительной литературе.
2. Ознакомиться со справочными интернет-сведениями (СРС).
3. Ознакомиться с принципом решения задач аудиторных.
4. Рекомендуются решить задачи домашние (в рамках СРС).
5. Ознакомиться с планом проведения интерактивных занятий в случае их проведения, прилагающегося к каждому разделу, и принципом подготовки к нему.
6. Составить и предоставить преподавателю отчет о работе, если он входит в форму отчетности по данному разделу знаний.

## ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ИНТЕРАКТИВНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Ознакомиться со справочными интернет-сведениями (подготовка к ИнЗ в указаниях по СРС).
2. Ознакомиться с указанной темой в основной и дополнительной литературе.

### **Основная литература**

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания / 5-е изд., испр. - М. : URSS, 2011. - 402 с.
2. Хинчин А.Е. Работы по математической теории массового обслуживания / ред.: Б.В. Гнеденко. - 2-е изд., стереотип. - М. : УРСС, 2004. – 235с.

### **Дополнительная литература**

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей : Учебное пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : Высшая школа, 2002. - 448 с. .
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : Учебное пособие для втузов / 2-е изд., стереотип. - М. : Высшая школа, 2000. - 480 с.
3. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности : Учебник для вузов / Г. П. Фомин. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Финансы и статистика, 2005. - 614с.
4. Колесникова С.И. Методические указания
5. Шевченко Н. Ю. Моделирование систем: Учебное пособие, МОРФ; ТУСУР; Каф. АОИ. - Томск: ТМЦДО, 2002, 2006. - 176 с
6. Мицель А.А., Грибанова Е. Б. Имитационное моделирование экономических процессов: учебное пособие. Ч.1,2. - Томск: ТМЦДО, 2005. – (90 с.)137с.

### **Электронный учебно-методический комплекс курса**

Программное обеспечение: электронный учебно-методический комплекс курса, размещенный на сервере ЭФ по адресу: student\Колесникова\ТРО

### **Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы**

[http://www.edu.ru/modules.php?op=modload&name=Web\\_Links&file=index&l\\_op=viewlink&cid=2290](http://www.edu.ru/modules.php?op=modload&name=Web_Links&file=index&l_op=viewlink&cid=2290) <http://window.edu.ru/resource/124/47124>  
<http://www.studfiles.ru/dir/cat32/subj1235/file11060/view111223.html>  
<http://www.intuit.ru/department/se/mathmodel/4/>  
<http://www.resolventa.ru/metod/student/servtheory.htm>

[http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta\\_RU/educat/systemat/gomboev/labsmo/smo\\_z1.asp.htm](http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta_RU/educat/systemat/gomboev/labsmo/smo_z1.asp.htm)

3. Ознакомиться с принципом решения задач аудиторных.
4. Рекомендуются решить задачи домашние (в рамках СРС).
5. Ознакомиться с планом проведения интерактивных занятий и принципом подготовки к нему. Обсудить с преподавателем частные вопросы, прилагающиеся к каждому ИнЗ.
6. Ознакомиться с формой текущего контроля освоения компетенций ОК-1, ОК-2 уровня 3-Эл, У-Эл, В-Эл; ПК-5 уровня 3-Пр, У-Пр, В-Пр (см. табл.1): *отчет* по решению следующих практических текстовых задач:
7. Составить и предоставить преподавателю отчет о работе по установленной форме.

## Раздел 1. Математические основы теории массового обслуживания

### ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ АУДИТОРНЫХ ЗАДАНИЙ

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1.** Дискретные марковские цепи. Простейший поток событий. Потоки Пальма и Эрланга.

#### Цель работы

Знакомство с основными понятиями математической дисциплины «Теория массового обслуживания», изучающей закономерности массовых случайных явлений (процессов).

#### Примеры.

1. Система  $S$  – технологическая система (участок станков). Станки время от времени выходят из строя и ремонтируются. Процесс, протекающий в этой системе, случаен.

2. Система  $S$  – самолет, совершающий рейс на заданной высоте по определенному маршруту. Возмущающие факторы – метеоусловия, ошибки экипажа и т.д., последствия – «болтанка», нарушение графика полетов и т.д.

**Задача 1.1.** Поток событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени. Поток количественно может быть охарактеризован числом событий  $x(t)$ , имевших место в течение определенного промежутка времени  $(0, t)$ . Графически интерпретируйте случайный поток событий как случайный процесс  $x(t)$  ( $t \geq 0$ ), в котором функция  $x(t)$  является неубывающей функцией времени, способной принимать лишь целые неотрицательные значения.

**Задача 1.2.** Доказать, что при простейшем (пуассоновском) потоке событий время между их наступлениями имеет показательный закон распределения.

*Решение.* Пусть события на временной оси  $(t_0, t)$  наступают в соответствии с законом Пуассона - простейшим потоком событий с интенсивностью  $\lambda$ .

Рассмотрим случайный интервал времени  $\tau$  между соседними событиями в этом потоке; найдем его закон распределения:  $F(t) = P\{\tau < t\}$  (вероятность того, что величина  $\tau$  будет иметь значение, меньшее, чем  $t$ ).

Событие  $\{\tau < t\}$  означает: на участок длины  $t$ , примыкающий к точке  $t_0$  попало хотя бы одно событие потока. Вычислим вероятность этого  $F(t)$  через вероятность противоположного события  $\{\tau \geq t\}$  (на участок  $t$  не попадет ни одного события потока):

$F(t) = 1 - P\{\tau \geq t\} = 1 - P_0$ . Вероятность  $P_0$  найдем по формуле:  $P_k = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ , полагая  $k = 0$ :

$$P_0 = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t},$$

откуда функция распределения величины  $\tau$  будет равна:  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ .

Плотность распределения  $f(t)$  случайной величины  $\tau$  выражение  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ .

**Задача 1.3.** Докажите основное свойство простейшего потока «отсутствия последствия», являющегося следствием свойства показательного закона: если промежуток времени  $T$ , распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время  $\tau$ , то закон распределения оставшейся части промежутка будет таким же, как и закон распределения всего промежутка  $T$ .

*Решение.* Для доказательства рассмотрим случайный промежуток времени  $T$  с функцией распределения  $F(t)=1-e^{-\lambda t}$ , и предположим, что этот промежуток уже продолжается некоторое время  $\tau$ , т.е. произошло событие  $\{T>\tau\}$ . Найдем при этом предположении условный закон  $F_\tau(t)$  распределения оставшейся части промежутка  $T_1=T-\tau$ :

$$F_\tau(t)=P\{T_1<t \mid T>\tau\}.$$

Следует показать, что условный закон распределения  $F_\tau(t)$  не зависит от  $\tau$  и равен  $F(t)$ .

По теореме умножения вероятностей вероятность произведения двух событий  $\{T>\tau\}$  и  $\{T_1<t\}$ :

$$P\{(T>\tau)(T_1<t)\}=P\{T>\tau\}P\{T_1<t \mid T>\tau\}=P\{T>\tau\}F_\tau(t),$$

откуда получаем:

$$F_\tau(t)=\frac{P\{(T>t)(T_1<t)\}}{P\{T>\tau\}}=\frac{P\{\tau<T<t+\tau\}}{P\{T>\tau\}}=\frac{F(t+\tau)-F(\tau)}{1-P\{T>\tau\}}=\frac{e^{-\lambda\tau}-e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda\tau}}=1-e^{-\lambda t}=F(t),$$

что и следовало показать.

**Задача 1.4.** Определите закон распределения  $\varphi_k(t)$  интервалов  $T_1$  для потока Эрланга  $\mathcal{E}_k$ . Определите математические ожидания и дисперсии интервалов в потоке  $\mathcal{E}_k$ .

