

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет  
систем управления и радиоэлектроники

Д. С. Брагин

## **РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ**

Часть 2

### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ И РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК**

Методические указания для подготовки к практическим занятиям по организации самостоятельной работы для студентов направления 11.03.01 «Радиотехника»

Томск  
2022

**УДК 621.37**  
**ББК 32.841**  
Б 87

**Рецензент:**

**Попов Ю. Б.**, доцент кафедры телекоммуникаций и основ радиотехники ТУСУР, канд техн. наук,

**Брагин, Дмитрий Сергеевич**

Б 87 Радиотехнические цепи и сигналы. Часть 2. Математическое описание сигналов и расчет характеристик: Методические указания для подготовки к практическим занятиям по организации самостоятельной работы для студентов направления 11.03.01 «Радиотехника»/ Д. С. Брагин. – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2022. – 46 с.

Настоящее пособие предназначено для методического руководства познавательной деятельностью студентов при самостоятельной работе над курсом РТЦиС, прежде всего в части выработки умения решать типовые задачи теории сигналов. Для студентов вузов радиотехнических специальностей.

Одобрено на заседании кафедры ТОР, протокол № 5 от 17 февраля 2022 г.

**УДК 621.37**  
**ББК 32.841**

©Брагин Д. С., 2022  
© Томск. гос. ун-т систем управления  
и радиоэлектроники, 2022

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1 ПРОХОЖДЕНИЕ УПРАВЛЯЮЩИХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ .....	5
1.1 Представление сигналов на плоскости комплексной переменной .....	5
1.2 Частотные и временные характеристики линейных цепей.....	11
1.3 Расчет сигнала на выходе линейной цепи (операторный метод).....	18
1.4 Расчет сигнала на выходе линейной цепи (метод временного интегрирования).....	24
2 КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ .....	35
2.1 Расчет корреляционных характеристик непериодических и периодических сигналов	35
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	46

## ВВЕДЕНИЕ

Освоение курса «Радиотехнические цепи и сигналы» (РТЦиС) позволяет овладеть математическими приемами исследования аналоговых и дискретных сигналов, анализа цепей и устройств, изучения прохождения сигналов через радиотехнические цепи. Задачи достаточно сложные. Они требуют построения графиков и трудоемких математических преобразований. Решения их может затруднительным и для способных студентов. Учебная литература [1, 2] не содержит подробных методических указаний по решению типовых задач, что совершенно необходимо при самостоятельной подготовке к практическим занятиям.

Настоящее пособие предназначено для методического руководства познавательной деятельностью студентов при самостоятельной работе над курсом РТЦиС, прежде всего в части выработки умения решать типовые задачи теории сигналов. Такое пособие становится особенно актуальным в условиях сокращения числа аудиторных занятий и возрастания роли самостоятельной подготовки студентов.

Руководство состоит из 2 частей и включает в себя темы охватывающих основные разделы курса. По каждой теме заданы цели, имеются основные определения и формулы, приведены примеры решения типовых задач и методические указания к сложным расчетам и построениям, даны наборы задач для самостоятельной работы. Качество усвоения самостоятельно изученной темы проверяется с помощью тестового опроса с альтернативно - выборочной формой предъявления ответов. На аудиторных занятиях выносятся такие задачи и темы, для проработки которых требуется квалифицированная помощь преподавателя. Возможно проведение ряда практических занятий в форме семинаров или организационно-деятельностных игр. На таких занятиях целесообразно рассмотреть и творчески переработать несколько самостоятельно изученных тем.

Изучение тем курса РТЦиС закрепляется с помощью индивидуальных расчётно-графических домашних заданий, для выполнения которых применяется программируемые микрокалькуляторы и ЭВМ.

Сочетание самостоятельной подготовки, управляемой и контролируемой преподавателем, с аудиторными занятиями позволяет увеличить эффективность практических занятий, усвоить разнообразный по содержанию материал курса РТЦиС за отведенное на это время.

# 1 ПРОХОЖДЕНИЕ УПРАВЛЯЮЩИХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

## 1.1 Представление сигналов на плоскости комплексной переменной

### 1.1.1 Цель занятия

Получить практические навыки представления сигнала на плоскости комплексной переменной. Научиться определять изображение по Лапласу сигнала сложной формы, используя принцип суперпозиции и свойства преобразования Лапласа. [1-4].

Освоить методику контурного интегрирования в комплексной плоскости для перехода от изображения к оригиналу.

### 1.1.2 Основные понятия, определения и формулы

Представление сигнала на плоскости комплексной переменной широко используется в радиотехнике в связи со следующими обстоятельствами. Во-первых, переход от функции вещественной переменной  $s(t)$ , описывающей мгновенные значения сигнала, к функции комплексной переменной  $S(p)$  позволяет устранить ограничения, вытекающие из требования абсолютной интегрируемости сигнала  $s(t)$ . Во-вторых, на плоскости комплексной переменной облегчается решение задач анализа, так как операция контурного интегрирования значительно проще интегрирования на плоской вещественной переменной.

Переход от функции вещественной переменной  $s(t)$  к функции комплексной переменной  $S(p)$  осуществляется с помощью преобразования Лапласа:

$$S(p) = \int_0^{\infty} s(t)e^{-pt} dt = L^+[s(t)] \quad (1.1)$$

где  $s(t)$ -оригинал сигнала,

$S(p)$ -изображение по Лапласу сигнала  $s(t)$ ,

$L^+$ -линейный оператор прямого преобразования Лапласа.

$$s(t) \leftrightarrow S(p)$$

Вычисление изображения сигнала значительно облегчается при использовании основных свойств преобразования Лапласа.

Свойства преобразования Лапласа следует рассматривать как обобщение свойств преобразований Фурье и обобщение наиболее широко применяемых теорем о спектрах.

Теоремы сложения оригиналов, умножения оригиналов на константу, сдвига оригинала во времени, перемещение изображения по комплексной частоте, дифференцирования и интегрирования оригинала, изменения масштаба времени оригинала получаются из соответствующих теорем спектров путем замены  $j\omega$  на  $p$ .

Отметим особенности прямого преобразования Лапласа по сравнению с преобразованием Фурье при дифференцировании и интегрировании оригинала. Пусть сигнал  $s(t)$  имеет изображение  $S(p)$ , образуем новый сигнал:

$$S_1(t) = \frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}} [s(t)]$$

тогда

$$S_1(p) = p^{(n)}S(p) - p^{(n-1)}S(+0) - p^{(n-2)}S'(+0) - \dots - S^{(n-1)}(+0), \quad (1.2)$$

где

$$S^{(k)}(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} S^{(k)}(t)$$

т.е.  $S^{(k)}(+0)$  означает, что имеются в виду не значения, которые функции  $S^{(k)}(t)$  имеют при  $t = 0$ , а предельные значения, к которым они стремятся, когда  $t$  стремится к нулю справа.

Если

$$s_1(t) = \int_0^t \cdots \int_0^t s(t)(dt)^n$$

то

$$S_1(p) = \frac{1}{p^n} [S(p)], \quad (1.3)$$

Для практических приложений эти теоремы являются самыми важными. Они выражают собой в высшей степени примечательное обстоятельство: дифференцирование и интегрирование, которые в пространстве оригиналов представляют собой трансцендентный процесс, заменяются в пространстве изображений совершенно элементарным действием: при дифференцировании – умножением изображения на степень аргумента "p" с одновременным добавлением многочлена, коэффициентами которого являются начальные значения оригинала и его производных; а при интегрировании – делением изображения на соответствующую степень аргумента "p".

На этих теоремах построены способы алгебраизации интегродифференциальных уравнений.

### 1.1.3 Примеры отыскания изображения по заданному оригиналу

#### 1.1.3.1 Пример 1. Определить изображения сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$

Графическое представление сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$

$$S_1(t) = \begin{cases} E, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & 0 > t > T \end{cases}$$

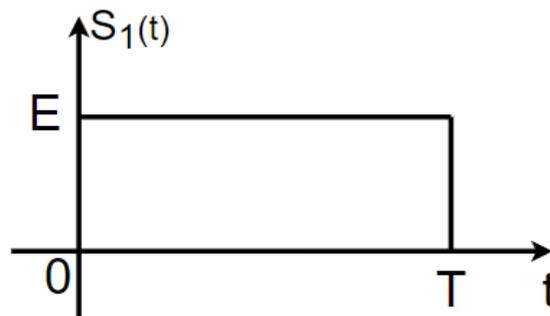


Рисунок 1.1а – Изображение сигнала  $S_1(t)$

$$S_2(t) = \begin{cases} Ee^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Рисунок 1.16 – Изображение сигнала  $S_2(t)$

Применяя прямое преобразование Лапласа, найдем

$$S_1(p) = \int_0^T E e^{-pt} dt = \frac{E}{p} (1 - e^{-pT})$$

$$S_2(p) = \int_0^{\infty} E e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \frac{E}{p + \alpha}$$

Найдем  $S_1(p)$  другим способом, а именно, представим прямоугольный импульс в виде суммы двух следующих составляющих (см. рисунок 1.2):

$$s_1'(t) = \begin{cases} E, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$s_1''(t) = \begin{cases} -E, & t \geq T \\ 0, & t < T \end{cases}$$

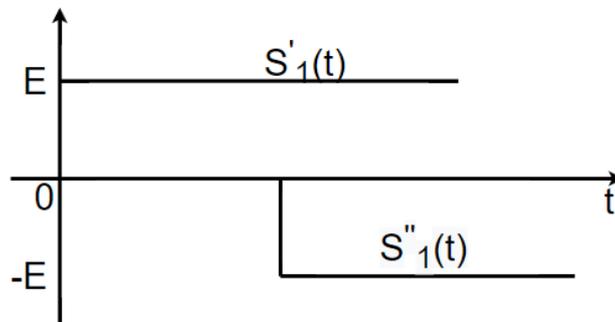


Рисунок 1.2 – Импульс в виде суммы двух следующих составляющих

Изображение  $s_1'(t)$  найдем по формуле

$$S_1'(p) = \int_0^{\infty} E e^{-pt} dt = \frac{E}{p}$$

Сигнал  $s_1''(t)$  представляет собой сигнал  $s_1'(t)$ , сдвинутый на время  $T$  и имеющий обратный знак. Изображение такого сигнала в соответствии с теоремами сдвига и умножения на константу имеет вид:

$$S_1''(p) = -\frac{E}{p} e^{-pT}$$

Используя теорему сложения, изображение прямоугольного импульса запишем в виде:

$$S_1(p) = \frac{E}{p} (1 - e^{-pT})$$

### 1.1.3.2 Пример 2.

Пользуясь свойствами преобразования Лапласа, а также результатами решения предыдущего примера, определить изображение сигнала вида:

$$s(t) = \begin{cases} Ech^2\omega_0 t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Используя формулы Эйлера, представим сигнал в виде суммы слагаемых:

$$s(t) = Ech^2\omega_0 t = E\left[\frac{1}{2}(e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t})\right]^2 = \frac{E}{2}\left[1 + \frac{1}{2}e^{2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-2\omega_0 t}\right]$$

Первому слагаемому соответствует изображение  $\frac{1}{p}$ . Второму и третьему слагаемому соответствуют изображения:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p - 2\omega_0}$$

и

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p + 2\omega_0}$$

Учитывая постоянный множитель  $\frac{E}{2}$  получим

$$S(p) = \frac{E}{2} \left[ \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 - (2\omega_0)^2} \right] = E \cdot \frac{p^2 - 2\omega_0^2}{p(p^2 - 4\omega_0^2)}$$

### 1.1.3.3 Пример 3.

Найти изображение дифференциального выражения (алгебраизовать дифференциальное выражение):

$$s^{IV}(t) - 5s'''(t) - 4s''(t) + 2s'(t) - s(t) + 8$$

при условиях:

$$s(+0) = 5$$

$$s'(+0) = 0$$

$$s''(+0) = -1$$

$$s'''(+0) = 2$$

Решение.

Пусть

$$s(t) \leftrightarrow S(p)$$

Тогда с учетом ненулевых начальных условий имеем:

$$s'(t) \leftrightarrow pS(p) - 5$$

$$s''(t) \leftrightarrow p^2S(p) - 5p$$

$$s'''(t) \leftrightarrow p^3S(p) - 5p^2 + 1$$

$$s^{IV}(t) \leftrightarrow p^4S(p) - 5p^3 + p - 2$$

Отсюда по свойству линейности получим:

$$[s^{IV}(t) - 5s'''(t) - 4s''(t) + 2s'(t) - s(t) + 8] \leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^4 S(p) - 5p^3 + p - 2 - 5[p^3 S(p) - 5p^2 + 1] - 4[p^2 S(p) - 5p] + 2[pS(p) - 5] - S(p) + \frac{8}{p} = (p^4 - 5p^3 - 4p^2 + 2p - 1)S(p) - 5p^3 + 25p^2 + 21p - 17 + \frac{8}{p}$$

#### 1.1.4 Определение оригиналов сигналов по изображениям

Оригинал сигнала по известному изображению определяется с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} S(p) e^{pt} dp = L^{-1}[S(p)] \quad (1.4)$$

Если изображение  $S(p)$  представляет собой дробно-инерциальную функцию вида:

$$S(p) = \frac{H_1(p)}{H_2(p)} = \frac{\alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0}{\beta_m p^m + \beta_{m-1} p^{m-1} + \dots + \beta_1 p + \beta_0}$$

причем  $n < m$ , то оригинал может быть определен по формуле:

$$s(t) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{(k_i-1)!} \cdot \frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}} \left[ \frac{H_1(p)}{H_2(p)} \cdot (p - p_i)^{k_i} \cdot e^{pt} \right]_{p=p_i} \quad (1.5)$$

Здесь суммирование ведется по всем различающимся корням многочлена  $H_2(p)$ , а через  $K_i$  обозначена кратность  $i$ -го корня. Если корни многочлена  $H_2(p)$  все простые, то  $s(t)$  определяется по упрощенной формуле:

$$s(t) = \sum_{i=1}^r \frac{H_1(p_i)}{H_2'(p_i)} e^{p_i t} \quad (1.6)$$

Если показатель числителя  $n$  больше или равен показателю знаменателя  $m$  дробно-рациональной функции  $\frac{H_1(p)}{H_2(p)}$ , то прежде чем применять приведенные формулы, называемые формулами обращения, необходимо выделить целую часть путем деления многочленов.

Рассмотрим примеры применения формул обращения.

#### 1.1.5 Примеры определения оригинала по известному изображению

##### 1.1.5.1 Пример 1.

Определить оригинал сигнала  $s(t)$ , имеющего изображение вида:

$$S(p) = \frac{E}{p + \alpha}$$

Изображение представляет собой дробно-рациональную функцию, где  $H_1(p) = E$ , а  $H_2(p) = p + \alpha$ .

Решая уравнение  $H_2(p) = 0$ , определим корни:

$$p + \alpha = 0, \quad p_1 = -\alpha$$

Многочлен  $H_2(p)$  имеет один простой корень, поэтому для определения оригинала можно воспользоваться упрощенной формулой (3.6), откуда имеем:

$$s(t) = \frac{H_1(p_1)}{H_2'(p_1)} e^{p_1 t}$$

учитывая, что  $H_2'(p) = 1$ , имеем

$$s(t) = \frac{E}{1} e^{-\alpha t} = \begin{cases} E e^{-\alpha t}, & 0 \leq t \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

### 1.1.5.2 Пример 2.

Определить оригинал сигнала  $s(t)$ , имеющего изображение вида:

$$S(p) = \frac{p}{(p + \alpha)^2}$$

Изображение представляет собой дробно-рациональную функцию, где  $H_1(p) = p$ ,  $H_2(p) = (p + \alpha)^2$

Решая уравнение  $H_2(p) = 0$ , определим корни:

$$(p + \alpha)^2 = 0, \quad p_{1,2} = -\alpha$$

т.е. имеем один корень кратности  $K_1 = 2$ .

Для определения оригинала в этом случае необходимо воспользоваться формулой (3.5), которая для нашего случая принимает вид:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{1!} \frac{d}{dp} \left[ \frac{p}{(p + \alpha)^2} (p + \alpha)^2 e^{pt} \right]_{p=-\alpha} = \frac{d}{dp} [pe^{pt}]_{p=-\alpha} = [e^{pt} + pte^{pt}]_{p=-\alpha} = \\ &= \begin{cases} (1 - \alpha t)e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### 1.1.6 Тестовый опрос

По теме «Представление сигналов на плоскости комплексной переменной» разработаны тесты, позволяющие выявить качество самостоятельной работы студентов, установить типичные ошибки. Результаты тестового опроса используются при оценке текущей успеваемости студентов.

## 1.2 Частотные и временные характеристики линейных цепей

### 1.2.1 Цель задания

Закрепить методичку расчета передаточной функции линейной цепи ее амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик.

Получить практические навыки определения переходной и импульсной характеристик линейной цепи.

Усвоить связи между частотными и временными характеристики простейших цепей.

### 1.2.2 Основные определения и формулы

Передаточной функцией цепи  $\dot{K}(\omega)$  называется отношение комплексной амплитуды гармонического сигнала на выходе цепи  $\dot{U}_{\text{вых}}(\omega)$  к комплексной амплитуде гармонического сигнала на входе цепи  $U_{\text{вх}}$ .

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = |K(\omega)|e^{-i\varphi t} \quad (1.7)$$

Здесь  $|\dot{K}(\omega)|$  - модуль комплексной передаточной функции – амплитудно-частотная характеристика цепи (АЧХ);

$\varphi(\omega)$  – аргумент комплексной передаточной функции – фазо-частотная характеристика цепи (ФЧХ).

В общем виде комплексная передаточная функция представляет собой дробно-рациональную функцию, в которой числитель и знаменатель представляют собой комплексные полиномы. Модуль дробной комплексной функции наиболее рационально определять как отношение модулей числителя и знаменателя. Аргумент дробной комплексной функции наиболее рационально определять как разность аргументов числителя и знаменателя.

Частотные свойства цепи полностью определяются зависимостями модуля и аргумента комплексного коэффициента передачи от частоты.

Для определения передаточной функции цепи в операторной форме записи следует формализовать цепь, заменив элементы с индуктивным сопротивлением на операторное сопротивление  $pL$ , а элементы с емкостным сопротивлением – на операторное сопротивление  $\frac{1}{pC}$ , при нулевых начальных условиях.

Передаточную функцию цепи  $K(\omega) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)}$  можно определить несколькими способами, например, путем преобразования схемы цепи, с помощью одного из классических методов расчета электрических цепей: методов контурных токов, узловых потенциалов, эквивалентного генератора, методами теории графов, с помощью теории четырехполюсников.

