

Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

ДАВЫДОВ В.Н.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЯ  
В КРИСТАЛЛАХ НИОБАТА ЛИТИЯ**

Методические указания  
по выполнению лабораторной работы

Томск 2022

## СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ.....	3
2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.....	3
2.1. Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах.....	3
2.2. Оптическая индикатриса.....	9
2.3. Применение двулучепреломления в квантовой электронике и фотонике.....	13
3. РАСЧЕТНАЯ ЧАСТЬ.....	17
3.1. Задание к лабораторной работе.....	17
3.2. Схема расчета фазовых скоростей и векторов поляризации оптических волн в кристаллах.....	17
4. ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА.....	19
5. ЛИТЕРАТУРА.....	20

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Для создания элементов электронной техники широко используют электротехнические материалы, находящиеся в различных состояниях: аморфные, поликристаллические, сплавы, кристаллы и т.д. Среди этих состояний особое предпочтение отдается кристаллическим материалам, которые, как правило, используют для изготовления прецизионной аппаратуры, высокочувствительных детекторов, высокоэффективных излучателей света, резисторов, конденсаторов и других элементов. Применение кристаллов в качестве рабочего вещества позволяет получать элементы, в которых в нужной пропорции сочетаются различные физические свойства выбранного кристалла, что позволяет создавать элементы с принципиально новыми функциональными свойствами.

В этой связи студенты должны знать основные электрические свойства и методы их измерения у кристаллов различной точечной симметрии, в том числе емкостные свойства при наличии анизотропии диэлектрической проницаемости кристалла. Диэлектрическую проницаемость кристалла измеряют с помощью оптических методов.

Целью данной лабораторной работы является изучение студентами основных закономерностей распространения оптического излучения в кристалле ниобата лития, широко используемом в оптоэлектронике.

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### 2.1.. Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах

Распространение электромагнитных волн в прозрачном немагнитном кристалле описывается уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} ; \quad \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} ; \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = 0 ; \quad \operatorname{div} \bar{H} = 0 . \quad (2.2)$$

и материальным уравнением:  $\bar{E} = \hat{\eta} \cdot \bar{D}$ . Здесь  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  - векторы напряженности электрического и магнитного поля,  $\bar{D}$  - вектор электрической индукции,  $c$  - скорость света в вакууме. Слагаемые, соответствующие электрическому току и свободным зарядам, отсутствуют в виду того, что кристалл диэлектрический.

Если электромагнитное поле распространяется в кристалле в виде плоской электромагнитной волны, зависимость полевых векторов  $\bar{E}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{H}$  от пространственных координат  $\bar{r}$  и

времени  $t$  может быть описана следующими зависимостями:

$$\begin{aligned}\bar{E}(\bar{r}, t) &= \bar{E}_0 \cdot \exp(-i\omega t + i\bar{k}\bar{r}) \\ \bar{D}(\bar{r}, t) &= \bar{D}_0 \cdot \exp(-i\omega t + i\bar{k}\bar{r}) \\ \bar{H}(\bar{r}, t) &= \bar{H}_0 \cdot \exp(-i\omega t + i\bar{k}\bar{r})\end{aligned}\quad (2.3)$$

Здесь  $\omega$  - циклическая частота,  $\bar{k}$  - волновой вектор. Он перпендикулярен плоскости волнового фронта, причём волновой вектор

$$\bar{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \bar{m} = \frac{\omega}{v} \cdot \bar{m} = \frac{\omega}{c} \cdot n \cdot \bar{m},$$

так как  $\lambda = v \cdot t = \frac{v}{f} = \frac{c}{n} \cdot \frac{1}{f} = \frac{c}{n} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$ . Здесь обозначено:  $\bar{m}$  - единичный вектор волновой нормали,  $\lambda$  - длина волны,  $v$  - ее фазовая скорость в среде,  $n$  - показатель преломления:

$$n = \frac{c}{v}.$$

Для анизотропных сред пространственные соотношения между векторами  $\bar{E}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{H}$  сложнее, чем в изотропных. Эти соотношения найдем, подставив (6.3) в выражения (7.1) (7.2):

$$[\bar{k} \times \bar{H}] = -\frac{\omega}{c} \cdot \bar{D}, \quad [\bar{k} \times \bar{E}] = \frac{\omega}{c} \bar{H}, \quad (2.4)$$

$$(\bar{k} \cdot \bar{H}) = 0, \quad (\bar{k} \cdot \bar{D}) = 0. \quad (2.5)$$

Уравнения (2.5) означают, что векторы  $\bar{D}$  и  $\bar{H}$  перпендикулярны вектору  $\bar{k}$ . Но поскольку этот же вывод следует из уравнений (2.4), то их можно в дальнейшем не рассматривать. Из уравнений (2.4) следует, что векторы  $\bar{D}$  и  $\bar{H}$  перпендикулярны вектору  $\bar{k}$ , а значит, они лежат в плоскости волнового фронта - к этому сводится условие поперечности электромагнитных волн в анизотропных средах. Кроме того, из уравнений (7.4) также следует взаимная перпендикулярность векторов  $\bar{H}$  и  $\bar{D}$ ,  $\bar{H}$  и  $\bar{E}$ . Таким образом, в анизотропной среде сохраняется ортогональность и синфазность векторов  $\bar{H}$  и  $\bar{E}$ , а также векторов  $\bar{H}$  и  $\bar{D}$ , но не сохраняется параллельность векторов  $\bar{E}$  и  $\bar{D}$ , имеющая место в изотропных средах (рис.1). Разделив обе части уравнений (2.4) на

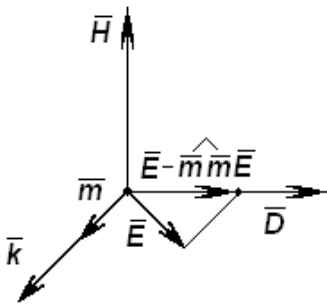


Рис. 1

получим:

$$n \cdot [\bar{m} \times \bar{H}] = -\bar{D}, \quad n \cdot [\bar{m} \times \bar{E}] = \bar{H}.$$