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2.** Уравнение гибели и размножения. Уравнения Колмогорова.

### Цель работы

Знакомство с уравнениями гибели и размножения и правилом составления уравнений Колмогорова. Формализация практических задач.

**Задача 1.5.** Пусть система  $S$  имеет три состояния  $S_1, S_2$  и  $S_3$ . Их финальные вероятности равны соответственно 0,2; 0,3 и 0,5. Что это означает?

*Решение.* Система в предельном стационарном состоянии в среднем  $2/10$  времени проводит в состоянии  $S_1$ ,  $3/10$  – в состоянии  $S_2$  и  $5/10$  – в состоянии  $S_3$ .

**Задача 1.6.** Составьте систему уравнений Колмогорова для примера 1.1.

**Задача 1.7.** Составьте граф состояний СМО, если система уравнений Колмогорова имеет вид:

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02})P_0 = \mu_{10}P_1 + \mu_{20}P_2 \\ (\mu_{10} + \lambda_{13})P_1 = \lambda_{01}P_0 + \mu_{31}P_3 \\ (\mu_{20} + \lambda_{23})P_2 = \lambda_{02}P_0 + \mu_{32}P_3 \\ (\mu_{31} + \mu_{32})P_3 = \lambda_{13}P_1 + \lambda_{23}P_2 \end{cases}$$

**Задача 1.8. Задача Эрланга.** в системе имеется  $n$  – каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Поток обслуживаний имеет интенсивность  $\mu$ . Заявка, заставшая систему занятой, сразу же покидает ее. Найти: абсолютную и относительную пропускную способность СМО; вероятность того, что заявка, пришедшая в момент времени  $t$ , получит отказ; среднее число заявок, обслуживаемых одновременно (или, другими словам, среднее число занятых каналов).

**Задача 1.9.**

1. Задана матрица  $P_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$  вероятностей перехода дискретной цепи Маркова из  $i$ -го состояния в  $j$ -ое за один шаг ( $i, j=1, 2$ ). Распределение вероятностей состояний  $E_1, E_2$  в начальный момент  $t=0$  определяется вектором  $q_0 = (0,1; 0,9)$ . Найти:

- 1) матрицу  $P_2$  перехода цепи из состояния  $i$  в состояние  $j$  за два шага;
- 2) распределение вероятностей по состояниям в момент  $t=2$ ;
- 3) вероятность того, что в момент  $t=1$  состоянием цепи будет  $E_2$ ;
- 4) стационарное распределение вероятностей состояний  $E_1, E_2$ .

*Решение.* Для дискретной однородной цепи Маркова справедливо соотношение:  $P_n = P_1^n$ , где  $P_1$  – матрица переходных вероятностей за один шаг;  $P_n$  – матрица переходных вероятностей за  $n$  шагов.

1. Матрица  $P_2$  перехода за два шага:  $P_2 = P_1^2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,34 & 0,66 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix}$ .

2. Обозначим вектор распределения вероятностей состояний на  $s$ -ом шаге:

$$p(s) = (p_1(s), p_2(s), \dots, p_k(s)), \quad 0 \leq p_j(s) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^k p_i(s) = 1, \quad k=2.$$

Для дискретной однородной цепи Маркова распределение вероятностей состояний на  $(s+n)$ -ом шаге определяется по формуле:  $p(s+n) = p(s) \cdot P_n$ . Распределение вероятностей состояний системы в момент  $t=2$ , положив  $s=0$  и  $n=2$ . Тогда вектор распределения вероятностей состояний на 2-ом шаге:

$$p(2) = q \cdot P_2 = (0,1; 0,9) \cdot \begin{pmatrix} 0,34 & 0,66 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix} = (0,331; 0,669).$$

3. Найдем распределение вероятностей состояний системы в момент  $t=1$ . Положим в  $s=0$  и  $n=1$ , тогда:  $p(1) = q \cdot P_1 = (0,1; 0,9) \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = (0,31; 0,69)$ . Следовательно, вероятность состояния  $E_2$  в момент  $t=1$  равна  $p_2(1)=0,69$ .

4. Стационарное распределение вероятностей состояний не меняется со временем, или  $p(s) = p$ ;  $p(s+1) = p$ ;  $P_n = P_1$ , и  $p = p \cdot P_1$ ,  $0 \leq p_j \leq 1$ ,  $j=1, \dots, k$ ,  $\sum_{j=1}^k p_j = 1$ ,  $k=2$ .

Система линейных уравнений в координатной форме имеет вид (одно уравнение является линейной комбинацией другого):

$$\begin{cases} p_1 = 0,4p_1 + 0,3p_2, \\ p_2 = 0,6p_1 + 0,7p_2, p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Решая совместно первое уравнение системы и условие нормировки, получаем:  $p = \left( \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$ ,

то есть  $p_2 = \frac{2}{3}$ .

## ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 1

**Задача Д1.1.** Анализируется работа 2-х вариантов следующих систем с ожиданием и неограниченной очередью:

1. В 1-й один обслуживающий аппарат, работающий с интенсивностью  $\mu$ . Входящий поток имеет параметр  $\lambda$ .
2. Во 2-й два обслуживающих аппарата, работающих с интенсивностью  $\mu$ . Входящий поток имеет параметр  $2\lambda$ .

Вопрос: одинаково ли справляются с обслуживанием две данные системы?



**Задача Д1.2.** Процесс обнаружения сигналов в заданном частотном диапазоне связан с последовательным сканированием  $n$  раз этой полосы и принятием решения с вероятностью  $p$  о наличии либо с вероятностью  $q$  об отсутствии сигнала в каждом опыте. Требуется определить вероятность того, что в  $n=5$  опытах произойдет а) 5 обнаружений сигнала, если этот случайный процесс подчиняется биномиальному распределению; б) не менее пяти?

**Задача Д1.3.** Комплексная аппаратная связи включает 1000 элементов с вероятностью отказа каждого за период работы 0.003. Определить вероятность того, что число отказавших элементов за этот период будет равно не менее трем, если их распределение подчиняется закону Пуассона с параметром.

**Задача Д1.5.** Имеется технологическая система (участок), состоящая из трех одинаковых станков. В систему поступают для обработки детали в среднем через 0.5 часа. Среднее время изготовления одной детали 0.6 час. Определите значения параметров потоков поступающих и обслуженных заявок.

**Задача Д1.6.** По группе из трех объектов производится три последовательных выстрела. Найти вероятности состояний группы объектов после третьего выстрела.

## ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 1

### I вариант

Задана матрица

$$\Lambda = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

интенсивностей переходов непрерывной цепи Маркова. Составить размеченный граф состояний, соответствующий матрице  $\Lambda$ ; составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний; найти предельное распределение вероятностей.

### II вариант

Задана матрица

$$P_1 = \begin{vmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,25 & 0,75 \end{vmatrix}$$

вероятностей перехода дискретной цепи Маркова из  $i$ -го состояния в  $j$ -ое за один шаг ( $i, j=1, 2$ ). Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент  $t=0$  определяется вектором  $\vec{q} = (0,1; 0,9)$ . Найти:

- 5) матрицу  $P_2$  перехода цепи из состояния  $i$  в состояние  $j$  за два шага;
- 6) распределение вероятностей по состояниям в момент  $t=2$ ;
- 7) вероятность того, что в момент  $t=1$  состоянием цепи будет  $P_2$ ;
- 8) стационарное распределение.

