

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Д. С. Брагин

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Часть 1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ И РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК

Методические указания для подготовки к практическим занятиям по организации самостоятельной работы для студентов направления 11.03.01 «Радиотехника»

Томск
2022

УДК 621.37
ББК 32.841
Б 87

Рецензент:

Попов Ю. Б., доцент кафедры телекоммуникаций и основ радиотехники ТУСУР, канд техн. наук,

Брагин, Дмитрий Сергеевич

Б 87 Радиотехнические цепи и сигналы. Часть 1. Математическое описание сигналов и расчет характеристик: Методические указания для подготовки к практическим занятиям по организации самостоятельной работы для студентов направления 11.03.01 «Радиотехника»/ Д. С. Брагин. – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2022. – 37 с.

Настоящее пособие предназначено для методического руководства познавательной деятельностью студентов при самостоятельной работе над курсом РТЦиС, прежде всего в части выработки умения решать типовые задачи теории сигналов. Для студентов вузов радиотехнических специальностей.

Одобрено на заседании кафедры ТОР, протокол № 1 от 31.08.2021

УДК 621.37
ББК 32.841

©Брагин Д. С., 2022
© Томск. гос. ун-т систем управления
и радиоэлектроники, 2022

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
1 Математическое описание сигналов и расчет основных характеристик	5
1.1 Физические характеристики сигналов	5
1.2 Спектральный анализ периодических сигналов	12
1.3 Спектральные характеристики непериодических сигналов	21
1.4 Теоремы о спектрах.....	31
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	37

ВВЕДЕНИЕ

Освоение курса «Радиотехнические цепи и сигналы» (РТЦиС) позволяет овладеть математическими приемами исследования аналоговых и дискретных сигналов, анализа цепей и устройств, изучения прохождения сигналов через радиотехнические цепи. Задачи достаточно сложные. Они требуют построения графиков и трудоемких математических преобразований. Решения их может затруднительным и для способных студентов. Учебная литература [1, 2] не содержит подробных методических указаний по решению типовых задач, что совершенно необходимо при самостоятельной подготовке к практическим занятиям.

Настоящее пособие предназначено для методического руководства познавательной деятельностью студентов при самостоятельной работе над курсом РТЦиС, прежде всего в части выработки умения решать типовые задачи теории сигналов. Такое пособие становится особенно актуальным в условиях сокращения числа аудиторных занятий и возрастания роли самостоятельной подготовки студентов.

Руководство состоит из тем, охватывающих основные разделы курса. По каждой теме заданы цели, имеются основные определения и формулы, приведены примеры решения типовых задач и методические указания к сложным расчетам и построениям, даны наборы задач для самостоятельной работы. Качество усвоения самостоятельно изученной темы проверяется с помощью тестового опроса с альтернативно - выборочной формой предъявления ответов. На аудиторные занятия выносятся такие задачи и темы, для проработки которых требуется квалифицированная помощь преподавателя. Возможно проведение ряда практических занятий в форме семинаров или организационно-деятельностных игр. На таких занятиях целесообразно рассмотреть и творчески переработать несколько самостоятельно изученных тем.

Изучение тем курса РТЦиС закрепляется с помощью индивидуальных расчётно-графических домашних заданий, для выполнения которых применяется программируемые микрокалькуляторы и ЭВМ.

Сочетание самостоятельной подготовки, управляемой и контролируемой преподавателем, с аудиторными занятиями позволяет увеличить эффективность практических занятий, усвоить разнообразный по содержанию материал курса РТЦиС за отведенное на это время.

1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ И РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

1.1 Физические характеристики сигналов

1.1.1 Цель занятия

Освоить понятие сигнала и его основные физические характеристики. Выработать навыки:

- 1) аналитического представления;
- 2) графического построения сигнала по его математическому описанию;
- 3) разбиения произвольного сигнала на четную и нечетную составляющую;
- 4) определения основных характеристик сигнала: длительности, мощности, энергии сигнала.

1.1.2 Основные определения и формулы

Под временным представлением сигнала понимают аналитическое и графическое представление рисунок 1.

В состав сигнала входят постоянные и переменные составляющие, четная и нечетная составляющие, т.е. сигнал общего вида представляет собой сумму постоянной S_0 и переменной S_{\sim} составляющих:

$$S(t) = S_0 + S_{\sim}. \quad (1)$$

Постоянная составляющая сигнала общего вида, заданного на интервале времени $(t_1 - t_2)$, равна

$$S_0 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S(t) dt. \quad (2)$$

Сигнал общего вида содержит четную $S_{чет}(t)$ и нечетную составляющие $S_{неч}(t)$

$$S(t) = S_{чет}(t) + S_{неч}(t); \quad (3)$$

$$S_{чет}(t) = \frac{1}{2}[S(t) + S(-t)]; \quad S_{неч}(t) = \frac{1}{2}[S(t) - S(-t)], \quad (4)$$

где $S(-t)$ – зеркальный сигнал,

$S_{чет}(t)$ – сигнал, симметричный относительно оси координат,

$S_{неч}(t)$ – сигнал, симметричный относительно начала координат.

Под энергетическими характеристиками понимают мгновенную мощность, энергию и среднюю мощность.

Мгновенная мощность $\eta(t)$, равна

$$\eta(t) = S^2(t). \quad (5)$$

Если $S(t)$ – напряжение или ток, то $\eta(t)$ – мощность, выделяемая на сопротивлении I Ом.

Энергия сигнала:

$$\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt. \quad (6)$$

Средняя мощность:

$$P_{cp} = \frac{\Delta}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt. \quad (7)$$

Если сигнал задан на бесконечном интервале, то

$$P_{cp} = \lim_{(t_2 - t_1) \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt. \quad (8)$$

Различают длительность сигнала пороговую и энергетическую.

Пороговой длительностью сигнала $\tau_{п}$ называется интервал времени, в течение которого мгновенное значение сигнала уменьшается до некоторого наперед заданного уровня.

Энергетической длительностью $\tau_э$ называется интервал времени, в котором сосредоточена подавляющая часть энергии (мощности) сигнала.

1.1.3 Пример 1.

Дано графическое представление (рисунок 1) и временное описание непериодических сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$.

$$S_1(t) = \begin{cases} E e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad S_2(t) = \begin{cases} E, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & 0 > t > T \end{cases}$$

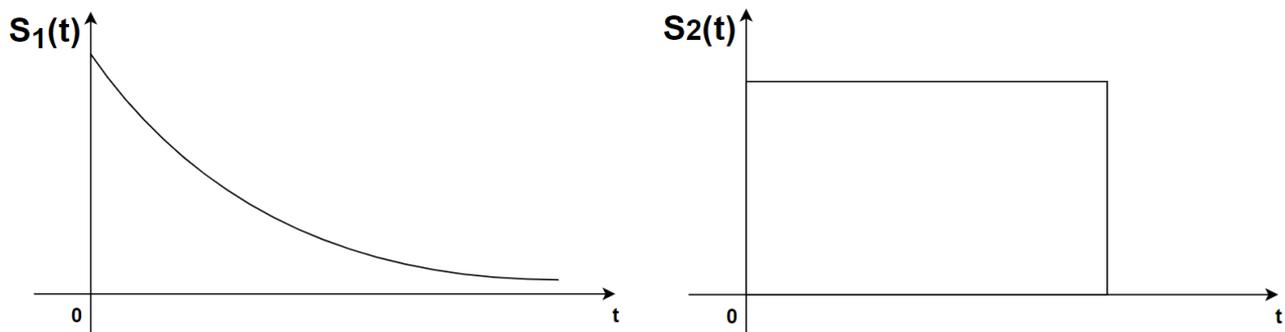


Рисунок 1 – Графическое представление и временное представление непериодических сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$

Определить состав сигналов. Рассчитать энергетические характеристики этих сигналов. Определить энергетическую и пороговую длительность и сравнить их между собой.

Решение. Выделяем постоянные составляющие сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$.

$$S_{10} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E e^{-at} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E}{-aT} e^{-at} \Big|_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E}{aT} (1 - e^{-aT}) = 0$$

$$S_{20} = \frac{1}{T} \int_0^T E dt = E$$

Определяем четные (рисунок 2(а) и 2(б)) составляющие сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$.

$$S_{чет_1}(t) = \begin{cases} 0,5Ee^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0,5Ee^{\alpha t}, & t \leq 0 \end{cases}$$

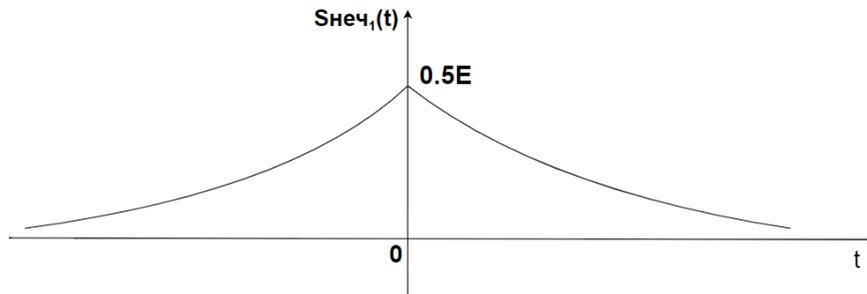


Рисунок 2(а) – Четные составляющие сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$.

$$S_{чет_2}(t) = \begin{cases} 0,5E, & -T \leq t \leq T \\ 0, & -T > t > T \end{cases}$$

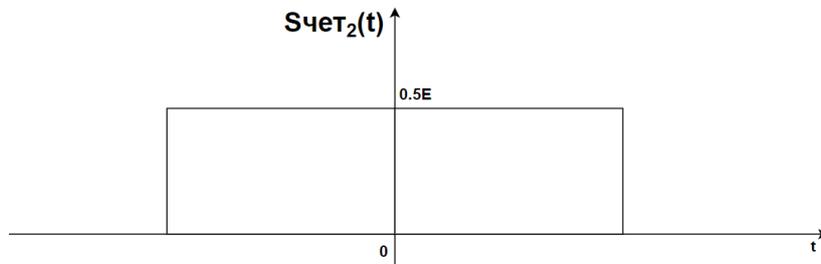


Рисунок 2(б) – Четные составляющие сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$.

Определяем нечетные (рисунок 3(а) и (б)) составляющие сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$.

$$S_{неч_1}(t) = \begin{cases} 0,5Ee^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ -0,5Ee^{\alpha t}, & t \leq 0 \end{cases}$$

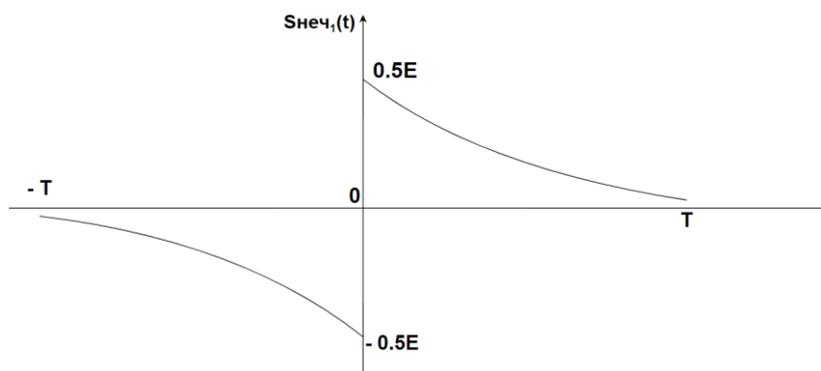


Рисунок 3(а) – Нечетные составляющие сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$.

$$S_{неч_2}(t) = \begin{cases} 0, & t > T \\ 0,5E, & 0 \leq t \leq T \\ -0,5E, & 0 \geq t \geq -T \\ 0, & t < -T \end{cases}$$

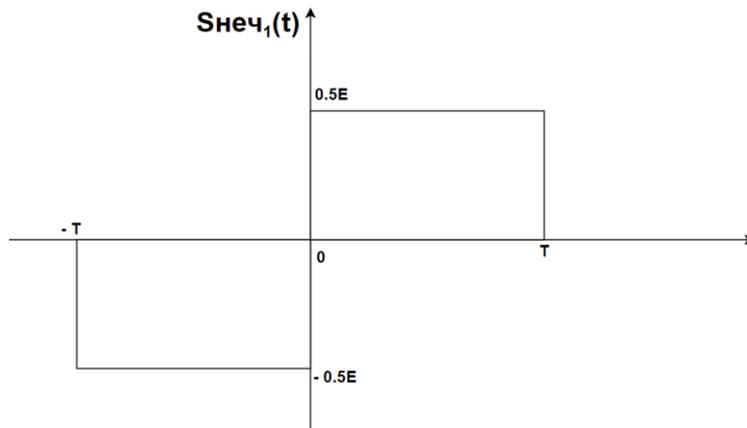


Рисунок 3(б) – Нечетные составляющие сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$.

Рассчитываем мгновенную мощность сигналов:

$$\eta_1(t) = \begin{cases} E^2 e^{-2\alpha t}, & 0 \leq t \leq \infty; \\ 0, & t < 0 \end{cases}; \quad \eta_2(t) = \begin{cases} E^2, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & 0 > t > T \end{cases}$$

Рассчитываем энергию сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$:

$$\mathfrak{E}_1 = \int_0^{\infty} E^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{E^2}{2\alpha}; \quad \mathfrak{E}_2 = \int_0^T E^2 dt = E^2 T.$$

Находим энергетическую длительность $\tau_{0,9}$ сигнала $S_1(t)$ по уровню 0,9:

$$\mathfrak{E}_{0,9} = \int_0^{\tau_{0,9}} E^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{E^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\tau_{0,9}});$$

$$\mathfrak{E}_{0,9} = 0,9 \frac{E^2}{2\alpha};$$

$$0,9 \frac{E^2}{2\alpha} = \frac{E^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\tau_{0,9}});$$

$$e^{-2\alpha\tau_{0,9}} = 0,1;$$

$$\tau_{0,9} = -\frac{\ln 0,1}{2\alpha} = \frac{\ln 10}{2\alpha}.$$

Находим пороговую длительность сигнала по уровню 0,1 от максимального значения:

$$0,1E = E e^{-2\alpha\tau_{0,1}};$$

$$\tau_{0,1} = -\frac{\ln 0,1}{\alpha} = \frac{\ln 10}{\alpha};$$

$$\tau_{0,1} = 2\tau_{0,9}.$$

1.1.4 Пример 2.