При использовании повседневного способа передаточную функцию цепи для ненагруженного (режим ХХ) четырехполюсника определяют как

$$\dot{K}_u = \frac{1}{\dot{A}_{11}} \quad (1.8)$$

Для нагруженного четырехполюсника передаточную функцию находят следующим образом

$$\dot{K}_u = \frac{Z_H}{\dot{A}_{11}Z_H + \dot{A}_{12}} \quad (1.9)$$

Переходной характеристикой линейной цепи  $h(t)$  называется отклик цепи, находящийся при начальных условиях, на воздействие единичного скачка  $l(t)$ .

$$l(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0; \\ \frac{1}{2} & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Изображение единичного скачка равно  $\frac{1}{p}$ . Изображение переходной характеристики цепи равно

$$h(p) = \frac{K(p)}{p} \quad (1.11)$$

Импульсной характеристикой цепи  $g(t)$  называется отклик цепи, находящейся при нулевых начальных условиях, на воздействие дельта-функции  $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.12)$$

Изображение дельта-функции равно  $1$ . Изображение импульсной характеристики цепи равно передаточной функции в операторной форме записи:

$$g(p) = K(p) \quad (1.13)$$

Отыскание оригиналов  $h(t)$  и  $g(t)$  затруднений не вызывает. Импульсная и переходная характеристики  $g(t)$  и  $h(t)$  связаны между собой теми же интегрально-дифференциальными соотношениями, что и единичный скачок  $l(t)$  и дельта-функция, а именно

$$\begin{cases} l(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt; \\ \delta(t) = \frac{d}{dt} [l(t)], \end{cases} \begin{cases} h(t) = \int_0^t g(t) dt \\ g(t) = \frac{d}{dt} [h(t)] + h(0) \cdot \delta(t) \end{cases} \quad (1.14)$$

Здесь  $h(0)$  – значение переходной характеристики при  $t = 0$ .

Очень полезно осмыслить полученное выражение переходной характеристики, представить в общих чертах ее поведение и сопоставить с картиной физических процессов, которые возникают в цепи при единичном воздействии. В качестве проверки следует проконтролировать выполнение предельных соотношений между частотными и временными характеристиками цепи.

Как известно их теории линейных электрических цепей, частотные и временные характеристики одной цепи связаны предельными соотношениями. В частности, существуют следующие соотношения между амплитудно-частотной характеристикой и переходной характеристикой цепи при нулевых и бесконечных значениях аргументов:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} K(\omega) &= \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} K(\omega) &= \lim_{t \rightarrow 0} h(t) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Проверка этих предельных соотношений для полученных в результате расчета характеристик цепи являются одним из свидетельств правильности их определения.

### 1.2.3 Пример.

Рассчитать и построить частотные и временные характеристики линейных цепей, схемы которых изображены на рисунке 1.3.

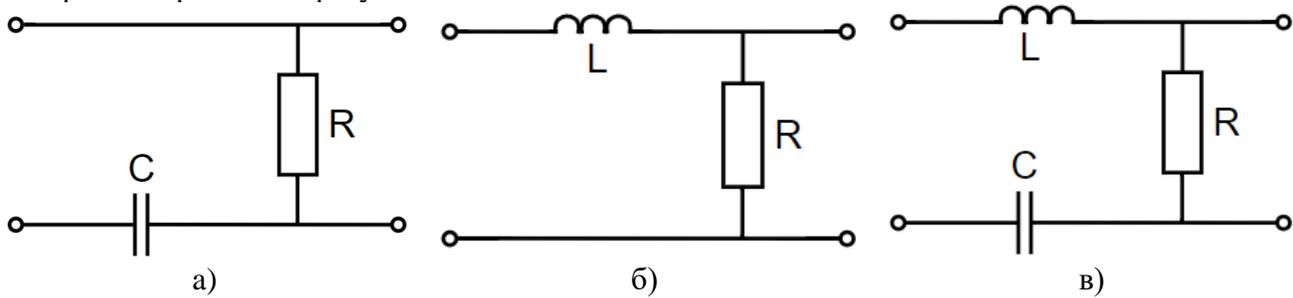


Рисунок 1.3 – Линейные цепи

$\alpha$  – дифференцирующая цепь, постоянная времени которой равно  $RC = \tau$

$\delta$  – интегрирующая цепь, в которой затухание  $\alpha = \frac{R}{L}$  обратно пропорционально постоянной времени;

б – последовательный колебательный контур, в котором резонансная частота  $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , а коэффициент затухания равен  $\alpha = \frac{R}{2L}$

Передаточные функции всех трех цепей определим как отношение операторного выходного сопротивления к операторному входному:

$$K_1 = \frac{R}{R + \frac{1}{RC}} = \frac{p\tau}{1 + p\tau}$$

$$K_2 = \frac{R}{R + pL} = \frac{\alpha}{p + \alpha}$$

$$K_3 = \frac{R}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{2p\alpha}{p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2}$$

АЧХ заданных цепей рассчитываются по формулам;

$$K_1 = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}};$$

$$K_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}$$

$$K_3 = \frac{2\omega\alpha}{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\alpha^2}}$$

ФЧХ определяются по формулам:

$$\varphi_1(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\omega\tau;$$

$$\varphi_2(\omega) = -\text{arctg}\frac{\omega}{\alpha};$$

$$\varphi_3(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\omega\alpha}{\omega_p^2 - \omega^2};$$

Частотные характеристики заданных цепей

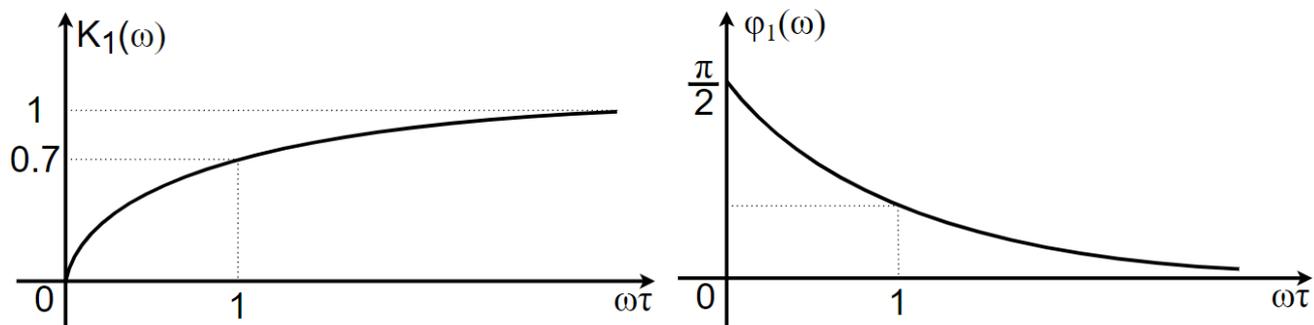


Рисунок 1.4а– АЧХ и ФЧХ дифференцирующей цепи

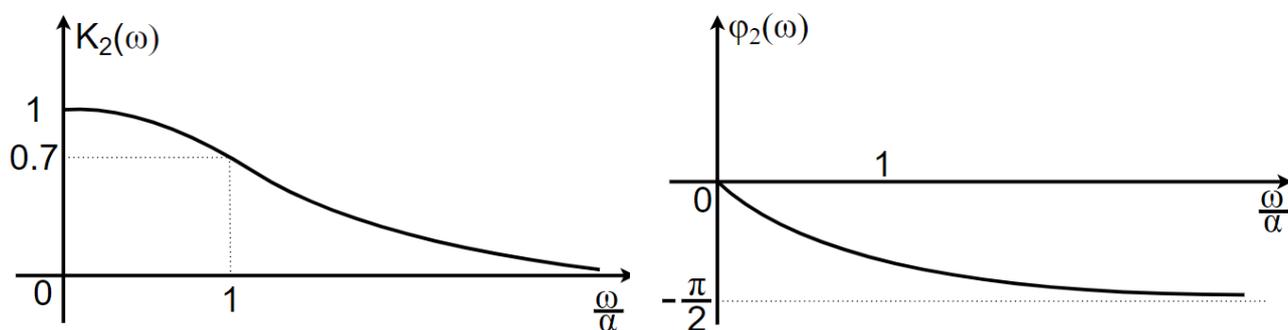


Рисунок 1.4б– АЧХ и ФЧХ интегрирующей цепи

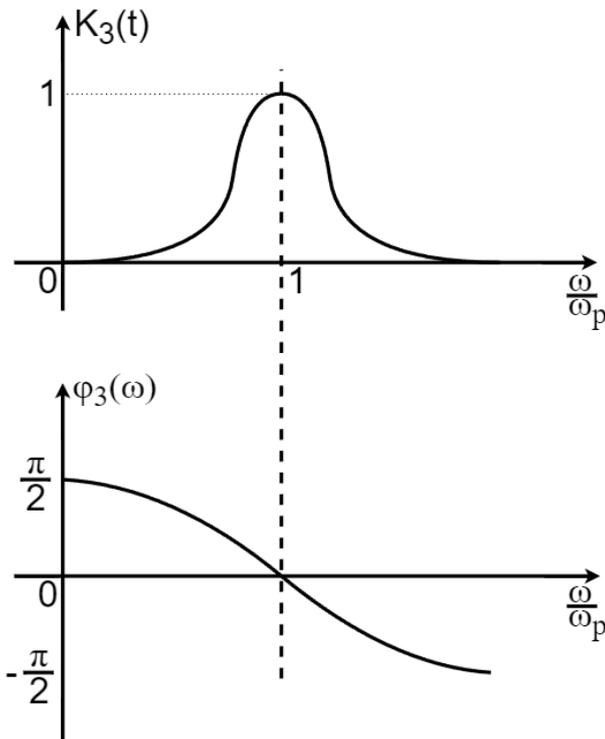


Рисунок 1.4в – АЧХ и ФЧХ последовательного колебательного контура

а – АЧХ и ФЧХ дифференцирующей цепи

б – АЧХ и ФЧХ интегрирующей цепи

в – АЧХ и ФЧХ последовательного колебательного контура

Переходные характеристики анализируемых цепей рассчитываем по формулам обращения:

$$h_1(t) = Z^{-1} \left[ \frac{K_1(p)}{p} \right] = Z^{-1} \left[ \frac{\tau}{1+p\tau} \right] = e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$t \geq 0.$$

$$h_2(t) = Z^{-1} \left[ \frac{K_2(p)}{p} \right] = Z^{-1} \left[ \frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \right],$$

здесь

$$p(p + \alpha) = 0; \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -\alpha.$$

$$[p(p + \alpha)]'_p = 2p + \alpha.$$

$$\text{Res}_1 = \frac{\alpha}{0+\alpha} e^0 = 1 \quad t \geq 0,$$

$$\text{Res}_2 = \frac{\alpha}{-2\alpha+\alpha} e^{-\alpha t} = e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, h_2(t) = 1 - e^{-\alpha t}, \text{ при } t \geq 0; h_3(t) = Z^{-1} \left[ \frac{K_3(p)}{p} \right] =$$

$$Z^{-1} \left[ \frac{2\alpha}{p^2+2p\alpha+\omega_p^2} \right], p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2 = 0,$$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_p^2} = \begin{cases} -\alpha \pm \alpha_0 & \text{при } \alpha > \omega_p \\ -\alpha \pm j\omega_{\text{CB}} & \text{при } \alpha < \omega_p \\ -\alpha & \text{при } \alpha = \omega_p \end{cases}$$

Обозначим

$$\alpha_0 = \sqrt{\alpha^2 - \omega_p^2} \quad \text{при } \alpha > \omega_p$$

$$j\omega_{\text{CB}} = \sqrt{\alpha^2 - \omega_p^2} \quad \text{при } \alpha < \omega_p$$

$$(p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2)'_p = 2(p + \alpha).$$

$$\text{При } P_1 = -\alpha + \alpha_0, \quad P_2 = -\alpha - \alpha_0$$

$$\text{Res}_{1,2} = \frac{2\alpha}{-2\alpha \pm 2\alpha_0 + 2\alpha} e^{-\alpha t} e^{\pm \alpha_0 t} = \pm \frac{\alpha}{\alpha_0} e^{-(\alpha \pm \alpha_0)t}$$

$$\text{При } P_1 = -\alpha + j\omega_{\text{CB}}, \quad P_2 = -\alpha - j\omega_{\text{CB}}$$

$$\text{Res}_{1,2} = \frac{2\alpha}{-2\alpha \pm 2j\omega_{\text{CB}} + 2\alpha} e^{-\alpha t} e^{\pm j\omega_{\text{CB}} t} = \pm \frac{\alpha}{j\omega_{\text{CB}}} e^{-\alpha t} e^{-j\omega_{\text{CB}} t}$$

$$h_3(t) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\alpha_0} e^{-\alpha t} \text{sh} \alpha_0 t, & \alpha > \omega_p \\ 2\alpha t e^{-\alpha t}, & \alpha = \omega_p \\ \frac{2\alpha}{\omega_{\text{CB}}} e^{-\alpha t} \sin \omega_{\text{CB}} t, & \alpha < \omega_p \end{cases}$$

Импульсные характеристики определим, дифференцируя переходные по времени.

$$g_1(1) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$g_2(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

$$g_3(t) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\alpha_0} (\alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0 t - \alpha \operatorname{sh} \alpha_0 t) e^{-\alpha t}, & \alpha > \omega_p \\ \frac{2\alpha}{\omega_{\text{CB}}} (\omega_{\text{CB}} \cos \omega_{\text{CB}} t - \alpha \sin \omega_{\text{CB}} t) e^{-\alpha t}, & \alpha < \omega_p \\ 2\alpha(1 - \alpha t) e^{-\alpha t}, & \alpha = \omega_p \end{cases}$$

Временные характеристики анализируемых цепей:

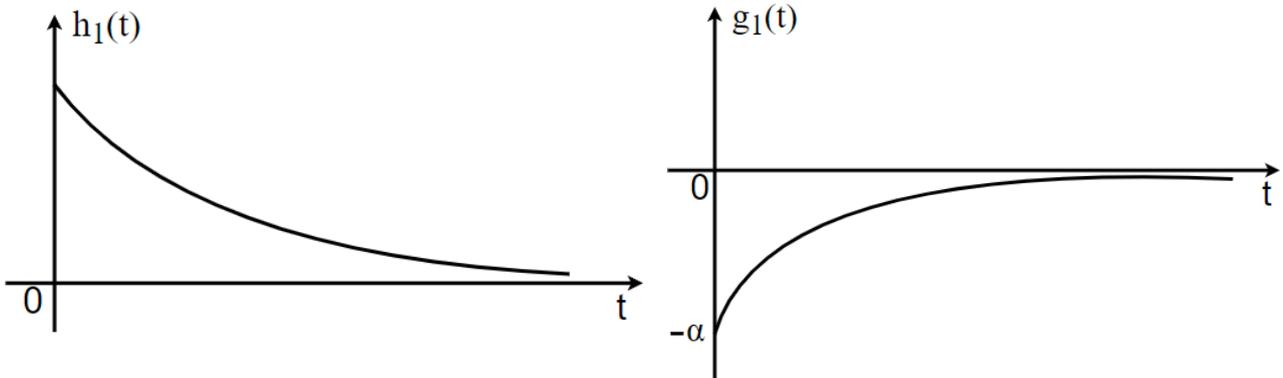


Рисунок 1.5а –  $h_1(t)$  и  $g_1(t)$  дифференцирующей цепи

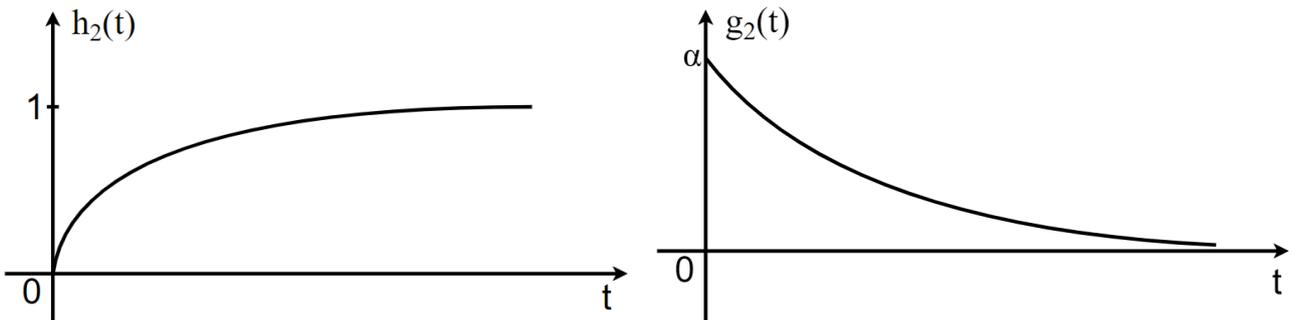


Рисунок 1.5б –  $h_2(t)$  и  $g_2(t)$  дифференцирующей цепи

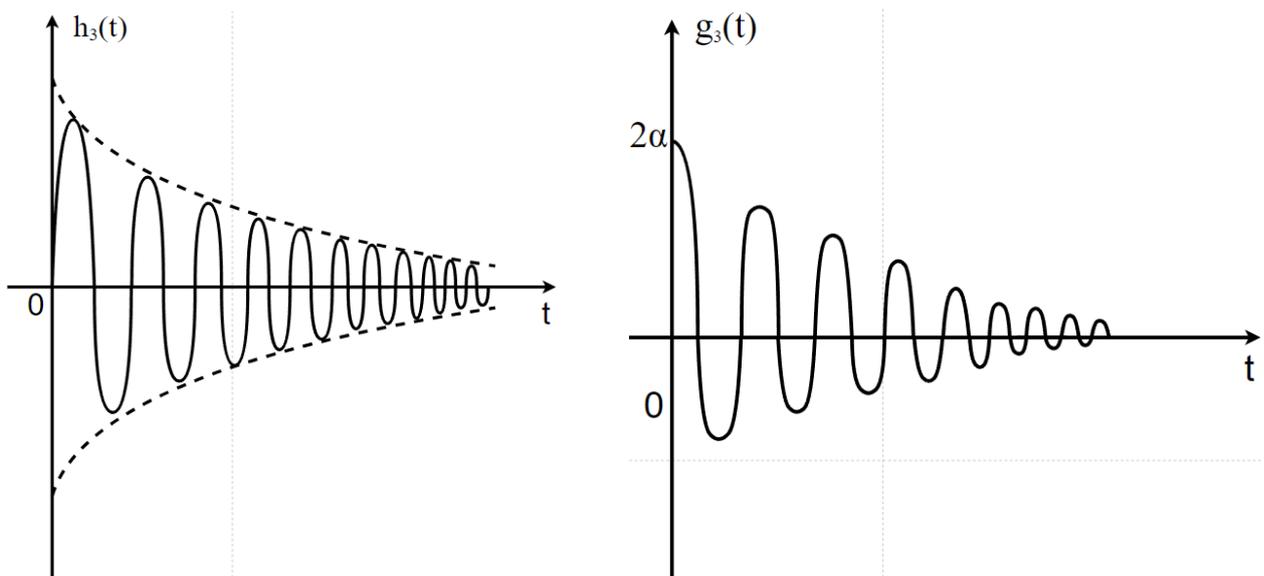


Рисунок 1.5в -  $h_3(t)$  и  $g_3(t)$  дифференцирующей цепи

Проверим выполнение предельных соотношений.