Исключив из них напряженность магнитного поля  $\bar{H}$ , получим уравнение для связи  $\bar{E}$  и  $\bar{D}$  в анизотропной среде:

$$n \cdot [\bar{m} \times \bar{H}] = -\bar{D},$$

$$n \cdot [\bar{m} \times [n \cdot \bar{m} \times \bar{E}]] = -\bar{D} ,$$

$$n^2 \cdot [\bar{m} \times [\bar{m} \times \bar{E}]] = -\bar{D} .$$

Последнее уравнение после алгебраических преобразований и раскрытия векторного произведения по правилу «БАС минус САБ»:  $[\bar{a} \times [\bar{b} \times \bar{c}]] = \bar{b} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b})$  дает:

$$\bar{E} - \hat{m} \bar{E} = \frac{1}{n^2} \cdot \bar{D} . \quad (2.6)$$

Левая часть этого уравнения есть составляющая вектора  $\bar{E}$ , лежащая в плоскости волнового фронта. Она параллельна вектору  $\bar{D}$ , а отношение ее длины к длине вектора  $\bar{D}$  - есть квадрат отношения скорости волны в этой среде к скорости света в вакууме. Используя уравнение  $\bar{E} = \hat{\eta} \bar{D}$ , из выражения (2.6) получим:

$$(\eta_{ik} - m_i m_j \cdot \eta_{jk}) \cdot D_k = \frac{1}{n^2} \cdot D_i .$$

Здесь каждый из индексов пробегает значения от 1 до 3. Развернув это индексное выражение, получим систему трёх линейных однородных уравнений, которая определяет величину фазовой скорости и поляризацию распространяющейся через кристалл в направлении вектора  $\bar{m}$  электромагнитной волны:

$$\left. \begin{aligned} (\eta_{11} - n^{-2})D_1 + \eta_{12}D_2 + \eta_{13}D_3 &= 0 \\ \eta_{12}D_1 + (\eta_{22} - n^{-2})D_2 + \eta_{23}D_3 &= 0 \\ \eta_{13}D_1 + \eta_{23}D_2 + (\eta_{33} - n^{-2})D_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Система (2.7) будет иметь ненулевое решение, если ее определитель равен нулю. Раскрывая его, получим уравнение третьей степени относительно собственного значения  $n^{-2}$ , решение которого довольно сложно и в общем случае дает три корня. Поэтому будем искать способ снижения степени характеристического уравнения системы, используя свойство поперечности (ортогональности) электромагнитных волн.

Для исследования системы уравнений (2.7) введем новую декартову систему координат  $x'_1 x'_2 x'_3$ , в которой координат ось  $x'_3$  направим по нормали к волновому фронту:  $\bar{e}'_3 \parallel \bar{m}$ ,  $\bar{e}'_3 \cdot \bar{m} = 1$ , а взаимно перпендикулярные оси  $x'_1$  и  $x'_2$  окажутся в плоскости волнового фронта без строгого условия на их ориентацию кроме взаимной перпендикулярности.

В новой системе координат компоненты тензора диэлектрической непроницаемости примут другие значения, которые обозначим  $\eta'_{ij}$ . Они связаны с компонентами тензора в исход-

ной системе координат  $\eta_{kl}$  через элементы матрицы преобразования системы координат  $C_{ik}$  следующим образом:  $\eta'_{ij} = C_{ik}C_{jl}\eta_{kl}$ .

Поскольку в новых координатах в силу ортогональности электромагнитных волн  $D_3 = 0$ , то из системы уравнений (2.7) будем иметь уже систему двух уравнений относительно неизвестных координат вектора электрической индукции  $D_1'$  и  $D_2'$ :

$$\begin{cases} \eta'_{11}D_1' + \eta'_{12}D_2' = n^{-2}D_1' \\ \eta'_{12}D_1' + \eta'_{22}D_2' = n^{-2}D_2' \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\eta'_{11} - n^{-2})D_1' + \eta'_{12}D_2' = 0 \\ \eta'_{12}D_1' + (\eta'_{22} - n^{-2})D_2' = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Система (2.8) показывает, что  $n^{-2}$  - это собственные значения тензора

$$\begin{vmatrix} \eta'_{11} & \eta'_{12} \\ \eta'_{12} & \eta'_{22} \end{vmatrix},$$

а  $\bar{D}$  - его собственный вектор. Поэтому данный тензор естественно назвать **проекцией тензора диэлектрической непроницаемости  $\eta'$**  на плоскость волнового фронта. Так как он двумерный, то у него имеется два собственных значения, определяемые из характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} \eta'_{11} - n^{-2} & \eta'_{12} \\ \eta'_{12} & \eta'_{22} - n^{-2} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда находим:

$$(n^{-2}_{(1,2)}) = \frac{1}{2} \cdot \left[ (\eta'_{11} + \eta'_{22}) \pm \sqrt{(\eta'_{11} - \eta'_{22})^2 + (2\eta'_{12})^2} \right]. \quad (2.9)$$

Таким образом, имеем два различных значения показателей преломления плоской электромагнитной волны, распространяющейся в кристалле в направлении  $\bar{e}_3 \parallel \bar{m}$ , каждой из которых соответствует своя фазовая скорость:  $v_1 = c/n_1$ ,  $v_2 = c/n_2$ . Каждому собственному значению  $n_i^{-2}$  из (2.9) соответствует свой собственный вектор  $\bar{D}^{(i)}$ . Направление вектора  $\bar{D}$  в волне, распространяющейся со скоростью  $v_1$ , определяется из уравнений:

$$\begin{cases} (\eta'_{11} - n_{(1)}^{-2}) \cdot D_1^{(1)} + \eta'_{12} \cdot D_2^{(1)} = 0 \\ \eta'_{12} \cdot D_1^{(1)} + (\eta'_{22} - n_{(1)}^{-2}) \cdot D_2^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Направление вектора  $\bar{D}^{(2)}$  находится из системы (2.10) аналогично и он перпендикулярен  $\bar{D}^{(1)}$ , т.к. собственные векторы взаимно перпендикулярны.