### III вариант

Задана матрица

$$\Lambda = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

интенсивностей переходов непрерывной цепи Маркова. Составить размеченный граф состояний, соответствующий матрице  $\Lambda$ ; составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний; найти предельное распределение вероятностей.

### Контрольные вопросы к разделу 1

1. Сформулируйте теорему Хинчина об условиях близости потока событий к простейшему.
2. Вывести уравнение Колмогорова для процесса гибели-размножения.
3. Вывести формулы для характеристик потока Эрланга.
4. Дать определение потока Пуассона.
5. Указать связь потока Пуассона и показательного закона распределения.
6. Дать определение однородного потока и неоднородного.
7. Возможно ли по известным вероятностям состояний системы определить среднее количество заявок в СМО?
8. Сформулируйте эргодическую теорему Маркова.

### Раздел 2. Классические модели систем массового обслуживания

**Интерактивные занятия №3, 4 по теме: Характеристики систем массового обслуживания с отказами. Характеристики систем массового обслуживания с очередями**

**Цель занятия:** активное воспроизведение полученных знаний на лекциях по разделу 1 в «незнакомых» условиях: применение основных понятий ТМО для решения практических задач; построение вероятностных (графовых) моделей для текстовых задач и расчет числовых характеристик эффективности СМО с отказами с применением вычислительных средств (Excel, MatLab).

#### ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ АУДИТОРНЫХ ЗАДАНИЙ

**Задача И2.1. Пропускная способность СМО.** Система имеет один канал обслуживания, на который поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Поток обслуживаний имеет интенсивность  $\mu$ . Заявка, заставшая систему занятой, сразу же покидает ее. Найти: абсолютную и относительную пропускную способность СМО и вероятность того, что заявка, пришедшая в момент времени  $t$ , получит отказ.

**Задача И2.2. Станок.** Технологическая система состоит из одного станка. На станок поступают заявки на изготовление деталей в среднем через 0,5 часа. Среднее время изготовления одной детали равно. Если при поступлении заявки на изготовление детали станок занят, то она (деталь) направляется на другой станок. Найти абсолютную и относительную пропускную способности системы и вероятность отказа по изготовлению детали.

**Задача И2.3 Три станка.** Имеется технологическая система, состоящая из трех одинаковых станков. В систему поступают для обработки детали в среднем через 0,5 часа. Среднее время изготовления одной детали 0,6 часов. Если при поступлении заявки на

изготовление детали все станки заняты, то деталь направляется на другой участок таких же станков. Найти финальные вероятности состояний системы и характеристики (показатели эффективности) данной СМО.

**Задача И2.4** *Оптимальное число каналов.* Определить оптимальное число каналов, обеспечивающее минимум затрат на систему, при условии достижения требуемого уровня ее безотказной работы.

**Задача И2.5** *Максимум прибыли.* Определить оптимальное число каналов, обеспечивающее максимум прибыли от эксплуатации СМО в единицу времени.

#### *Ход занятий №ИЗ, 4.*

**Вступление.** Сообщение темы и обоснование ее актуальности через вышеуказанные задачи. Ведущий студент, ответственный за выбор и подачу необходимой информации, согласует алгоритм занятия.

**Основная часть:**

- I. Сообщение в виде доклада-презентации ответственными двумя студентами за проведение занятия, в котором излагается суть обсуждаемых положений:
    - 1) Выходные характеристики (характеристики эффективности) этой и других СМО; абсолютная пропускная способность, относительная пропускная способность вероятность отказа.
    - 2) Варианты постановки задач оптимизации  $n$  – канальных СМО с отказами.
  - II. Выяснение позиций участников с зафиксированными точками зрения на решение вышеизложенных задач.
- Итог II-го этапа: формирование целевых групп по общности позиций каждой из групп.
- III. Организация коммуникации между группами: 1) выяснение позиции-варианта решения выявленных групп и защита занятой позиции; 2) формирование нового набора вариантов решений на основании общего обсуждения; 3) выбор одного решения голосованием;
  - IV. Повторная защита позиций-вариантов групп после проведения расчетов с целью оценки отклонения от «истинного» решения (попарное оценивание).

**Выводы:** реализован самостоятельный поиск учащимися путей и вариантов решения поставленной учебной задачи (выбор одного из предложенных вариантов или нахождение собственного варианта и обоснование решения на базе коллективной интерактивной работы).

**Итог занятий №ИЗ, И4:** Оценивание компетенций (табл.1) по результатам работы на занятиях (активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции) и своевременности сдачи отчета по решению практических задач И2.1-И2.5.

Таблица 1

№	№ задач и	Вид (совмещение нескольких видов) интерактивной работы	Трудоемкость (час)	Отрабатываемые компетенции/ожидаемый уровень освоения	Оценка личностных качеств	Контроль выполнения работы (участие в полемике, индивидуальные групповые задания (ИГЗ) и т.д)
1	И2.1-И2.3	Работа в команде. Решение ситуационных задач.	2	ОК-1, ОК-2/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-5/	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность,

				3-Пр, У-Пр, В-Пр	ИГЗ	обоснованность защищаемой позиции.
2	И2.4-И2.5	Работа в команде. Решение ситуационных задач. Исследовательский метод	2	ОК-1, ОК-2/ 3-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-5/ 3-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
Всего			4			

### **Интерактивные занятия №5, 6 по теме: Модель замкнутой системы. Модели систем с различными дисциплинами подключения каналов к обслуживанию**

**Цель занятия:** активное воспроизведение ранее полученных знаний по разделу 2 «Классические модели систем массового обслуживания» в «незнакомых» условиях (применение основных понятий темы разделов 1, 2 для решения задач: построение вероятностных и графовых моделей для практических текстовых задач и их решение).

### **ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ АУДИТОРНЫХ ЗАДАНИЙ**

**Задача И2.6** обслуживается машинный парк, состоящий из  $N$  машин, бригадой из  $R$  механиков ( $N > R$ ), причем каждая машина может обслуживаться только одним механиком. Интенсивность  $l$  зависит от того, сколько машин в данный момент находится в эксплуатации ( $N-k$ ) и сколько машин обслуживается или стоит в очереди, ожидая обслуживания ( $k$ ). Входящий поток требований исходит из ограниченного числа эксплуатируемых машин ( $N-k$ ), которые в случайные моменты времени выходят из строя и требуют обслуживания. Общий входящий поток имеет интенсивность  $(N - k)l$ . Требование, поступившее в систему в момент, когда свободен хотя бы один канал, немедленно идет на обслуживание. Если требование застаёт все каналы занятыми обслуживанием других требований, то оно не покидает систему, а становится в очередь и ждет, пока один из каналов не станет свободным. Таким образом, в замкнутой СМО входящий поток требований формируется из выходящего.

**Задача И2.7** Пусть для обслуживания 10 персональных компьютеров (ПК) выделено два инженера одинаковой производительности. Поток отказов одного компьютера - пуассоновский с интенсивностью  $l = 0.2$ . Время обслуживания ПК подчиняется показательному закону. Среднее время обслуживания одного ПК одним инженером составляет  $A_t = 1.25$  час. Возможны следующие варианты организации обслуживания ПК: 1) оба инженера обслуживают все 10 компьютеров, так что при отказе ПК его обслуживает один из свободных инженеров, в этом случае  $R=2, N=10$ ; 2) каждый из двух инженеров обслуживает по пять закрепленных за ним ПК. В этом случае  $R=1, N=5$ . Выберите наилучший вариант организации обслуживания ПК.