Дано временное описание периодического сигнала $S_3(t)$ (рисунок 4):

$$S_3(t) = S_3(t + kT);$$

где k – число натурального ряда,

T – период сигнала.

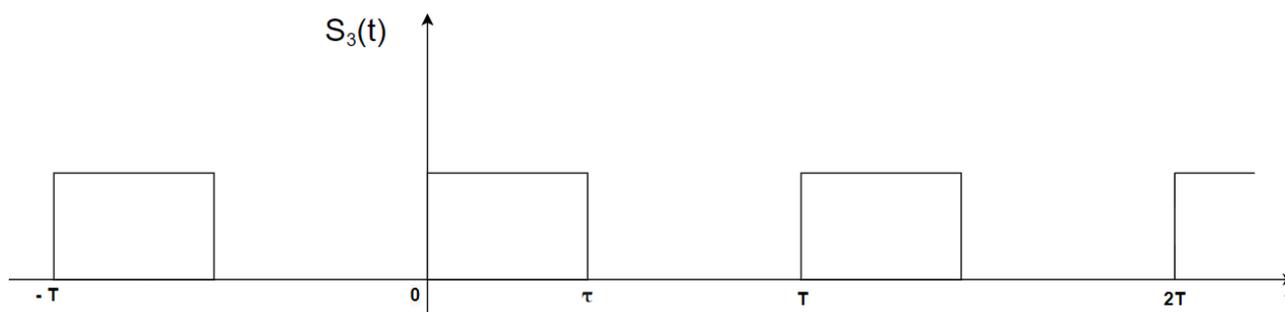


Рисунок 4 – Временное описание периодического сигнала $S_3(t)$

Определить состав сигнала $S_3(t)$. Рассчитать энергетические характеристики $S_3(t)$.

Решение. Выделяем постоянную составляющую сигнала $S_3(t)$

$$S_{30} = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} E dt = \frac{E\tau}{T} = \frac{E}{Q},$$

где $Q = \frac{T}{\tau}$ – скважность.

Определяем нечетную (рисунок 5) составляющую сигнала $S_3(t)$

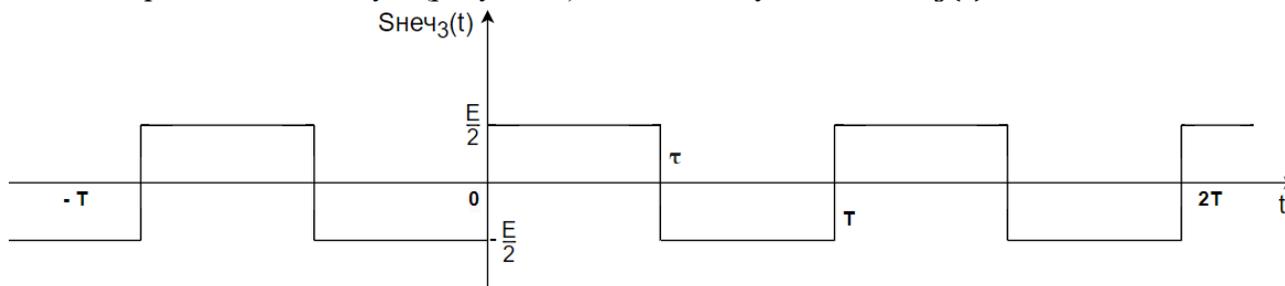


Рисунок 5 – Графическое представление нечетной составляющей сигнала $S_{неч3}(t)$

$$S_{неч3}(t) = \begin{cases} E/2, & kT \leq t \leq \tau = kT \\ -E/2, & \tau + kT < t < (k+1)T \end{cases}$$

Определяем четную составляющую сигнала $S_3(t)$.

$$S_{чет3}(t) = \frac{E}{2}, \quad -\infty < t < \infty$$

В частном случае при $Q = 2$ четная составляющая сигнала $S_{чет3}(t)$ равна постоянной составляющей S_0 .

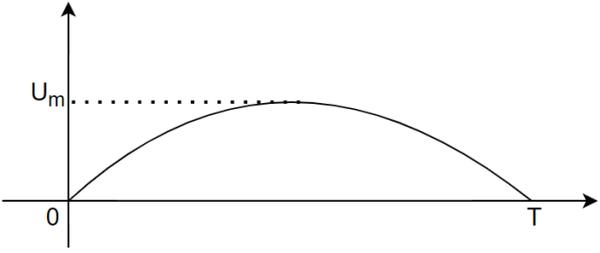
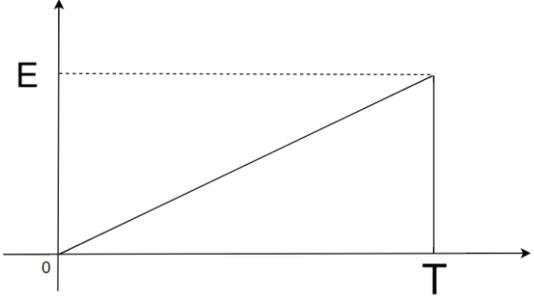
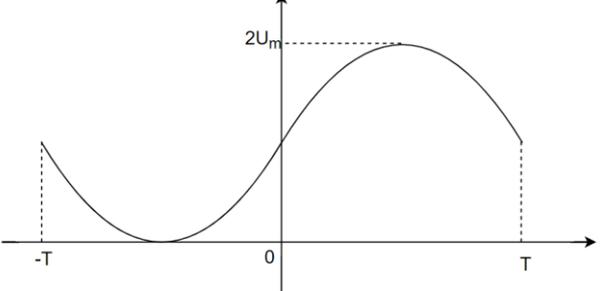
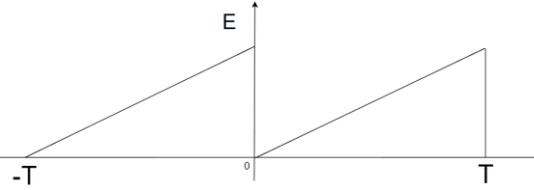
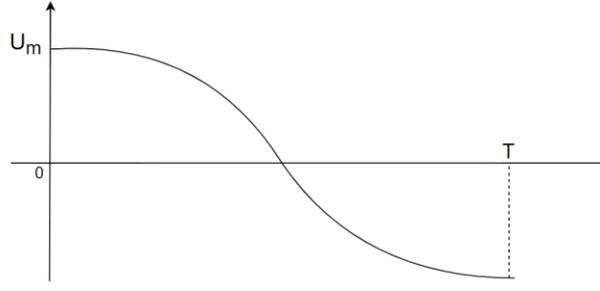
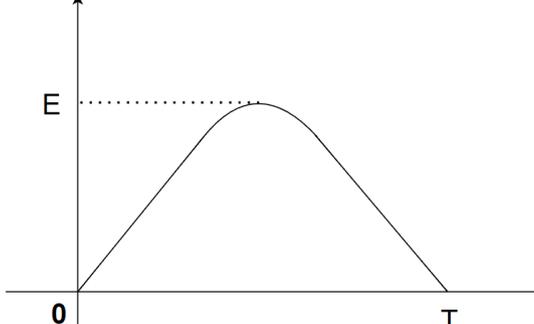
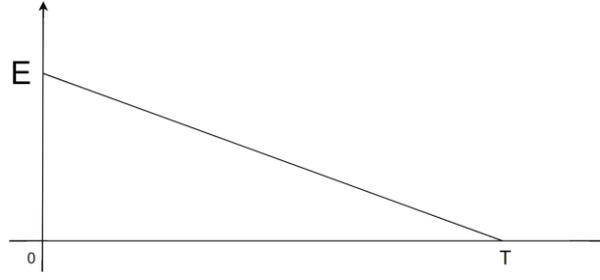
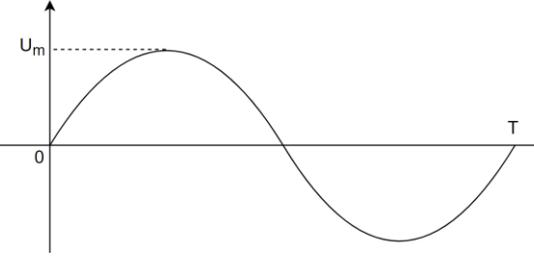
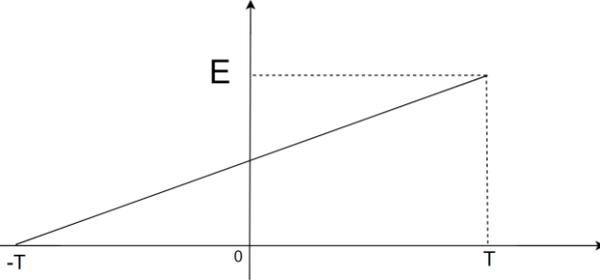
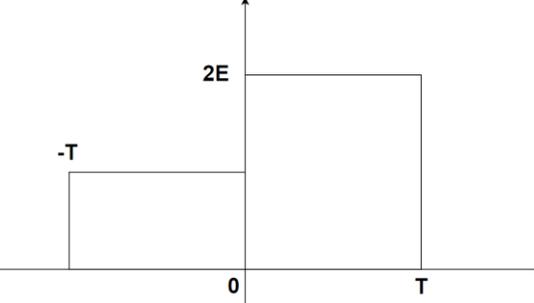
Находим мгновенную мощность периодического сигнала

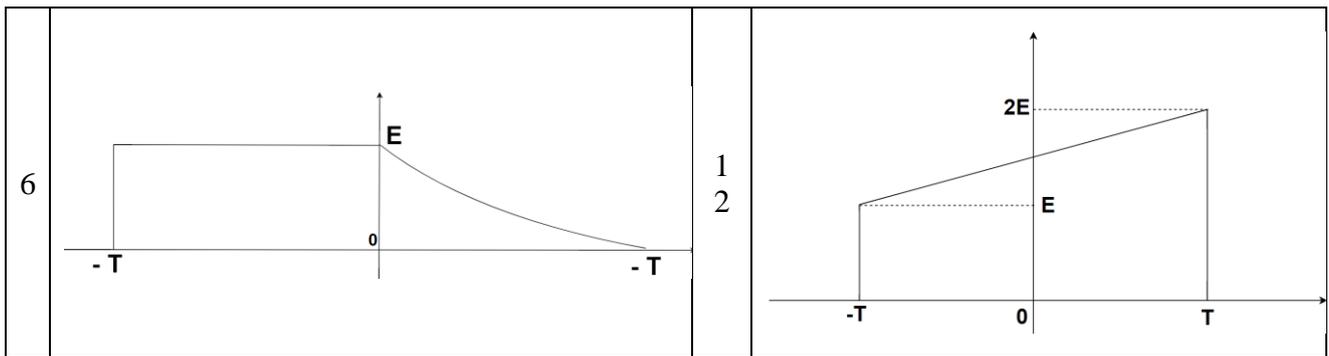
$$\eta(t) = \begin{cases} E^2, & kT \leq t \leq \tau + kT \\ 0, & \tau + kT < t < (k+1)T \end{cases}$$

Находим среднюю мощность периодического сигнала

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} E^2 dt = \frac{E^2\tau}{T} = \frac{E^2}{Q}.$$

Таблица 1 – Графическое представление различных сигналов

1		7	
2		8	
3		9	
4		10	
5		11	



1.1.5 Задачи для самостоятельного решения.

В табл. 2.1 дано графическое представление различных сигналов. Требуется: дать аналитическое представление сигналов; определить энергию; выделить и построить четную и нечетную составляющие сигналов общего вида.

1.1.6 Выводы

Сигнал общего вида представляет собой сумму четной и нечетной составляющих. Сигнал становится чётным (или нечётным), если одна из составляющих обращается в нуль.

Четный сигнал может содержать или не содержать постоянную составляющую. Постоянная составляющая нечетного сигнала равна нулю. Энергия сигнала общего вида равна сумме энергий четной и нечетной составляющих, т.к. энергия четной и нечетной составляющих равна нулю.

1.2 Спектральный анализ периодических сигналов

1.2.1 Цель занятия

Приобрести практические навыки представления периодического сигнала сложной формы совокупностью гармонических колебаний с определенными амплитудами, частотами и начальными фазами.

Освоить методику:

- 1) расчета коэффициентов разложения в ряд Фурье;
- 2) построения спектров амплитуд и фаз;
- 3) вычисления среднеквадратической погрешности усечения ряда Фурье одним, двумя, тремя и т.д. слагаемыми;
- 4) построения оценки сигнала в виде суммы нескольких основных гармонических колебаний.

1.2.2 Основные определения и формулы.

Периодическим называется сигнал, для которого выполняется условие

$$S(t) = S(t + kT), \quad (9)$$

где T – период,

k – число натурального ряда.

Интеграл от периодической функции, взятый на интервале длиной T не изменяется при изменении пределов интегрирования при условии, что длина интервала интегрирования остается равной T , т.е.

$$\int_{t_1}^{t_1+T} S(t) dt = const. \quad (10)$$

Перемножение двух периодических функций с кратными периодами дает функцию также периодическую с максимальным периодом, поэтому

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \varphi_n(t) S(t) dt = const. \quad (11)$$

если

$$S(t) = S(t + kT)$$

$$\varphi_n(t) = S(t + kT)$$

k, n – целые числа.

Простейшими примерами периодических функций являются тригонометрические функции

$$\varphi_n(t) = \left\{ \sin n \frac{2\pi}{T} t, \cos n \frac{2\pi}{T} t \right\}, \quad (12)$$

где n – номер тригонометрической функции,

T – период тригонометрической функции при $n = 1$.

Весовое суммирование косинусоидальных и синусоидальных функций с одинаковыми частотами приводят к образованию гармонической функции вида

$$S_n(t) = a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n), \quad (13)$$

где a_n, b_n – весовые коэффициенты ортогональных составляющих;

A_n – амплитуда n -й гармонической функции;

$n\omega_1 = n \frac{2\pi}{T}$ – угловая частота n -й тригонометрической функции;

φ_n – начальная фаза n -й гармоники.

$$\begin{aligned} a_n &= A_n \cos \varphi_n, & b_n &= A_n \sin \varphi_n \\ \varphi_n &= \arctg \frac{b_n}{a_n}, & A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \end{aligned} \quad (14)$$

В зависимости от знака a_n и b_n начальная фаза φ_n n -й гармоники определится следующим образом:

$$2\pi n + \varphi_n = \begin{cases} \arctg \left| \frac{b_n}{a_n} \right|, & \text{при } a_n > 0, b_n > 0 \\ \pi - \arctg \left| \frac{b_n}{a_n} \right|, & \text{при } a_n < 0, b_n > 0 \\ \pi + \arctg \left| \frac{b_n}{a_n} \right|, & \text{при } a_n < 0, b_n < 0 \\ -\arctg \left| \frac{b_n}{a_n} \right|, & \text{при } a_n > 0, b_n < 0 \end{cases} \quad (15)$$

Любой периодический сигнал сложной формы может быть разложен в обобщенный ряд Фурье по ортогональным тригонометрическим функциям

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t], \quad (16)$$

где $\frac{a_0}{2}$ – постоянная составляющая.