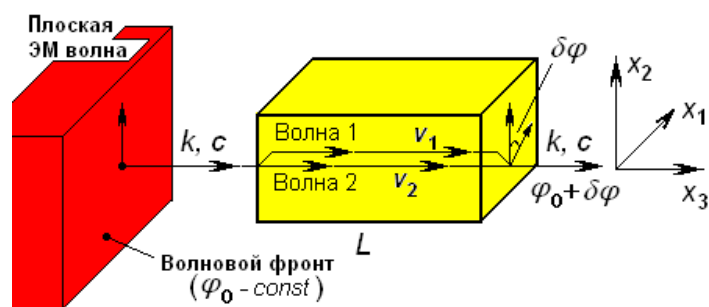


Рисунок 2 – Прохождение электромагнитной волны через анизотропный кристалл, проявляющий эффект двулучепреломления

Рассматриваемая ситуация и полученные результаты расчета представлены на рис. 2. Как следует из аналитического рассмотрения, в анизотропных кристаллах в общем случае имеет место явление двулучепреломления: плоская монохроматическая электромагнитная волна с определенной линейной поляризацией (направлением колебания вектора электрической индукции), вошедшая в анизотропный кристалл и прошедшая в нем расстояние порядка несколько длин волн, превращается в две линейно поляризованные **волны с разными** скоростями распространения фазового фронта:  $v_1$ ,  $v_2$  и взаимно перпендикулярными векторами

$\vec{D}$ . Имея разные фазовые скорости, расщепленные волны распространяются через кристалл длиной  $L$  и на выходе из него их вектора электрической индукции будут иметь разные фазы:

$\varphi_1 = \omega L n_1 / c + \omega t$  и  $\varphi_2 = \omega L n_2 / c + \omega t$ . Выходя из кристалла, волны должны объединиться сложением взаимно перпендикулярных векторов электрической индукции. Если бы их фазы были одинаковы ( $n_1 = n_2$ ), то  $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega L \cdot (n_1 - n_2) / c = 0$ . При разных же значениях коэффициента преломления анизотропного кристалла возникает разность фаз, что приводит к повороту суммарной световой волны на выходе из кристалла на угол  $\delta\varphi$ . Поворот плоскости поляризации электромагнитной волны при прохождении через оптически активный кристалл можно обнаружить экспериментально, сравнивая с помощью поляризатора интенсивности электромагнитной волны на входе в кристалл и на его выходе. При отсутствии набега фазы или набеге, кратном  $180^\circ$ , интенсивности будут равны, а при наличии двулучепреломления интенсивность на выходе будет меньше входной. По мере роста разности фаз до  $90^\circ$  она будет уменьшаться по закону  $\sin(2 \cdot \delta\varphi)$  как проекция вектора электрического поля прошедшей волны на вектор электрического поля входящей волны.

**Появление фазового набега.** Согласно правилам аналитической геометрии вошедшая в кристалл волна может быть представлена как сумма двух волн (разложена на компоненты по координатным осям) линейно поляризованных. Одна волна будет иметь вектор поляризации, например, по оси  $z$  (оптической оси), а другая по оси, например,  $y$ . Значения диэлектриче-

ской поляризации в этих направлениях разнятся на величину оптической анизотропии. Напомним, что фазовая скорость электромагнитной волны определяется значением диэлектрической поляризации в направлении вектора электрической индукции -  $\bar{D}$ . Значит, по правилу разложения вектора на плоскости на две взаимно перпендикулярные его проекции на оси координат распространяющаяся в анизотропном кристалле электромагнитная волна может быть разложена (представлена в виде) двух волн с взаимно перпендикулярными поляризациями и разными скоростями распространения фазового фронта:  $v_1, v_2$ .

Как видим, никаких особенностей разложения волны на две в анизотропном кристалле по сравнению со случаем общего правила представления вектора на плоскости в виде двух взаимно перпендикулярных векторов по координатным осям в рассматриваемом случае нет: никаких особых «расщепляющих» механизмов в анизотропном кристалле нет. Вопросы возникают, когда рассматривается эффекта двулучепреломления при направлении в кристалл волны с поляризацией на входе строго по оптической оси. Как можно видеть в этом случае описанное выше разложение даст только одну компоненту, направленную по оси  $Z$ , и эффекта расщепления, а значит, двулучепреломления не будет независимо от длины кристалла. Если же существует, пусть даже небольшое, отступление входной поляризации от направления оптической оси, то эффект двулучепреломления будет и по мере распространения он будет усиливаться (появится вторая компонента вектора и она будет увеличиваться).

В этом случае, имея разные фазовые скорости, расщепленные волны распространяются через кристалл длиной  $L$ , и на выходе из него их вектора электрической индукции будут иметь разные фазы:  $\varphi_1 = \omega L n_1 / c + \omega t$  и  $\varphi_2 = \omega L n_2 / c + \omega t$ . Выходя из кристалла и попадая в изотропную среду - воздух, у волн различие в фазовых скоростях исчезнет. Будет одна волна с поляризацией, отличающейся от входной на угол равный разности фаз складываемых волн  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega L \cdot (n_1 - n_2) / c = 2\pi L(n_1 - n_2) / \lambda$ .