1) Повторите 20 раз в цикле испытание работы СМО и найдите среднее количество поломок ПК в течение 2000 минут, оценку интенсивности поломок ПК, среднее время ремонта ПК в течение 2000 минут, оценку интенсивности ремонта ПК, среднее время ожидания в очереди. 2) Модифицируйте процедуру для случая, когда инженеры обслуживают ПК с разной интенсивностью, например, первый инженер в среднем ремонтирует ПК 75 минут, а второй - 80 минут. 3) Составьте процедуру моделирования функционирования СМО по второму варианту.

**Задача И2.8** Железнодорожная касса имеет 2 окошка, в каждом из которых продаются билеты в 2 пункта: N1 и N2. Потоки пассажиров, приобретающих билеты N1 и N2 одинаковы по интенсивности, которая равна 0,45 пассажиров/мин. Среднее время обслуживания пассажира (продажи ему билета) – 2мин.

Поступило рационализаторское предложение: для уменьшения очередей (в интересах пассажиров) сделать обе кассы специализированными: в первой продавать билеты только в N1, а во второй - только в N2. Начертить граф состояний и, считая все потоки событий простейшими, проверить разумность этого предложения.

**Задача И2.9** На вход АИС подается в среднем 335 статей/час. Первая операция по обработке входного потока информационных документов (ИД) состоит в отборе тех статей, которые должны вводиться в АИС. В отборе участвуют 6 человек (отборщиков), средняя производительность каждого отборщика 60 статей/час. Известно, что в среднем из входного потока отбирается для ввода в АИС 61,3% ИД. Все потоки событий – простейшие. Предполагая отсутствие ограничений на очередь (очередь неограниченная), определить все возможные основные характеристики эффективности данной СМО. Построить граф состояний системы. ([4], с.397)

### *Ход занятий №5, 6.*

**Вступление.** Сообщение темы и обоснование ее актуальности через вышеуказанные задачи. Ведущий студент, ответственный за выбор и подачу необходимой информации, согласует алгоритм занятия.

**Основная часть:**

- I. Сообщение в виде доклада-презентации ответственными двумя студентами за проведение занятия, в котором излагается суть обсуждаемых положений:
  - 1) Выходные характеристики (характеристики эффективности) СМО, для которых интенсивность входящего потока заявок зависит от состояния системы.
  - 2) Варианты постановки задач оптимизации *многоканальных* СМО с разными режимами обслуживания (на примере задачи о морском порте).
- II. Выяснение позиций участников с зафиксированными точками зрения на решение вышеизложенных задач.
- Итог II-го этапа: формирование целевых групп по общности позиций каждой из групп.
- III. Организация коммуникации между группами: 1) выяснение позиции-варианта решения выявленных групп и защита занятой позиции; 2) формирование нового набора вариантов решений на основании общего обсуждения; 3) выбор одного решения голосованием;
- IV. Повторная защита позиций-вариантов групп после проведения расчетов с целью оценки отклонения от «истинного» решения (парное оценивание).

**Выводы:** реализован самостоятельный поиск учащимися путей и вариантов решения поставленной учебной задачи (выбор одного из предложенных вариантов или нахождение собственного варианта и обоснование решения на базе коллективной интерактивной работы).

**Итог занятий №5, 6:** Оценивание компетенций (табл.2) по результатам работы на занятиях (активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции) и своевременности сдачи отчета по решению практических задач И2.6-И2.9.

Таблица 2

№	№ задач и	Вид (совмещение нескольких)	Трудоемк	Отрабатываемые компетенц	Оценка личностных качеств	Контроль выполнения работы (участие в полемике,

		видов) интерактивно й работы	ость (час )	ии/ ожидаемый уровень освоения		индивидуальные групповые задания (ИГЗ) и т.д)
1	И2.6	Работа в команде. Решение ситуационных задач.	1	ОК-1, ОК- 2/ 3-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-5/ 3-Пр, У- Пр, В-Пр	Качество работы; своевременнос ть сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
2	И2.7	Работа в команде. Решение ситуационных задач. Исследователь ский метод	1			
3	И2.8 И2.9	Работа в команде. Исследователь ский метод	2			
Всего			4			

## ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 2

**Задача Д2.1.** В отделении нагрева металла в цехе крупнойковки часть нагревательных печей работают в режиме копильников. Если очередной поступающий слиток застаёт все нагревательные печи занятыми, то он помещается в копильник, где обеспечивается поддержание температуры металла. Если занятыми окажутся и копильники, то слиток отправляется на склад. В последующем его нагрев потребует дополнительных затрат в размере 100\$. Поток поступления слитков простейший с параметром, равным 10 шт./сутки. Время нагрева слитка перед ковкой распределено по показательному закону с параметром, равным 2 шт./сутки. В цехе имеется всего 10 нагревательных печей, часть из которых работают в режиме копильников. Определить оптимальное число копильников, если цена нагревательной печи 100000\$, текущие затраты на обслуживание работающей печи 50\$/сутки, а стоящей - 30\$/сутки. Затраты на содержание слитков в копильнике 60\$/сутки на слиток. Годовой фонд времени работы отделения нагрева 6000 часов.

**Задача Д2.2.** Определить оптимальное число контролеров ОТК, проверяющих продукцию на конечном этапе сборочного конвейера, вероятность отказа системы (т.е. вероятность того, что изделие пройдет без контроля), коэффициент занятости аппаратов. Если подошедшее изделие застаёт всех контролеров занятыми, то оно проходит без контроля. Статистическое обследование показало, что поток изделий на конвейере - простейший с параметром, равным 0.5 шт./мин., время проверки одного изделия случайно и распределено по показательному закону с параметром, равным 0.25 шт./мин. Затраты на оснащение одного рабочего места контролера 500\$, текущие затраты на работу одного контролера ( $c_2=c_3$ ) 7500\$/год, потери у потребителя изделий от возможного брака одного изделия 50\$. Годовой фонд времени работы контролеров 6000 часов.

**Задача Д2.3.** Анализируются 2 варианта работы СМО с отказами, имеющей 4 обслуживающих прибора, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью, равной 1:

I вариант: Режим работы каналов следующий: если в момент поступления заявки есть свободные каналы, то они все подключаются к обслуживанию данной заявки. При этом предполагается, что интенсивность ее обслуживания равна  $k \cdot \mu$ , где  $\mu$  - интенсивность обслуживания одним прибором, равная 0.5,  $k$  - число каналов, одновременно обслуживающих данную заявку.

II вариант: Режим работы каналов обычный: каждый обслуживает одну заявку, если в момент поступления заявки он был свободен.

*Построить граф состояний СМО и найти:*

9) Вероятности состояний;

10) Основные характеристики СМО;

Сделать выводы относительно предпочтения каждого из вариантов.

**Задача Д2.4.** Автоматизированная система управления АСУ продажей железнодорожных билетов состоит из двух параллельно работающих ЭВМ. При выходе из строя одной ЭВМ АСУ продолжает нормально функционировать за счет работы другой ЭВМ. Поток отказов каждой ЭВМ простейший. Среднее время безотказной работы одной ЭВМ равно 10 суткам. При выходе из строя отказавшую ЭВМ начинают ремонтировать. Время ремонта ЭВМ распределено по показательному закону и в среднем составляет двое суток. В начальный момент обе ЭВМ исправны. Найти среднюю производительность АСУ, если при исправности хотя бы одной ЭВМ ее производительность равна 100%, а при отказе обеих ЭВМ продажа билетов производится вручную, обеспечивая 30% общей производительности АСУ.

## ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 2

### I вариант

1. В одноканальную систему массового обслуживания без отказов поступает стационарный пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону с параметром  $\lambda=1,5$  заявок в минуту. Средняя длительность обслуживания каждой заявки равна 0,5 мин. Найти среднее число обслуженных заявок за время 4 мин. Начертить граф и вывести уравнения для вероятности состояния СМО для нестационарного режима.