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} K_1(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_1(t) = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} K_1(\omega) = \lim_{t \rightarrow 0} h_1(t) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} K_2(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) = 1 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} K_2(\omega) = \lim_{t \rightarrow 0} h_2(t) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} K_3(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_3(t) = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} K_3(\omega) = \lim_{t \rightarrow 0} h_3(t) = 1 \end{cases}$$

Последние тождество справедливо для любых соотношений  $\alpha$  и  $\omega_p$ .

#### 1.2.4 Тестовый опрос

Поскольку тема «Частотные и временные характеристики линейных цепей» частично изучалась в дисциплине «Основы теории цепей», то десятишаговый тест по этой теме содержит вопросы как РТЦиС, так и по ОТЦ. Каждому из студентов на практическом занятии предлагается свой вариант теста. Результаты тестового опроса используется при постановке автоматического зачета по дисциплине РТЦиС.

### 1.3 Расчет сигнала на выходе линейной цепи (операторный метод)

#### 1.3.1 Цель занятия

Получить практический опыт применения операционного исчисления для расчета отклика линейной цепи на произвольное воздействие.

Закрепить навыки: применения прямого преобразования Лапласа для представления входного сигнала в комплексной плоскости, т.е. отыскания изображения сигнала на входе линейной цепи; определения изображения сигнала на выходе линейной цепи; применения обратного преобразования Лапласа (теоремы обращения) для отыскания оригинала на выходе цепи.

#### 1.3.2 Основные понятия и порядок расчета отклика на произвольное воздействие

При непериодическом воздействии на линейную цепь спектральный метод имеет две разновидности: метод, основанный на преобразовании Фурье и метод, основанный на преобразовании Лапласа (операторный анализ цепей). Если первый метод может быть применен только при воздействиях, описываемых абсолютно интегрируемыми функциями времени, то второй метод являясь его развитием и обобщением, применим в случае любых воздействий. Важным преимуществом второго метода является также наличие таблиц изображений и оригиналов (см. литературу по операционному исчислению, например [5]), позволяющих исключить зачастую сложные вычисления и ускорить проведение анализа. Однако при этом возникает опасность за столь формализованной процедурой не уловить сущности спектрального метода и упустить физический смысл процессов, протекающих в изучаемой цепи при заданном воздействии. Поэтому на всех этапах применения операторного метода: расчете изображения воздействия, получении изображения отклика и отыскании оригинала, следует проводить параллель со спектральным методом, основанным на преобразовании Фурье и имеющем четкое физическое толкование каждого из трех названных этапов.

Рекомендуется следующий порядок расчета отклика.

Вначале, с помощью прямого преобразования Лапласа, либо пользуясь известными свойствами преобразования Лапласа, определяют изображение воздействия.

Затем определяют изображение отклика как произведение изображения воздействия и ранее найденной передаточной функции цепи.

И, наконец, оригинал на выходе при отыскивают с помощью обратного преобразования Лапласа. При этом вычеты в простых и кратных полюсах вычисляют, используя соответствующие формулы обращения.

1.3.3 Пример 1. Проанализировать прохождение прямоугольного импульсного сигнала  $S(t)$  (рисунок 6а) через линейную цепь, схема которой изображена на рисунке 6б.

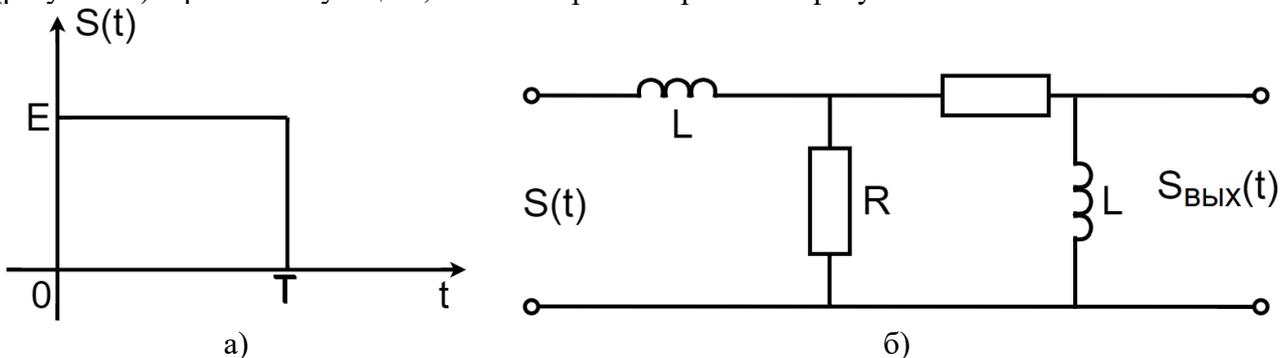


Рисунок 6 – а) Прямоугольный импульс, б) Линейная цепь

Исследуемая цепь – двухзвенный  $\Gamma$  – образный четырехполюсник, характеризующийся параметром затухания  $\alpha = \frac{R}{L}$ .

Изображение сигнала найдено в примере п.1.3.3.1.

Примечания:

1. Количество слагаемых в изображении равно количеству элементарных сигналов которые образуют исследуемый входной сигнал произвольной формы.
2. Множитель  $e^{\pm pT}$  в изображении свидетельствует о моменте включения элементарного сигнала во времени.  
 $e^0$  – соответствует включению сигнала при  $t=0$   
 $e^{-pT}$  – соответствует включению сигнала при  $t=T$   
 $e^{pT}$  – соответствует включению сигнала при  $t=-T$

Передаточную функцию цепи можно определить любым из способов, указанных в п.1.2.2. В частности, используя метод контурных токов, получим

$$K(p) = \frac{p\alpha}{p^2 + 3p\alpha + \alpha^2}$$

Определим изображение сигнала на выходе линейной цепи:

$$S_{\text{вых}}(p) = \frac{E\alpha}{p^2 + 3p\alpha + \alpha^2} - \frac{E\alpha}{p^2 + 3p\alpha + \alpha^2} e^{-pT}$$

Определим оригинал сигнала на выходе линейно цепи:

$$S_{\text{вых}}(t) = \underbrace{Z^{-1} \left[ \frac{E\alpha}{p^2 + 3p\alpha + \alpha^2} \right]}_{\text{при } t \geq 0} - \underbrace{Z^{-1} \left[ \frac{E\alpha}{p^2 + 3p\alpha + \alpha^2} e^{-pT} \right]}_{\text{при } t \geq T}$$

Ищем корни

$$p^2 + 3p\alpha + \alpha^2 = 0; \quad p_1 = -0.38\alpha, \quad p_2 = -2.62\alpha;$$

$$(p^2 + 3p\alpha + \alpha^2)'p = 2p + 3\alpha.$$

$$S_{\text{вых}}(t) = \underbrace{E \cdot 0.45(e^{-0.38\alpha t} - e^{-2.62\alpha t})}_{\text{при } t \geq 0} - \underbrace{E \cdot 0.45(e^{-0.38\alpha(t-T)} - e^{-2.62\alpha(t-T)})}_{\text{при } t \geq T}$$

Перейдем к поинтервальной форме записи сигнала

$$S_{\text{вых}}(t) = \begin{cases} E \cdot 0.45(e^{-0.38\alpha t} - e^{-2.62\alpha t}), & 0 \leq t \leq T \\ E \cdot 0.45((1 - e^{0.38\alpha t})e^{-0.38\alpha t} - (1 - e^{-2.62\alpha T})e^{-2.62\alpha t}), & t \leq T \end{cases}$$

Графическое представление сигнала на выходе линейной цепи

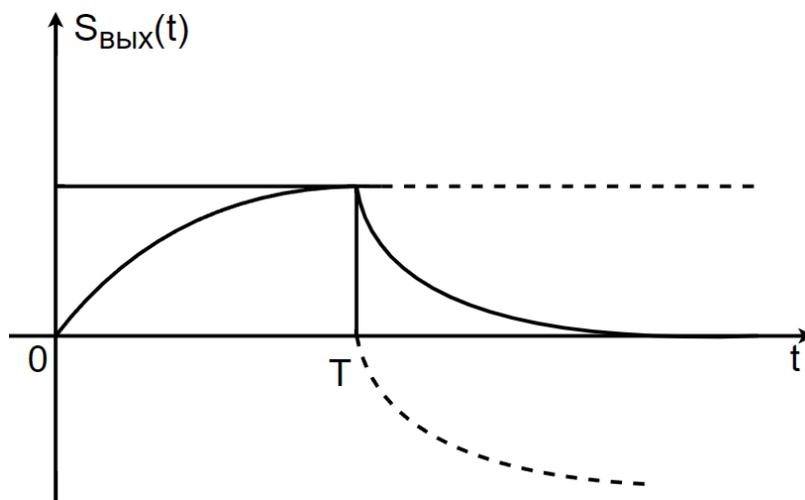


Рисунок 1.7 – Графическое представление сигнала на выходе линейной цепи

На рисунке 7 пунктирными линиями изображены отклики на ступенчатые воздействия  $El(t)$  и  $-El(t - T)$ . Сплошной линией показан результирующей (суммарный) сигнал на выходе линейной цепи.

Примечание. Если воздействие представляет собой сумму одинаковых сигналов, отличающихся постоянными множителями и сдвигами во времени, то наиболее рационально искать отклик на один элементарный сигнал. Результирующий сигнал, согласно принципу суперпозиции для линейных цепей, найдется как сумма элементарных составляющих, взятых с учетом постоянных множителей и сдвигов во времени.

### 1.3.4 Пример 2.

Рассчитать отклик цепи (см. рисунок 1.8б) на воздействие сигнала  $S(t)$  (см. рисунок 1.8а)

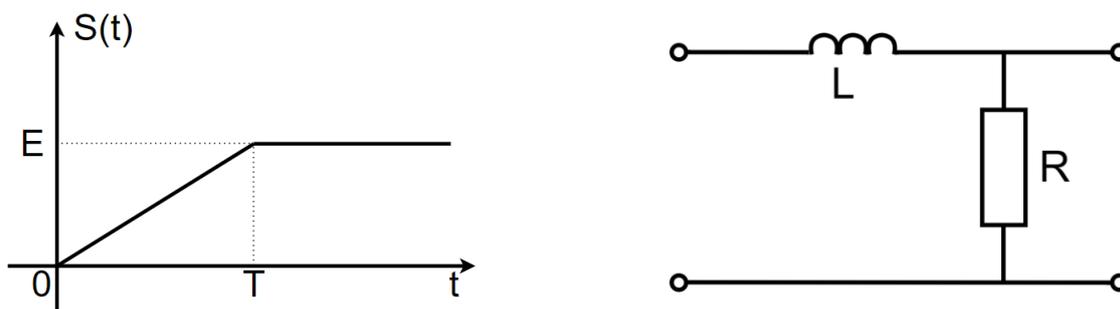


Рисунок 1.8 – а) Цепь, б) Сигнал

Исходя из графического представления сигнала, находим поинтервальное описание

$$S(t) = \begin{cases} \frac{E}{T}t & \text{при } 0 \leq t < T, \\ E & \text{при } t \geq T. \end{cases}$$

Определяем изображение сигнала

$$S(p) = \frac{E}{T} \left\{ -\frac{te^{-pt}}{p} \Big|_0^T + \frac{1}{p} \int_0^T e^{-pt} dt \right\} + \frac{E}{-p} e^{-pt} \Big|_T^\infty = \frac{E}{p} e^{-pt} + \frac{E}{Tp^2} (1 - e^{-pT}) - \frac{E}{p} e^{-pT} = \frac{E}{p} \cdot \frac{1}{p^2} (1 - e^{-pt}).$$

Полученный результат говорит о том, что воздействие содержит два элементарных сигнала, отличающихся множителем  $(-1)$  и сдвигом на интервал времени  $T$ , а именно

$$S(t) = \underbrace{\frac{E}{T} \cdot t}_{t \geq 0} - \underbrace{\frac{E}{T} (t - T)}_{t \geq T}$$

Представление входного воздействия в виде элементарных сигналов

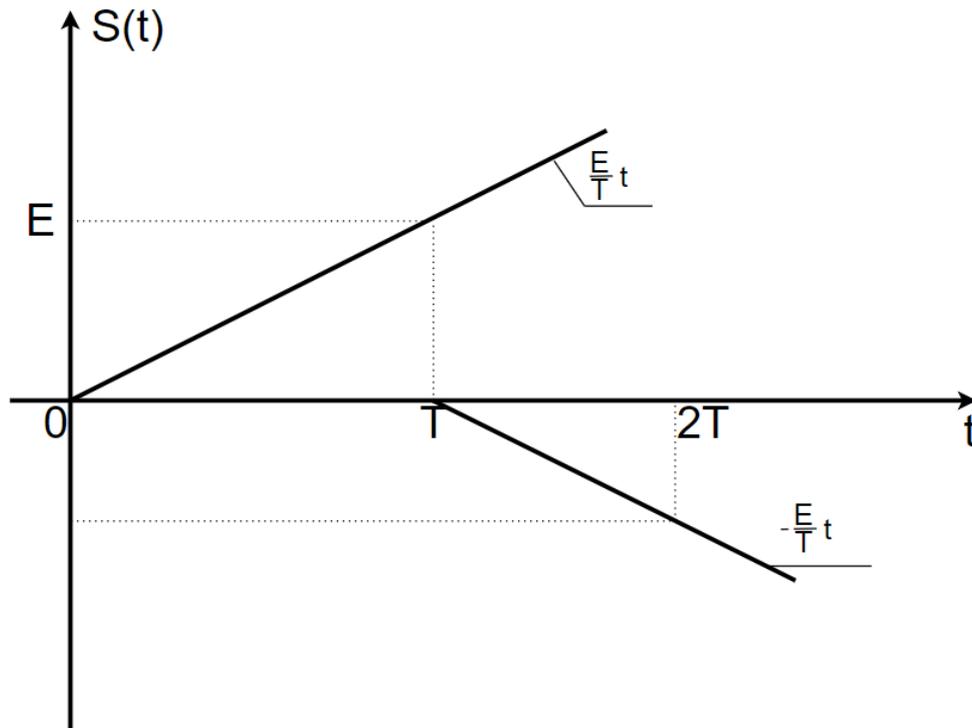


Рисунок 1.9 – Представление входного воздействия в виде элементарных сигналов

Передаточная функция анализируемой цепи равна

$$K(p) = \frac{\alpha}{p + \alpha}, \quad \text{где } \alpha = \frac{R}{L}.$$

Определим изображение сигнала на выходе линейной цепи

$$S_{\text{вых}}(p) = \frac{E}{T} \cdot \frac{1}{p^2} (1 - e^{-pT}) \cdot \frac{\alpha}{p + \alpha}$$

Переходим от изображения по Лапласу к оригиналу

$$S_{\text{вых}}(t) = \sum_{i=1}^2 \text{Res}_i$$

Определим особые точки

$$p^2(p + \alpha) = 0$$

$$p_1 = 0 \text{ (кратность корня } K_1 = 2)$$

$$p_2 = -\alpha \text{ (кратность корня } K_2 = 1)$$

Определим вычет в точке  $p_1 = 0$

$$\begin{aligned} \text{Res}_1 &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dp} \left[ \frac{E\alpha}{T} \frac{(1 - e^{-pt})}{p^2(p + \alpha)} \cdot (p - 0)^2 e^{pt} \right] = \frac{E\alpha}{T} \cdot \frac{d}{dp} \left[ \frac{e^{pt} - e^{p(t-T)}}{p + \alpha} \right] \\ &= \frac{E\alpha}{T} \left[ \frac{[te^{pt} - (t-T)e^{p(t-T)}](p + \alpha) - e^{pt} + e^{p(t-T)}}{(p + \alpha)^2} \right] \\ &= \frac{E\alpha}{T} \left[ \frac{t(p + \alpha) - 1}{(p + \alpha)^2} e^{pt} - \frac{(t-T)(p + \alpha) - 1}{(p + \alpha)^2} e^{p(t-T)} \right] \end{aligned}$$

Подставляем значение корня  $p_1 = 0$

$$Res_1 = \frac{E\alpha}{T} \left[ \underbrace{\frac{\alpha t - 1}{\alpha^2}}_{t \geq 0} - \underbrace{\frac{\alpha(t-T) - 1}{\alpha^2}}_{t \geq T} \right]$$

Определяем вычет в точке  $p_2 = -\alpha$

$$Res_2 = \left[ \frac{E\alpha}{T} \cdot \frac{1 - e^{-pT}}{p^2(p + \alpha)} (p + \alpha) e^{pt} \right] = \frac{E\alpha}{T} \left[ \frac{e^{pt} - e^{p(t-T)}}{p^2} \right]$$

Подставляем значения корня  $p_2 = -\alpha$

$$Res_2 = \frac{E\alpha}{T} \left[ \underbrace{\frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t}}_{t \geq 0} - \underbrace{\frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha(t-T)}}_{t \geq T} \right]$$

Суммируя вычеты, получим

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{E}{T} \left\{ \underbrace{\left[ t - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \right]}_{t \geq 0} - \underbrace{\left[ (t-T) - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-T)}) \right]}_{t \geq T} \right\}$$

Перейдем к поинтервальному описанию выходного сигнала

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} \frac{E}{T} \left[ t - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \right], & 0 \leq t < T \\ \frac{E}{T} \left[ T + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-T)}) \right], & t \geq T \end{cases}$$

Переход от изображения к оригиналу в этой задаче можно выполнить другим путем, а именно – использовать тот факт, что изображение представляет собой сумму двух слагаемых, отличающихся знаком и множителем  $e^{-pt}$ . Таким образом, выходной сигнал равен сумме двух одинаковых сигналов, отличающихся знаком и положением во времени. Достаточно найти оригинал первого из выходных сигналов.