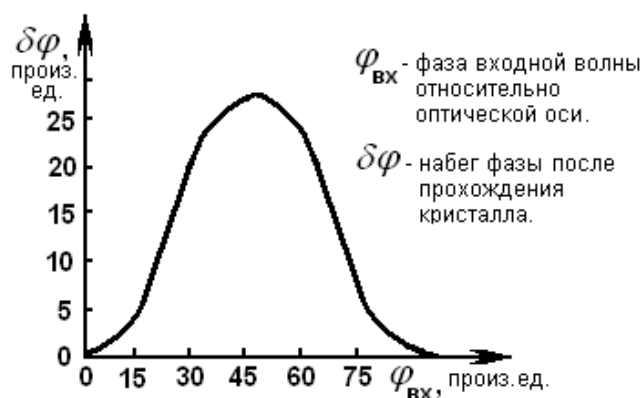


Рисунок 3 – Поведение эффективности вращения плоскости поляризации в анизотропном кристалле при изменении поляризации входной волны



Поворот плоскости поляризации электромагнитной волны при прохождении через оптически активный кристалл можно обнаружить экспериментально, сравнивая с помощью поляризатора интенсивности электромагнитной волны на входе в кристалл и на выходе. При отсутствии набеге фазы или набеге, кратном  $180^\circ$ , интенсивности на входе в кристалл и его выходе будут равны, а при наличии двулучепреломления интенсивность на выходе будет меньше входной. По мере роста разности фаз, например, за счет увеличения угла между вектором поляризации входной волны относительно оптической оси, стремясь к  $90^\circ$ , она будет уменьшаться аналогично тому, как меняется проекция вектора электрического поля прошедшей волны на направление анизотропии  $z = x_3$ . Рисунок 3 поясняет сказанное.

Из приведенного выше рассмотрения эффекта двулучепреломления в анизотропном кристалле следует, что на практике эффект двулучепреломления

- должно существовать такое направление поляризации входной волны относительно оптической оси, при котором удельная вращательная способность кристалла, определяемая как  $\partial\delta\varphi/\partial u$ , будет максимальной. Из общих соображений можно заключить, что это направление должно быть около  $45^\circ$ , а вид функции подобен зависимости  $\sin(2\varphi_{\text{вх}})$ ;

- не может обеспечить 100% модуляцию излучения из-за его ослабления при больших и вблизи малых  $\varphi_{\text{вх}}$ .

## 2.2. Оптическая индикатриса

Вычисления, проведенные в п. 2.1, могут быть заменены простым геометрическим построением на характеристической поверхности тензора диэлектрической непроницаемости. С помощью такого построения можно определить величины фазовых скоростей обеих волн, а также их поляризации не прибегая к решению системы уравнений (2.10) и характеристического уравнения (2.9).

Характеристическая поверхность тензора  $\hat{\eta}$  описывается уравнением:

$$\eta_{ij}x_i x_j = 1 \quad (2.11)$$

и представляет собой эллипсоид с центром в начале координат, который называется **оптической индикатрисой** кристалла.

Рассмотрим центральное сечение индикатрисы плоскостью волнового фронта электромагнитной волны, распространяющейся по кристаллу. В полученном сечении будет эллипс, все точки которого удовлетворяют уравнению (2.11) и уравнению плоскости волнового фронта, проходящего через начало координат:  $x_3 = 0$  – этим вводится поперечность электромагнитной волны и направление ее распространения. Уравнение, описывающее сечение, будет уравнени-

ем эллипса:

$$\eta_{11}x_1^2 + 2\eta_{21}x_1x_2 + \eta_{22}x_2^2 = 1$$

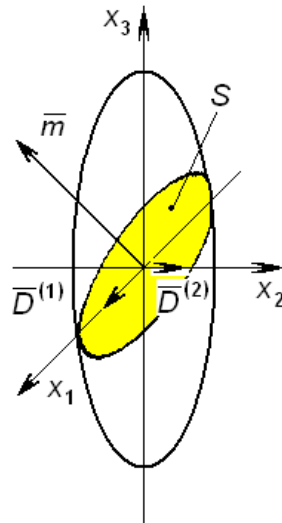


Рисунок 4 – Оптическая индикатриса кристалла средней категории и её сечение плоскостью волнового фронта

Если оси  $x_1$  и  $x_2$  направить по собственным векторам двумерного тензора  $\eta$ , то, поскольку в этих координатах тензор примет диагональный вид с собственными значениями  $n_1^{-2}$  и  $n_2^{-2}$  на диагонали. Тогда уравнение оптической индикатрисы примет наиболее простой вид:

$$\left(\frac{x_1}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{n_2}\right)^2 = 1.$$

Отсюда видно, что длины главных полуосей эллипса, полученного в сечении, равны  $n_1$  и  $n_2$ . По этим полуосям направлены векторы электрической индукции  $\bar{D}^{(1)}$  и  $\bar{D}^{(2)}$ .

Таким образом, чтобы вычислить скорости и поляризации электромагнитных волн, распространяющихся в кристалле в произвольном направлении, достаточно рассмотреть центральное сечение оптической индикатрисы плоскостью волнового фронта, т.е. плоскостью, перпендикулярной к вектору  $\bar{k}$ . Направления главных полуосей этого сечения совпадут с направлениями векторов  $\bar{D}$ , а длины этих полуосей будут равны показателям преломления. Рисунок 26 иллюстрирует сказанное. Здесь  $S$  - центральное сечение, перпендикулярное к направлению распространения волны,  $\bar{m}$  - вектор волновой нормали. Полуоси эллипса равны  $n_1$  и  $n_2$ . Ясно, что форма эллипса полностью определяется симметрией тензора  $\hat{\eta}$  или, проще говоря, точечной симметрией кристалла.