2. Имеется три станка, на которые поступают для обработки детали в среднем через 0.3 часа. Среднее время обработки детали 0.5 час. Определить стационарные характеристики данной СМО.

### II вариант

1. В одноканальную систему массового обслуживания без отказов поступает стационарный пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону с параметром  $\lambda=3$  заявки в минуту. Средняя длительность обслуживания каждой заявки равна 0,15 мин. Найти среднюю длину очереди. Начертить граф и вывести уравнения для вероятности состояния СМО для нестационарного режима.

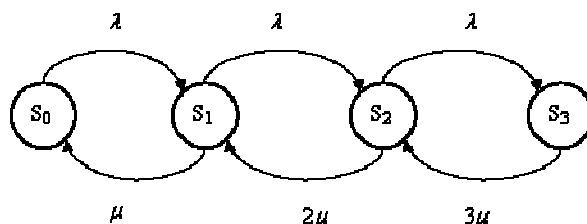
2. В 4-х канальную систему массового обслуживания (СМО) с отказами поступает стационарный пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону с параметром  $\lambda=10$  заявок в минуту. Длительность обслуживания каждой заявки равна 1 мин. Найти среднее число обслуженных заявок за время 8 мин.

### III вариант

1. В одноканальную систему массового обслуживания (СМО) без отказов поступает стационарный пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух

последовательных заявок распределено по показательному закону со средним значением 2 минуты. Средняя длительность обслуживания каждой заявки равна 2,5 мин. Найти среднее число заявок в системе. Начертить граф и вывести уравнения для вероятности состояния СМО для нестационарного режима.

2. Составить систему уравнений Колмогорова, найти характеристики для стационарного режима, сформулировав его условие.



## Контрольные вопросы к разделу 2

1. Дать определения показателям эффективности СМО с отказами, с ожиданием.
2. Объяснить характеристики СМО: абсолютная пропускная способность СМО, относительная пропускная способность СМО, загрузка системы.
3. Назовите условия существования стационарного режима в СМО с отказами, с очередью.
4. Предложите вариант функции потерь для решения задачи оптимизации СМО.

## Раздел 3. Сети систем массового обслуживания

### ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ АУДИТОРНЫХ ЗАДАНИЙ

#### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7. Модели многофазных систем.

**Цель занятия:** воспроизведение полученных знаний на лекции по разделу 3 «Сети систем массового обслуживания», применение основных понятий темы раздела 3 для решения задач: построение графовых моделей для практических текстовых задач и их решения для случая простейших потоков (входящих-выходящих).

#### Интерактивные занятия №7, 8 по теме: Модели многофазных систем. Модели сетей массового обслуживания

**Цель занятия:** продолжение занятия 7: применение основных понятий темы раздела 1 для решения задач: построение графовых моделей для практических текстовых задач и их решения для случая простейших потоков (входящих-выходящих) в сетях СМО.

### ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ АУДИТОРНЫХ ЗАДАНИЙ

**Задача ИЗ.1.** Разомкнутая показательная сеть СМО задана параметрами: 1) числом  $N$  СМО 2) числом каналов в каждой СМО:  $C_1, \dots, C_N$ ; 3) матрицей переходных вероятностей  $P = \|p_{ij}\|_{N \times N}$ ; 4) интенсивностями входных потоков:  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ ; средними временами обслуживания:  $\tau_1, \dots, \tau_N$  заявок в каждой СМО. Задание. 1) нарисовать граф сети СМО. 2) найти все характеристики данной сети для примера данных:

- 1)  $N = 3$ ;
- 2)  $C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 2$ ;



$$3) \quad P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$4) \lambda_1=1, \lambda_2=0, \lambda_3=0;$$

$$5) \tau_1=0.07, \tau_2=0.06, \tau_3=0.35;$$

**Задача И3.2.** На вход СМО подается простейший поток заявок в интенсивностью  $\lambda$ . Обслуживание состоит из двух последовательных фаз, выполняемых в СМО1 и СМО2. В СМО1 ( $n_1$  каналов) проводится обслуживание заявки, а в СМО2 ( $n_2$  каналов) контролируется качество проведенного в СМО1 обслуживания. Если в СМО2 не обнаружено недостатков в обслуживании, то заявка считается обслуженной в СМО; если в СМО2 обнаружены недостатки в обслуживании, то заявка возвращается на повторное обслуживание в СМО1. Вероятность того, что заявка, обработанная в СМО1, будет в результате контроля в СМО2 возвращена на повторное обслуживание в СМО1, равна 1-р и не зависит от того, сколько раз она была обработана в СМО1. Определить условия существования стационарного режима работы рассмотренной СМО, считая, что потоки заявок, поступающие в СМО1 и СМО2, простейшие. Начертить граф состояний.

#### *Ход занятия №И7, 8.*

**Вступление.** Сообщение темы и обоснование ее актуальности через вышеуказанные задачи. Ведущий студент, ответственный за выбор и подачу необходимой информации, согласует алгоритм занятия.

#### **Основная часть:**

- I. Сообщение в виде доклада-презентации ответственными двумя студентами за проведение занятия, в котором излагается суть обсуждаемых положений:
  - 1) Выходные характеристики (характеристики эффективности) сетей СМО; пропускная способность, пропускная способность вероятность отказа.
  - 2) Показательные сети. Условие существования решения.
  - 3) Практическое приложение показательных сетей.
- II. Выяснение позиций участников с зафиксированными точками зрения на решение вышеизложенных задач.
- Итог II-го этапа: формирование целевых групп по общности позиций каждой из групп.
- III. Организация коммуникации между группами: 1) выяснение позиции-варианта решения выявленных групп и защита занятой позиции; 2) формирование нового набора вариантов решений на основании общего обсуждения; 3) выбор одного решения голосованием;
- IV. Повторная защита позиций-вариантов групп после проведения расчетов с целью оценки отклонения от «истинного» решения (попарное оценивание).

**Выводы:** реализован самостоятельный поиск учащимися путей и вариантов решения поставленной учебной задачи (выбор одного из предложенных вариантов или нахождение собственного варианта и обоснование решения на базе коллективной интерактивной работы).

**Итог занятия №И7,8:** Оценка компетенций (табл.3) по результатам работы на занятиях (активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции) и своевременности сдачи отчета по решению практических задач И3.1-И3.2.

Таблица 2

№	№ задачи	Вид (совмещение нескольких видов) интерактивной работы	Трудоемкость (час)	Отрабатываемые компетенции/ожидаемый уровень освоения	Оценка личностных качеств	Контроль выполнения работы (участие в полемике, индивидуальные групповые задания (ИГЗ) и т.д)
1	ИЗ.1-ИЗ.2	Работа в команде. Решение ситуационных задач.	3	ОК-1, ОК-2/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-5/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
Всего			3			

### ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 3

**Задача ДЗ.1.** На вход технологической линии (СМО) подается простейший поток заявок в интенсивностью  $\lambda$ . Обслуживание состоит из операций, выполняемых сначала в СМО1 и СМО2. В СМО1 (3 канала) проводится обслуживание заявки, а в СМО2 (1 канал) контролируется качество проведенного в СМО1 обслуживания. Если в СМО2 не обнаружено недостатков в обслуживании, то заявка считается обслуженной в СМО; если в СМО2 обнаружены недостатки в обслуживании, то заявка возвращается на повторное обслуживание в СМО1. Вероятность того, что заявка, обработанная в СМО1, будет в результате контроля в СМО2 возвращена на повторное обслуживание в СМО1, равна 1-0.3. Определить условия существования стационарного режима работы рассмотренной СМО, считая, что потоки заявок, поступающие в СМО1 и СМО2, простейшие. Начертить граф состояний.