$$S_{\text{ВЫХ1}}(t) = Z^{-1} \left[ \frac{E\alpha}{T} \cdot \frac{1}{p^2(p + \alpha)} \right] = \sum_{i=1}^2 Res_i$$

Второй выходной сигнал  $S_{\text{ВЫХ2}}(t)$  будет равен

$$S_{\text{ВЫХ2}}(t) = -S_{\text{ВЫХ1}}(t - T), \quad t > T$$

Рассчитывай первый выходной сигнал  $S_{\text{ВЫХ1}}(t)$

$$Res_1 = \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{d}{dp} \left[ \frac{E\alpha}{T} \cdot \frac{1}{p^2(p + \alpha)} (p - 0)^2 e^{pt} \right]_{p_1=0} = \frac{E\alpha}{T} \left[ -\frac{1}{(p + \alpha)^2} e^{pt} + \frac{1}{p + \alpha} e^{pt} \right]_{p_1=0}$$

$$= \frac{E}{\alpha T} (\alpha t - 1), \quad t \geq 0$$

$$Res_2 = \frac{E\alpha}{T} \left[ \frac{1}{p^2(p + \alpha)} (p - \alpha)^2 e^{pt} \right]_{p_2=-\alpha} = \frac{E}{T\alpha} e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

$$S_{\text{ВЫХ1}}(t) = \frac{E}{\alpha T} [dt - (1 - e^{-\alpha t})], \quad t \geq 0$$

Перейдем к поинтервальному описанию результирующего выходного сигнала

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} S_{\text{ВЫХ1}}(t), & 0 \leq t < T \\ S_{\text{ВЫХ1}}(t) + S_{\text{ВЫХ2}}(t), & t \geq T \end{cases}$$

Графическое представление выходного сигнала

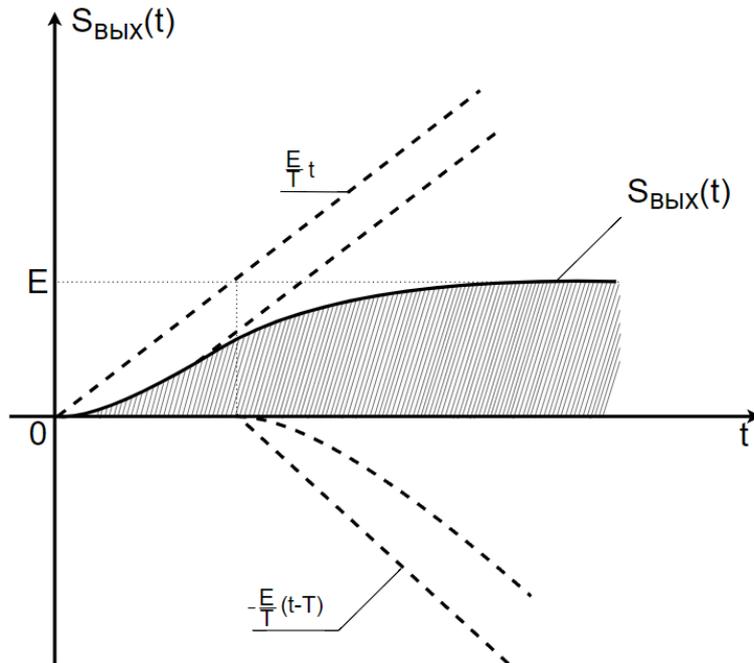


Рисунок 1.10 – Графическое представление выходного сигнала

На рисунке 1.10 пунктирными линиями изображены элементарные воздействия, штрихпунктирными линиями изображены элементарные отклики, сплошной линией изображен результирующий сигнал на выходе линейной цепи.

### 1.3.5 Задачи для самостоятельного решения

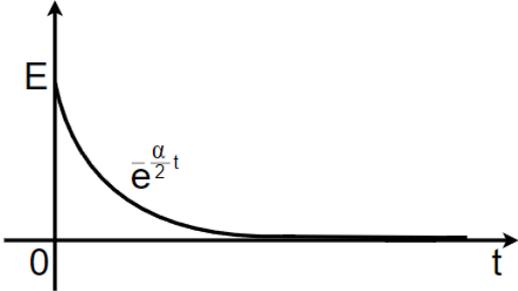
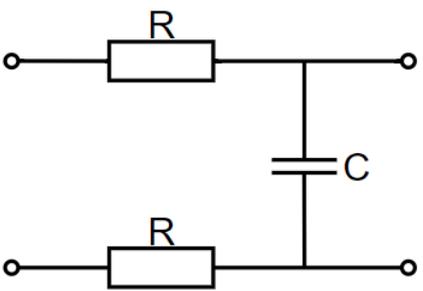
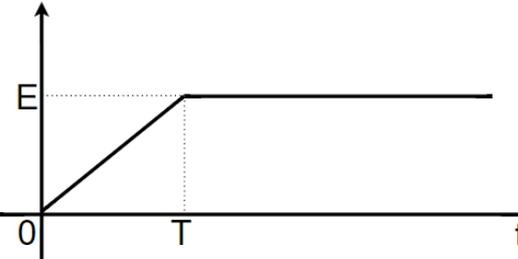
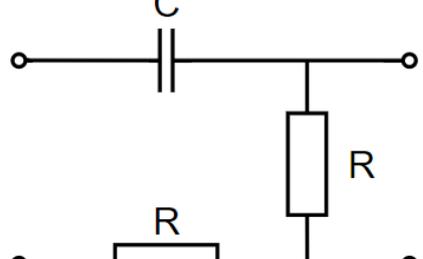
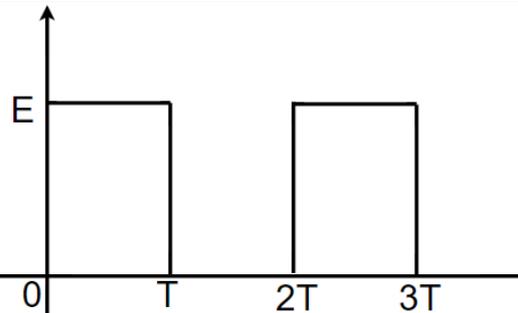
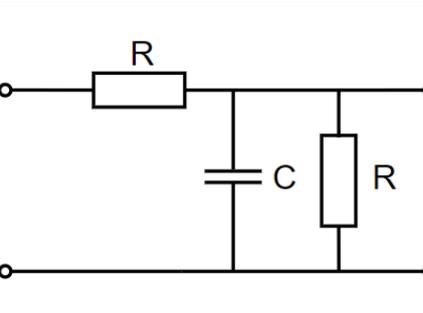
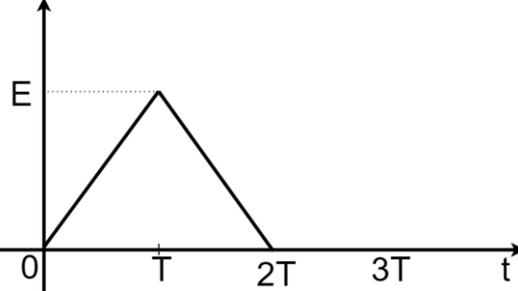
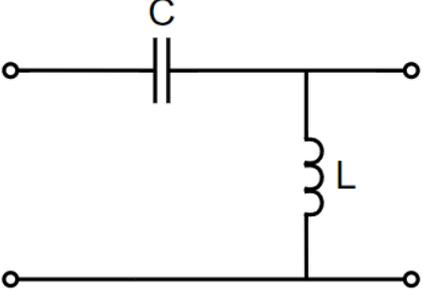
В таблице 1 дано графическое представление различных воздействий и линейных цепей. Требуется: дать аналитическое представление входных сигналов; разложить входные сигналы на элементарные составляющие (если таковые имеются); рассчитать отклик на выходе линейной цепи; получить поинтервальное описание выходного сигнала; дать графическое построение отклика.

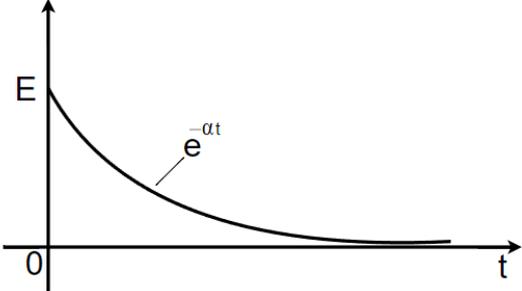
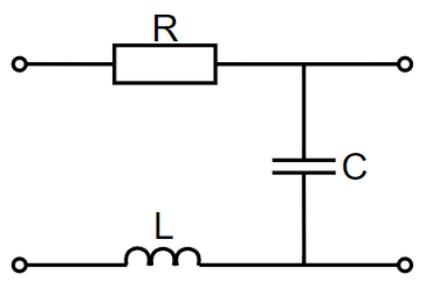
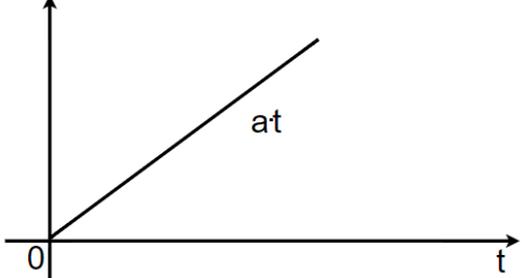
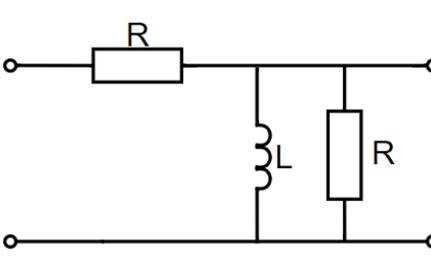
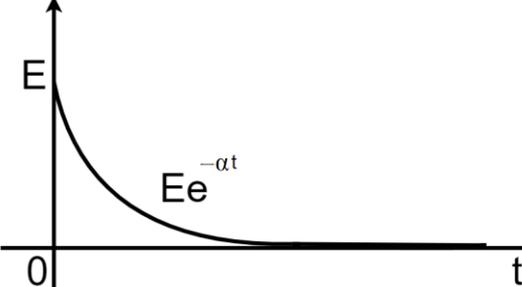
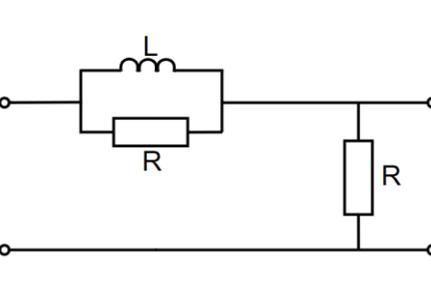
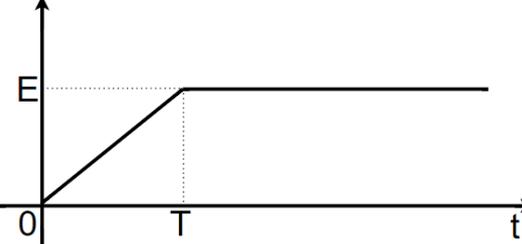
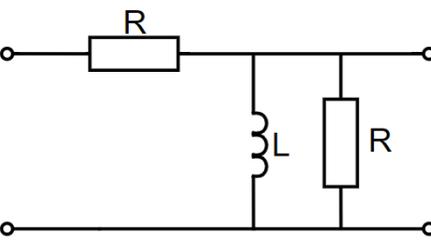
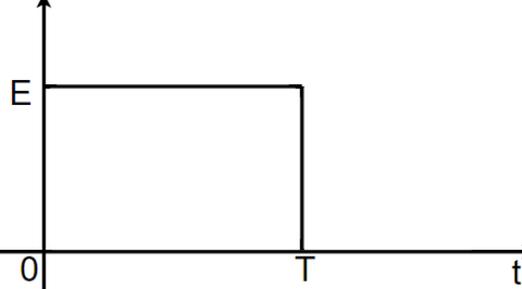
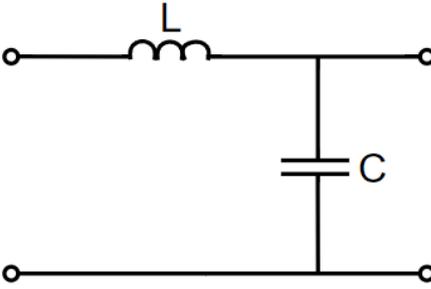
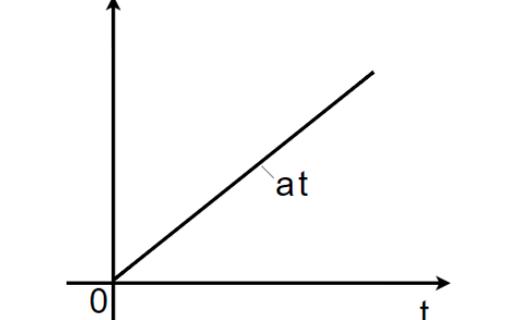
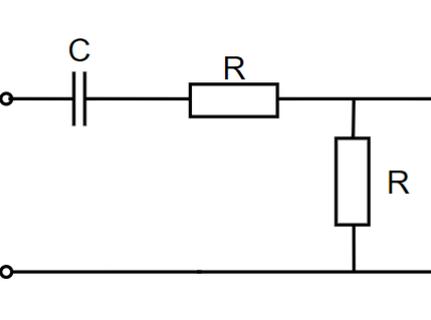
## 1.4 Расчет сигнала на выходе линейной цепи (метод временного интегрирования)

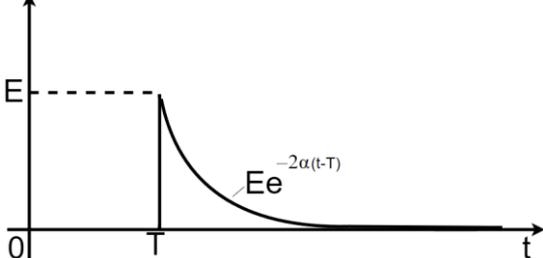
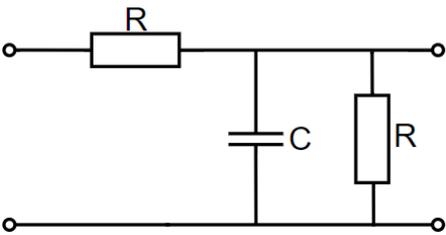
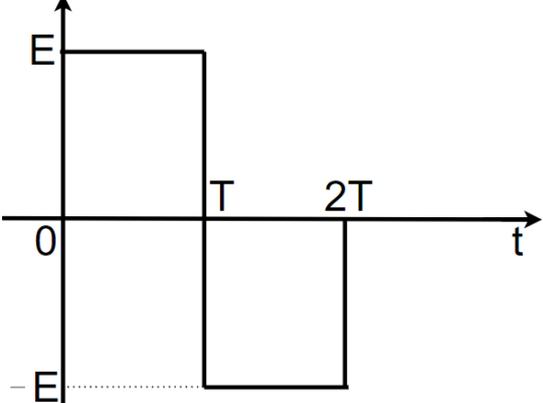
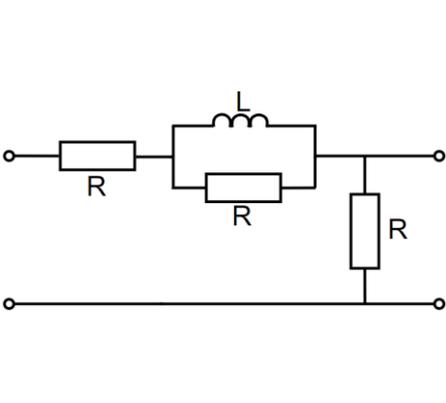
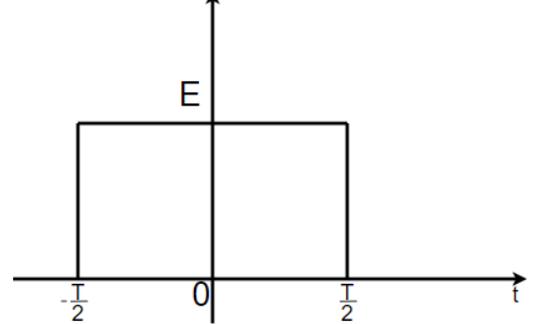
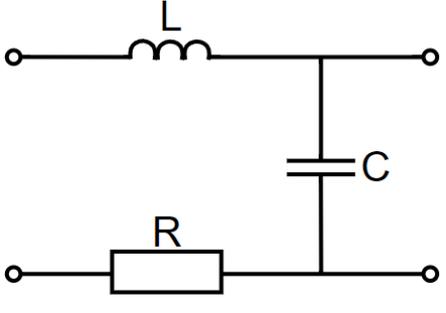
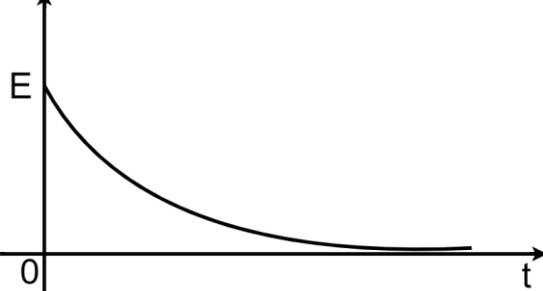
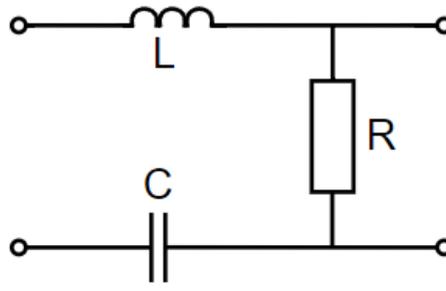
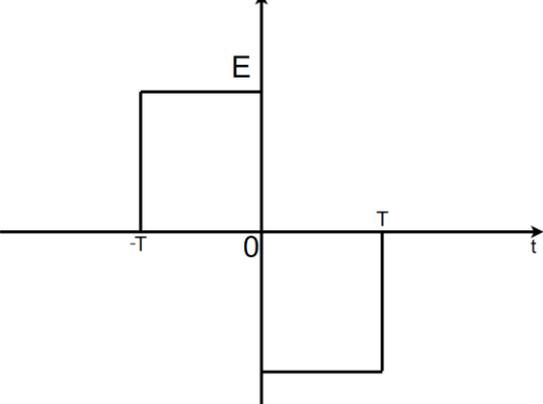
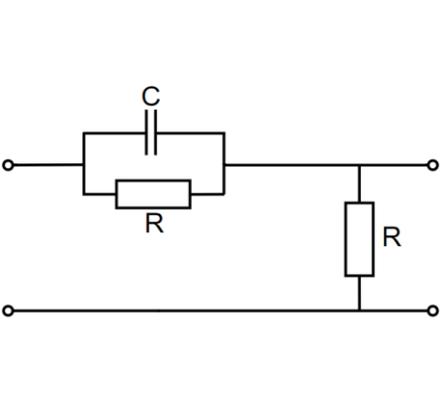
### 1.4.1 Цель занятия