I. В кристаллах высшей категории оптическая индикатриса - это сфера радиусом

$n_1 = n_2 = 1/\sqrt{\eta_0}$ , поскольку их тензор диэлектрической непроницаемости является шаровым с элементами  $\eta_{ij} = \eta_0 \cdot \delta_{ij}$  и потому уравнение (2.11) принимает вид:

$$\eta_0 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1,$$

что представляет собой уравнение сферы указанного выше радиуса. Все центральные сечения такой оптической индикатрисы - круговые, что означает равенство показателей преломления во всех направлениях и, следовательно, отсутствие двулучепреломления. Таким образом, в отношении оптических свойств кристаллы высшей категории изотропны.

II. У кристаллов средней и низшей категории проходящий в любом направлении монохроматический свет в общем случае распадается на две плоско поляризованные волны. Однако в этих кристаллах есть особенные направления - **оптические оси (бинормали)**. Эти кристаллографические направления характеризуются тем, что нормальные к ним сечения оптической индикатрисы являются окружностями. При любом выборе осей  $x_1$  и  $x_2$  в плоскости волнового фронта, перпендикулярной к оптической оси, проекция тензора  $\hat{\eta}$  на эту плоскость имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \eta_{11} & 0 \\ 0 & \eta_{11} \end{vmatrix}$$

так что оба корня уравнения по определению собственных значений совпадут:  $n_1^{-2} = n_2^{-2} = \eta_{11}$ . Любой вектор, лежащий в плоскости волнового фронта, для данного тензора является собственным. Поэтому вдоль оптической оси может распространяться свет любой поляризации без двулучепреломления.

У кристаллов средней категории оптическая индикатриса - это эллипсоид вращения (в кристаллофизической системе координат):

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{n_1^2} + \frac{x_3^2}{n_2^2} = 1.$$

Ось вращения эллипсоида совпадает с главной осью симметрии кристалла и является его единственной оптической осью (рис. 5, а). Кристаллы средней категории являются оптически одноосными. Ориентация оптической оси в них задана положением главной ось симметрии кристалла, которая всегда направлена по  $x_3$ . В кристаллах средней категории уравнение оптической индикатрисы имеет вид:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{n_0^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} = 1,$$

откуда следует, что в оптически одноосных кристаллах один показатель преломления -  $n_1 = n_0$  не зависит от направления, а другой -  $n_2 = n_e$  изменяется с направлением. Первый из них и называют **обыкновенным**, а второй - **необыкновенным**. Происхождение этих назва-

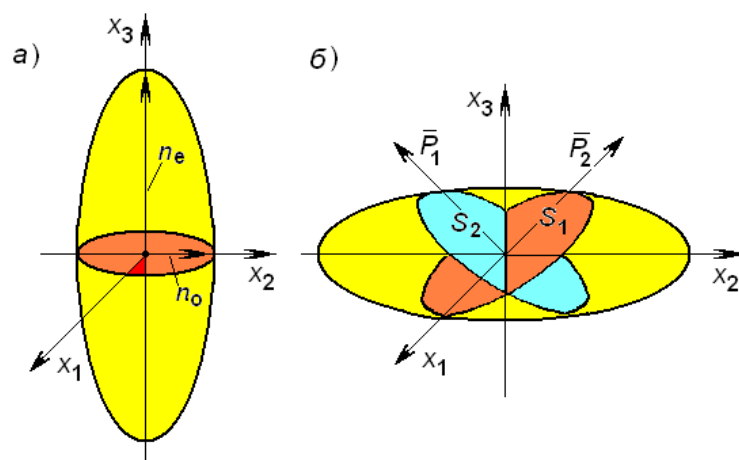


Рисунок 5 – Оптическая индикатриса кристаллова средней категории – а) и кристаллов низшей категории – б) с указанием в них оптических осей

ний связано с «обыкновенным» поведением электромагнитной волны, вектор электрической индукции которой либо лежит в плоскости  $x_1ox_2$  - фазовая скорость этой волны не зависит от ориентации вектора  $\vec{D}$ . У «необыкновенной» волны фазовая скорость зависит от ориентации ее вектора электрической индукции, что необычно для поведения волн в обычных условиях – изотропных средах. В зависимости от направления распространения волны  $\vec{m}$  значение показателя преломления изменяется от  $n_0$  до  $n_e$ .

Величина двулучепреломления кристалла измеряется **оптической анизотропией**, равной  $\Delta n = n_e - n_0$ . Если  $\Delta n > 0$ , то одноосные кристаллы считаются **оптически положительными** (оптическая индикатриса имеет вид эллипсоида, вытянутого вдоль оптической оси - оси симметрии наивысшего порядка). Если же  $\Delta n < 0$ , то форма оптической индикатрисы - сплюснутый эллипсоид, а кристаллы считаются **оптически отрицательными**.

III. У кристаллов низшей категории оптическая индикатриса - эллипсоид общего вида. В системе координат, построенной на собственных векторах тензора  $\hat{\eta}$ , где тензор приобретает диагональный вид, ее уравнение будет:

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1,$$

где  $n_i$  - главные полуоси эллипсоида общего вида. Эти индикатрисы имеют два круговых се-

чения и, соответственно, две оптические оси:  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ , т.е. эти кристаллы оптически двухосны (рис.5, б):  $S_1$  и  $S_2$  - это круговые сечения, а нормали к ним -  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ . В кристаллах этой категории оба показателя преломления необыкновенны, т.е. их величины зависят от направления вектора поляризации в волне. Эти кристаллы оптически двухосны, линия пересечения круговых сечений - средняя главная ось оптической индикатрисы. Она перпендикулярна к плоскости оптических осей.