**Задача ДЗ.2.** Пусть матрица переходных вероятностей  $P=||p_{ij}||$ , сети СМО имеет вид:

$$|P_{ji}| = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & S_4 \\ P_{34} & P_{33} & P_{32} & P_{31} & S_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & S_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & S_1 \end{array} \right. \end{array}$$

Записать систему уравнений для интенсивностей потоков  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , где через  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  обозначены суммарные интенсивности потоков на входе  $i$ -й СМО, а через  $\lambda_4$  интенсивность потока запросов от СМО №4.

**Задача ДЗ.3.** Технологическая система (участок)  $S$  состоит из двух станков, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя (отказаться), после чего мгновенно начинается ремонт узла, тоже продолжающийся заранее неизвестное, случайное время. Перечислить возможные состояния системы, интерпретировать геометрической схемой – графом состояний.

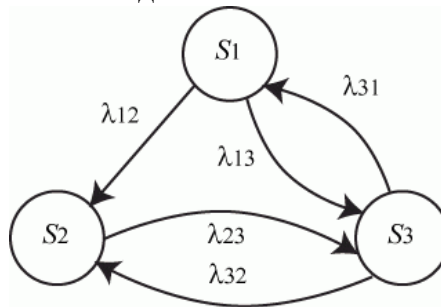
### ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 3

#### I вариант

Постройте модель дублированной системы (горячий резерв) с целью оценки вероятностей состояний системы.

## II вариант

Размеченный граф состояний имеет вид:



Составить систему уравнений для нахождения вероятностей состояний системы.

## III вариант

В организации 2000 однотипных приборов, каждый из которых может быть в одном из трех состояний: исправен, находится в ремонте в мастерской организации (СМО1), на ремонтном предприятии (СМО2). Интенсивность выхода из строя  $\lambda$ . В СМО1 прибор может быть отремонтирован и возвращен в организацию, либо отправлен на ремонтное предприятие. Средняя длительность ремонта в СМО1  $\tau_1$ , а интенсивность отправки на предприятие  $\gamma$ . Средняя длительность ремонта на предприятии  $\tau_2$ . После ремонта на предприятии прибор возвращается в организацию. Составить модель с целью определения средних численностей приборов в каждом состоянии.

## Контрольные вопросы к разделу 3

1. Дайте определения сети СМО и многофазной СМО.
2. Принцип вывода формул для характеристик потока в экспоненциальной СМО.
3. Дайте определения сети СМО открытой и закрытой.

## Раздел 4. Немарковские системы массового обслуживания

### Интерактивные занятия №9, 10 по теме: Статистическое моделирование. Имитационное моделирование

Знакомство с методом статистического моделирования, или методом статистических испытаний (Монте-Карло), или численным методом, состоящим в получении оценок вероятностных характеристик, совпадающих с решением аналитических задач.

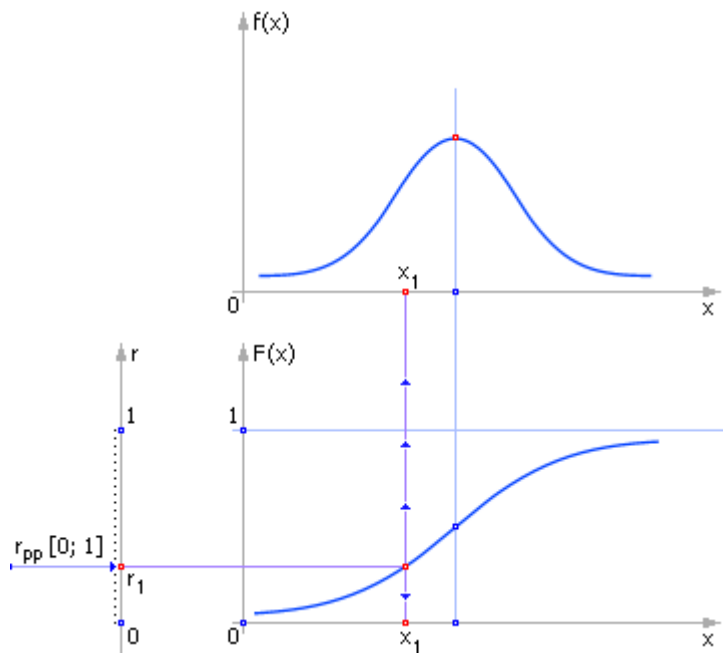
Знакомство с обзором специальных языков для имитационного моделирования (GPSS, SLAM, GASP, SIMSCRIPT и др.). Знакомство с методом Монте-Карло (<http://stratum.ac.ru/textbooks/modelir/lection21.html>).

### ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ АУДИТОРНЫХ ЗАДАНИЙ

**Задача №4.1. Метод обратной функции.** Получить с.в. с показательным законом распределения плотности вероятности.

*Решение.* Экспоненциальный закон распределения вероятности случайных событий  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ . Интегральный закон распределения плотности вероятности имеет вид:  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ .

Получим случайное число, равномерно распределенное в интервале от 0 до 1. Поскольку функция  $F$  тоже изменяется в данном интервале, то случайное событие  $x$  можно определить взятием обратной функции по графику (рис. 4.1) или аналитически:  $x = F^{-1}(r)$ .



**Рис. 4.1<sup>1</sup>.** Пример с нормальным законом;  $r$  — число, генерируемое датчиком в интервале от 0 до 1,  $x_1$  — сгенерированная в итоге случайная величина.

Так как  $r$  и  $F$  в данном методе предполагаются аналогичными и расположены в одном интервале, то, заменяя  $F$  на случайное число  $r$ , имеем:  $r = 1 - e^{-\lambda x}$ .

Выражая искомую величину  $x$  из этого выражения (то есть, обращая функцию  $\exp()$ ), получаем:  $x = -1/\lambda \cdot \ln(1 - r)$ . Так как в статическом смысле  $(1 - r)$  и  $r$  эквивалентны, то  $x = -1/\lambda \cdot \ln(r)$ .

**Задача №4.2.** В двухканальную СМО с отказами поступает стационарный пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону с параметром  $\lambda=3$  заявок в минуту. Длительность обслуживания каждой заявки равна 0,3 мин. Найти среднее число обслуженных заявок за время 5 мин.

**Алгоритм статистического моделирования работы заданной СМО**

- 1) Изобразить модель работы заданной СМО с помощью временных диаграмм. С этой целью ввести обозначения: *In*-входящий поток заявок, здесь  $t_i$ -моменты поступления заявок;  $T_i$ -интервалы времени между двумя последовательными заявками,  $t_i = t_{i-1} + T_i$ ;  $C_1, C_2$  - каналы обслуживания; *Out*-выходящий поток обслуженных заявок, *Out*-выходящий поток заявок, получивших отказ (оба канала заняты). Испытания продолжаются в течение временного интервала  $[0; t_{max}]$ ; любое превышение времени  $t_{max}$  влечет за собой потерю заявки в выходящий поток *Out*.
- 2) Для моделирования интервалов  $T_i$  применить метод обратных функций, учитывая, что случайная величина  $T_i$  распределена по показательному закону с параметром  $\lambda=3$ .
- 3) Результаты вычислений занести в таблицу.

**Задача №4.3.** Построить имитационную модель работы дублированной системы с временами безотказной работы элементов, подчиненной функции распределения Вейбулла.