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \cos n\omega_1 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \sin n\omega_1 t dt \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Совокупность амплитуд $\{A_n\}$ гармонических колебаний называется спектром амплитуд.

Совокупность начальных фаз $\{\varphi_n\}$ гармонических колебаний называется спектром фаз.

Графическое изображение спектров, в котором по оси ординат откладываются амплитуды (или начальные фазы) гармонических колебаний, а по оси абсцисс – частоты, называется спектральной диаграммой амплитуд (фаз).

Комплексная форма записи ряда Фурье имеет вид

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \quad (18)$$

Здесь C_n – комплексный коэффициент ряда Фурье.

$$C_n = \frac{1}{2} A_n = \frac{1}{2} A_n e^{-j\varphi_n} = \frac{1}{2} [A_n \cos \varphi_n - j A_n \sin \varphi_n], \quad (19)$$

$$C_n = \frac{1}{2} A_n = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) e^{-jn\omega_1 t} dt, \quad (20)$$

$$C_n = C_{nc} - jC_{ns}, \quad \left. \begin{aligned} C_{nc} &= \frac{1}{2} A_n \cos \varphi_n = \frac{1}{2} a_n \\ C_{ns} &= \frac{1}{2} A_n \sin \varphi_n = \frac{1}{2} b_n \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Сигнал $S(t)$ может быть представлен (оценен) конечной совокупностью гармонических колебаний, а именно

$$S^*(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n), \quad (22)$$

$S^*(t)$ – оценка сигнала.

Погрешность представления сигнала $S(t)$ его оценкой $S^*(t)$ будет тем меньше, чем больше число N кратных по частоте гармонических колебаний входит в оценку.

$$\varepsilon(t) = S(t) - S^*(t), \quad (23)$$

где $\varepsilon(t)$ – абсолютное значение погрешности.

Среднеквадратическое значение погрешности $\overline{\varepsilon^2(t)}$ определяется как

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2(t)} &= \frac{1}{T} \int_0^T [S(t) - S^*(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt - \frac{2}{T} \int_0^T S(t) S^*(t) dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T [S^*(t)]^2 dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Если сигнал $S(t)$ представляет собой ток или напряжение, тогда среднеквадратическое значение сигнала равно средней за период мощности P , выделяющейся на сопротивлении нагрузки в 1 Ом:

$$P = \overline{S^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt. \quad (25)$$

Среднеквадратическое значение оценки сигнала $\overline{[S^*(t)]^2}$ называют иногда мощностью усеченного ряда Фурье P_N .

$$P_N = \overline{[S^*(t)]^2} = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2 = P_0 + \sum_{n=1}^N P_n. \quad (26)$$

где P_0 – мощность постоянной составляющей;

P_n – мощность гармонического колебания.

Относительная величина среднеквадратического значения погрешности определяется следующим образом:

$$\delta = \overline{\varepsilon^2(t)} / \overline{S^2(t)} = \frac{P - P_N}{P}. \quad (27)$$

1.2.3 Пример 1.

Произвести гармонический анализ периодического сигнала $S(t)$, изображённого на рисунок 6, построить спектральные диаграммы, найти среднеквадратическую погрешность представления сигнала $S(t)$ одним, двумя и тремя гармоническими колебаниями, частоты которых кратны частоте заданного сигнала.

$$S(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} \leq t \leq -\frac{T}{8} \\ 2E, & -\frac{T}{8} \leq t \leq \frac{3T}{8} \\ 0, & \frac{3T}{8} \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

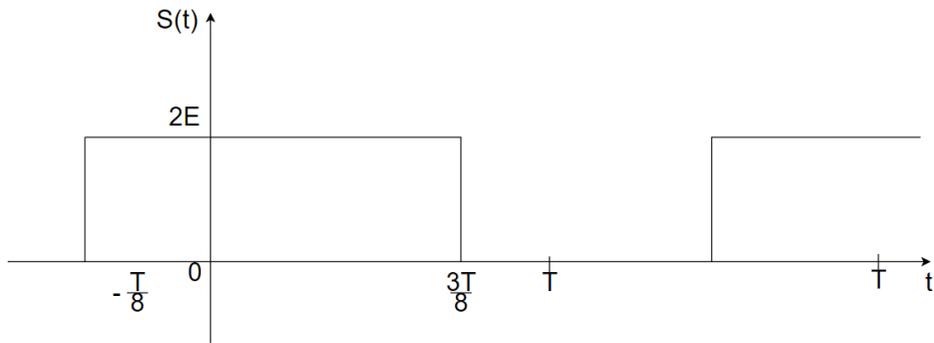


Рисунок 6 – Периодический сигнал

Решение.

Определяем весовые коэффициенты разложения заданного сигнала в ряд Фурье по формулам (17):

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{8}}^{\frac{3T}{8}} 2E dt = E;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{8}}^{\frac{3T}{8}} 2E \cos n\omega_1 t dt = \frac{4E}{nT\omega_1} \left(\sin n\omega_1 \frac{3T}{8} + \sin n\omega_1 \frac{T}{8} \right) = \\ &= \frac{2E}{n\pi} \left[\sin n\pi \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4} \right) + \sin n\pi \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{4E}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2} \cos n \frac{\pi}{4}; \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{8}}^{\frac{3T}{8}} 2E \sin n\omega_1 t dt = -\frac{4E}{nT\omega_1} \left(\cos n\omega_1 \frac{3T}{8} - \cos n\omega_1 \frac{T}{8} \right) = \frac{4E}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2} \sin n \frac{\pi}{4}.$$

Рассчитываем нормированные относительно E амплитуды и начальные фазы гармонических колебаний. Применяя выражения (14 и 15), найдём

$$\begin{aligned} \frac{A_n}{E} &= \frac{4}{n\pi} \left| \sin n \frac{\pi}{2} \right| = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n = 1,3,5 \\ 0, & n = 2,4,6 \end{cases} \\ A_n^0 &= \frac{A_n}{E} \quad a_n^0 = \frac{a_n}{E} \quad b_n^0 = \frac{b_n}{E} \\ 2n\pi + \varphi_n &= \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & n = 1,9,17 \\ -\frac{\pi}{4}, & n = 3,11,19 \\ -\frac{3\pi}{4}, & n = 5,13,21 \\ \frac{3\pi}{4}, & n = 7,15,23 \end{cases} \end{aligned}$$

Результаты расчетов сведем в таблицу 2 и изобразим графически на рисунке 7.

Таблица 2 – Амплитуды и фазы n –ых гармонических колебаний

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n^0	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	0	$\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$	0	$-\frac{2\sqrt{2}}{5\pi}$	0	$-\frac{2\sqrt{2}}{7\pi}$	0	$\frac{2\sqrt{2}}{9\pi}$	0
b_n^0	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	0	$-\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$	0	$-\frac{2\sqrt{2}}{5\pi}$	0	$\frac{2\sqrt{2}}{7\pi}$	0	$\frac{2\sqrt{2}}{9\pi}$	0
A_n^0	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{4}{3\pi}$	0	$\frac{4}{5\pi}$	0	$\frac{4}{7\pi}$	0	$\frac{4}{9\pi}$	0
φ_n	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{3\pi}{4}$	0	$\frac{3\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	0

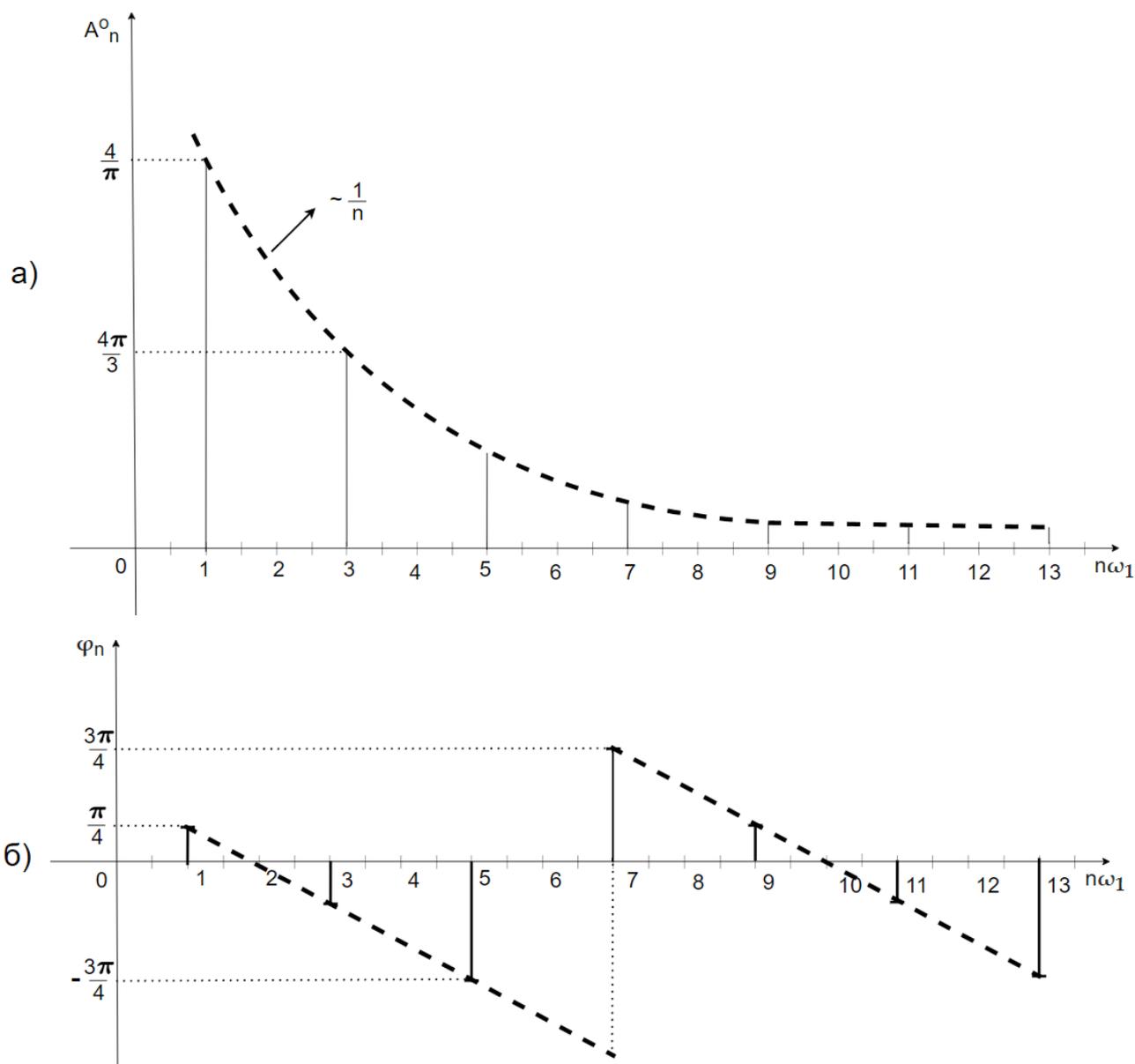


Рисунок 7 – Спектр амплитуд (а) и спектр фаз (б) исследуемого сигнала

Рассчитываем погрешности представления сигнала $S(t)$ усеченным рядом $S^*(t)$, в котором $N = 3$.

Мощность исследуемого сигнала согласно (25) равна

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{8}}^{\frac{3T}{8}} (2E)^2 dt = 2E^2$$

Мощность усеченного ряда $S^*(t)$, представляющего собой сумму постоянной составляющей и двух гармонических колебаний кратных частот, согласно (26)

$$P_N = E^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{3N} \left(\frac{4E}{n\pi} \right)^2 = E^2 \left(1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n^2} \right)$$

Абсолютное значение среднеквадратической погрешности представления согласно (24) будет

$$\overline{\mathcal{E}^2(t)} = 2E^2 - E^2 \left(1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n^2} \right) = E^2 \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n^2} \right)$$

Если $N = 1$, $\overline{\mathcal{E}^2(t)} = 0.196E^2$.

Если $N = 2$, $\overline{\mathcal{E}^2(t)} = 0.096E^2$.

Если $N = 3$, $\overline{\mathcal{E}^2(t)} = 0.067E^2$.

Относительное значение среднеквадратической погрешности представления определяется по формуле (27)

$$\delta_N = \frac{2E^2 - E^2 \left(1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n^2} \right)}{2E^2} \cdot 100\% = \left[1 - 0.5 \left(1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n^2} \right) \right] \cdot 100\%$$

Если $N = 1$, $\delta_N = 9.3\%$.

Если $N = 2$, $\delta_N = 4.8\%$.

Если $N = 3$, $\delta_N = 3.35\%$.

Произведем построение оценки $S^*(t)$ и погрешности $\mathcal{E}(t)$ представления сигнала $S(t)$ усеченным рядом Фурье (для $N = 1$ (рисунок 8), для $N = 3$ (рисунок 9)).