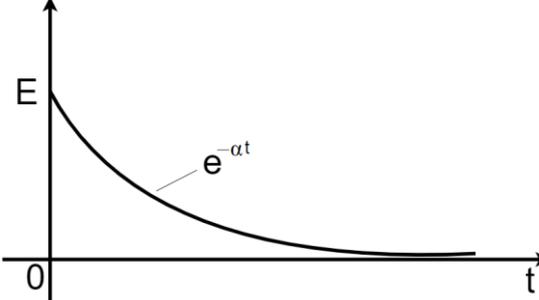
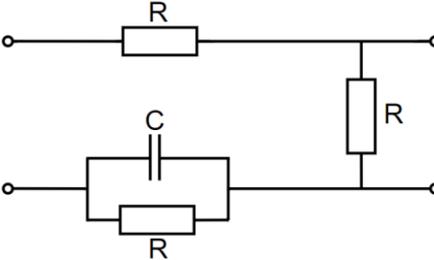
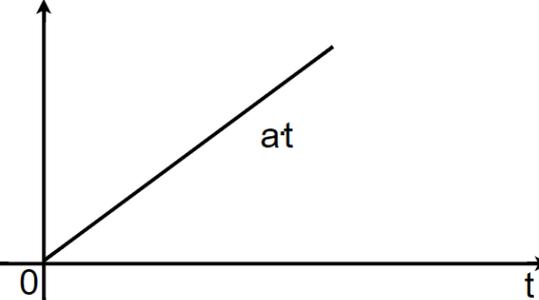
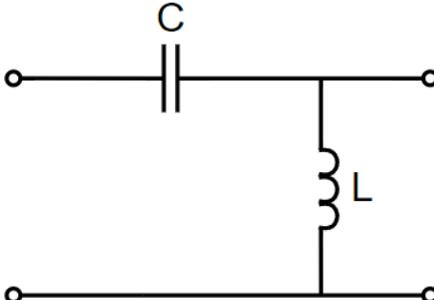
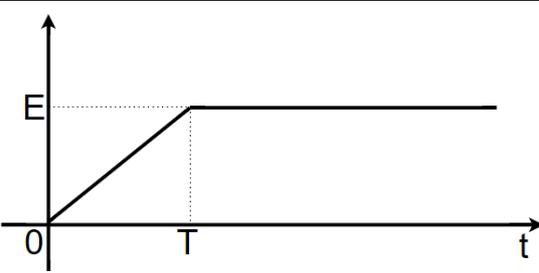
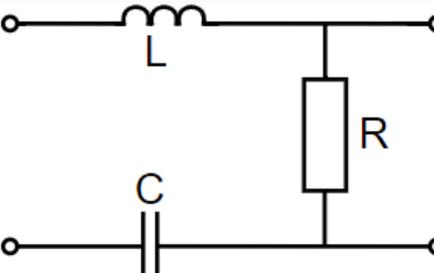
Получить практические навыки применения динамического представления входных сигналов для анализа переходных процессов в линейных цепях. Научиться выбирать и использовать необходимую разновидность метода временного интегрирования.

Таблица 1 – Набор задач для самостоятельного решения

№	Сигнал $S(t)$	Цепь	Условные обозначения
01			$\alpha = \frac{1}{RC}$
02			$\alpha = \frac{1}{RC}$
03			$\alpha = \frac{1}{RC}$
04			$T = \frac{2\pi}{\omega_p}$ $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

05			$T = \frac{R}{2L}$ $= \omega_p \frac{1}{\sqrt{LC}}$
06			$\alpha = \frac{R}{L}$
07			$\alpha = \frac{R}{L}$
08			$\alpha = \frac{R}{L}$
09			$T = \frac{2\pi}{\omega_p}$ $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
10			$\alpha = \frac{1}{RC}$

11			$\alpha = \frac{1}{RC}$
12			$\alpha = \frac{R}{L}$
13			$\alpha = \frac{R}{2L}$ $= \omega_p \frac{1}{\sqrt{LC}}$
14			$\alpha = \frac{R}{2L}$ $= \omega_p \frac{1}{\sqrt{LC}}$
15			$\alpha = \frac{1}{RC}$

16			$\alpha = \frac{1}{RC}$
17			$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
18			$\alpha = \frac{R}{2L}$ $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\alpha = \omega_p$ $= \frac{2\pi}{T}$

Освоить методику наложения решений при анализе прохождения через линейную цепь входных сигналов, меняющих аналитическое описание на интервале представления.

1.4.2 Основные определения, формулы и порядок расчета отклика на произвольное воздействие.

Различают две разновидности метода временного интегрирования.

В первом случае входной сигнал представляется совокупностью (интегральной суммой) прямоугольных импульсов длительностью  $d\tau$ , возникающих в последовательные моменты времени  $\tau$ , причем амплитуды импульсов пропорциональны мгновенным значениям входного сигнала  $S(\tau)$  в эти моменты времени.

$$S(t) = \int_0^t S(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \quad (1.16)$$

Во втором случае входной сигнал представляется интегральной суммой ступенчатых функций (единичных скачков), возникающих через равные промежутки времени  $d\tau$ . Высота каждой ступеньки равна приращению сигнала на интервале времени  $d\tau$ , которое определяется скоростью изменения входного сигнала.

$$S(t) = S(0) \cdot l(t) + \int_0^t S'(\tau) \cdot l(t - \tau) d\tau \quad (1.17)$$

Подобное интегральное описание сигналов, выражения 16 и 17 называют динамическим представлением, т.к. оно позволяет подчеркнуть развивающийся во времени характер сигнала.

В линейной цепи интегральная сумма дельта-функций преобразуется в интегральную сумму импульсных характеристик цепи с теми же коэффициентами пропорциональности.

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t S(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (1.18)$$

Интегральная сумма ступенчатых функций в линейной цепи преобразуется в интегральную сумму переходных характеристик цепи, с теми же размерами ступеней.

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = S(0) \cdot h(t) + \int_0^t S'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad (1.18)$$

В дальнейшем для простоты интеграл вида 18 будем условно называть интегралом свертки, а интеграл вида 19 – интегралом Дюамеля.

Произведя замену переменных, формулы 18 и 19 можно преобразовать к виду:

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t S(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau \quad (1.20)$$

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = S(0) \cdot h(t) + \int_0^t S'(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau \quad (1.21)$$

Применение этих формул для расчетов отклика цепи не вызывает затруднений в том случае, если входной сигнал не меняет аналитического описания на интервале от некоторого начального момента и до бесконечности.

Рекомендуется следующий порядок расчета сигнала на выходе линейной цепи методом временного интегрирования.

Вначале, пользуясь известными методами, рассчитывают передаточную функцию цепи, переходную и импульсную характеристики. При выборе метода временного интегрирования исходят, как правило, из возможности достижения результата наиболее простым путем. При этом анализируют свойства сигнала и временных характеристик линейной цепи.

Затем выбирают расчетную формулу, уяснив смысл входящих в нее выражений. Выявляют «механизм работы» данной формулы, увязывая вид временного представления воздействия с нужной временной характеристикой цепи. И, наконец, вычисляют отклик цепи.

Если входной сигнал меняет аналитическое описание на интервале представления, тогда возникает необходимость в наложении решений. Наложение решений может быть выполнено двумя способами. Во-первых, можно разложить входной сигнал на элементарные составляющие, каждая из которых не меняет аналитического описания на интервале от момента включения и до бесконечности, затем найти отклик на каждую составляющую и, наложив решения, составить поинтервальное описание входного сигнала. Во-вторых, можно, составив поинтервальное описание входного сигнала, находить выходной сигнал сначала на первом интервале, затем на втором, накладывая на него решение, полученное на первом, затем на третьем интервале, накладывая на него решения, полученные на первом и втором, и так далее. Подробнее методику наложения решений рассмотрим на примере.

### 1.4.3 Пример 1

Найдем реакцию цепи, переходная характеристика которой равна  $h(t)$ , на внешнее воздействие, задаваемое функцией вида 11.

При  $t < 0$  отклик цепи равен нулю, т.к. реакция не может опережать воздействие.

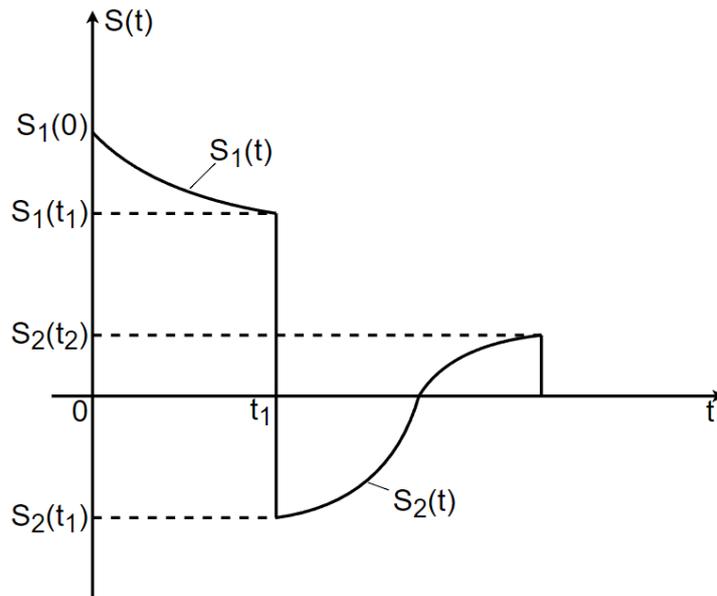


Рисунок 1.11 – Задаваемая функция

На интервале  $0 < t < t_1$  функция  $S_1(t)$  непрерывна, поэтому реакция цепи находится непосредственно по формуле (1.19) с учетом ненулевых начальных условий, т.е.

$$S_{\text{вых}}(t) = S_1(0) \cdot h(t) + \int_0^t S'_1(\tau) \cdot (t - \tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_1$$

На интервале  $t_1 < t < t_2$  сигнал  $S(t)$  задан функцией  $S_2(t)$ . В точке  $t = t_1$  имеет место скачок сигнала  $S(t)$ , величина скачка равна  $[S_2(t) - S_1(t_1)]$ .

Для расчета отклика на интервале  $t_1 < t < t_2$  разбиваем интервал интегрирования  $] 0, t [$  на два промежутка  $] 0, t_1 [$  и  $] t_1, t [$ . С учетом реакции на скачок в точке  $t = t_1$  получим

$$S_{\text{вых}}(t) = S_1(0) \cdot h(t) + \int_0^{t_1} S'_1(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + [S_2(t_1) - S_1(t_1)] \cdot h(t - t_1) + \int_{t_1}^t S'_2(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau, \quad t_1 < t < t_2$$

При расчете отклика на интервале  $t \geq t_2$  следует учитывать, что в интервал интегрирования попадает еще один скачок сигнала  $S(t)$  в точке  $t = t_2$ . Величина скачка равна  $[0 - S_2(t_2)]$ .

$$S_{\text{вых}}(t) = S_1(0) \cdot h(t) + \int_0^{t_1} S'_1(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + [S_2(t_1) - S_1(t_1)] \cdot h(t - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} S'_2(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + [0 - S_2(t_2)] \cdot h(t - t_2), \quad t \geq t_2$$

#### 1.4.4 Методами временного интегрирования решить задачу по п.1.3.4.

Передаточная функция и временные характеристики анализируемо цепи уже найдены в примере 1.2.3

$$K(p) = \frac{\alpha}{p + \alpha}; \quad h(t) = 1 - e^{-\alpha t}; \quad g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

Рассмотрим первый способ наложения решения. Для этого разложим сигнал на элементарные составляющие

$$S(t) = \frac{E}{T} t \cdot l(t) - \frac{E}{T} (t - T) \cdot l(t - T)$$

Для расчета отклика цепи на воздействие первой составляющей целесообразно воспользоваться формулой 19, т.к. дифференцирование сигнала приводит к упрощению выражения, а именно

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t \left(\frac{E}{T} \tau\right)' \cdot [1 - e^{-\alpha(t-\tau)}] d\tau = \frac{E}{T} \left[ t - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \right], \quad t \geq 0$$

Вторая составляющая воздействия отличается знаком и сдвинута на интервал времени  $T$ , поэтому без расчета записываем вторую составляющую отклика.

$$S_{\text{ВЫХ}_2}(t) = -\frac{E}{T} \left[ (t - T) - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-T)}) \right], \quad t \geq T$$

Накладывая решения, составляем поинтервальное описание выходного сигнала

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} S_{\text{ВЫХ}_1}(t), & 0 \leq t < T \\ S_{\text{ВЫХ}_1}(t) + S_{\text{ВЫХ}_2}(t), & t \geq T \end{cases}$$

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} \frac{E}{T} \left[ t - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \right], & 0 \leq t < T \\ \frac{E}{T} \left[ T + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-T)}) e^{-\alpha T} \right], & t \geq T \end{cases}$$

Рассмотрим второй способ наложения решений. Для этого воспользуемся поинтервальным описанием входного воздействия.

$$S(t) = \begin{cases} \frac{E}{T} t \cdot 1, & 0 \leq t < T \\ E, & t \geq T \end{cases}$$

С учетом нулевых начальных условий рассчитываем отклик на интервале  $0 \leq t < T$ .

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t \left(\frac{E}{T} \tau\right)' [1 - e^{-\alpha(t-\tau)}] d\tau =$$

$$= \frac{E}{T} \left[ \tau - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha(t-\tau)} \right] \Big|_0^t = \frac{E}{T} \left[ t - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \right], \quad 0 \leq t < T.$$

Рассчитываем отклик на интервале времени  $t \geq T$ .

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^T \left(\frac{E}{T} \tau\right)' [1 - e^{-\alpha(t-\tau)}] d\tau + \int_T^t (E)' [1 - e^{-\alpha(t-\tau)}] d\tau, \quad t \geq T$$

Второе слагаемое в условиях этой задачи равно нулю, поэтому

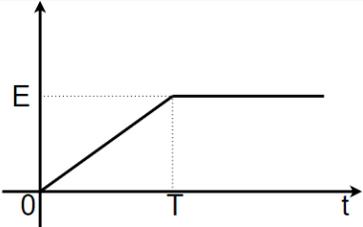
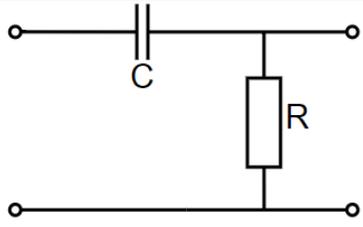
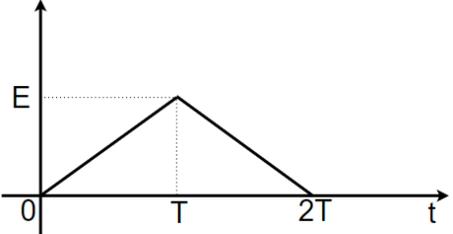
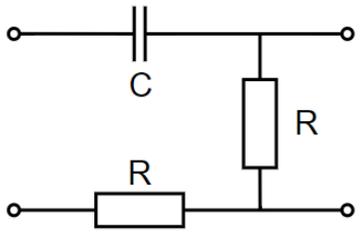
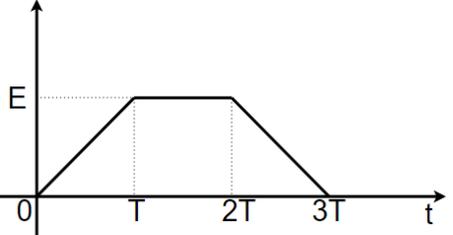
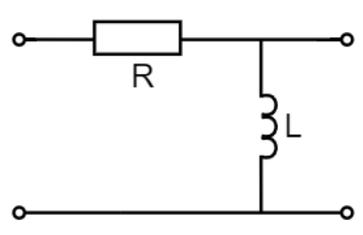
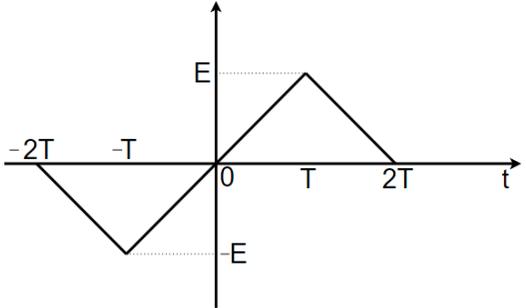
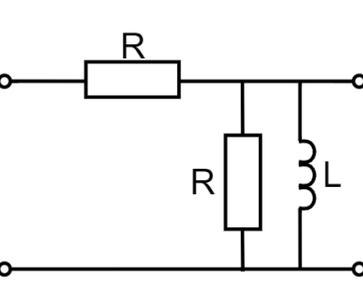
$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{E}{T} \left[ T + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T}) e^{-\alpha(t-T)} \right], \quad t \geq T$$

Таким образом, решение этой задачи методами временного интегрирования позволяют получить результат наиболее коротким путем.

#### 1.4.5 Задачи для самостоятельного решения

В таблице 2 и 3 даны временное представление различных воздействий, а также варианты линейных цепей с известными временными характеристиками. Требуется: выбрав метод временного интегрирования, рассчитать и построить отклик на интервале времени от момента включения и до бесконечности.