*Решение.* Временные диаграммы работы заданной дублированной системы (рис.4.2) имеют вид:

<sup>1</sup> <http://stratum.ac.ru/textbooks/modelir/lection21.html>

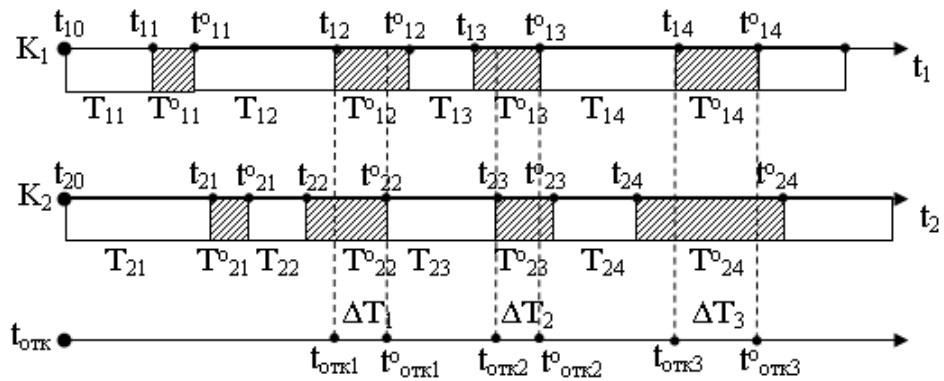


Рис.4.2 - Временные диаграммы, иллюстрирующие работу дублированной системы с нагруженным резервированием

Используются следующие обозначения:  $K_1$  и  $K_2$  – входящий поток отказов первого и второго элементов соответственно, здесь  $t_{ij}$  – моменты поступления отказов,  $t_{ij}^o$  – моменты окончания ремонта,  $T_{ij}$  – интервалы времени работы элементов,  $T_{ij}^o$  – интервалы времени ремонта элементов;  $t_{ij} = t_{i(j-1)} + T_{ij}$ ,  $t_{ij}^o = t_{i(j-1)}^o + T_{ij}^o$ , где  $i$  – номер элемента.

Моменты наступления отказов системы показаны на временной оси  $t_{отк}$  (отказ системы наступает, если оба элемента находятся на ремонте);  $t_{отк}^o$  – моменты, когда система восстановлена,  $\Delta T_j$  – интервалы, в течение которых система находится в нерабочем состоянии.

Статистические испытания продолжаются в течение временного интервала  $[0; t_{max}]$ . Любое превышение времени  $t_{max}$  влечет за собой окончание испытания, в этом случае время работы и ремонта элементов не учитывается.

Для моделирования интервалов применяется метод обратных функций: генерируется случайное число  $r_i^*$  и определяется  $T_{ij}$  из равенства:  $1 - e^{-\lambda T_{ij}} = r_i^*$ , откуда:  $e^{-\lambda T_{ij}} = 1 - r_i^*$ . Если  $r_i^* \in [0; 1]$ , то  $(1 - r_i^*) \in [0; 1]$ . Поэтому можно сразу получать случайное число реализации:  $r_i = 1 - r_i^*$ . Следовательно:  $e^{-\lambda T_{ij}} = r_i$  или  $-\lambda T_{ij} = \ln r_i$ , откуда:  $T_{ij} = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i$ .

Аналогично моделируются остальные интервалы.

### ***Алгоритм имитационного моделирования работы заданной СМО***

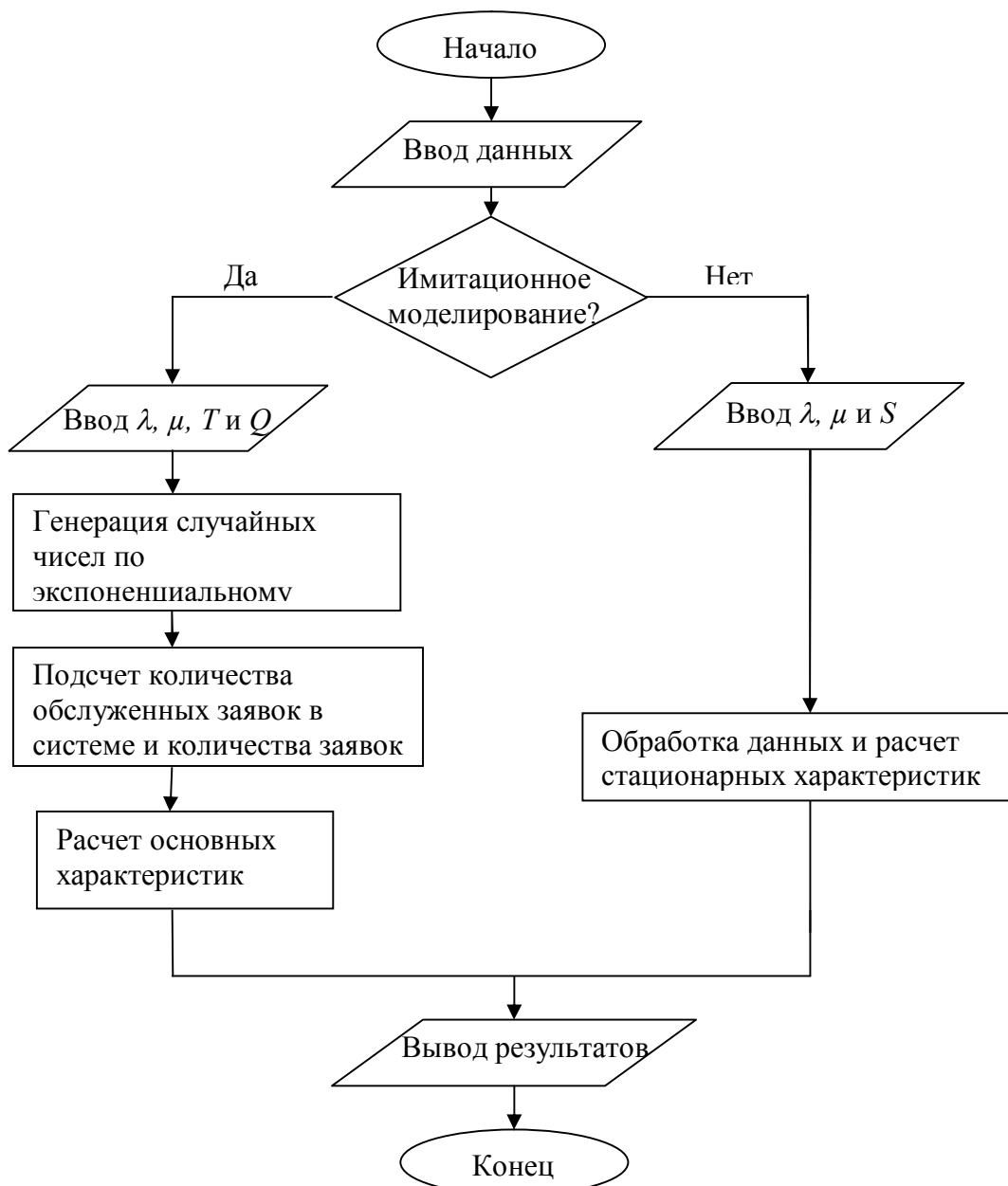


Рис.4.3 – Блок-схема программы

#### **Ход занятия №И9, 10.**

**Вступление.** Сообщение темы и обоснование ее актуальности через вышеуказанные задачи. Ведущий студент, ответственный за выбор и подачу необходимой информации, согласует алгоритм занятия.