### **2.3. Применение двулучепреломления в квантовой электронике и фотонике**

Основной эффект двулучепреломления имеет своим результатом поворот плоскости поляризации электромагнитной волны на угол, определяемый размерами анизотропного кристалла и величиной его оптической анизотропии. Как не удивительно, это почти «кабинетный» эффект нашел широкое применение в приборах и устройствах отображения информации, при создании оптических модуляторов, оптических транспарантов и других целей. В конце XX века учеными было установлено, что данным эффектом, во много раз превосходящим по величине в кристаллах неживой природы, обладают жидкие кристаллы (ЖК). Наиболее изученные из них – нематики имеют молекулы вытянутой формы, обладающие оптической анизотропией, подобной анизотропии оптически одноосных кристаллов. У нематиков диэлектрические проницаемости вдоль оси и перпендикулярно ей сильно отличаются. Более того, приложение внешнего электрического поля может вызвать изменение ориентации молекул на  $90^0$  – переход Фредерикса, что приводит к изменению оптических свойств всего жидкого кристалла. Требуемые для этого напряжения оказались в пределах нескольких вольт, что на три порядка меньше полей, используемых в кристаллах неживой природы, например, в ниобате лития. Более того, изготовление оптоэлектронных устройств на основе жидких кристаллов технологически совместимо и изготовлением микропроцессорной техники, что позволяет создавать программно управляемые, экономные, малогабаритные и надежные оптические элементы и устройства. Рассмотрим кратко некоторые из таких устройств.

**1. Жидкокристаллическая ячейка отображения информации.** В основе работы ячеек по отображению информации используют переход Фредерикса в твист-структуре, а также эффект динамического рассеяния света в  $S$ -эффекте только в черно-белом цвете. Ячейки следующего поколения уже цветные за счет применения эффекта «гость-хозяин» в нематике либо использования холестерика с электрически регулируемым шагом спирали.

В качестве примера рассмотрим конструкцию планарной черно-белой ячейки, предназначенную для отображения информации на основе твист-эффекта (закрученной на 90 градусов ЖК пленки), как наиболее используемом в оптоэлектронике. Оптическая ячейка образована двумя стеклянными пластинками, на внутренние поверхности которых напылены металлические электроды, имеющие высокий коэффициент пропускания света. На внешние поверхности нанесены поляроидные пленки, которые пропускают свет одной поляризации.

За основу ячейки берут ЖК с положительной оптической анизотропией. Исходная ориентация нематика закрученная, так называемая твист-ориентация молекул (рис. 6, а). Свет падает на верхний поляризатор и становится плоско поляризованным в соответствии с его поляризацией. При отсутствии электрического поля (то есть в выключенном состоянии) свет, “следуя” твист-ориентации нематика, меняет свое направление в соответствии с оптической осью

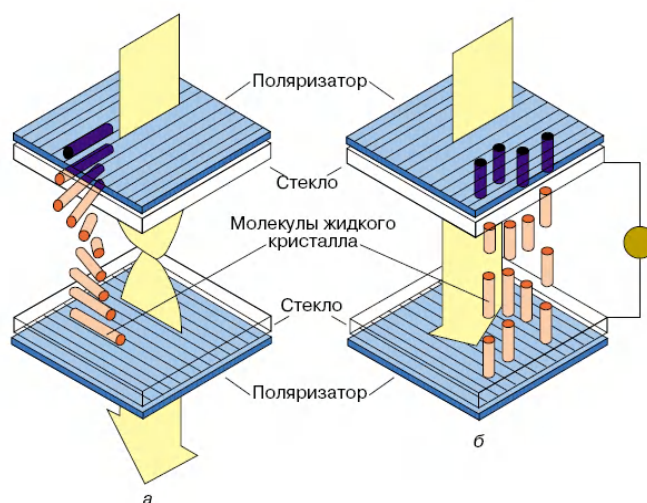


Рисунок 6 – Изменение ориентации длинных осей нематика в оптической ячейке с твист-структурой при переходе Фредерикса

нематика и на выходе будет иметь то же направление поляризации, что и нижний поляризатор. При включении электрического поля для нематического жидкого кристалла с положительной диэлектрической анизотропией ( $\Delta\epsilon > 0$ ) произойдет переход от закрученной твист-ориентации к гомеотропной ориентации молекул, то есть длинные оси молекул повернутся в направлении, перпендикулярном к электродам, и спиральная структура разрушится (рис. 6, б). Теперь свет, не изменив направления исходной поляризации, совпадающей с поляризацией верхнего поляризатора, будет иметь направление поляризации, противоположное нижнему поляризатору, а они, как видно на рис. 6, б, находятся в скрещенном положении. В этом случае ячейка — «непрозрачна». Используя это свойство ячейки, можно создать электронный затвор оптического излучения.

**2. Жидкокристаллические модуляторы** представляют собой оптическую планарную или гомеотропную ячейку, которую размещают между скрещенными или параллельными поляризаторами. Падающее оптическое излучение имеет линейную поляризацию. В зависимости от конструкции модулятора и используемого электрооптического эффекта при наложении электрического поля, создающего один из перечисленных выше структурных эффектов, его пропускная способность изменяется от нуля до 100% в соответствии с законом изменения прикладываемого напряжения. Предельная частота модуляции такого модулятора составляет несколько кГц. Поэтому такие модуляторы используются как оптические затворы. Однако скоро ЖК модуляторы будут работоспособны до сотен кГц и выше.

**3. Дефлекторы оптического излучения** могут быть созданы на основе многочисленных электрооптических эффектов в жидких кристаллах: переходе Фредерикса, доменах Капустина-Вильямса, использовании нарушения полного внутреннего отражения и т.д. Назначение дефлектора – отклонение оптического луча в нужном направлении. Наиболее просто этого достичь, если в жидкокристаллической ячейке выбором треугольной топологии полевых электродов сформировать клиновидную призму, изменяющую свой относительный показатель преломления в электрическом поле от нуля до величины, определяемой анизотропией диэлектрической проницаемости.

**4. Интегрально-оптические элементы** на основе жидких кристаллов представляют собой элементы, встроенные в оптическую схему оптоэлектронного устройства. Это активные линзы, волноводные модуляторы, волноводные дефлекторы и т.д. Их применение позволяет программно управлять структурой оптоэлектронного устройства, изменять его функции.