Таблица 2 – Набор задач к разделу 1.4

№	График сигнала $S(t)$	Аналитическое описание сигнала	Цепь	Переходная характеристика
01		$S(t) = \frac{E}{T} [t \cdot l(t) - (t - T) \cdot l(t - T)]$		$h(t) = e^{-\alpha t}$
02		$S(t) = \frac{E}{T} [t \cdot l(t) - 2 \cdot (t - T) \cdot l(t - T) + (t - 2T) \cdot l(t - 2T)]$		$h(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha t}{2}}$ $\frac{R}{L} = \alpha$
03		$S(t) = \frac{E}{T} [t \cdot l(t) - (t - T) \cdot l(t - T) - (t - 2T) \cdot l(t - 2T) + (t - 3T) \cdot l(t - 3T)]$		$h(t) = e^{-\alpha t}$ $\frac{R}{L} = \alpha$
04		$S(t) = \frac{E}{t} [-(t + 2T) \cdot l(1 + 2T) + 2(t + T) \cdot l(t + T) - 2 \cdot (t - T) \cdot l(t - T) + (t - 2T) \cdot l(t - 2T)]$		$h(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha t}{2}}$ $\frac{R}{L} = \alpha$

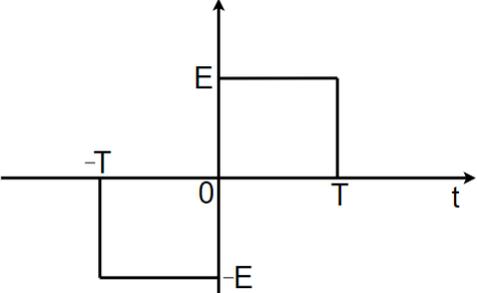
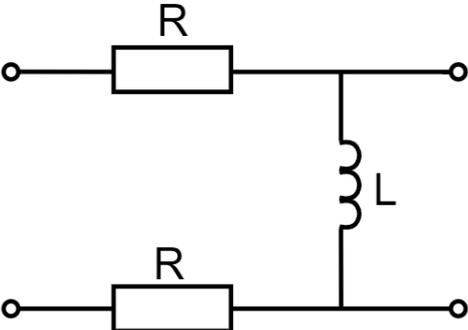
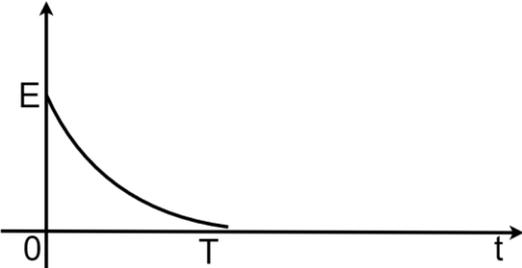
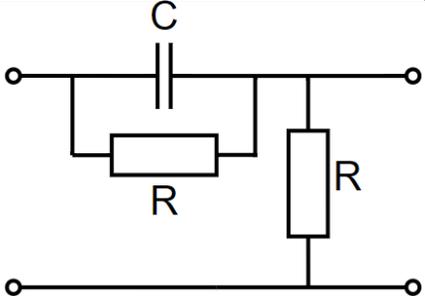
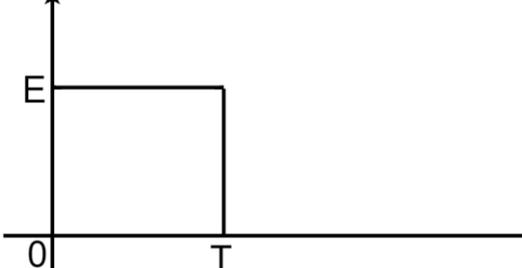
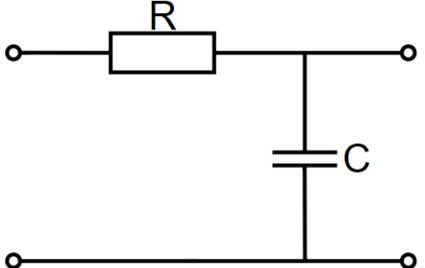
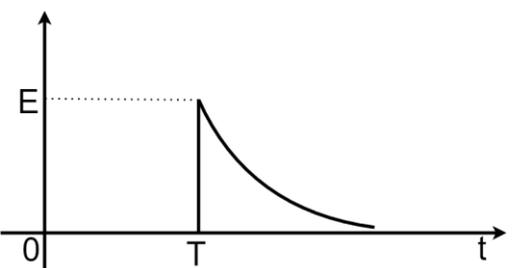
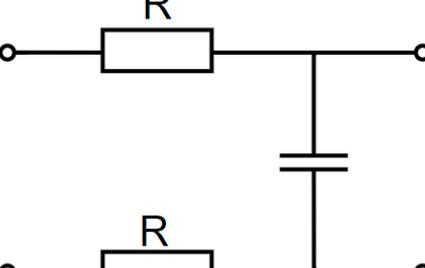
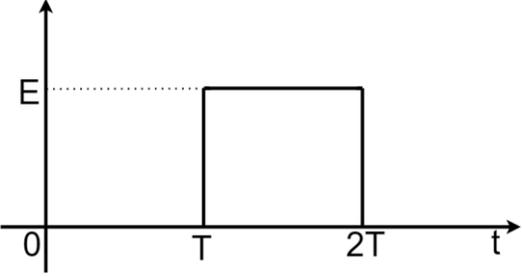
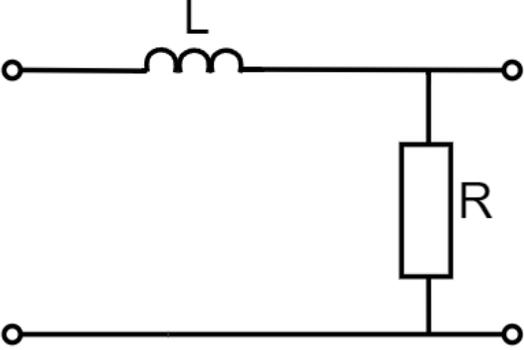
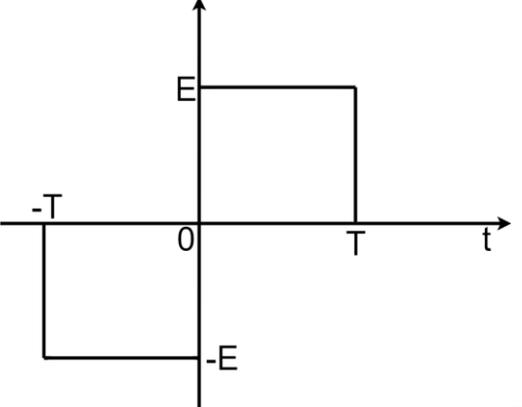
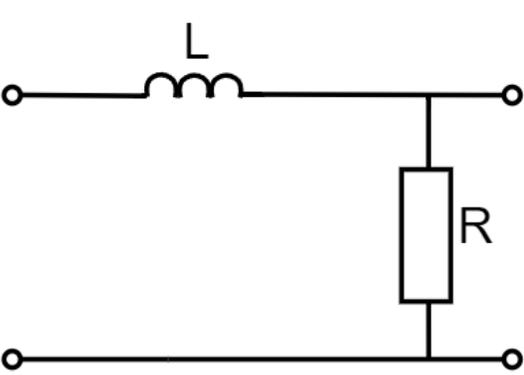
05		$S(t) = E[-1(t + T) + 2 \cdot l(t) - l(t - T)]$		$h(t) = e^{-2\alpha t}$ $\frac{R}{L} = \alpha$
----	---	---	---	--

Таблица 3 – Набор задач к разделу 1.4

№	График сигнала $S(t)$	Аналитическое описание сигнала	Цепь	Импульсная характеристика
01		$S(t) = E \cdot l(t)e^{-\alpha t}$		$g(t) = \delta(t)\alpha e^{-2\alpha t}$ $\frac{1}{RC} = \alpha$
02		$S(t) = E[l(t) - l(t - T)]$		$g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$ $\frac{1}{RC} = \alpha$
03		$S(t) = E \cdot l(t - T)e^{-\alpha(t-T)}$		$g(t) = \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha t}{2}}$ $\frac{1}{RC} = \alpha$

04	 <p>A graph showing a rectangular pulse function <math>S(t)</math> on a coordinate system with time <math>t</math> on the horizontal axis and amplitude on the vertical axis. The pulse starts at <math>t = T</math> and ends at <math>t = 2T</math>, with a constant amplitude of <math>E</math>. The origin is marked as <math>0</math>.</p>	$S(t) = E[l(t - T) - l(t - 2T)]$	 <p>A circuit diagram showing an inductor <math>L</math> in series with a resistor <math>R</math>. The inductor is connected to the top input terminal, and the resistor is connected in parallel between the top and bottom output terminals.</p>	$g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$ $\frac{R}{L} = \alpha$
05	 <p>A graph showing a bipolar rectangular pulse function <math>S(t)</math> on a coordinate system with time <math>t</math> on the horizontal axis and amplitude on the vertical axis. The pulse is centered at <math>t = 0</math> and extends from <math>t = -T</math> to <math>t = T</math>. It has a positive amplitude of <math>E</math> for <math>0 &lt; t &lt; T</math> and a negative amplitude of <math>-E</math> for <math>-T &lt; t &lt; 0</math>. The origin is marked as <math>0</math>.</p>	$S(t) = E[-l(t + T) + 2 \cdot l(t) - l(t - T)]$	 <p>A circuit diagram showing an inductor <math>L</math> in series with a resistor <math>R</math>. The inductor is connected to the top input terminal, and the resistor is connected in parallel between the top and bottom output terminals.</p>	$g(t) = \alpha e^{-2\alpha t}$ $\frac{R}{L} = \alpha$

## 2 КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

### 2.1 Расчет корреляционных характеристик непериодических и периодических сигналов

#### 2.1.1 Цель занятия

Научиться выявлять степень связи (корреляции) двух сигналов один из которых сдвинут во времени.

Получить практический опыт расчета: автокорреляционных функций различных видов сигналов; взаимных корреляционных функций.

#### 2.1.2 Основные определения формулы

Автокорреляционная функция (АКФ) позволяет судить о степени связи сигнала с его сдвинутой во времени копией.

Если сигнал  $S(t)$  задан на интервале времени  $(-\infty, +\infty)$  и ограничен по энергии, то АКФ определяется в единицах энергии интегралом вида

$$\Psi_{\text{э}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot S(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot S(t + \tau) dt \quad (2.1)$$
$$\Psi_{\text{э}}'(\tau) = \Psi_{\text{э}}(-\tau)$$

где  $\tau$  – величина временного сдвига сигнала.

При  $\tau = 0$  АКФ достигает максимума

$$\Psi_{\text{э}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \mathcal{E}$$

– энергия сигнала.

Если сигнал обладает бесконечно большой энергией и ограничен по мощности, то АКФ определяется в единицах мощности интегралом вида.

$$\Psi_{\text{п}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \cdot S(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \cdot S(t + \tau) dt$$
$$\Psi_{\text{п}}(\tau) = \Psi_{\text{п}}(-\tau) \quad (2.2)$$
$$\Psi_{\text{п}}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t) dt = P,$$

где  $P$  – средняя мощность сигнала

При определении  $\Psi_{\text{п}}(\tau)$  периодического сигнала усреднение выполняется по периоду  $T_1$ .

АФК периодического сигнала сама является периодической функцией с тем же периодом  $T_1$ , а именно

$$\Psi_{\text{п}}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} S(t) \cdot S[t - (\tau - nT_1)] dt = \Psi_{\text{п}}(\tau - nT_1)$$

АФК сигнала не зависит от начального временного сдвига, т.е.

$$\Psi_{\vartheta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t + t_3) \cdot S(t + t_3 - \tau) dt = \Psi_{\vartheta}(\tau)$$

Взаимная корреляция функция (ВКФ) характеризует степень связи двух сигналов  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ , один из которых сдвинут во времени.

$$\Psi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) \cdot S_2(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t + \tau) \cdot S_2(t) dt$$

$$\Psi_{12}(\tau) = \Psi_{21}(-\tau)$$

Примечания:

- 1) АКФ является частным случаем ВКФ при  $S_1(t) = S_2(t)$ ;
- 2) АКФ достигает максимума при  $\tau = 0$ ;
- 3) АКФ всегда функция четная;
- 4) ВКФ в общем случае – функция общего вида;
- 5) ВКФ может достигать максимума при любом  $\tau$ .

Примеры расчета АКВ и ВКФ различных сигналов ,  
Пример 1.

Расчитать АКФ прямоугольного импульсного сигнала  $S(t)$ , изображенного на рисунке 2.1.

$$S(t) = \begin{cases} E, & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & -\frac{T}{2} > t > \frac{T}{2} \end{cases}$$

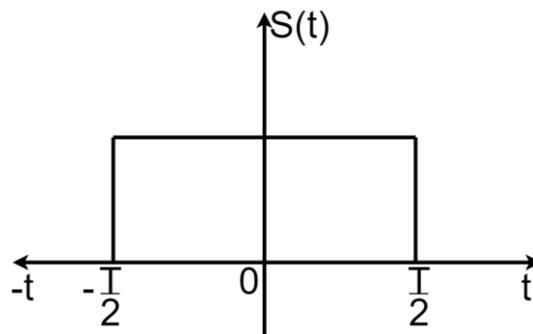


Рисунок 2.1 – Прямоугольного импульс сигнала  $S(t)$

Анализируя графическое пояснение, изображение на рисунке 2.2 уточним пределы интегрирования, а именно:

$$\Psi_{\vartheta}(\tau) = \int_{-\frac{T}{2} + \tau}^{\frac{T}{2}} E^2 dt = E^2(T - \tau), \quad 0 \leq \tau \leq T;$$

$$\Psi_{\vartheta}(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + \tau} E^2 dt = E^2(T + \tau), \quad 0 \geq \tau \geq -T;$$

Графическое пояснение к расчету АКФ

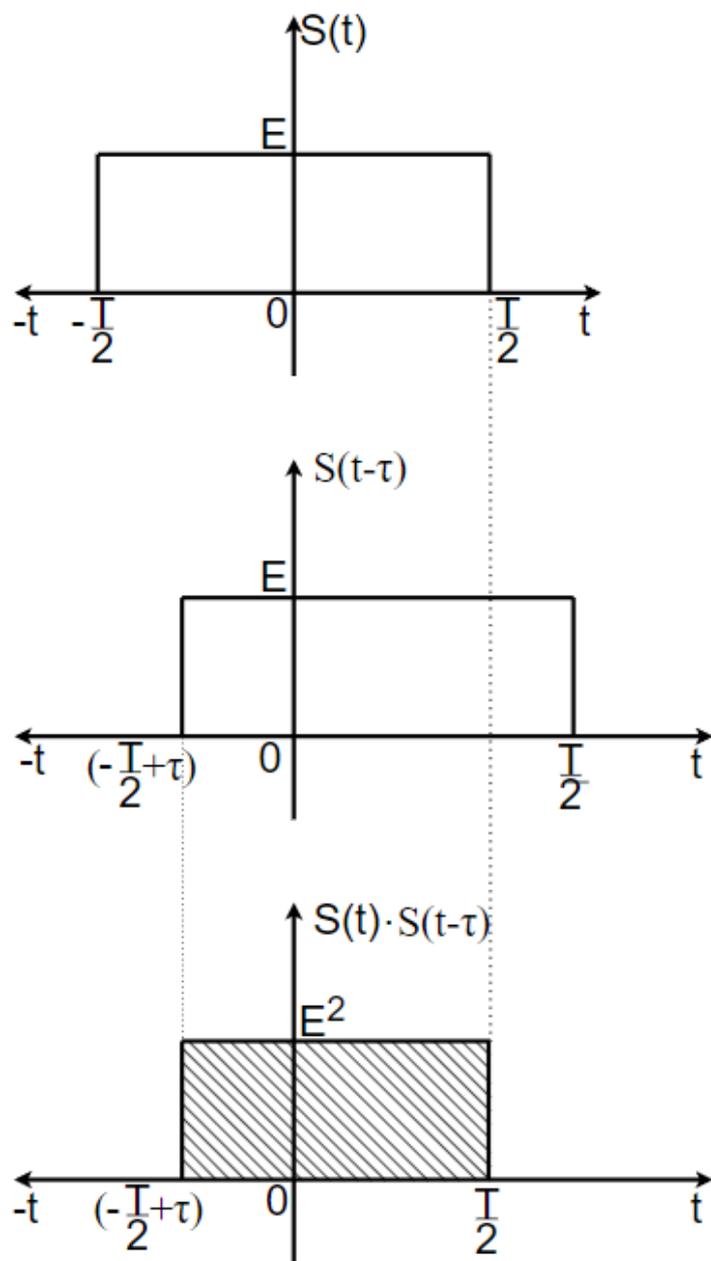


Рисунок 2.2а – Графическое пояснение к расчету АКФ: а – взаимное расположение сигнала и его сдвинутой копии при  $\tau > 0$ .

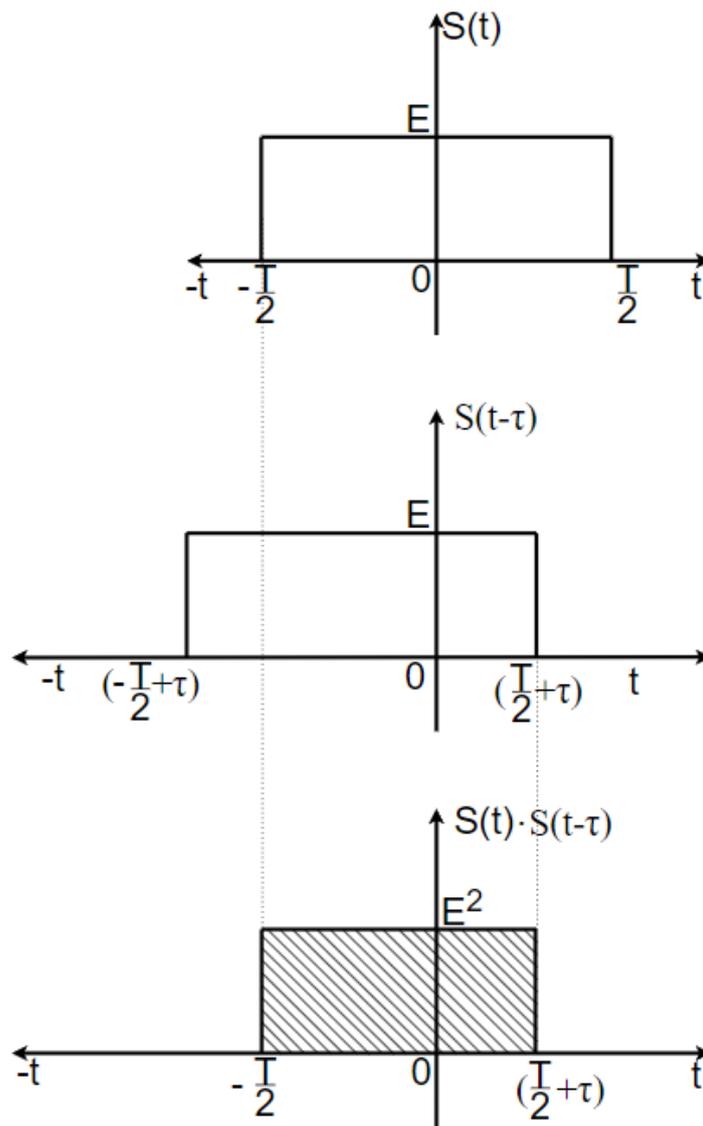


Рисунок 2.2б – Графическое пояснение к расчету АКФ: б – взаимное расположение сигнала и его сдвинутой копии

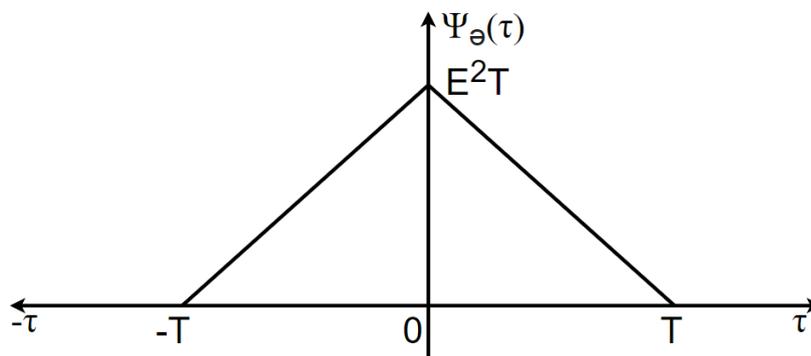


Рисунок 2.2в – Графическое пояснение к расчету АКФ: в – АКФ сигнала S(t).