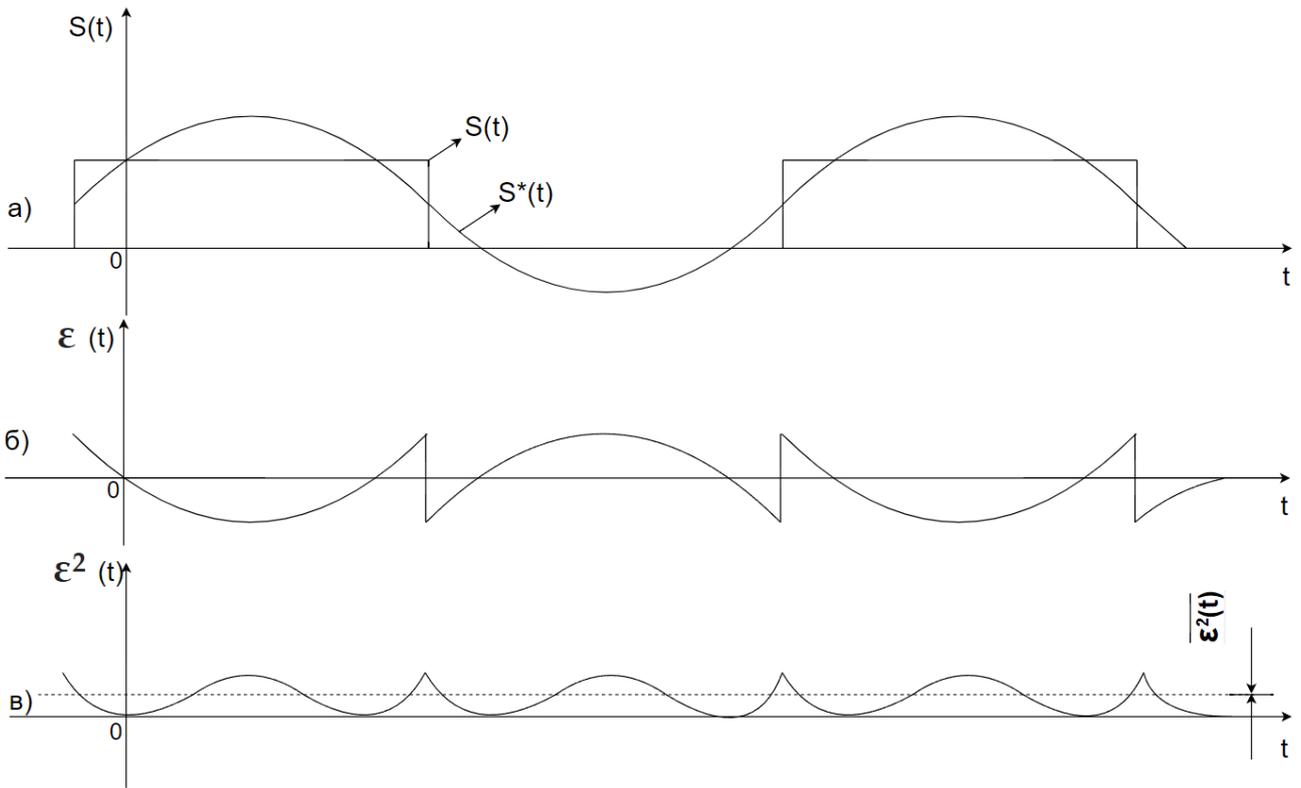


Рисунок 8 – Сигнал и его оценка

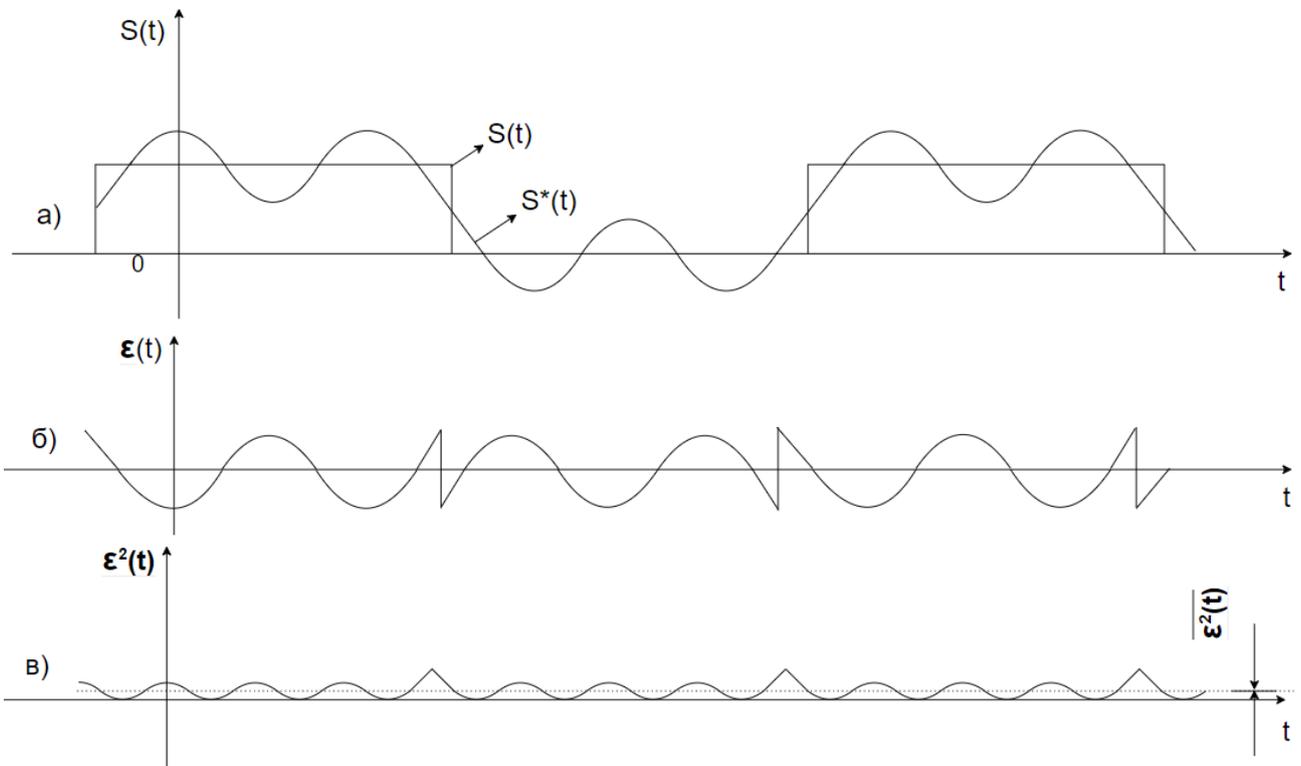


Рисунок 9 – Сигналы и их оценка

На рисунок 8а и 9а изображены сигнал $S(t)$ и его оценка $S^*(t)$; на рисунок 8б и 9б изображена разность между сигналом $S(t)$ и оценкой $S^*(t)$; на рис. 8в и 9в изображен квадрат погрешности $\varepsilon^2(t)$, причём пунктиром отмечено среднеквадратическое значение погрешности $\overline{\varepsilon^2(t)}$.

Сравнивая рисунки 8а, б, в и 9а, б, в следует сказать, что с ростом N оценка $S^*(t)$ все более приближается к исследуемому сигналу $S(t)$, а абсолютное значение погрешности $\mathcal{E}(t)$ уменьшается. Среднеквадратическое значение погрешности $\overline{\mathcal{E}^2(t)}$ с ростом N стремится к нулю.

1.2.4 Задачи для самостоятельного решения

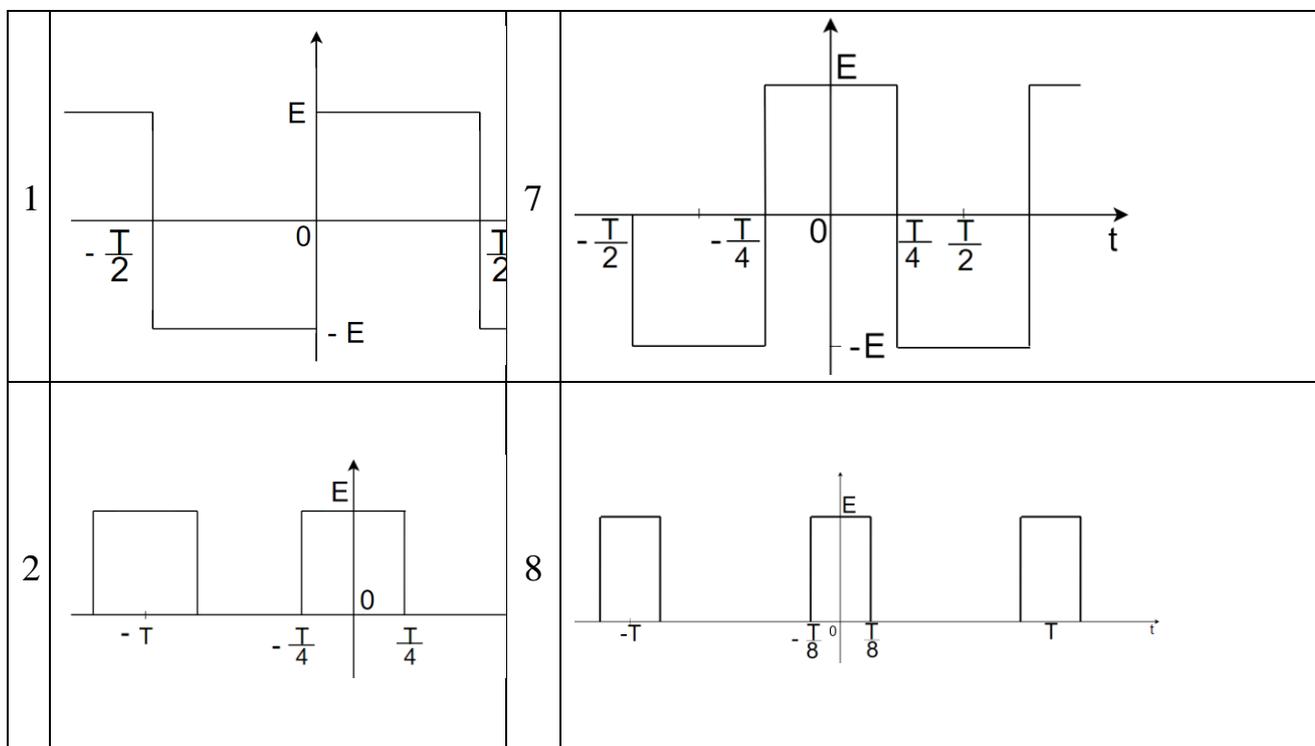
В таблице 3 дано графическое представление различных сигналов в пределах периода от $-\frac{T}{2}$ до $+\frac{T}{2}$. Требуется: дать аналитическое представление сигналов; выявить особенности временного представления (четность, нечетность, наличие постоянной составляющей и т.д.), рассчитать коэффициенты разложения сигналов в ряд Фурье, записать математическое выражение оценки сигнала, определить относительную среднеквадратическую погрешность представления сигнала $S(t)$ усеченным рядом Фурье.

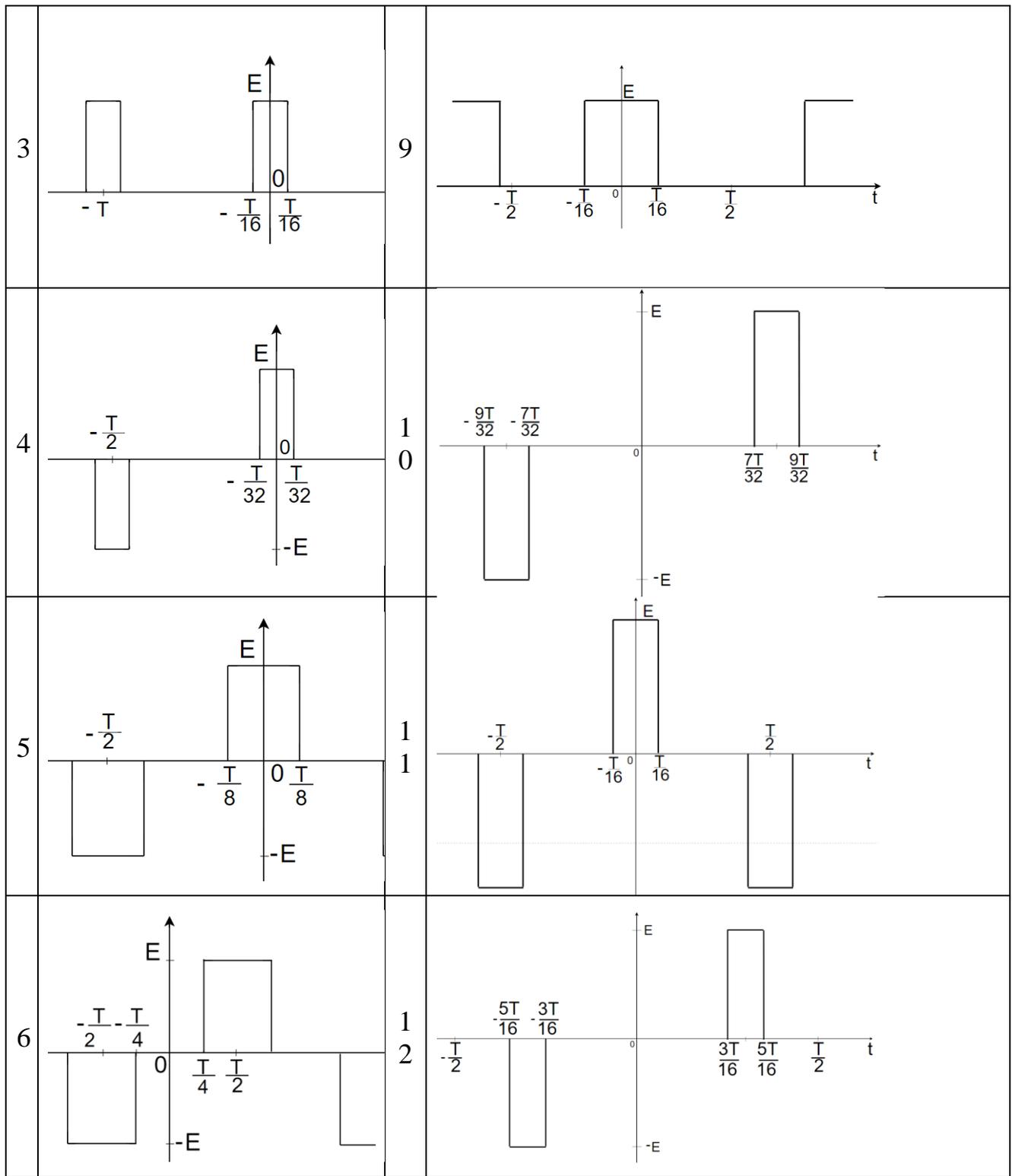
1.2.5 Выводы

Любой периодический сигнал сложной формы может быть представлен совокупностью (спектром) гармонических колебаний с дискретными, кратными частоте исследуемого сигнала. Амплитуды и начальные фазы гармонических колебаний зависит от формы исследуемого сигнала. Графические амплитуды и фазы изображаются в виде вертикальных отрезков, расположенных на дискретных частотах. Спектр периодического сигнала является ДИСКРЕТНЫМ.

Четный сигнал представляется суммой косинусоидальных составляющих с начальными фазами $\pm\pi$. Нечётный сигнал представляется суммой синусоидальных составляющих с начальными фазами φ_n . Сигнал общего вида содержит как четные, так и нечетные составляющие.