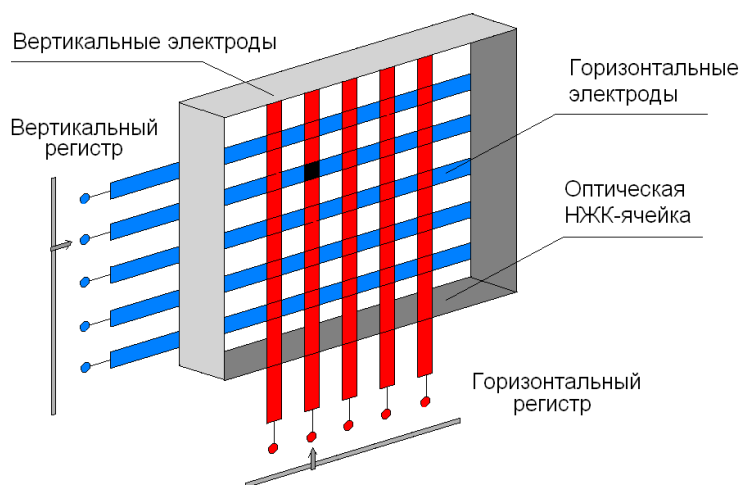


Рисунок 7 – Принцип работы оптического транспаранта на жидких кристаллах, управляемый электрическим полем

Подавая на эти элементы в соответствии с алгоритмом работы устройства напряжения выше порога Фредерикса, можно ЖК призмой изменять направление распространения светового луча; активируя ЖК линзу, включать-выключать фокусировку; оптической ячейкой осуществлять модуляцию света цифровым сигналом. Однако ввиду оптических потерь в ЖК элементы применяют в волноводных линиях.

**5. Оптоэлектронные транспаранты.** Для современных систем обработки информации большое значение имеют оптоэлектронные транспаранты, управляемые полем или светом. Транспаранты представляют собой пространственные модуляторы или, точнее, пространственные световые ключи, управляющие по заданному временному закону одним или несколькими параметрами светового потока. Жидкие кристаллы являются удобными рабочими веществами для транспарантов ввиду малых управляющего напряжения и потребляемой мощности, хорошего контраста и возможности изготовления транспарантов любых размеров.

Так, ЖК транспарант, управляемый электрическим полем, представляет матрицу, составленную из большого числа независимых оптических ячеек. На матрицу нанесены прозрачные металлические электроды в виде полосок, направленных взаимно перпендикулярно на противоположных опорных стеклах (см. рис. 7). При подаче напряжения на определенную комбинацию вертикальных и горизонтальных полосок выбранные пересечением электродов ячейки изменяют свои оптические свойства (на рисунке переход Фредерикса происходит в ячейке с координатами (2, 4). Если транспарант работает на просвет, то обе опорные поверхности делают прозрачными. Если же транспарант работает на отражение, то одна опорная поверхность делается зеркальной.

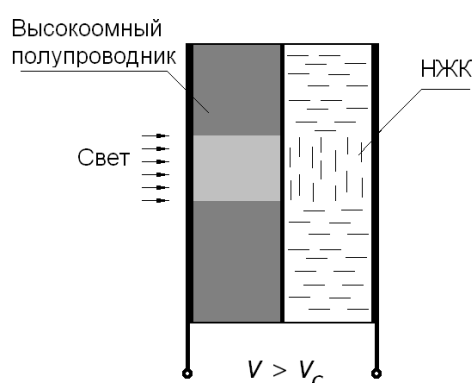


Рисунок 8 – Принцип работы оптического транспаранта на жидких кристаллах, управляемый светом

Транспаранты, управляемые светом, отличаются от описанных выше тем, что в них ЖК ячейка включается последовательно с высокоомным фоторезистором (рис.8). Прикладываемое к транспаранту постоянное напряжение берется выше напряжения Фредерикса. В отсут-



ствии освещения из-за большого падения напряжения на фоторезисторе напряжение на оптической ячейке недостаточно для структурных изменений в ней. Освещение фотослоя повышает его проводимость в местах освещения, и тогда в освещенных точках транспаранта приложенное напряжение перераспределяется в пользу ЖК слоя. Это вызывает переход Фредерикса и изменение структуры ЖК, что обнаруживается в проходящем или отраженном свете. Таким образом, изображение на ЖК транспаранте повторяет световую картинку, спроецированную на его заднюю стенку. Если проецируемое на транспарант изображение инфракрасное, то такой транспарант делает его видимым.

### 3. РАСЧЕТНАЯ ЧАСТЬ

#### 3.1. Задание к лабораторной работе

3.1.1. Составьте схему расчета фазовых скоростей и векторов поляризации плоской электромагнитной волны, распространяющейся в плоскости  $X_2O X_3$  кристалла с симметрией  $3m$ . Вектор нормали к волновому фронту составляет угол  $\theta$  с осью симметрии  $3$  (ось  $X_3$ ).

3.1.2. Составьте программу расчета зависимостей фазовых скоростей обыкновенной и необыкновенной электромагнитных волн в кристалле симметрии  $3m$  от значения угла. Угол  $\theta$  изменяется от  $0$  до  $\pi$  с шагом  $0.1$  радиана. Наличием пьезоэффекта в кристалле пренебречь. Численные значения параметров кристалла ниобата лития и вид тензора диэлектрической проницаемости в кристаллофизической системе координат взять в виде (в Ф/м):

$$\vartheta_{11} = \vartheta_{22} = 3.89 \cdot 10^{-10}, \quad \vartheta_{33} = 2.57 \cdot 10^{-10}.$$

3.1.3. Построить зависимости ориентации векторов поляризации обыкновенной и необыкновенной электромагнитных волн в кристалле симметрии  $3m$  от значения угла  $\theta$ . Модули векторов считать равными единице.