Примечание. На рисунках а и б знак сдвига времени (+) или (-) заключен внутри переменной  $\tau$ .

### 2.1.2.1 Пример 2.

Рассчитать АКФ сигнала  $S(t)$ , заданного функцией  $S(t) = E \cdot l(t) \cdot e^{-\alpha t}$

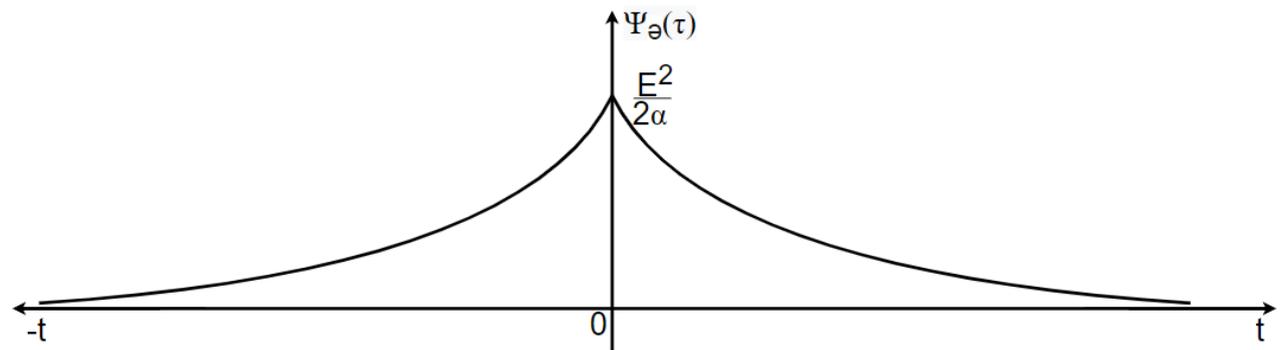
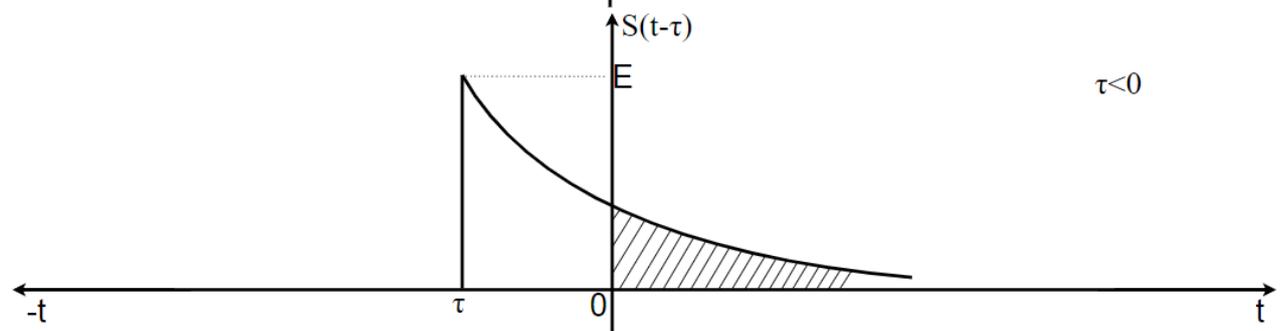
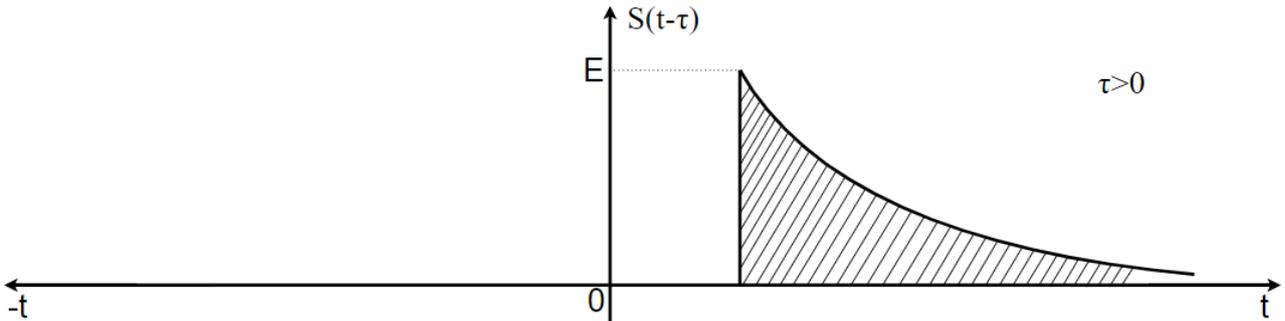
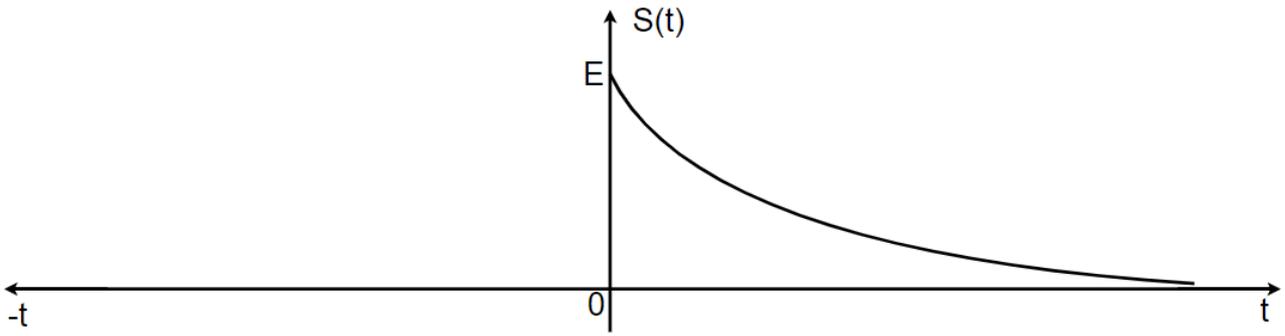


Рисунок 2.3 – Пояснения к расчету АКФ

При

$$\tau \geq 0 \quad \Psi_{\theta}(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} E^2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} dt = \frac{E^2}{2\alpha} e^{-\alpha\tau}.$$

При

$$\tau \leq 0 \quad \Psi_{\theta}(\tau) = \int_0^{\infty} E^2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} dt = \frac{E^2}{2\alpha} e^{-\alpha\tau}.$$

$$\Psi_{\vartheta}(\tau) = \frac{E^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$$

2.1.2.2 Пример 3.

Рассчитать АКФ импульсного сигнала изображенного на рисунке 2.4

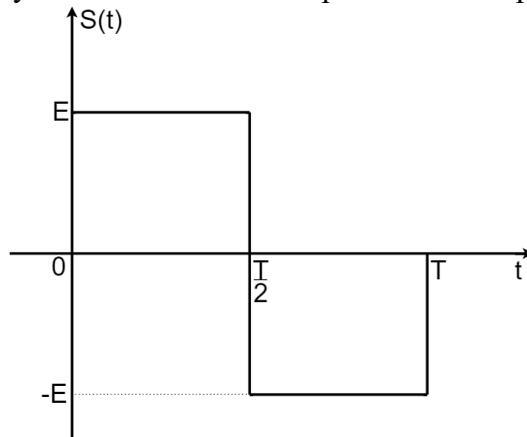
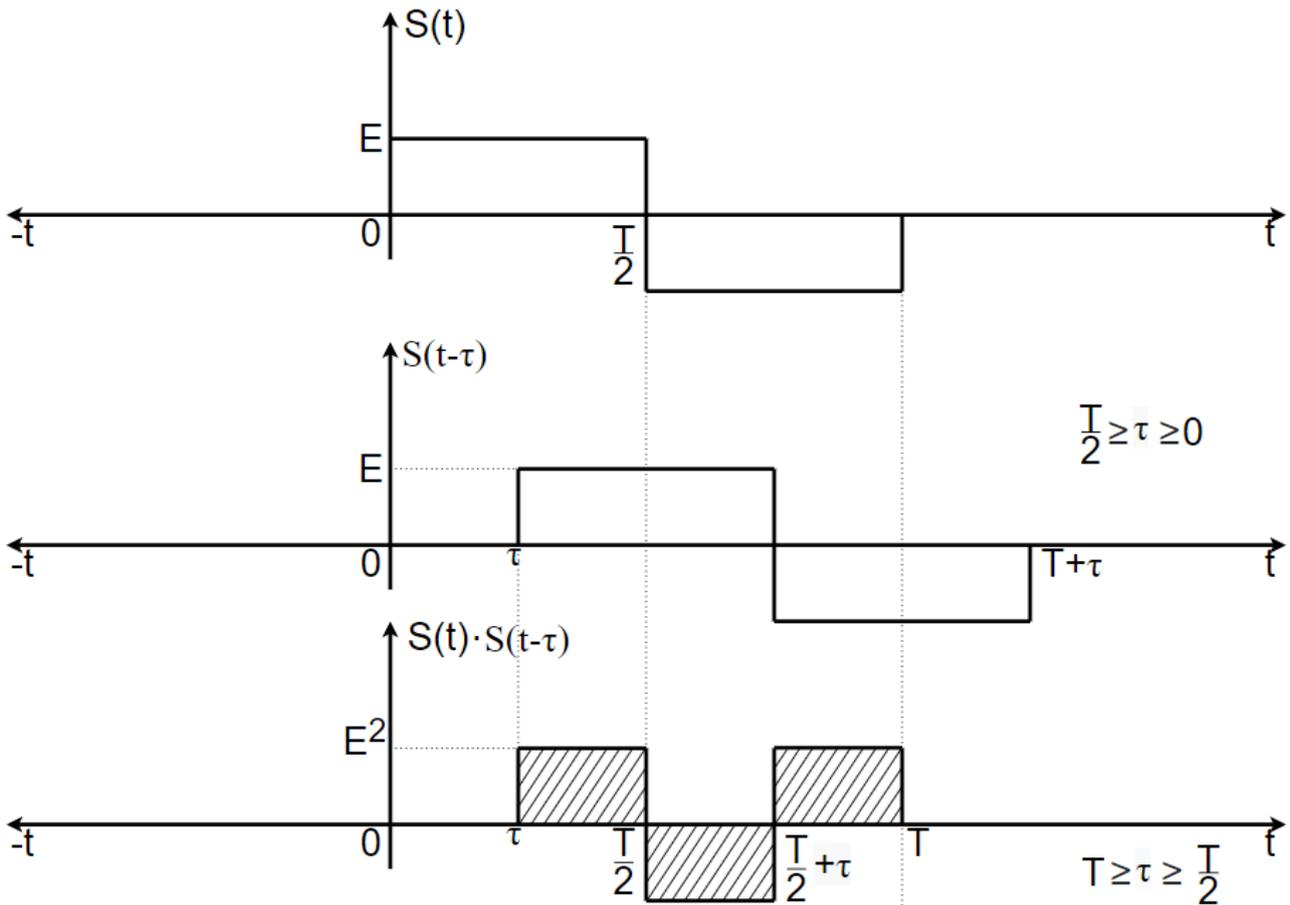