Таблица 3 – Набор сигналов для спектрального анализа





1.3 Спектральные характеристики непериодических сигналов

1.3.1 Цель занятия

Приобрести практический опыт применения прямого преобразования Фурье для определения спектральной плотности непериодических сигналов, обладающих конечной энергией.

Выработать навыки анализа:

- сигналов общего вида;
- сигналов, чётных относительно нуля;
- сигналов, нечётных относительно нуля.

Научиться рассчитывать и строить амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики непериодических сигналов.

1.3.2 Основные определения и формулы

Связь между временным и частотным представлением непериодических сигналов устанавливается с помощью прямого и обратного преобразования Фурье

$$\left. \begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t} dt \\ S(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где $S(t)$ – аналитическое временное представление сигнала,

$\dot{S}(\omega)$ – аналитическое частотное представление сигнала, которое называется спектральной плотностью и является комплексной функцией частоты.

$$\left. \begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= A(\omega) - jB(\omega) \\ A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cos \omega t dt \\ B(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Здесь $A(\omega)$ – действительная составляющая комплексной спектральной плотности;

$B(\omega)$ – мнимая составляющая комплексной спектральной плотности.

Сигнал общего вида содержит действительную и мнимую составляющие спектральной плотности.

Сигнал, чётный относительно нуля, содержит только действительную составляющую спектральной плотности.

Сигнал, нечётный относительно нуля, содержит только мнимую составляющую спектральной плотности.

Модуль комплексной спектральной плотности называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) непериодического сигнала:

$$S(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \quad (30)$$

АЧХ сигнала – чётная функция частоты:

$$S(\omega) = S(-\omega), \quad (31)$$

Аргумент комплексной спектральной плотности называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) сигнала:

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}, \quad (32)$$

ФЧХ сигнала – нечетная функция частоты:

$$\varphi(\omega) = \varphi(-\omega). \quad (33)$$

1.3.3 Пример 1.

Рассчитать и построить спектральные характеристики АЧХ и ФЧХ трех сигналов, изображенных на рисунок 10

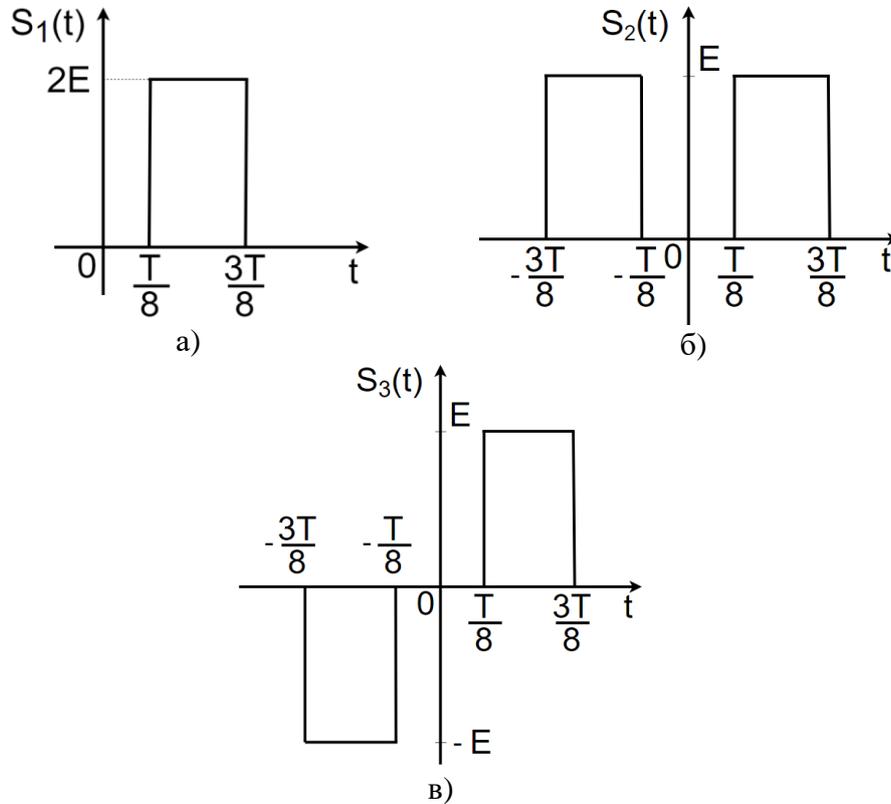


Рисунок 10 – Исследуемые сигналы.

Решение.

Анализируя сигналы рисунок 10 можно сказать:

$S_1(t)$ – канал общего вида; $S_2(t)$ – сигнал, четный относительно нуля; $S_3(t)$ – сигнал, нечетный относительно нуля.

1.3.3.1 Рассчитаем спектральную плотность сигнала $S_1(t)$

$$\dot{S}_1(\omega) = \int_{-\frac{T}{8}}^{\frac{3T}{8}} 2E e^{-j\omega t} dt = -\frac{2E}{j\omega} \left(e^{-j\omega \frac{3T}{8}} - e^{-j\omega \frac{T}{8}} \right) = \frac{2E}{j\omega} e^{-j\omega \frac{T}{4}} \left(e^{j\omega \frac{T}{8}} - e^{-j\omega \frac{T}{8}} \right)$$

Выделим действительную и мнимую составляющие комплексной спектральной плотности, преобразуя полученное выражение с помощью формулы Эйлера

$$\dot{S}(\omega) = \frac{4E}{\omega} \sin \frac{\omega T}{8} e^{-j\omega \frac{T}{4}} = \frac{4E}{\omega} \left(\sin \frac{\omega T}{8} \cos \frac{\omega T}{4} - j \sin \frac{\omega T}{8} \sin \frac{\omega T}{4} \right)$$

Действительная и мнимая составляющие комплексной спектральной плотности имеют вид

$$A(\omega) = \frac{4E}{\omega} \sin \frac{\omega T}{8} \cos \frac{\omega T}{4}$$

$$B(\omega) = \frac{4E}{\omega} \sin \frac{\omega T}{8} \sin \frac{\omega T}{4}$$

АЧХ и ФЧХ сигнала определим следующим образом

$$S(\omega) = \frac{4E}{\omega} \sqrt{\sin^2 \frac{\omega T}{8} \left(\sin^2 \frac{\omega T}{4} + \cos^2 \frac{\omega T}{4} \right)} = \frac{4E}{\omega} \left| \sin \frac{\omega T}{8} \right|$$

$$\varphi(\omega) = - \begin{cases} \arctg \left| \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right| & \text{при } A(\omega) > 0, B(\omega) > 0 \\ \pi - \arctg \left| \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right| & \text{при } A(\omega) < 0, B(\omega) > 0 \\ \pi + \arctg \left| \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right| & \text{при } A(\omega) < 0, B(\omega) < 0 \\ -\arctg \left| \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right| & \text{при } A(\omega) > 0, B(\omega) < 0 \end{cases}$$

Для упрощения расчета и построения ФЧХ сигнала определим модуль и аргумент комплексной спектральной плотности, используя показательную форму представления комплексного выражения

$$\dot{S}(\omega) = \frac{4E}{\omega} \left| \sin \frac{\omega T}{8} \right| e^{j(\varphi_s - \frac{\omega T}{4})}$$

$$\varphi_s = \begin{cases} 0 & \text{при } \sin \frac{\omega T}{8} > 0 \\ -\pi & \text{при } \sin \frac{\omega T}{8} < 0 \end{cases}$$

Введем нормированную частоту $n = \frac{\omega}{\omega_1}$, положим $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, тогда

$$\frac{1}{T} \dot{S}(n\omega_1) = \frac{2E}{\pi n} \sin n \frac{\pi}{4} e^{-jn\frac{\pi}{2}}$$

Графическое представление АЧХ и ФЧХ сигнала дано на рисунке в таблице 4.

Таблица 4 – Этапы построения АЧХ сигнала $S_1(t)$

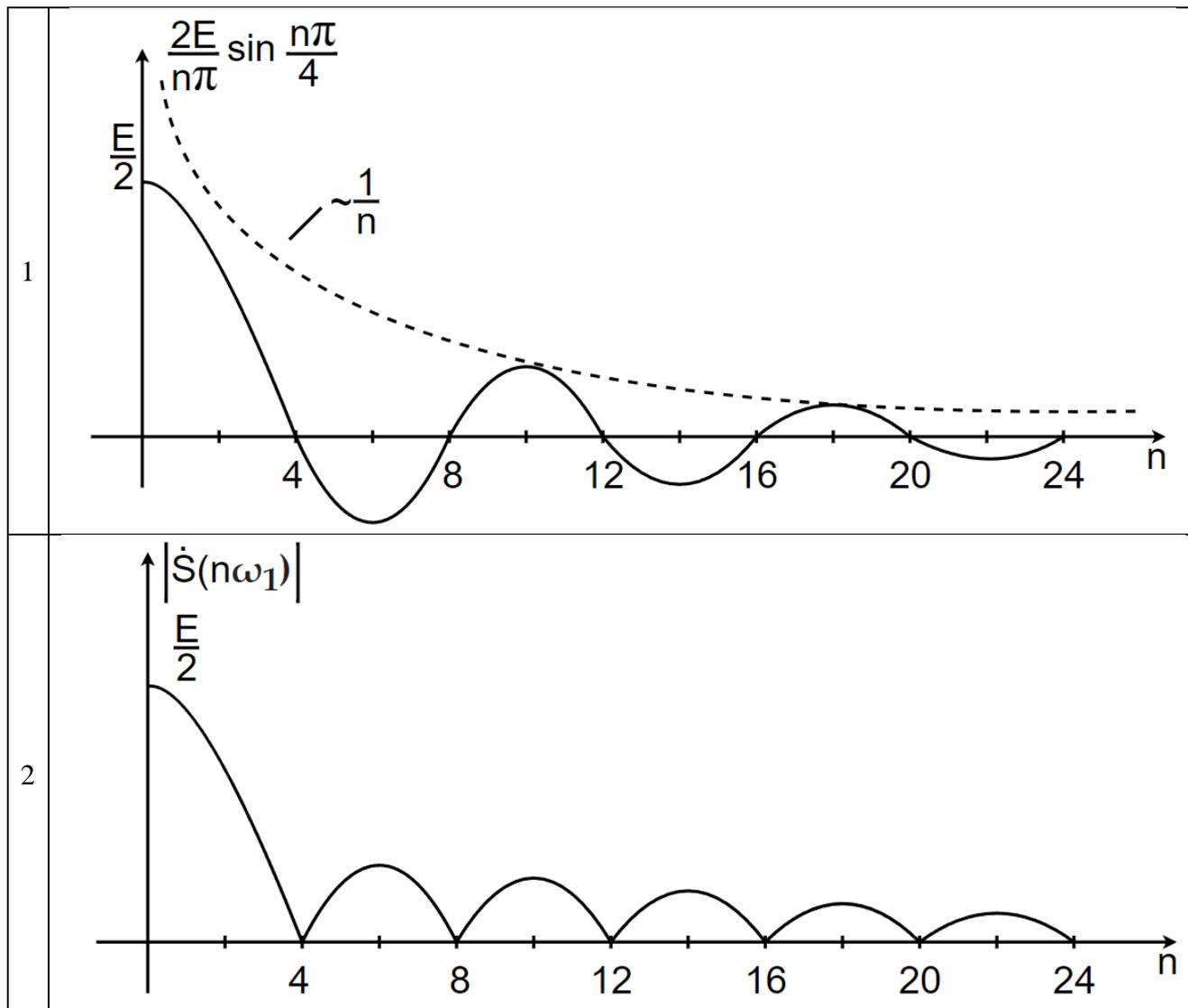
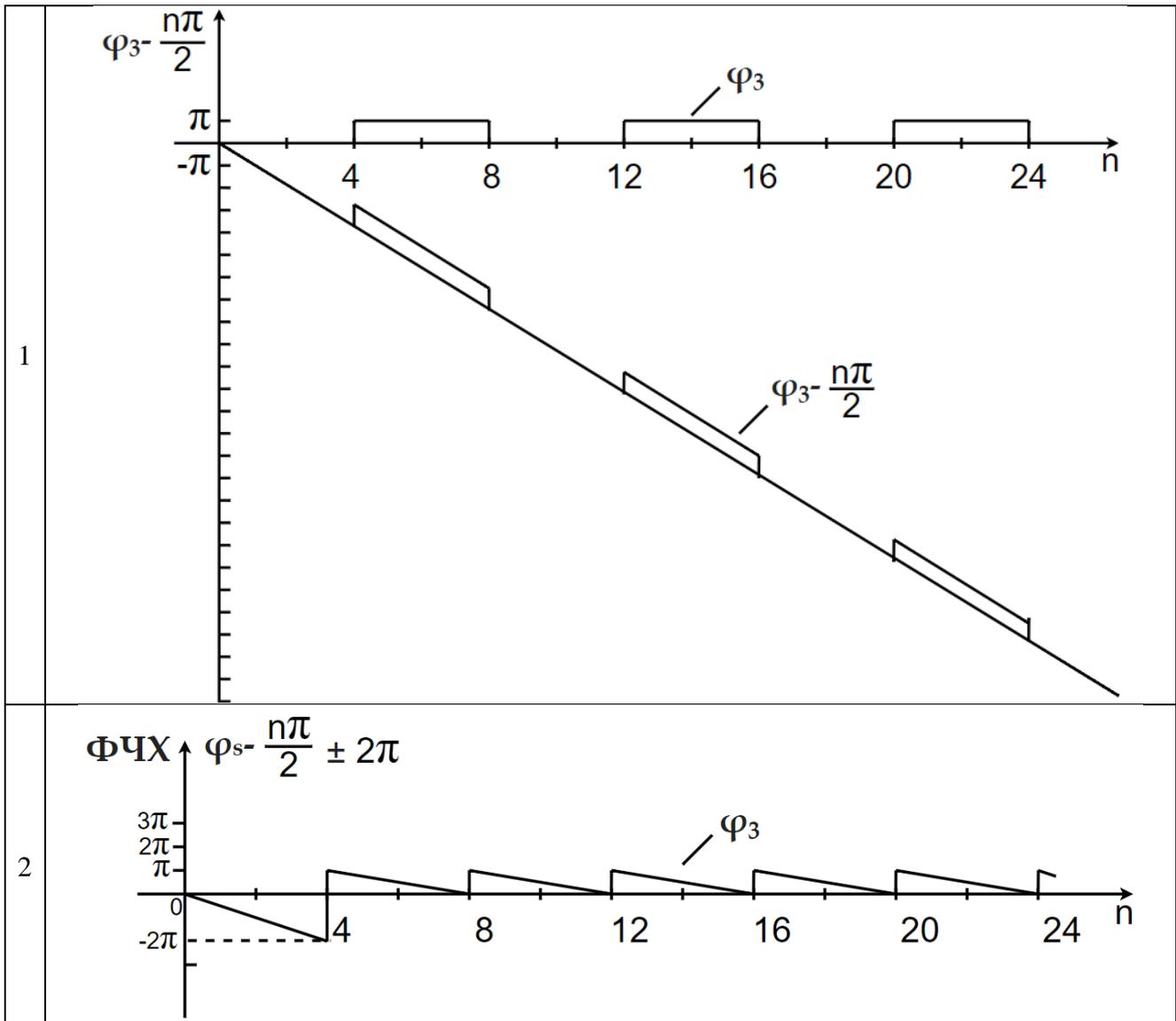