3.1.4. Объяснить ход зависимостей фазовых скоростей и ориентации векторов поляризации, используя представления о симметрийности физических свойств в кристаллах, а также об оптической индикатрисе кристалла.

3.1.5. Составьте отчет о проделанной работе.

#### 3.2. Схема расчета фазовых скоростей и векторов поляризаций

3.2.1. Задача определения величины набега фазы световой волны после прохождения ею через оптически одноосного кристалла решается введением новой координатной системы, в которой направление распространения волны выбирается в качестве оси  $x'_3$  новой системы.

На рис.5 показана исходная система координат  $x_1, x_2, x_3$  в стандартной установке

кристаллофизической системы координат в кристаллах средней категории, а также новая система координат  $x'_1, x'_2, x'_3$ , полученная путём поворота исходной системы координат

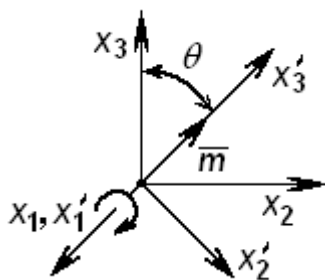


Рисунок 9 – Ориентация осей системы координат, связанной с направлением распространения излучения, относительно кристаллофизической системы в кристаллах средней категории

вокруг оси  $x_1$  на угол  $\theta$ . Матрица преобразования системы координат строится путем проецирования векторов новой системы координат на оси старой системы. В ее первой строке записываются косинусы углов оси  $x'_1$  на оси  $x_1, x_2, x_3$ , во второй и третьей – для осей  $x'_2$  и  $x'_3$  соответственно. В этом случае матрица преобразования будет:

$$\|C_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}.$$

3.2.2. Тензор диэлектрической непроницаемости в кристаллофизической системе координат в общем случае надо вычислять как матрицу, обратную заданной матрице диэлектрических проницаемостей. Однако, ввиду того, что исходная матрица диагональна, компоненты тензора диэлектрической непроницаемости находят из выражения:

$$\eta_{ij} = \frac{\mathcal{G}_0}{\mathcal{G}_{ij}}.$$

3.2.3. Для перевода тензора диэлектрической непроницаемости в новую (связанную с распространением оптического излучения) систему координат, используют выражение:

$$\eta'_{ik} = C_{ij} C_{kl} \eta_{jl},$$

где индексы  $i, j, k, l$  меняются от 1 до 3. Если учесть, что тензор  $\overset{\wedge}{\eta}$  имеет диагональный

вид, то, например, для случая  $i = k = 1$   $\eta'_{11}$  будет рассчитываться по формуле

$$\eta'_{11} = C_{11}^2 \eta_{11} + C_{12}^2 \eta_{22} + C_{13}^2 \eta_{33} = C_{11}^2 \eta_{11}.$$

Аналогично вычисляют остальные компоненты тензора диэлектрической непроницаемости. Так как новая система координат связана с направлением распространения оптического излучения, то в решении задачи будет участвовать только проекция тензора диэлектрической непроницаемости на плоскость волнового фронта. Это означает, что компоненты тензора по оси  $x_3$  участия в вычислениях не принимают, что существенно упрощает задачу.

3.2.4. Вычисленные значения компонент тензора диэлектрической непроницаемости подставляют в выражение (2.9) и рассчитывают значения показателей преломления для обыкновенной и необыкновенной волн для различных значений угла вхождения электромагнитной волны в кристалл, вычисляют их фазовые скорости и строят графики зависимости этих скоростей.

3.2.5. Последовательно подставляя найденные численные значения показателей преломления в систему (2.10), находим компоненты векторов поляризации обеих волн.

#### **4. ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА**

1. Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие разделы:

- цель лабораторной работы,
- теоретическая часть,
- описание расчетной части лабораторной работы,
- конкретные данные на выполнение лабораторной работы,
- полученные расчетные результаты в виде графиков зависимостей фазовых скоростей волн и их векторов поляризаций,
- объяснение полученных результатов на основе симметрии кристалла.

2. Отчет должен быть набран в редакторе Word и представлен в скрепленном виде. Схемы и графики выполнены в графическом редакторе и вставлены в текст отчета. Рекомендуемые параметры для набора текста: шрифт Arial – 12, поля со всех сторон по 2 см, одиночный интервал между строк.

3. В случае выполнения работы несколькими студентами в конце отчета должно быть указано конкретное участие каждого в выполнении работы.

4. В соответствии с рейтинговой системой качество выполнения лабораторной работы и оформления отчета оценивается в баллах, которые суммируются с баллами по контрольным работам.

## 5. ЛИТЕРАТУРА

1. Элементы электронной техники. Часть 2 «Физические свойства кристаллов»: Учебное пособие для студентов, обучающихся по очной форме направления подготовки 210100.62 / Давыдов В. Н. - 2013. 94 с.: Научно-образовательный портал ТУ-СУР, <https://edu.tusur.ru/publications/3719>
2. Учебное пособие «Материалы электронной техники»: Для направления подготовки 210100.62 «Электроника и нанoeлектроника». Профиль: «Промышленная электроника» / Легостаев Н. С. - 2014. 239 с.: Научно-образовательный портал ТУ-СУР, <https://edu.tusur.ru/publications/4291>
3. Сорокин, В.С. Материалы и элементы электронной техники. Проводники, полупроводники, диэлектрики [Электронный ресурс] : учебник / В.С. Сорокин, Б.Л. Антипов, Н.П. Лазарева. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 448 с. : В другом месте, <https://e.lanbook.com/book/67462>
4. Сорокин, В.С. Материалы и элементы электронной техники. Активные диэлектрики, магнитные материалы, элементы электронной техники [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.С. Сорокин, Б.Л. Антипов, Н.П. Лазарева. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 384 с. : В другом месте, <https://e.lanbook.com/book/71735>