Рисунок 2.4 – Пояснения к расчету АКФ



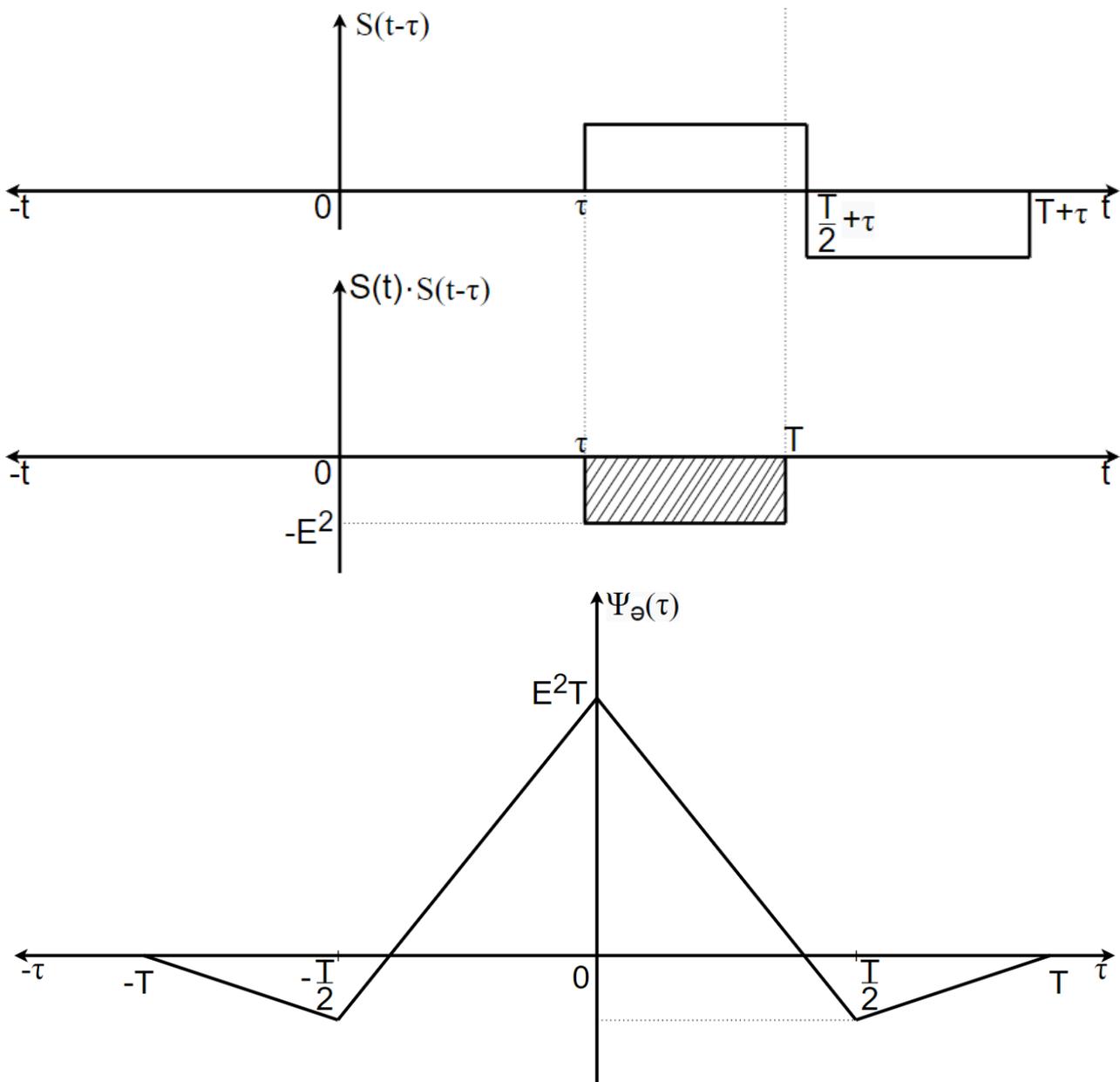


Рисунок 2.5 – Пояснения к расчету АКФ

$$\Psi_{\theta}(\tau) = \Psi_{\theta}(-\tau)$$

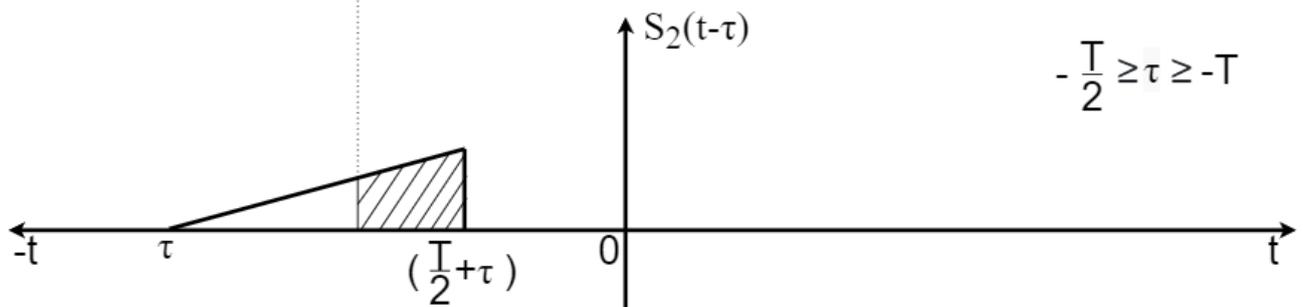
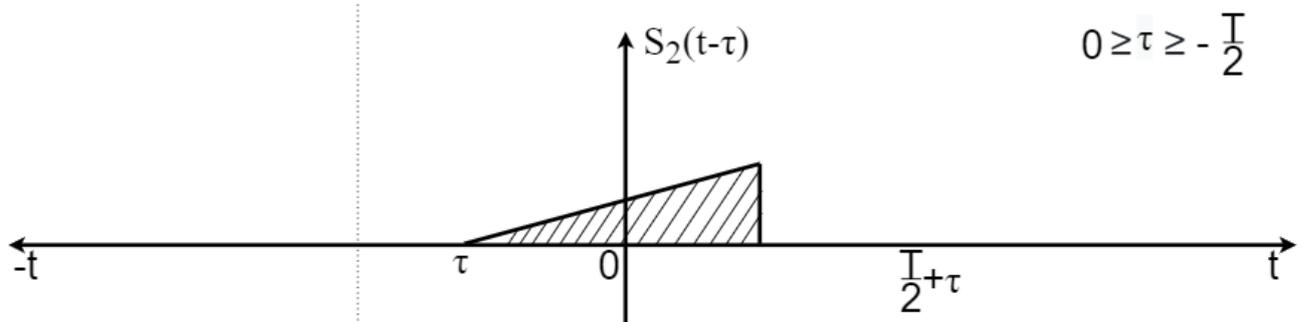
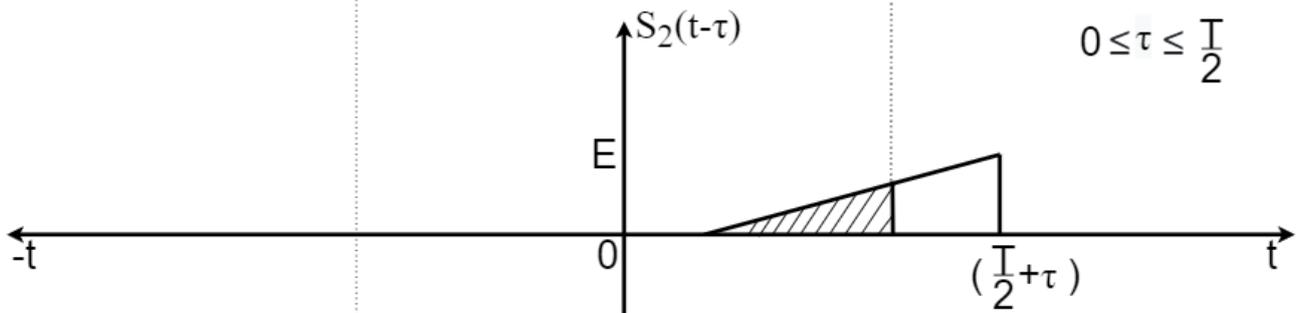
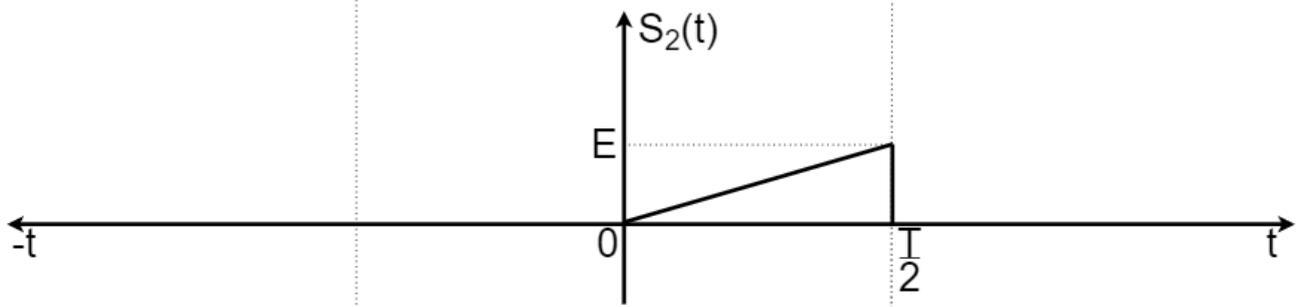
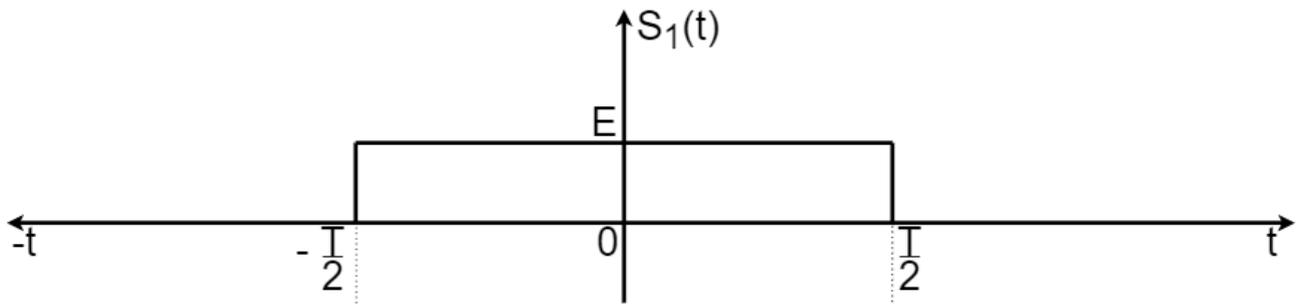
$$\text{При } 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2} \quad \Psi_{\theta}(\tau) = \int_{\tau}^{\frac{T}{2}} E^2 dt - \int_{\frac{T}{2}+\tau}^{\frac{T}{2}} E^2 dt + \int_{\frac{T}{2}+\tau}^T E^2 dt = 3E^2 \left( \frac{T}{3} - \tau \right)$$

$$\text{При } \frac{T}{2} \leq \tau \leq T \quad \Psi_{\theta}(\tau) = - \int_{\tau}^T E^2 dt = E^2(\tau - T)$$

### 2.1.2.3 Пример 4

Рассчитать ВКФ двух сигналов  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$

$$S_1(t) = \begin{cases} E - \frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 - \frac{T}{2} > t > \frac{T}{2} \end{cases} \quad S_2(t) = \begin{cases} \frac{E}{T} \cdot t & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & 0 > t > \frac{T}{2} \end{cases}$$



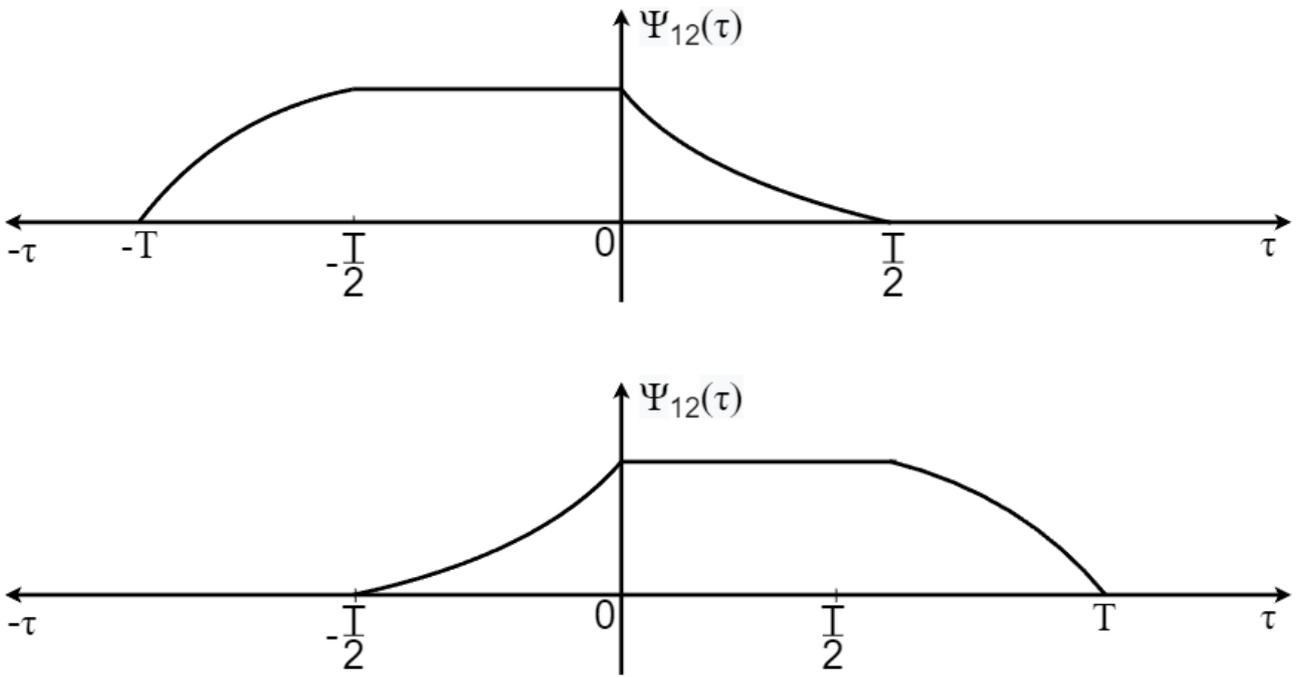


Рисунок 2.6 – Пояснения к расчету ВКФ

$$\Psi_{12}(\tau) = \Psi_{21}(-\tau)$$

При  $\frac{T}{2} \geq \tau \geq 0$

$$\Psi_{12}(\tau) = \int_{\tau}^{\frac{T}{2}} \frac{E^2}{T} (t - \tau) dt = \frac{E^2}{2T} \left[ \left(\frac{T}{2}\right)^2 - T \cdot \tau + \tau^2 \right] = \frac{E^2}{2T} \left(\tau - \frac{T}{2}\right)^2$$

При  $-\frac{T}{2} \leq \tau \leq 0$

$$\Psi_{12}(\tau) = \int_{\tau}^{\frac{T}{2} + \tau} \frac{E^2}{T} (t - \tau) dt = \frac{E^2 \cdot T}{8} = const$$

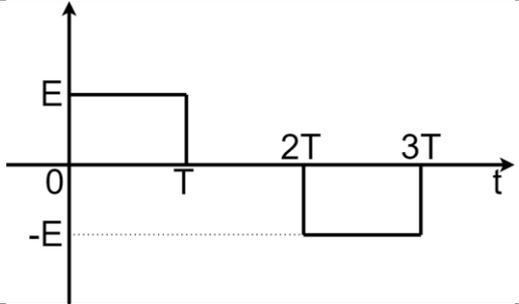
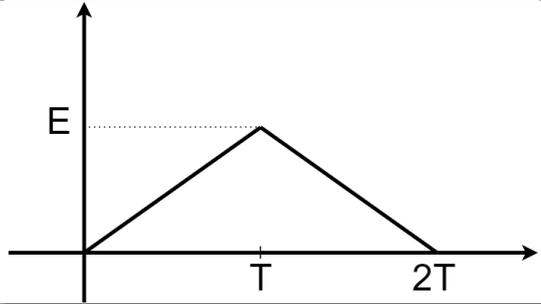
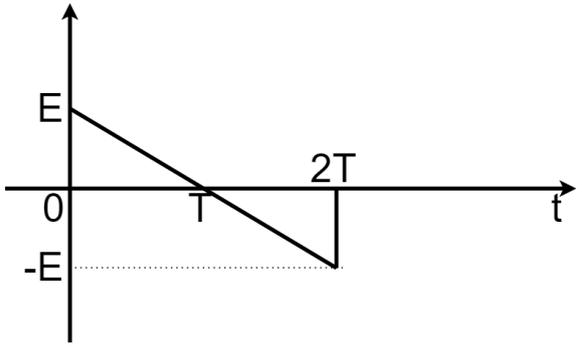
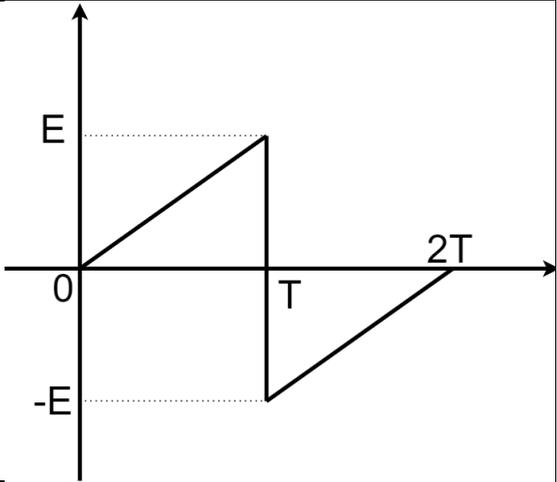
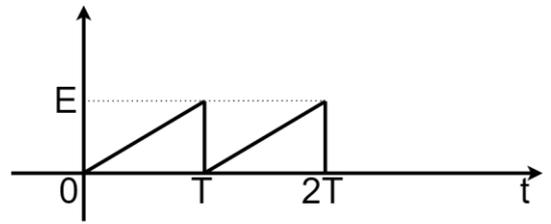
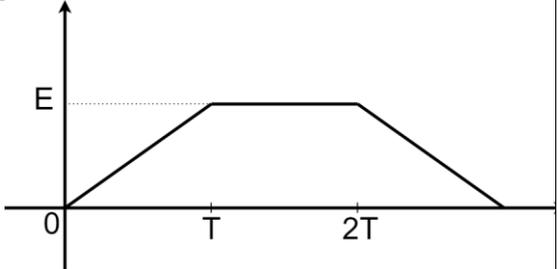
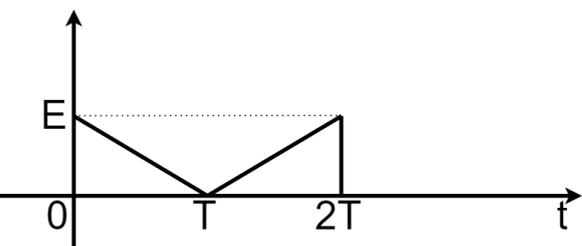
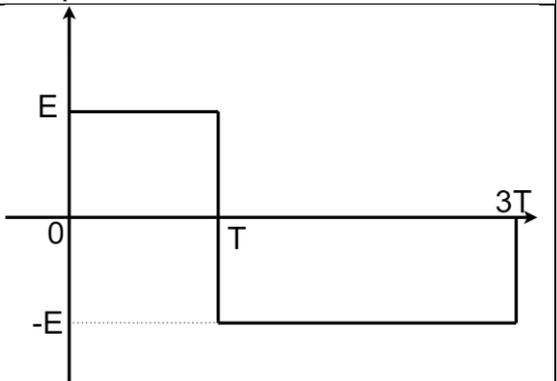
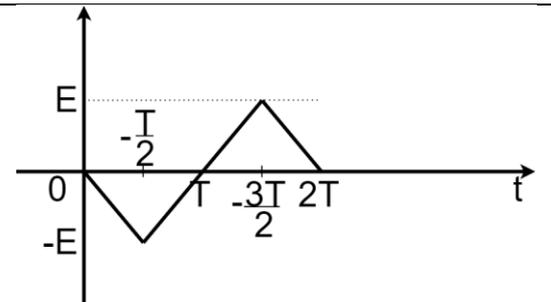
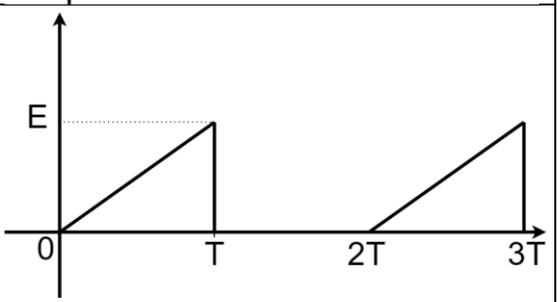
При  $-T \leq \tau \leq 0$

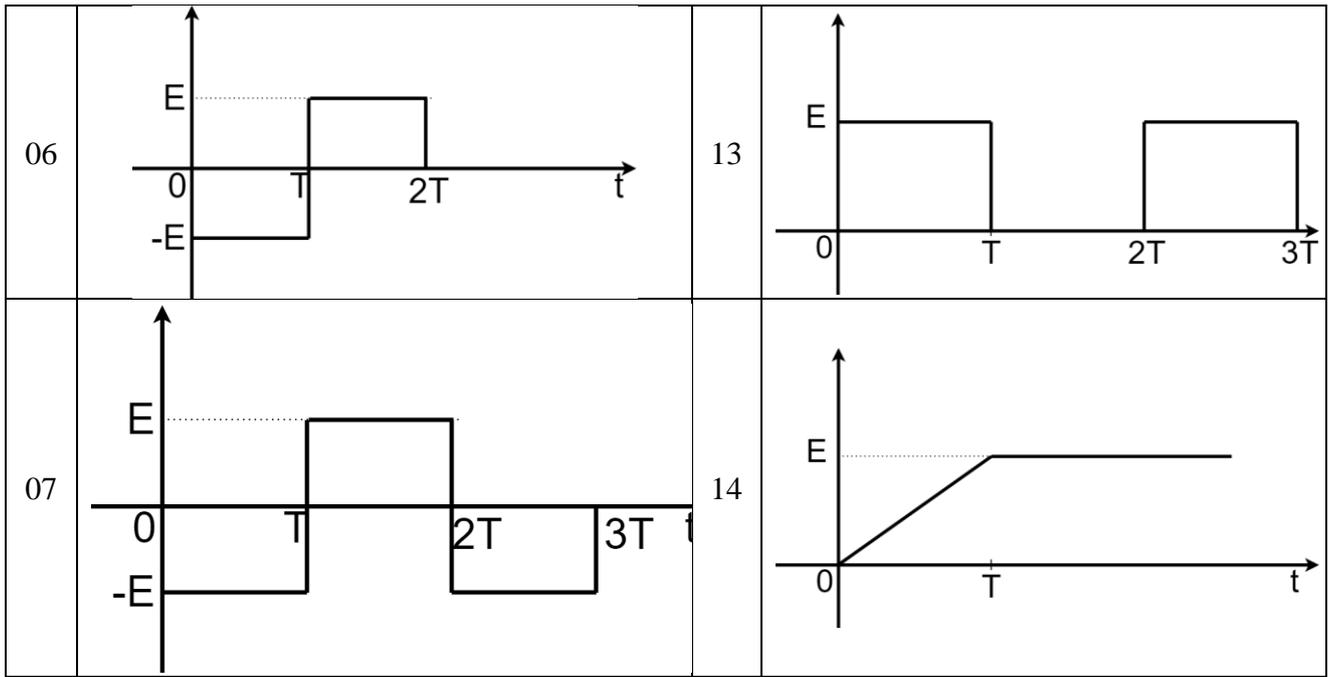
$$\Psi_{12}(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + \tau} \frac{E^2}{T} (t + \tau) dt = -\frac{E^2}{T} \left( \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau T}{2} \right) = \frac{E^2}{2T} \tau(\tau + T)$$

### 2.1.3 Задачи для самостоятельного решения

В таблице 4 дано графическое представление сигналов. Предполагается рассчитать автокорреляционные функции каждого из сигналов и взаимные корреляционные функции любых двух сигналов по выбору.

Таблица 4 – Набор задач к разделу 2

01		08	
02		09	
03		10	
04		11	
05		12	



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для ВУЗов. - 5-е издание, стереотип. - М.: Высшая школа, 2005. – 462 с.
2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебное пособие для ВУЗов. – 5-е издание. – М: Дрофа, 2006. – 717 с.
3. Радиотехнические цепи и сигналы. Часть 1 Теория сигналов и линейные цепи [Электронный ресурс]: Учебное пособие / Каратаева Н. А. 2012. –261 с. - Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/2798> (дата обращения: 21.02.2022).
4. Радиотехнические цепи и сигналы. Часть 2 Дискретная обработка сигналов и цифровая фильтрация [Электронный ресурс]: Учебное пособие / Каратаева Н. А. 2012. –257 с. - Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/2799> (дата обращения: 21.02.2022).