Таблица 5 – Этапы построения ФЧХ сигнала $S_1(t)$



1.3.3.2 Рассчитаем спектральные характеристики сигнала $S_2(t)$. Так как сигнал $S_2(t)$ представляет собой функцию, четную относительно нуля, комплексная спектральная плотность, содержит только действительную составляющую $A(\omega)$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_2(t) \cos \omega t dt$$

Подынтегральное выражение – произведение двух четных функций, следовательно, также функция четная. Интеграл от четной функции в симметричных пределах равен двум интегралам за половину интервала интегрирования

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} S_2(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{\frac{3T}{8}} E \cos \omega t dt = \frac{2E}{\omega} \left(\sin \frac{3\omega T}{8} - \sin \frac{\omega T}{8} \right) = \\ &= \frac{4E}{\omega} \cos \frac{\omega T}{4} \sin \frac{\omega T}{8} \end{aligned}$$

Перейдем к нормированной частоте $n = \frac{\omega}{\omega_1}$ и нормированной спектральной плотности

$$\frac{A(n\omega)}{ET}$$

$$\frac{1}{ET} A(n\omega_1) = \frac{2}{n\pi} \cos n \frac{\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{4}$$

Определим значение спектральной плотности при $n = 0$. Непосредственная подстановка приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Раскроем эту неопределенность по правилу Лопиталю.

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{ET} A(n\omega_1) = \frac{2 \left(-\frac{\pi}{2} \sin n \frac{\pi}{2} \cdot \sin n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cos n \frac{\pi}{4} \cdot \cos n \frac{\pi}{2} \right)}{\pi} = \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{\frac{n\pi}{4}} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Для нахождения нулей функции $A(n\omega_1)$ необходимо решить уравнения

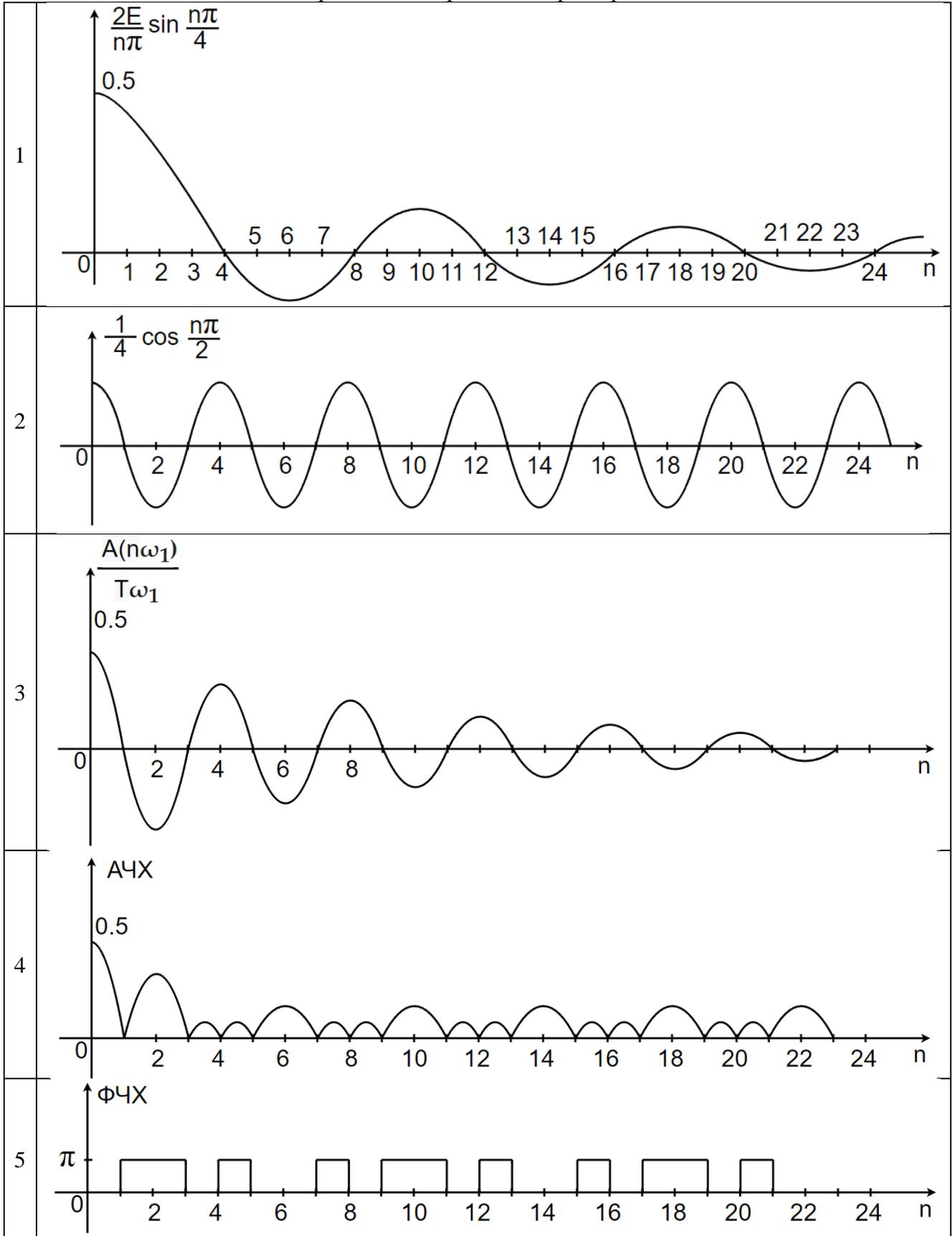
$$\begin{cases} \cos n \frac{\pi}{2} = 0 \text{ при } n = 1, 3, 5, \dots \\ \sin n \frac{\pi}{4} = 0 \text{ при } n = 4, 8, 12, \dots \end{cases}$$

Рассчитаем значения $A(n\omega_1)$, результаты расчета сведем в таблице 6 и изобразим на рисунках в таблице 7.

Таблица 6 – Отсчеты нормированной спектральной плотности сигнала $S_2(t)$

n	$\frac{A(n\omega_1)}{ET}$	n	$\frac{A(n\omega_1)}{ET}$
0	0,5000	8,5	0,0203
0,5	0,3445	9,0	0,0000
1,0	0,0000	9,5	-0,0438
1,5	-0,2773	10,0	-0,0637
2,0	-0,3183	10,5	-0,0396
2,5	-0,1664	11,0	-0,0000
3,0	-0,0000	11,5	0,0150
3,5	0,0492	12,0	0,0000
4,0	0,0000	12,5	-0,0138
4,5	-0,0383	13,0	0,0000
5,0	-0,0000	13,5	0,0308
5,5	0,0756	14,0	0,0455
6,0	0,1061	14,5	0,0287
6,5	0,0640	15,0	0,0000
7,0	0,0000	15,5	-0,0111
7,5	-0,0230	16,0	-0,0000
8,0	-0,0000		

Таблица 7 – Этапы построения спектральных характеристик сигнала



$$\text{АЧХ} \sim \left| \frac{A(n\omega_1)}{ET} \right|$$

$$\text{ФЧХ} \sim \varphi(n\omega_1) = - \begin{cases} 0 & A(n\omega_1) > 0 \\ \pi & A(n\omega_1) < 0 \end{cases}$$

1.3.3.3 Рассчитаем спектральные характеристики сигнала $S_3(t)$.

Так как сигнал $S_3(t)$ представляет собой функцию, нечетную относительно нуля, комплексная спектральная плотность, содержит только мнимую составляющую.

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \sin \omega t dt$$

Под интегралом функция четная, т.к. произведение двух нечетных функций дает функцию, четную относительно нуля, следовательно

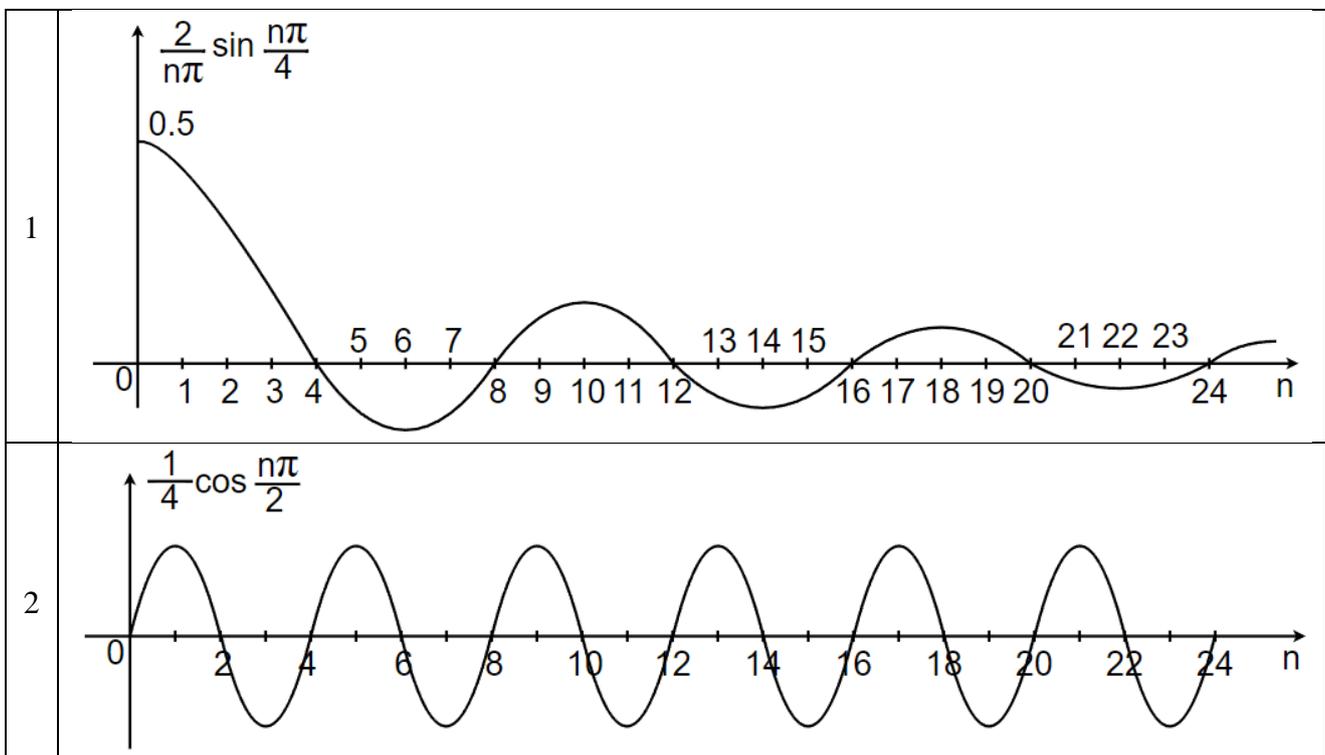
$$B(\omega) = 2 \int_0^{\infty} S(t) \sin \omega t dt = 2 \int_{\frac{T}{8}}^{\frac{3T}{8}} E \sin \omega t dt = \frac{2E}{\omega} \left(\cos \frac{\omega T}{8} - \cos \frac{3\omega T}{8} \right) = \frac{4E}{\omega} \sin \frac{\omega T}{4} \sin \frac{\omega T}{8}$$

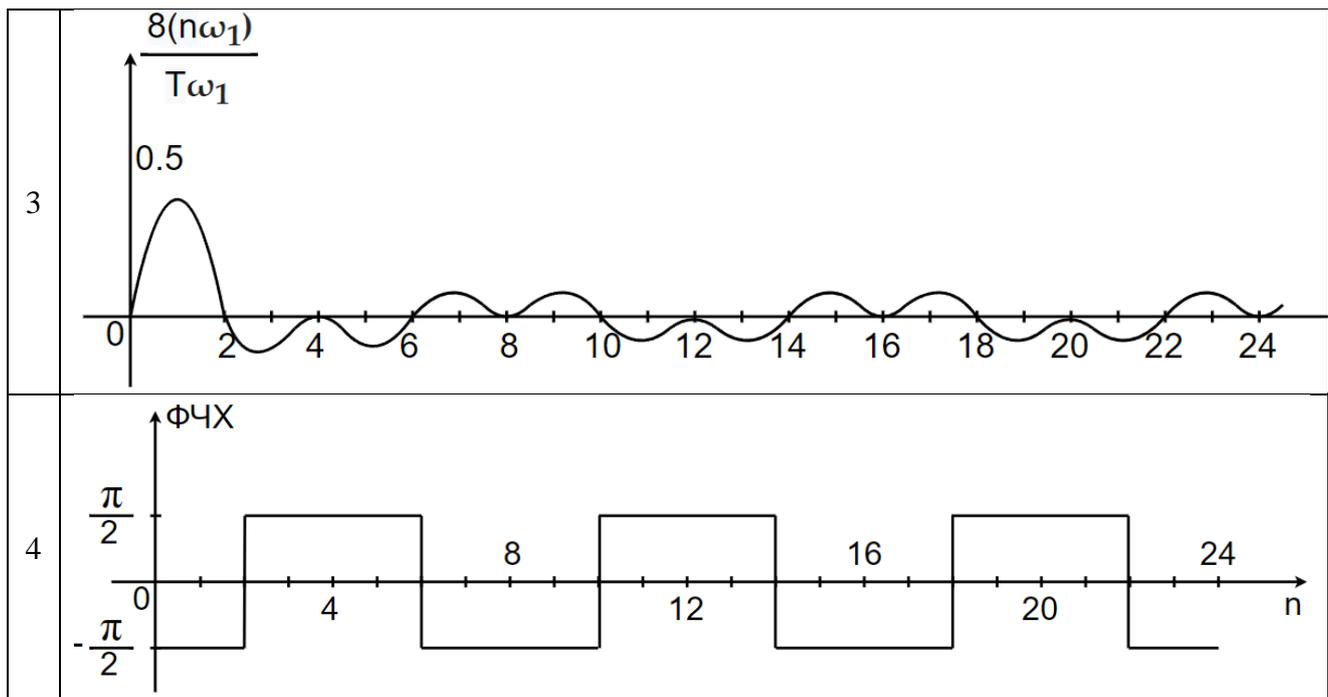
$$\omega = n\omega_1 = n \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{B(n\omega_1)}{ET} = \frac{2}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2} \sin n \frac{\pi}{4}$$

Рассчитаем спектральную плотность $\frac{B(n\omega_1)}{ET}$, результаты расчетов сведем в таблице 9 и изобразим на рисунках в таблице 8.