#### **Основная часть:**

- I. Сообщение в виде доклада-презентации ответственными двумя студентами за проведение занятия, в котором излагается суть обсуждаемых положений:
  - 1) Выходные характеристики (характеристики эффективности) нестационарных СМО и возможные подходы к их расчету.
  - 2) Основные положения статистического моделирования.
  - 3) Основные этапы имитационного моделирования.
  - 4) Основные возможности пакета GPSS.
  
- II. Выяснение позиций участников с зафиксированными точками зрения на решение вышеизложенных задач.

Итог II-го этапа: формирование целевых групп по общности позиций каждой из групп.

III. Организация коммуникации между группами: 1) выяснение позиции-варианта решения выявленных групп и защита занятой позиции; 2) формирование нового набора вариантов решений на основании общего обсуждения; 3) выбор одного решения голосованием;

IV. Повторная защита позиций-вариантов групп после проведения расчетов с целью оценки отклонения от «истинного» решения (попарное оценивание).

**Выводы:** реализован самостоятельный поиск учащимися путей и вариантов решения поставленной учебной задачи (выбор одного из предложенных вариантов или нахождение собственного варианта и обоснование решения на базе коллективной интерактивной работы).

**Итог занятия №И9,10:** Оценивание компетенций (табл.4) по результатам работы на занятиях (активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции) и своевременности сдачи отчета по решению практических задач И4.1-И4.2.

Таблица 4

№	№ задачи	Вид (совмещение нескольких видов) интерактивной работы	Трудоемкость (час)	Отрабатываемые компетенции/ожидаемый уровень освоения	Оценка личностных качеств	Контроль выполнения работы (участие в полемике, индивидуальные групповые задания (ИГЗ) и т.д)
1	И4.1-И4.2	Работа в команде. Решение ситуационных задач.	4	ОК-1, ОК-2/ З-Эл, У-Эл, В-Эл ПК-5/ З-Пр, У-Пр, В-Пр	Качество работы; своевременность сдачи отчета по решению ИГЗ	ИГЗ. Критерии оценивания поведения на занятии: активность, инициативность, грамотность, обоснованность защищаемой позиции.
Всего			4			

#### ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 4

**Задача Д4.1.** В отделении нагрева металла в цехе крупнойковки часть нагревательных печей работают в режиме копильников. Если очередной поступающий слиток застает все нагревательные печи занятыми, то он помещается в копильник, где обеспечивается поддержание температуры металла. Если занятыми окажутся и копильники, то слиток отправляется на склад. В последующем его нагрев потребует дополнительных затрат в размере 100\$. Поток поступления слитков простейший с параметром, равным 10 шт./сутки. Время нагрева слитка перед ковкой распределено по показательному закону с параметром, равным 2 шт./сутки. В цехе имеется всего 10 нагревательных печей, часть из которых работают в режиме копильников. Определить оптимальное число копильников, если цена нагревательной печи 100000\$, текущие затраты на обслуживание работающей печи 50\$/сутки, а стоящей - 30\$/сутки. Затраты на содержание слитков в копильнике 60\$/сутки на слиток. Годовой фонд времени работы отделения нагрева 6000 часов.

**Задача Д4.2.** Определить оптимальное число причалов промышленного речного порта, принимающего влажные сыпучие материалы. Поток поступления барж простейший с параметром, равным 0.5 шт./сутки. Время разгрузки одной баржи случайно и распределено по показательному закону с параметром, равным 0.5 шт./сутки.

Цена оборудования одного причала 100000\$, текущие затраты на содержание одного работающего причала 400\$/сутки а стоящего - 200\$/сутки, затраты на содержание груженой баржи 1000\$/сутки. Если груз с момента прибытия ожидает более 2-х суток, то условия его разгрузки усложняются и связаны с дополнительными текущими затратами в 600\$/сутки.

**Задача Д4.3.** Определить число взлетно-посадочных полос на аэродроме, необходимое для того, чтобы вероятность ожидания посадки для самолета, прибывающего на аэродром, было меньше 0.1. Статистическим исследованием установлено, что поток прибывающих самолетов - простейший с параметром  $\lambda=27$  прибытий/час, а время приземления и занятия взлетно-посадочной полосы распределено по показательному закону с параметром  $\mu=30\text{час}^{-1}$

## ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 4

### I вариант

Задана двухканальная СМО с отказами. На входе - поток заявок с интенсивностью 5 заявок в сутки. Среднее время обслуживание одной заявки 15 часов. Каждая обслуженная заявка дает прибыль 5 тыс.руб. Стоимость содержания одного канала 300 руб/час. Решить, выгодно ли увеличить количество каналов до 6, 7, 8? При каком числе каналов работа системы оптимальна. Смоделировать работу системы в течении 10 суток.

### II вариант

Изделие проходит двухэтапную проверку. Если изделие проходит проверку на 1-м этапе, то вновь изделие поступает на 2-й этап. Поток изделий – простейший с параметром, равным 3 шт./час. Время проверки распределено по показательному закону с параметром, равным  $1.5\text{ час}^{-1}$ . Определить динамику работы системы и указать, с какого момента наступает (если наступает) стационарный режим? Найти вероятности состояний системы и характеристики (показатели эффективности) данной СМО.

### III вариант

В двухканальную систему массового обслуживания (СМО) с отказами поступает стационарный пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону с параметром  $\lambda=5$  заявок в минуту. Длительность обслуживания каждой заявки равна 0,5 мин. Найти среднее число обслуженных заявок за время 4 мин. Построить граф состояний системы. Найти вероятности состояний системы и характеристики (показатели эффективности) данной СМО. Моделировать работу СМО.

### IV вариант

Дисплейный зал имеет 5 дисплеев. Поток пользователей простейший. Среднее число пользователей, посещающих дисплейный зал за сутки, равно 140. Время обработки информации одним пользователем на одном дисплее распределено по показательному закону и составляет в среднем 40 минут. Найдите интенсивность потока заявок. Определить, существует ли стационарный режим работы зала. Моделировать работу СМО.

## Контрольные вопросы к разделу 4

1. Дайте основные положения статистического моделирования.
2. Назовите основные этапы имитационного моделирования.
3. Основные возможности пакета GPSS.



При составлении методических указаний использовался материал нижеуказанной литературы, а также материал интернет-ресурсов.

### ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания / 5-е изд., испр. - М. : URSS, 2011. - 402 с.
2. Хинчин А.Е. Работы по математической теории массового обслуживания / ред.: Б.В. Гнеденко. - 2-е изд., стереотип. - М. : УРСС, 2004. – 235с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей : Учебное пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : Высшая школа, 2002. - 448 с. .
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : Учебное пособие для втузов / 2-е изд., стереотип. - М. : Высшая школа, 2000. - 480 с.
5. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности : Учебник для вузов / Г. П. Фомин. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Финансы и статистика, 2005. - 614с.
6. Малышева И.А. Теория вероятностей и массового обслуживания. Программа, методические указания и контрольные задания для студентов-заочников II курса специальности УПП (Д). М.: ВЗИИТ, 1991.
7. [http://www.edu.ru/modules.php?op=modload&name=Web\\_Links&file=index&l\\_op=viewlink&cid=2290](http://www.edu.ru/modules.php?op=modload&name=Web_Links&file=index&l_op=viewlink&cid=2290) <http://window.edu.ru/resource/124/47124>
8. <http://www.studfiles.ru/dir/cat32/subj1235/file11060/view111223.html>
9. <http://www.intuit.ru/department/se/mathmodel/4/>
10. <http://www.resolventa.ru/metod/student/servtheory.htm>
11. [http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta\\_RU/educat/systemat/gomboev/labsmo/smo\\_z1.asp.htm](http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta_RU/educat/systemat/gomboev/labsmo/smo_z1.asp.htm)