Таблица 8 – Этапы построения спектральных характеристик сигнала $S_3(t)$





При $n = 0$ возникает неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскрытие которой дает $\frac{B(0)}{T} = 0$. Нули спектральной плотности можно определить из уравнений

$$\sin n \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{при } n = 2, 4, 6$$

$$\sin n \frac{\pi}{4} = 0 \quad \text{при } n = 4, 8, 12$$

Таблица 9 – Отсчеты нормированной спектральной плотности сигнала $S_3(t)$

n	$\frac{B(n\omega_1)}{ET}$	n	$\frac{B(n\omega_1)}{ET}$
0	0,0000	8,5	0,0203
0,5	0,3445	9,0	0,0500
1,0	0,4502	9,5	0,0438
1,5	0,2773	10,0	0,0000
2,0	-0,0000	10,5	-0,0396
2,5	-0,1664	11,0	-0,0409
3,0	-0,1501	11,5	-0,0150
3,5	-0,0492	12,0	0,0000
4,0	0,0000	12,5	-0,0138
4,5	-0,0383	13,0	-0,0346
5,0	-0,0900	13,5	-0,0308
5,5	-0,0756	14,0	-0,0000
6,0	0,0000	14,5	0,0287
6,5	0,0640	15,0	0,0300
7,0	0,0643	15,5	0,0111
7,5	0,0230	16,0	0,0000
8,0	0,0000		

$$\text{ФЧХ} \sim \varphi(n\omega_1) = - \begin{cases} \frac{\pi}{2} & A(n\omega_1) > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & A(n\omega_1) < 0 \end{cases}$$

Анализируя спектральные характеристики трех сигналов, можно сделать следующие выводы:

- пульсирующий характер спектральной плотности определяется тем, что сигналы $S_1(t)$; $S_2(t)$ и $S_3(t)$ импульсные и имеют разрывы первого рода;
- если сигнал четный и имеет среднее значение, отличное от нуля, то спектральная плотность при $\omega = 0$ также отлична от нуля;
- если сигнал нечетный, то спектральная плотность при $\omega = 0$ равна нулю.

1.3.4 Задачи для самостоятельного решения

Рассчитать спектральную плотность сигналов табл. 2.3, заданных на интервале представления от $-\frac{T}{2}$ до $+\frac{T}{2}$. Построить АЧХ и ФЧХ спектров сигналов. Сравнить спектры сигналов и периодического, полученного циклическим повторением непериодического сигнала с периодом, равным интервалом представления T .

1.3.5 Выводы.

Непериодический сигнал можно рассматривать как предел периодического с периодом, стремящимся к бесконечности. Интервал между дискретными частотами стремится к нулю, и спектр становится СПЛОШНЫМ. Его называют спектральной плотностью.

Сигналу общего вида соответствует комплексная спектральная плотность, содержащая вещественную и мнимую составляющие. Четному сигналу соответствует комплексная спектральная плотность, содержащая только вещественную составляющую (четную функцию частоты).

Нечетному сигналу соответствует комплексная спектральная плотность, содержащая только мнимую составляющую (нечетную функцию частоты).

Если площадь сигнала равна нулю, то спектральная плотность при $\omega = 0$ будет равна нулю, т.е. спектральная плотность нечётного сигнала равна нулю при $\omega = 0$.

1.4 Теоремы о спектрах

1.4.1 Цель занятия

Приобрести практические навыки применения свойств преобразований Фурье для анализа спектральных характеристик непериодических сигналов сложной формы.

Освоить теоремы:

- о сложении сигналов;
- об умножении сигнала на константу;
- об изменении масштаба времени;
- о сдвиге сигнала во времени;
- о перемещении спектральных характеристик по оси частот.

1.4.2 Основные определения и формулы

Спектральная плотность суммы сигналов равна сумме спектральных плотностей слагаемых:

$$\Phi[\sum_i S_i(t)] = \sum_i \Phi[S_i(t)] = \sum_i \dot{S}_i(\omega). \quad (34)$$

Здесь Φ – линейный оператор прямого преобразования Фурье.

Если сигнал увеличить или уменьшить в постоянное число раз, то и спектральная плотность его соответственно увеличится или уменьшится:

$$\Phi[A \cdot S(t)] = A \cdot \Phi[S(t)] = A \cdot \dot{S}(\omega). \quad (35)$$

где $A - const.$

Сжатие сигнала во времени приводит к растяжению его спектра и пропорциональному уменьшению абсолютных значений:

$$\Phi[S(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} \cdot \dot{S}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \quad (36)$$

где $\alpha > 1$.

Растяжение сигнала во времени приводит к сжатию его спектра и пропорциональному увеличению абсолютных значений:

$$\Phi\left[S\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha \cdot \dot{S}(\alpha \cdot \omega). \quad (37)$$

где $\alpha > 1$.

Сдвиг сигнала во времени на $\pm t_3$ приводит к умножению спектральной плотности на $e^{\pm j\omega t_3}$:

$$\Phi[S(t \pm t_3)] = \dot{S}(\omega) \cdot e^{\pm j\omega t_3}. \quad (38)$$

Таким образом АЧХ спектра сдвинутого сигнала остается неизменной, а ФЧХ – получает линейное приращение $\pm \omega t_3$.

Смещение спектра сигнала на частоту $\pm \omega_0$ приводит к умножению сигнала на комплексную функцию $e^{\pm j\omega_0 t}$:

$$\Phi^{-1}[\dot{S}(\omega \pm \omega_0)] = S(t) \cdot e^{\pm j\omega_0 t}. \quad (39)$$

Здесь Φ^{-1} – линейный оператор обратного преобразования Фурье.

Умножение сигнала на гармоническую функцию вида $\cos \omega_0 t$ приводит к образованию двух симметричных составляющих комплексного спектра:

$$\Phi[S(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2}[\dot{S}(\omega - \omega_0) + \dot{S}(\omega + \omega_0)]. \quad (40)$$

Спектр сигнала $S(t)$ раздваивается, образуя два «всплеска» на частотах, близких к $\pm \omega_0$.

1.4.3 Пример 1.

Рассчитать и построить спектральные характеристики сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t) = \sum_k S_1(t - kT)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$

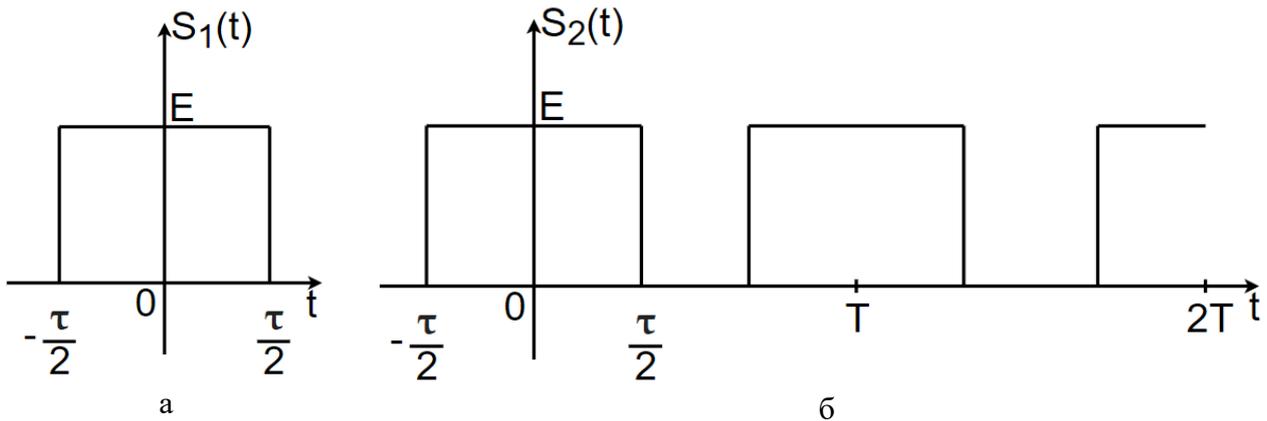


Рисунок 11 – Графическое представление сигналов

Решение. Определяем спектральную плотность сигнала $S_1(t)$

$$\dot{S}_1(\omega) = A(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E \cos \omega t dt = \frac{2E}{\omega} \sin \frac{\omega \tau}{2}$$

Введем нормированную частоту $n = \frac{\omega}{\omega_1}$ и обозначим $\frac{\omega_1 \tau}{2} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{Q}$, тогда

$$\frac{\dot{S}(n)}{T} = \frac{A(n)}{T} = \frac{E}{Q} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{Q}}{\frac{n\pi}{Q}}$$

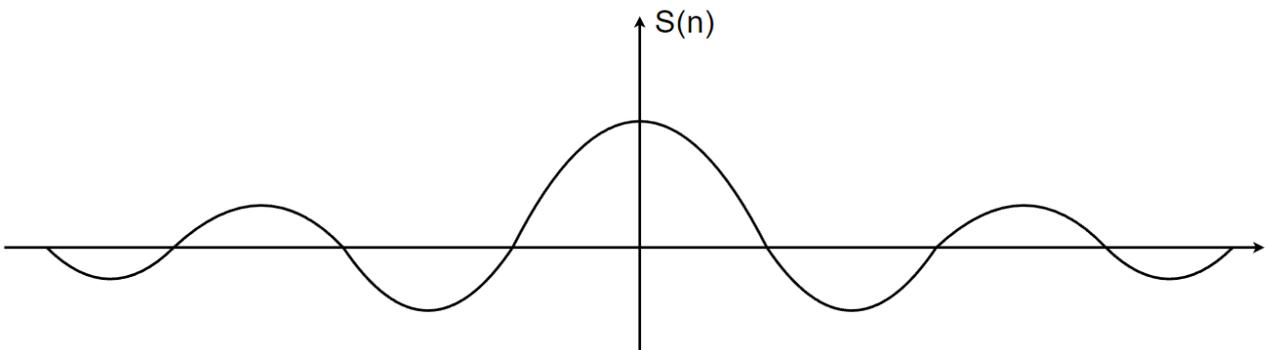


Рисунок 11 (а) – АЧХ сигнала $S_1(t)$

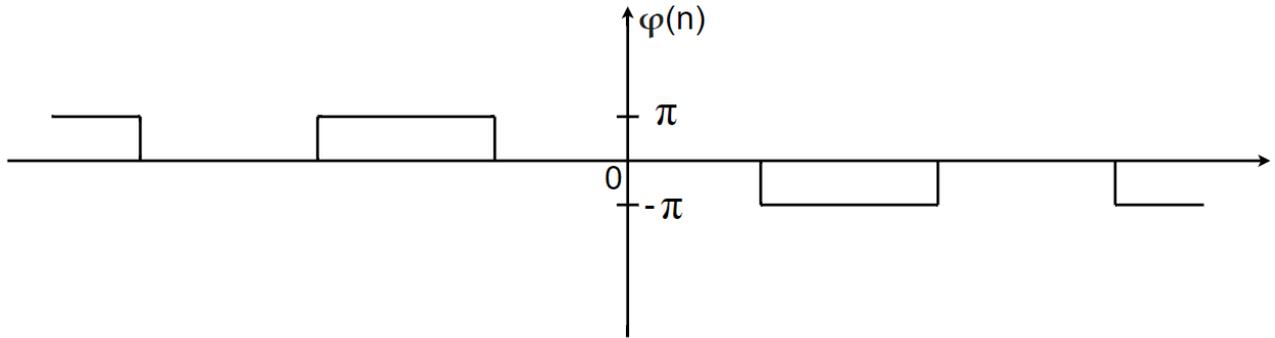


Рисунок 11 (б) – ФЧХ сигнала $S_1(t)$

Применяя теорему сдвига и теорему сложения, определим спектральную плотность сигнала $S_2(t)$

$$\dot{S}_2(\omega) = \dot{S}_1(\omega) + \dot{S}_1(\omega)e^{-j\omega T} + \dots + \dot{S}_1(\omega)e^{-jk\omega T} + \dots = \dot{S}_1(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega T k}$$

где $N = 1, 2, 3, \dots$ - количество сигналов $S_1(t)$.

Суммируя геометрическую прогрессию, получим

$$\dot{S}_2(\omega) = \dot{S}_1(\omega) \frac{1 - e^{-jN\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}}$$

Примечание. Сумма S геометрической прогрессии с основанием g может быть найдена следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= 1 + g + g^2 + g^3 + \dots + g^{N-1} \\ S \cdot g &= g + g^2 + g^3 + g^4 + \dots + g^N \\ \hline S(1 - g) &= 1 + (g - g) + 0 + \dots + 0 - g^N \\ S &= \frac{1 - g^N}{1 - g} \end{aligned}$$

Произведя алгебраические преобразования приведем спектральную плотность $\dot{S}_2(\omega)$ к виду, удобному для анализа.

$$\dot{S}_2(\omega) = \dot{S}_1(\omega) \frac{e^{-j\frac{N\omega T}{2}}}{e^{-j\frac{\omega T}{2}}} \cdot \frac{e^{j\frac{N\omega T}{2}} - e^{-j\frac{N\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}} = \dot{S}_1(\omega) \cdot \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \cdot e^{j\frac{(N-1)\omega T}{2}}$$

Введем нормированную частоту $n = \frac{\omega}{\omega_1}$, обозначим $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

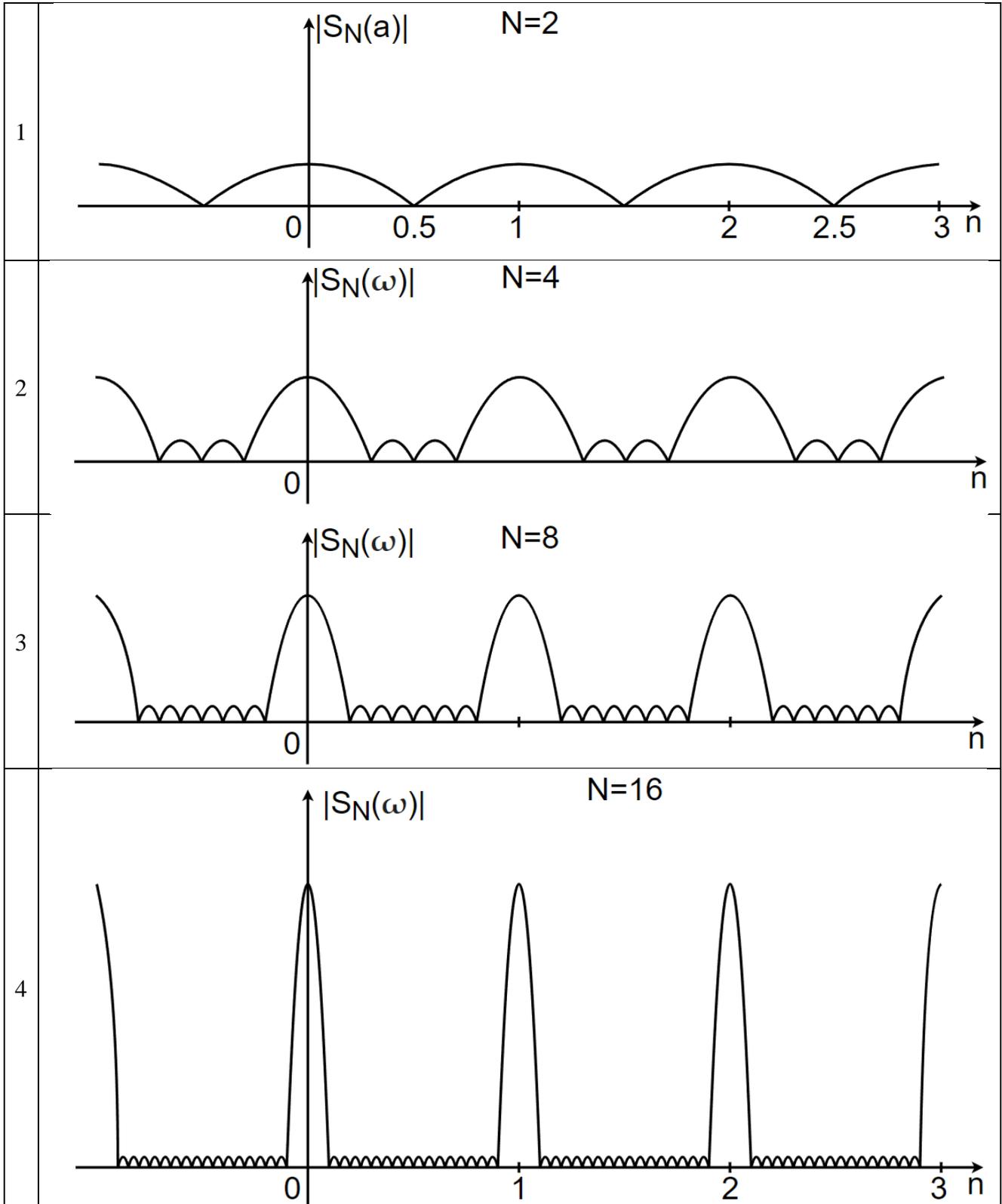
$$\dot{S}_2(n) = \dot{S}_1(n) \frac{\sin nN\pi}{\sin n\pi} \cdot e^{-j(N-1)n\pi}$$

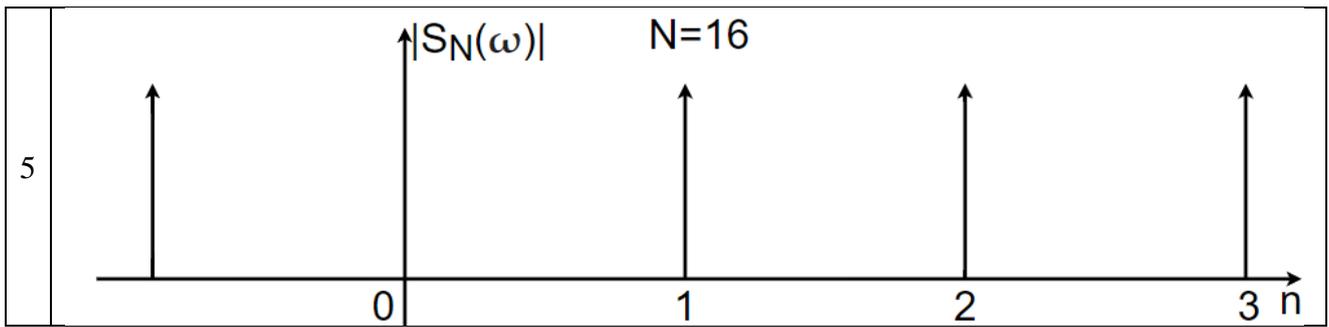
Таким образом, если сигнал $S_1(t)$ повторять периодически через постоянный интервал времени T , тогда спектральная плотность будет меняться пропорционально комплексной функции $\dot{S}_N(\omega)$

$$\dot{S}_N(\omega) = \frac{\sin nN\pi}{\sin n\pi} e^{-j(N-1)n\pi}$$

График модуля функции $\dot{S}_N(\omega)$ для различных значений N изображен на рисунках в таблице 10.

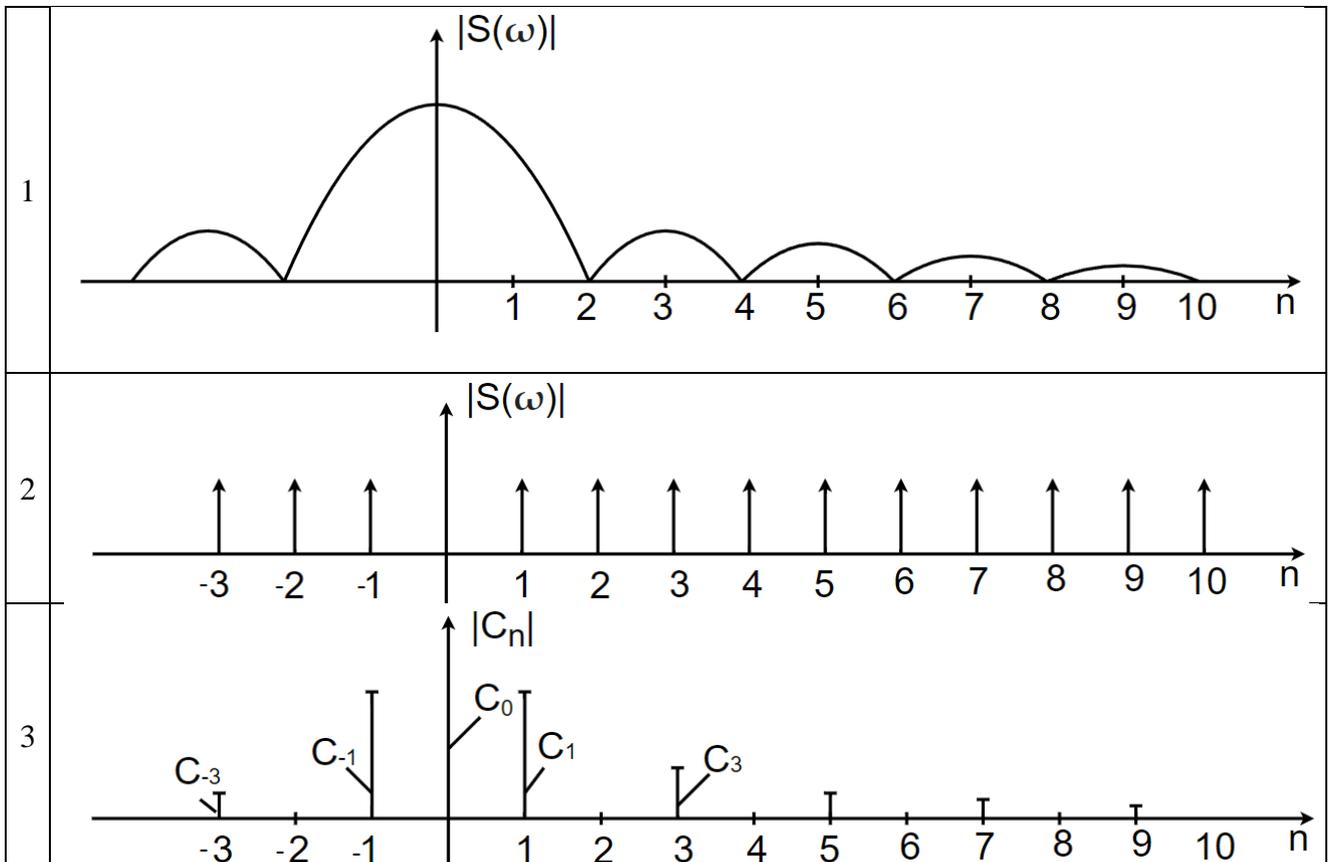
Таблица 10 – График модуля функции $\dot{S}_N(\omega)$ для различных значений N





Анализ графиков показывает, что при $N \rightarrow \infty$ комплексная функция $\hat{S}_N(\omega)$ преобразуется в периодическую последовательность дельта функций, с помощью которых осуществляются выборки значений спектральной плотности неперiodического сигнала. Таким образом, спектр из сплошного становится дискретным (рисунки в таблице 11 (2 и 3п.)).

Таблица 11 – Дискретный вид



1.4.4 Пример 2.

Рассчитать и построить спектральные характеристики сигнала $S_2(t) = S_1(t) \cos \omega_0 t$. Сигнал $S_1(t)$ изображен на рисунок 10(а).

Решение. Представим функцию $\cos \omega_0 t$ по формуле Эйлера в виде

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

Применяя теоремы о перемещении спектра, об умножении на константу и о сложении, получим

$$\dot{S}_2(\omega) = \frac{1}{2} \dot{S}_1(\omega - \omega_0) + \dot{S}_1(\omega + \omega_0)$$

$$\dot{S}_2(\omega) = E \left\{ \frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)\tau}{\omega + \omega_0} \right\}$$

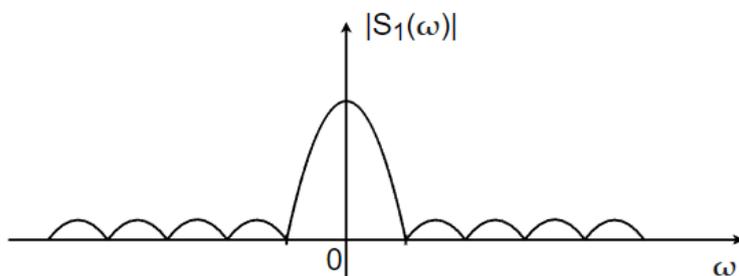


Рисунок 12(а) – АЧХ

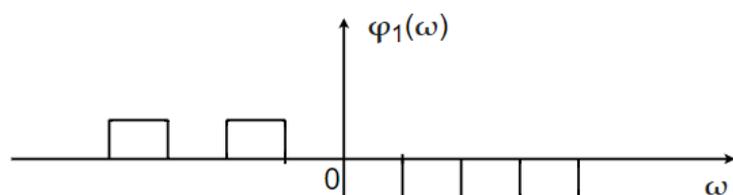


Рисунок 12 (б) – ФЧХ

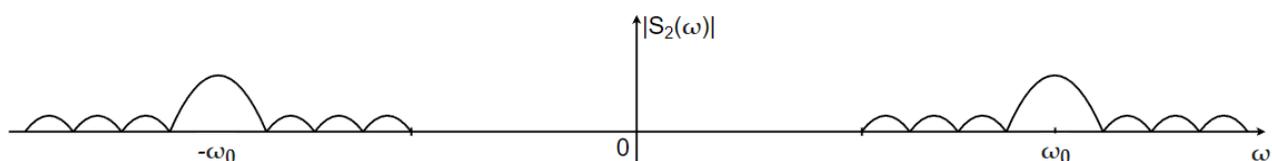


Рисунок 12 (в) – АЧХ

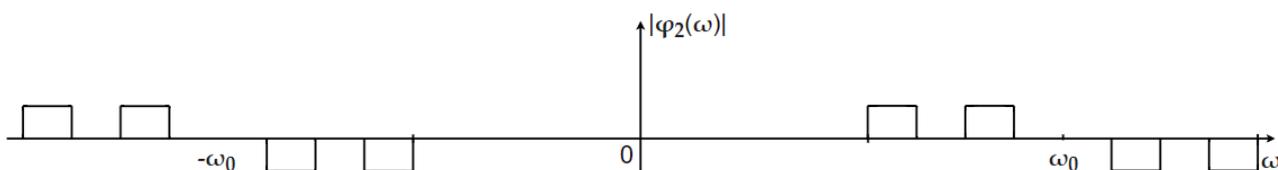


Рисунок 12 (г) – ФЧХ

1.4.5 Тестовый опрос

Для контроля за качеством самостоятельной проработки студентами всех четырех тем раздела «Математическое описание и расчет основных характеристик» студентам предлагается несколько вариантов десятишагового теста «Теоремы о спектрах». Результаты тестового опроса используются для оценки текущей успеваемости студентов. Если студенты показали неудовлетворительные знания, тогда после дополнительной проработки материала им предлагаются тесты по отдельным неусвоенным темам: «Физические характеристики сигналов», «Периодические сигналы», «Непериодические сигналы».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для ВУЗов. - 5-е издание, стереотип. - М.: Высшая школа, 2005. – 462 с.
2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебное пособие для ВУЗов. – 5-е издание. – М: Дрофа, 2006. – 717 с.
3. Радиотехнические цепи и сигналы. Часть 1 Теория сигналов и линейные цепи [Электронный ресурс]: Учебное пособие / Каратаева Н. А. 2012. –261 с. - Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/2798> (дата обращения: 10.09.2021).
4. Радиотехнические цепи и сигналы. Часть 2 Дискретная обработка сигналов и цифровая фильтрация [Электронный ресурс]: Учебное пособие / Каратаева Н. А. 2012. –257 с. - Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/2799> (дата обращения: 10.09.2021).